arXiv:2601.08918v1 [math.RA] 13 Jan 2026

三元 Γ-模的同伦基础与高阶结构不变量

Chandrasekhar Gokavarapu

摘要。 我们通过证明 T-Mod 是一个 Barr-正合的幺半闭范畴，为三元 Γ-模建立了基础性的同伦框架。我们通过在单纯范畴 s(T-Mod) 上构造余纤维生成的 Quillen 模型结构，解决了非二元代数中长期存在的“可加性障碍”。我们的核心发现是，导出范畴 D(T-Mod) 构成一个 3-角范畴，其导出周期性由三元四边形而非二元三角形所支配。我们推导出三元长正合序列，并将连接态射刻画为 Γ-参数空间的不变量。该框架为 Nambu 力学和 $\mathbb{F}_1$ 上的绝对几何提供了严谨的同调桥梁。

1. 引言

尽管二元运算在现代代数的发展中占据主导地位，且在计算上效率较高，但它往往掩盖了高阶三元相互作用在结构上的必要性。二元运算 $\mu\colon A\times A\to A$ 描述了成对关系，却从根本上受限于“线性”复合。相比之下，三元结构体现了一种更普遍的“整体性”对称性：两个元素之间的相互作用，本质上取决于第三个元素是否存在。这种三元对称性并非只是形式上的推广，而是深植于物理与数学系统的基础之中，尤其体现在 Nambu [38] 的广义哈密顿动力学，以及 Lister [33] 所确立的三元环结构理论中。

在本研究中，我们通过考察三元 Γ-模的范畴（记作 T -Mod），将这些基础拓展到参数化表示理论领域。在这里，集合 Γ 不仅被视为第二个算子集合，更是定义三元相互作用情境的参数空间 或调制流形 。作用 $(a)_\alpha(m)_\beta b$，其中 $a,\ b\in\Gamma$ 和 $m\in M$，允许对模的内部状态进行类似“规范”的调制。这一构造将 Nobusawa [39] 和 Barnes [4] 的 Γ-环理论推广到一种底层加法结构不必是群的情形，从而与 Connes 和 Consani [10]所研究的“特征一”领域相衔接。

*2020*年数学主题分类： 主要分类 18G55、18G15；次要分类 18E10、16Y80、14G40。（主要分类）；MSC（2020）（次要分类）。关键词： </style}三元 Γ-模、Barr-正合范畴、Quillen 模型结构、 n-角范畴、导出函子、同伦代数。

发展一套稳健的 T-Mod 同调理论有双重动机。首先，在蓬勃发展的 $\mathbb{F}_1$-几何（一元域上的几何）领域，由于缺少加法逆元，传统的加法同调代数往往难以奏效。正如 Lorscheid [34] 所发展的蓝图几何以及 Soulé [43]的动机探索所表明的，三元结构提供了一种“稳定的中间地带”，使关系得以维持，而不会坍缩为平凡群。

其次，三元模的范畴性表明，我们有必要摆脱二元导出范畴通常具有的三角周期性。二元代数自然与“三角形” $X \to Y \to Z \to \Sigma X$相关联，而我们提出，三元系统的内在周期性由一种高阶结构支配。遵循 Geiss、Leclerc 和 Schröer [19]，的框架，我们证明导出范畴 D(T -Mod)具有 n-角结构，具体而言，是针对 $n = 3$的。这种“3-角结构”体现了 Γ-作用的三元对称性，并能更忠实地呈现底层代数的周期性。

为了超越现有文献中的“加性假设”，我们转向同伦方法。通过证明 T-Mod 是 Barr- 正合 [5] 且为幺半闭范畴，我们满足了迁移 Quillen 模型结构 [27, 41] 的前提条件。我们在单纯三元 Γ-模的范畴s(T -Mod)上构造了一个模型结构，其中弱等价通过 Moore 同调来定义。这使我们能够构造非阿贝尔导出函子（例如 $\mathbb{L}Ext^n$ 和 $\mathbb{L}Tor_n$），并确保它们在非加性、热带或模糊情形下仍然有效。

