利用里德堡原子同时无损测量多个极性分子

Jeremy T. Young,[1,*] Kang-Kuen Ni,[2,3,4] 和 Alexey V. Gorshkov[5,1]
[1] *Institute of Physics, University of Amsterdam, 1098 XH Amsterdam, the Netherlands*
[2] *Department of Chemistry and Chemical Biology,Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138, USA*
[3] *Department of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138, USA*
[4] *Harvard-MIT Center for Ultracold Atoms, Cambridge, Massachusetts 02138, USA*
[5] *Joint Quantum Institute and Joint Center for Quantum Information and Computer Science, NIST/University of Maryland, College Park, Maryland 20742 USA*（日期：2026年1月15日）

极性分子的光镊阵列为量子科学和量子信息带来了新的机遇。然而，一个重大挑战，尤其是在双碱金属分子平台中，是目前用于测量内部态的方案具有破坏性。在这项工作中，我们提出一种利用里德堡原子无损测量分子量子比特内部态的方法。我们通过对分子和里德堡原子进行微波缀饰来实现这一点，从而能够调节相互作用，使里德堡-里德堡相互作用极小，并可同时进行多次测量。我们讨论了两个具有实验依据的示例：利用 ^{133}Cs 原子探测^{23}Na^{133}Cs和 ^{87}Rb^{133}Cs。最后，我们讨论了若干种减轻各种串扰来源影响的策略。

arXiv:2601.08921v1 [quant-ph] 13 Jan 2026

过去十年间，中性原子的光镊阵列凭借其可配置性和高保真度量子门，迅速成为领先的量子平台之一 [1–6]。与这些进展并行，这种方法也已应用于极性分子 [7–16]，，为量子计算和模拟开辟了新的可能性 [17, 18]。然而，双碱金属极性分子的光镊阵列面临的一项重要挑战是态检测。与碱金属原子、碱土金属原子和 $^2\Sigma$分子不同，双碱金属分子不具备可用于对分子内部态进行无损测量的循环跃迁。因此，目前的实验通过破坏性过程来测量内部态：根据分子的状态将其转化为一对原子；这一方法既用于光镊阵列 [19, 20]，也用于光学晶格 [21–24]。若要进行额外操作，就必须使用额外的分子，这限制了该平台的可扩展性。

人们提出了多种非破坏性测量双碱金属极性分子的方法，包括利用分子的各向异性极化率进行色散测量 [25]，以及通过与里德堡原子耦合进行测量 [26–29]。将里德堡原子用于测量分子态的一项难题是，强烈的里德堡-里德堡相互作用会阻碍对多个邻近分子的同时测量。在此，我们提出利用微波缀饰的非对称阻塞来克服这一困难 [30]。具体而言，利用多个微波场设计里德堡相互作用，使其彼此相消干涉，从而形成彼此不相互作用的缀饰里德堡态。通过适当调节缀饰参数，分子-

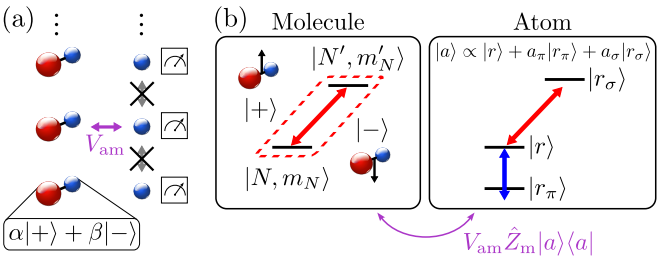

图 1。（a）每个分子（左）都与附近的一个原子（右）配对，两者通过相互作用 V_{am}形成纠缠对。随后，通过测量纠缠原子的内部态，测量分子内部态 $\alpha|+\rangle+\beta|-\rangle$ 。（b）缀饰方案示例。分子经圆偏振场共振缀饰，产生本征态$|\pm\rangle\equiv(|N,m_N\rangle\pm|N',m'_N\rangle)/\sqrt{2}$，其中 N，m_N是分子转动角动量及其 z投影的量子数，且本例中 $m'_N=m_N+1$ 。分子驱动还会耦合原子的里德堡态 $|r\rangle$，$|r_\sigma\rangle$ ；该原子还受到一个额外的线偏振驱动，该驱动耦合 $|r\rangle$和 $|r_\pi\rangle$。通过适当选择驱动场，$|a\rangle$本征态不会与自身相互作用，但会与分子相互作用。

同样可以同时调控里德堡相互作用，使分子—里德堡原子对的内部态发生纠缠，从而能够通过测量原子的内部态来测量分子态，见图。1此外，局域测量能力取决于对原子的局域控制，而非对分子的局域控制。