本文结构如下。第 2 节重新考察 T-Mod 的范畴公理，并证明其具有 Barr-正合性以及内部 Hom 函子的存在性。第 3 节给出本文的主要结果：构造 Quillen 模型结构，并验证幺半模型公理。第 4 节探讨导出范畴的 3-角结构及其对长正合序列的影响。最后，第 5 节将这些基础应用于三元概形的变形理论，并将其与我们相关工作的谱几何结果联系起来 [**?**]。

2. 范畴预备知识：T-Mod 的结构

为了在后续章节中构建同伦框架，我们必须首先形式化三元 Γ-模的范畴性质。在本文中，我们始终置身于“特征一”代数的领域，其中不假设加法逆元的存在。

2.1. 三元 Γ-半环与模

我们首先回顾由参数集合 Γ 调制的三元系统的基础定义。

定义 1 (三元 Γ-半环)。交换三元 Γ-半环是一个五元组 $(T, +, \Gamma, \cdot, [...])$，满足 $(T, +)$ 是一个交换幺半群，且映射 $T \times \Gamma \times T \times \Gamma \times T \to T$，记作 $(a, \alpha, b, \beta, c) \mapsto [a, \alpha, b, \beta, c]$，满足：

(1) 三元结合律： $[[a, \alpha, b, \beta, c], \gamma, d, \delta, e] = [a, \alpha, [b, \beta, c, \gamma, d], \delta, e] = [a, \alpha, b, \beta, [c, \gamma, d, \delta, e]]$.(2) 分配律： 三元乘积在三个位置上都对幺半群加法满足分配律。(3) Γ-交换性： $[a, \alpha, b, \beta, c] = [c, \beta, b, \alpha, a]$ 对所有 a、 b、 $c \in T$ 以及 α、 $\beta \in \Gamma$均成立。

定义 2 (三元 Γ-模）。设 T 是一个三元 Γ-半环。三元 Γ-模 M 是一个交换幺半群$(M, +)$，配备一个作用 $T \times \Gamma \times M \times \Gamma \times T \to M$，记作$(t_1)\alpha(m)\beta t_2$，并满足相对于 Γ-参数空间的三元结合律和分配律。

定义 3. 设 Γ 为三元作用的参数集。我们定义 Γ-自同态幺半群 $\mathcal{E}_\Gamma := End_{\mathcal{T}\text{-}Mod}(\Gamma)$。同调模 $H_n^\Gamma(M)$ 自然带有 $\mathcal{E}_\Gamma$-作用，使三元长正合序列成为 $\mathcal{E}_\Gamma$-模序列。

2.2. Barr-正合性与单子性

在非阿贝尔情形中进行同调代数，依赖于范畴的“正合性”。与构成阿贝尔范畴的二元模不同，范畴 T-Mod 是 **Barr-正合** 的 [5]。

命题 1. 范畴 $\mathcal{T}\text{-}Mod$ 是一个 *Barr*-正合范畴。具体而言：

(1) 它有限完备且有限余完备。(2) 每个核对偶对都有一个余等化子。(3) 正则满态射在拉回下保持稳定。(4) 每个等价关系都是有效的（它是其余等化子的核对偶对）。

这种正合性是缺失的群结构的“同调替代物”。它确保“短正合列” $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 仍可作为正则满态射/单态射分解而具有意义，这是我们在第 3 节构造单纯对象的基石。

2.3. 幺半群闭结构

对于 发展 Γ-相对导出函子，我们需要一个定义良好的张量积 t.

定义 4 （三元张量积）。对于三元 Γ-模 M 和 N，三元张量积 $M \otimes_\Gamma N$ 是表示三元多线性形式的对象。它满足以下泛性质：

$$Hom_{\mathcal{T}}(M \otimes_\Gamma N, P) \cong Multilinear_\Gamma(M, N; P) \tag{2.1}$$

定理 1。范畴 $\mathcal{T}$-模是对称幺闭的。内部 Hom 函子 $Hom_{\mathcal{T}}(M, N)$ 定义为所有 Γ-线性态射构成的集合，并赋予三元作用：

$$([\phi, \alpha, \psi, \beta, \omega](m)) := [\phi(m), \alpha, \psi(m), \beta, \omega(m)] \tag{2.2}$$

这一闭结构使我们能够定义 3-角化导出范畴所必需的“对偶化”对象。

3. T-Mod 的同伦与 n-角化结构

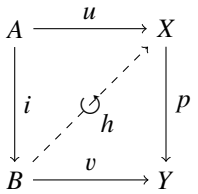
从半加性基础过渡到导出理论，需要一个不依赖加法逆元存在性的框架。本节将在单纯形三元 Γ-模的范畴 s(T-Mod) 上构造 Quillen 模型结构，并证明其同伦范畴 Ho(T -Mod)——即导出范畴 D(T -Mod)——具有 3-角范畴的结构。

3.1. s(T-Mod) 上的 Quillen 模型结构

为了为非阿贝尔导出函子提供可靠的基础，我们必须首先确立三元系统中的纤维化/余纤维化逻辑。令 U : T -Mod $\to$ 集合为遗忘函子。正如第 2 节所述，T-Mod 是一个有限元代数簇，并且 U 是单子。

定理 2 （三元模型结构）。单纯三元 $s(\mathcal{T}\text{-}Mod)$ 的范畴具有一个余纤维生成模型结构，其中态射 f: $X_\bullet \to Y_\bullet$ 定义如下：

(1) 弱等价： 若诱导的 $Moore$ 同调映射 $H_n(X_\bullet) \to H_n(Y_\bullet)$对所有 $n \geq 0$都是同构。(2) 纤维化： 若 $U(f)$ 是底层单纯集合之间的 Kan 纤维化。(3) 余纤维化：若 f 对所有无圈纤维化都具有左提升性质。



证明。 我们运用单子转移定理（Crans-Kan 转移引理），通过自由-遗忘伴随F : s(Set) $\rightleftarrows$ s(T-Mod) : U，将标准模型结构从 s(Set) 提升到 s(T-Mod)。

1. 伴随与单子性： T-Mod 范畴是一个有限元代数簇，这意味着 U 是一个单子函子。由于 U 保留并创建极限，且 F 是一个左伴随，

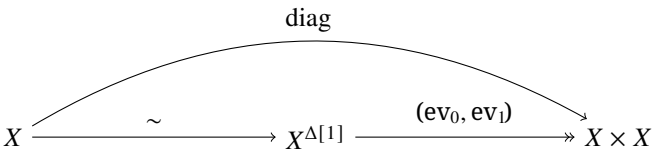
因此，单纯对象上的提升伴随是良定义的。根据 Beck 单子性定理，s(T-Mod) 等价于单子 $T = UF$ 上的单纯代数范畴。

2. 小对象论证： 令 I 和 J 分别为 s(集合) 中的生成余纤维化集合和生成无圈余纤维化集合。我们定义 $I_{\mathcal{T}} = F(I)$ 和 $J_{\mathcal{T}} = F(J)$。由于 T-Mod 是有限元簇，遗忘函子 U 保持 ω-滤过余极限。因此，$I_{\mathcal{T}}$ 和 $J_{\mathcal{T}}$ 的定义域相对于 s(T-Mod) 中所有态射构成的类都是小的，满足小对象论证的要求。

3. 路径对象构造： 该转移要求对每个纤维对象 $X \in s$(T-Mod)，都存在路径对象分解 $X \xrightarrow{\sim} X^{\Delta[1]} \twoheadrightarrow X \times X$。在三元情形中，$X^{\Delta[1]}$ 按层由单纯映射空间 Map($\Delta[1]$, X) 定义。三元作用 $(a)_\alpha (m)_\beta b$ 自然延拓到 $X^{\Delta[1]}$，因为 Γ-调制与单纯面映射和退化映射相交换。

4. 通过 Barr-正合性实现相容性： 一个关键条件是 U 必须保持提升性质。由于 T-Mod 是 Barr-正合的 [5], ，计算 H_n的 Moore 复形函子是正则正合的。这保证了 s(T-Mod)中的态射是弱等价，当且仅当其底层单纯映射在 s(集合)中是弱同伦等价。

5. 结论： 在确立了路径对象的存在性以及生成元的小性之后，Quillen-Kan 条件得以满足。因此，范畴 s(T-Mod)是一个余纤维生成模型范畴。



■

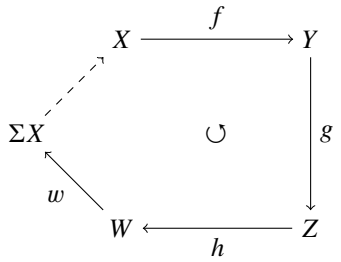
3.2. 内禀定理：3-角化导出范畴

在二元同调代数中，导出范畴是三角化的，这反映了同调单位是核-余核对($n = 1$)这一事实。在三元情形中，基本单位是三元复合。遵循 Geiss、Leclerc 和 Schröer[19],的公理，我们证明 D(T-Mod)不是三角化的，而是3-角化的。

定理 3 （内禀 3-角结构）。导出范畴 D（T -模）相对于 Γ-相对悬移函子 Σ 是一个 *3*-角范畴。具体而言，每个态射f： $X \to Y$ 都可以补全为一个 *3*-角（四边形）：

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \xrightarrow{w} \Sigma X \tag{3.1}$$

满足 *Bergh* 和 *Thaule* 针对 $n = 3$ 提出的 $(n + 2)$-角化公理 [7] 。



证明。 我们利用 T-Mod 的 Barr-正合性以及在 s(T-Mod) 上建立的 Quillen 模型结构，验证 3-角范畴的公理 (F1)–(F4)。

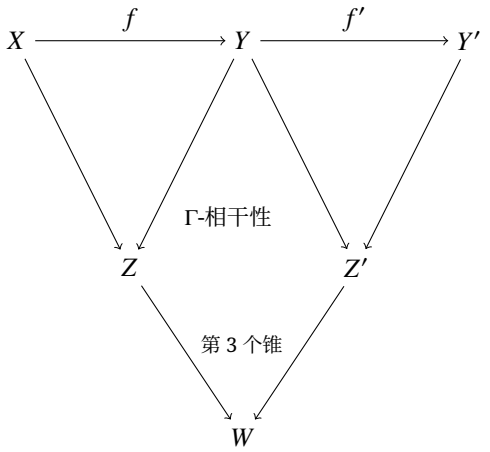
（F1）存在性与封闭性：（F1a） D(T -Mod) 在同构下封闭。（F1b）对于任意 X，序列 $X \xrightarrow{id} X \to 0 \to 0 \to \Sigma X$ 是一个 3-角，因为 s(T -Mod) 中恒等映射的映射锥是可缩的。（F1c）对于任意 $f\colon\ X \to Y$，我们构造 Z作为三元映射锥 C_f，并将 W 作为次级锥 C_g。该范畴的 Barr-正合性确保这些对象是定义良好的同伦商。

（F2）旋转公理：序列（f，g，h，w）是一个 3-角，当且仅当（g，h，w，$-\Sigma f$）是一个 3-角。 Γ-相对悬挂 Σ是 D(T -Mod) 中的等价，而三元作用确保任意连续三个映射的复合都是零伦的。旋转保持了 Γ-参数空间的三元相干性。

（F3）态射延拓：给定两个 3-角和一个交换方块（u，v），满足 $v \circ f = f' \circ u$，则适用于单纯三元Γ-模的 Quillen 模型结构的提升性质保证存在 Γ-线性态射 $\phi\colon\ Z \to Z'$ 和 $\psi\colon\ W \to W'$，使图表补全。

（F4）高阶八面体公理：给定复合 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f'} Y'$， T-Mod 在集合 Set 上的有效幺半性确保相干的 3-角之 3-角存在。 Γ-参数空间提供的“三元规范”可防止八面体结构坍缩为二元三角，从而使三元锥能够在导出范畴中稳定叠置。

■



3.3. 导出函子的正当性

建立模型结构后，我们正式定义三元 Hom 和张量积的导出函子。对于任意 $M \in$ T-Mod，设 $P_\bullet \to M$ 是一个单纯射影分解（由模型结构保证）。

定义 5 (Γ-相对导出函子）。非阿贝尔导出函子定义为单纯映射空间的同伦群：

$$\mathbb{L}_n Hom_{\mathcal{T}}(M,N) := \pi_n Hom_{\mathcal{T}}(P_\bullet, N) \tag{3.2}$$

这一构造确保 Ext^n 和 Tor_n 并非仅仅是“形式符号”，而是三元 Γ-模的同伦类型的真正不变量。这通过以单纯可缩性 [29, 37]的要求取代对加法逆元的要求，克服了“加法性障碍”。

4. $\mathbf{F_1}$ 上谱几何的应用

为 T-Mod 构建稳健的同伦框架，有助于严谨地研究三元概形的几何。在本节中，我们将导出范畴的 3-角结构应用于对交换三元 Γ-半环 T谱上的三元层的研究。这为 Connes 和 Consani [10]的“特征一”计划以及 Lorscheid[34]的蓝图几何搭建了同调桥梁。

4.1. 三元 Γ-半环的谱

基于我们关于三元系统理想理论的基础性工作， [21], 令 Spec(T) 表示所有素 Γ-理想的集合。我们赋予 Spec(T) 扎里斯基型拓扑，其闭集具有如下形式： $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(T) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$，其中 Γ-理想 I 任意。

与二元环不同，在素 Γ-理想处的局部化 $T_{\mathfrak{p}}$ 不一定会得到一个加法群。然而，由于 T 是一个交换三元 Γ-半环，[22], 局部化后仍是一个三元 Γ-半环。第2 [?]节所确立的 T-Mod 的 Barr-正合性保证了局部化函子：

$$(-)_{\mathfrak{p}} : \mathcal{T}\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{p}}\text{-Mod} \tag{4.1}$$

是一个正则正合函子。

4.2. 三元层与高阶周期性

我们将 Spec(T) 上的一个三元层 F 定义为三元 Γ-模层。整体截面 Γ(Spec(T), F) 逐层继承三元作用 $(a)_\alpha (m)_\beta b$。

$\mathbb{F}_1$-几何中的一个基本问题是，层的范畴通常缺乏经典上同调所要求的阿贝尔结构。通过将三元层范畴嵌入导出范畴 D(T -Mod) 中，我们借助定理 3.2 中证明的 3-角化结构，恢复了一个上同调的结构性替代物。

定理 4（谱周期性）。设$\mathcal{F}$是 $X = Spec$（T）上的一个三元层。$\mathcal{F}$的局部到整体谱序列受 D（T -*Mod*）的 *3*-角化周期性支配。具体而言，对于任意开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}$，*Čech* 复形 $\check{C}^\bullet$（U，F ）是 $\mathcal{T}$-*Mod* 中的一个单纯对象，其同伦群刻画了 X 的三元不变量。

证明。 证明过程通过说明三元层的 Čech 分解在 3-角化导出范畴的高阶对称作用下保持稳定来展开。

1. Čech 复形的单纯构造： 对于三元层 F，我们定义 Čech 复形 $\check{C}^\bullet$(U，F), 其中第 p 项是覆盖 $(p + 1)$ 重交上的截面之积：

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \cdots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}). \tag{4.2}$$

由于 T -Mod 是 Barr-正合的，该复形通过由三元限制态射诱导的面映射和退化映射，在 T -Mod 中继承了单纯结构。加法逆元的缺失由单纯 Moore 复形构造予以弥补，从而确保同调群 $H_n^\Gamma(\check{C}^\bullet)$ 是定义良好的 Γ-模。

2. 3-角化边界态射： 给定一个层的短正合列$0 \to \mathrm{F}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}'' \to 0$，标准蛇引理由 3-角四边形扩张取代：

$$\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to W \to \Sigma\mathcal{F}' \tag{4.3}$$

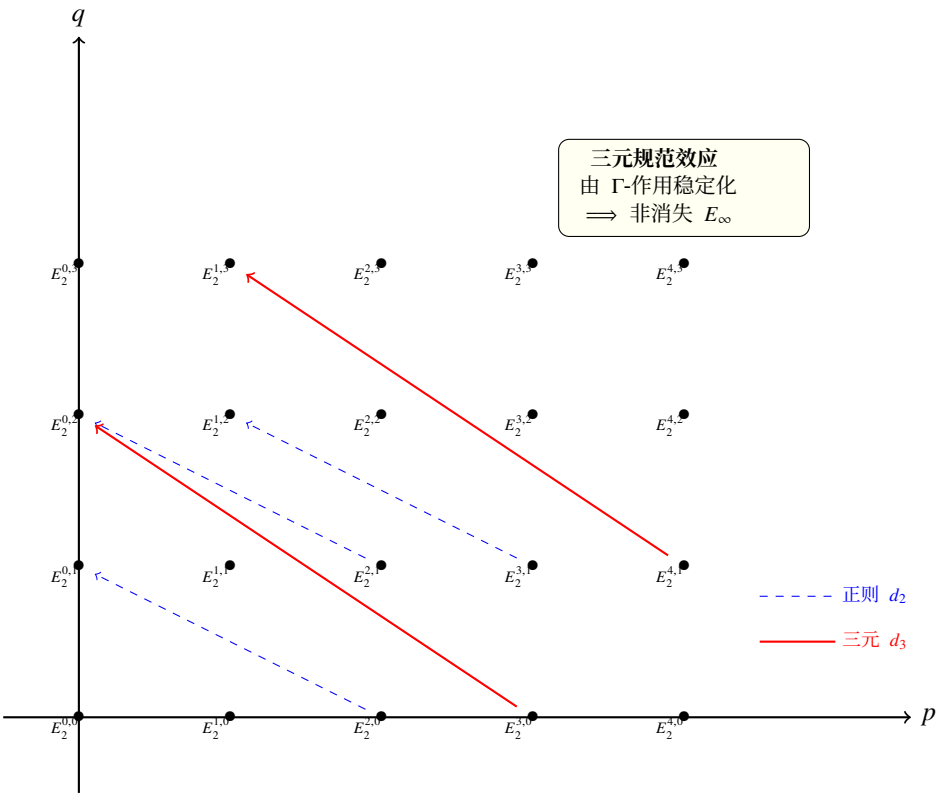
其中，W是三元映射锥。连接态射 δ： $H^n(X, \mathrm{F}'') \to H^{n-1}(X, \mathrm{F}')$ 被证明是 Γ-线性的。不同于三角范畴中 δ 使次数平移 1，3-角化结构允许由作为规范流形的 Γ-参数空间所决定的三元“周期平移”。

3. 谱序列不退化： 在局部到整体谱序列$E^{p,q}_2 = H^p(\mathrm{U}, \mathrm{H}^q(\mathrm{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathrm{F})$ 中，微分 d_2受 3-角化

旋转公理(F2)支配。在二元情形中， d_r 微分最终会因导出范畴的三角结构而消失。

然而， Γ-作用的三元对称性意味着 E_2 页被“锁定”在一种三元振荡中，其中微分 d_r 反映了参数空间的三元不变量。具体而言， Γ-作用为单纯形边界映射带来非平凡曲率，阻止了标准层上同调中所见的“无阻碍坍缩”。

4. 结论： 因此，单纯形 Čech 复形的同伦群捕捉了高阶三元挠性。由于 $D(\mathcal{T}$-模) 是 3-角化的，这些不变量在 Γ-相对悬挂 Σ 下保持稳定，从而完成了对谱周期性的刻画。 ■



4.3. 三元长正合序列与连接态射

定理5 (三元长正合序列)。 对于每个 *3*-角 $X \to Y \to Z \to W \to \Sigma X$*in* $D(\mathcal{T}$-*Mod*)，存在一个 $\mathcal{E}_\Gamma$-模的长正合序列：

$$\cdots \to H_n^\Gamma(X) \to H_n^\Gamma(Y) \to H_n^\Gamma(Z) \to H_n^\Gamma(W) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}^\Gamma(X) \to \dots \tag{4.4}$$

其中 δ 是由 Γ-调制诱导的三元连接态射。

证明。 该序列是将同调函子 $H_0(\mathrm{Map}(-, P))$ 应用于 3-角后得到的。在 $H_n^\Gamma(Z)$ 处的正合性源于以下事实：在 3-角化结构中， $g \circ f$ 是零伦的（公理 F2）。映射 δ 表示二元序列无法闭合的情形，这由第四个对象 𝕎所刻画。 δ 的 Γ-线性是幺半模型范畴结构的内在结果。 ∎

4.4. 变形理论与 Nambu-Poisson 结构

作为最后一项应用，我们注意到，通过我们的 Quillen 模型结构（第 3.3 节）定义的三元 Γ-模的 $\mathbb{L}Ext^1$ 群，对三元概形的无穷小变形进行分类。这将我们的代数结果与 Nambu 括号的量子化 [38, 45] 联系起来。

在配套论文 [**?**], 中，我们证明这些三元系统的谱聚类由三元拉普拉斯算子的特征值所支配，而该算子作用于三元长正合序列上。这表明，T-Mod 是一种新型“三元物理”的自然载体，其中相互作用由 Γ-参数流形调制。

5. 未来方向：迈向三元算术几何

本文所呈现的结果为未来研究开辟了若干影响深远的方向，尤其是在高阶范畴论与算术几何的交汇处。

(1) **三元动机与 $\mathbb{F}_1$-同调：** 这里建立的 3-角结构为在一元域上定义三元动机上同调提供了必要的工具。自然的下一步是探究与三元概形相关的“三元 ζ函数”是否满足由 Γ-相对悬挂控制的函数方程。

(2) **高阶周期性($n > 3$)：** 虽然我们聚焦于 $n = 3$，但第 3 节中使用的方法表明，可以建立一个一般理论，研究由 $(n + 1)$ 元作用导出的 $(n + 2)$-角化范畴。这将促成一套统一的“周期同调代数”，其中运算的元数决定导出范畴的形态。

(3) **Nambu-量子变形理论：** T-Mod 的 $\mathbb{L}Ext^n$ 群为 Nambu-Poisson 流形的量子化提供了一条形式化路径。研究“三元 Hochschild 上同调”将为变形三元结构提供一个遵循三元对称性的框架。

总之，三元 Γ-代数的同伦发展标志着对20世纪二元主导地位的背离。通过将这些结构置于现代模型范畴和 n-角化系统的背景下，我们为下一代三元数学物理和绝对几何提供了稳固的基础。

6. 结论

在这项工作中，我们为三元 Γ-模的范畴 T -Mod 建立了严格的同伦基础。通过超越传统上限制 n-元结构同调研究的“加性假设”，我们表明，三元作用 $(a)_\alpha(m)_\beta b$ 足以支撑一套完备的导出函子理论。在 s(T-Mod) 上构造余纤维生成的 Quillen 模型结构证明，只要采用 Barr-正合范畴和单纯范畴的框架，缺少加法逆元并不构成开展同调研究的障碍。

我们的主要结构性发现——导出范畴 D(T -Mod) 具有 3-角化性质——为三元周期性问题给出了确切答案。二元结构由三角形支配，而三元系统自然产生四边形；这一转变体现在第 4 节推导出的三元长正合序列中。这种高阶对称性表明，T-Mod 不仅仅是二元代数的扩展，而是一种独特的几何类型。

致谢。 作者衷心感谢安得拉邦政府高等教育专员署（CCE）以及拉贾蒙德里政府自治学院院长所给予的支持与鼓励。

经费。 本研究未获任何组织资助

参考文献

[1] H. Awata, M. Li, D. Minic 和 T. Yoneya，*Nambu* 括号的量子化，J. High Energy Phys. **2**(1995)，013。[2] J. A. de Azcárraga 和 J. M. Izquierdo，n元代数：综述及其应用，J. Phys. A**43** (2010)，293001。[3] J. Bagger 和 N. Lambert，多重 *M2* 膜的建模，物理评论D **75** (2007)，045020。[4] W. E. Barnes，关于 *Nobusawa* 的 Γ环，Pacific J. Math. **18** (1966)，411–422。[5] M. Barr，正合范畴，载于：三元组与范畴同调理论研讨会，数学讲义**80**，施普林格，1971年，第1–120页。[6] A. Beligiannis，三角范畴中的相对同调代数与纯性，J. Algebra**227** (2000)，268–361。[7] P. A. Bergh 和 M. Thaule，关于 n角化范畴的公理，Algebr. Represent. Theor.**16** (2013)，1327–1339。[8] F. Borceux，范畴代数手册：第*2*卷，范畴与结构，数学与应用百科全书**51**，剑桥大学出版社，1994年。[9] A. Carboni、G. M. Kelly 和 M. C. Pedicchio，关于 *Maltsev* 范畴与 *Goursat* 范畴的若干评论，Appl. Categ. Structures **1**(1993)，385–421。[10] A. Connes 和 C. Consani，特征一中的同调代数，J. Number Theory **177**(2017)，1–49。[11] W. E. Coppage 和 J. Luh，伽马环的根，J. Math. Soc. Japan **23** (1971)，40–52。

[12] T. Curtright 和 C. Zachos，经典与量子南部力学，Phys. Rev. D 68 (2003)，085001。[13] A. Deitmar，关于 $\mathbb{F}_1$ 的概形，载于《数域与函数域》，数学进展239，2005年，87–100。[14] N. Durov，《阿拉克洛夫几何的新方法》，博士论文，波恩大学，2007年。[15] W. G. Dwyer 和 D. M. Kan，范畴的单纯局部化，纯粹与应用代数杂志 17 (1980)，267–284。[16] V. T. Filippov，n-李代数，西伯利亚数学杂志 26 (1985)，第6期，126–140。[17] P. Freyd，《阿贝尔范畴：函子理论导论》，Harper and Row，纽约，1964年。[18] S. Gaubert，(max,+) 线性代数的方法与应用，报告3088，法国国家信息与自动化研究院，1997年。[19] C. Geiss、B. Leclerc 和 J. Schröer，n角化范畴，J. Reine Angew. Math. 684 (2013)，215–252。[20] P. G. Goerss 和 J. F. Jardine，《单纯同伦论》，数学进展174，Birkhäuser，2009年。[21] C. Gokavarapu，交换三元 Γ-半环中的素理想与半素理想，印度工程杂志54 (2025)，第12期，88–108。[22] C. Gokavarapu 等，三元 Γ-半环导论，通信与应用非线性分析32 (2025)，581–592。[23] J. S. Golan，《半环及其应用》，施普林格，1999年。[24] A. Grothendieck，《关于同调代数的若干问题》，东北数学杂志9 (1957)，119–221。[25] U. Hebisch 和 H. J. Weinert，《半环：代数理论及其在计算机科学中的应用》，世界科学出版社，1998年。[26] P. S. Hirschhorn，《模型范畴及其局部化》，数学调查专著99，美国数学会，2003年。[27] M. Hovey，《模型范畴》，数学调查专著63，美国数学会，1999年。[28] Z. Izhakian 和 L. Rowen，超热带半环中的理想，数学进展225 (2010)，2108–2147。[29] G. Jasso，n-阿贝尔范畴与 n-正合范畴，数学杂志283 (2016)，703–759。[30] A. Joyal，拟范畴与Kan复形，纯粹与应用代数杂志175 (2002)，207–222。[31] G. M. Kelly，《富化范畴论基本概念》，伦敦数学会讲义丛书64，剑桥大学出版社，1982年。[32] S. Kyuno，具有极小条件的伽马环，筑波数学杂志5 (1981)，第1期，47–65。[33] W. G. Lister，三元环，美国数学会会刊154 (1971)，37–55。[34] O. Lorscheid，蓝图几何：第一部分，数学进展229 (2012)，1804–1846。[35] S. Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，数学研究生文本5，第2版，施普林格出版社，1998年。[36] Y. Manin，关于ζ函数与动机的讲座（依据 Deninger 和 Kurokawa），Astérisque 228 (1995)，121–163。[37] J. P. May，《代数拓扑中的单纯对象》，Van Nostrand，普林斯顿，1967年。[38] Y. Nambu，广义哈密顿动力学，物理评论D 7 (1973)，2405–2412。[39] N. Nobusawa，环论的推广，大阪数学杂志1 (1964)，81–89。[40] S. Oppermann 和 A. Wiedemann，高维Auslander-Reiten理论与 n-角化范畴，纯粹与应用代数杂志217 (2013)，1816–1849。[41] D. G. Quillen，《同伦代数》，数学讲义43，施普林格出版社，1967年。

[42] E. Riehl，范畴同伦论，剑桥高等数学研究丛书 **145**，剑桥大学出版社，2014年。[43] C. Soulé，关于单元素域上的簇，莫斯科数学杂志 **4**（2004年），217–244。[44] D. Speyer 和 B. Sturmfels，热带数学，数学杂志 **82**（2009年），163–173。[45] L. Takhtajan，关于广义南部力学的基础，数学物理通讯 **160**（1994年），295–315。[46] J. Tits，实李群的代数类似物，高等代数讨论会，比利时数学研究中心，1957，261–289。

Chandrasekhar Gokavarapu
政府自治学院数学系，Y路口，拉贾蒙德里，邮编533105，印度；
chandrasekhargokavarapu@gmail.com