无损测量。—首先，我们讨论实现无损测量的一般方案，该方案依赖于使原子和分子的内部态发生纠缠。我们从单个分子-原子对的情形开始，此时可以忽略与其他原子或分子的串扰

。我们考虑一个处于电振动基态的双碱金属分子，其哈密顿量为 $\hat{}H_0 = B_0\hat{}\mathbf{N}^2$, 其中 B_0 是转动常数，而$\mathbf{N}$ 是分子转动的角动量算符。我们通过一对转动态 $|N, m_N\rangle$, $|N', m'_N\rangle$ 来编码量子比特，其中 $N' = N \pm 1$由 $\hat{}\mathbf{N}^2(N)$ 及其 z- 投影 $\hat{}\mathbf{N}_z(m_N)$ 定义。具体而言，我们使用这两个态的等权叠加态

$$|\pm\rangle = \frac{|N, m_N\rangle \pm |N', m'_N\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

实际上，测量前会将量子比特存储在另一组非缀饰态中（例如超精细态），随后再将其映射到 $|\pm\rangle$ 以进行测量。当两个转动态之间的跃迁偶极矩 μ_m 不为零时，$|\pm\rangle$态具有有效的永久偶极矩 $\pm\mu_\mathrm{m} \neq 0$ （且彼此之间没有跃迁偶极矩）。

为了检测分子的状态，我们利用具有（有效）永久偶极矩 μ_a的里德伯态 $|a\rangle$与分子之间的偶极相互作用。分子与里德伯原子之间的偶极相互作用形式为

$$\hat{V}_\mathrm{am} = c_\wp \mu_\mathrm{m}\mu_\mathrm{a} \frac{1 - 3\cos^2\theta_\mathrm{am}}{r^3_\mathrm{am}} \hat{Z}_\mathrm{m}|a\rangle\langle a|, \tag{2}$$

其中， r_am 是原子与分子之间的距离，θ_am 是两者连线相对于量子化轴的夹角，我们将量子化轴选为 z轴； Z_m 是在分子 $|\pm\rangle$ 基底下的泡利 Z 算符，它源于永久偶极矩的符号相反。因子 $c_\wp$ 由受驱跃迁的偏振$\wp = \pi$， σ （$c_\pi = 1$， $c_\sigma = -1/2$）决定。从半经典角度看，它可理解为两个偶极平行（π）与两个偶极在 x-y 平面内共同旋转（σ）时的时间平均值。为简便起见，我们假设 $\theta_\mathrm{am} = \pi/2$。

对处于状态$\alpha|+\rangle+\beta|-\rangle$ 的分子进行无损测量，可按以下步骤实现：**(i)** 将原子初始化为 $|g\rangle$，随后施加一个经修改的哈达玛门，将 $|g\rangle \to$ 映射为（$|g\rangle + i|g'\rangle$）$/\sqrt{2}$, 其中 $|g\rangle$、$|g'\rangle$是原子的两个长寿命态（例如基态）。我们将此哈达玛门记为 H_Y，因为它将状态映射到泡利 Y 基。**(ii)** 将 $|g'\rangle$态激发至 $|a\rangle$，之后使原子与分子相互作用$t = |\pi/[2c_\wp\mu_\mathrm{m}\mu_\mathrm{a}]|$的时间，将 $i|\pm\rangle|a\rangle \to \pm|\pm\rangle|a\rangle$映射，从而实现受控 Z 门。**(iii)** 将 $|a\rangle$态退激发至 $|g'\rangle$，并在 $|g\rangle$中施加常规哈达玛门（记为 H_X），$|g'\rangle$，得到最终的纠缠态$\alpha|+\rangle|g\rangle + \beta|-\rangle|g'\rangle$。**(iv)** 测量原子态，从而唯一确定分子的状态。图 2 示意性地描绘了这一过程。另一种方式是对里德伯态的能级位移进行光谱测量，以此测量分子态（例如参见 [31, 32]）。

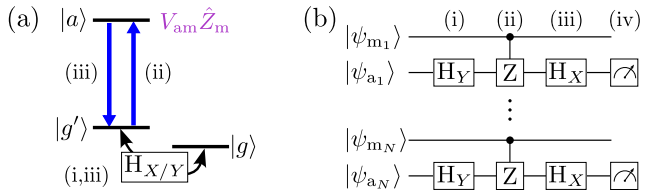

图 2. 无损测量方案示意图。**(a)** 通过原子-分子相互作用 $V_\mathrm{am}\hat{}Z_\mathrm{m}|a\rangle\langle a|$ ，将原子-分子对纠缠起来的原子脉冲序列，其中里德伯态 $|a\rangle$ 和长寿命态 $|g\rangle$，$|g'\rangle$；原子初始化于 $|g\rangle$。**(b)** 通过由哈达玛门 $H_{X/Y}$、由相互作用实现的受控 Z 门 CZ 以及测量组成的脉冲序列，实现的分子（$|\psi_{\mathrm{m}_i}\rangle$）和原子（$|\psi_{\mathrm{a}_i}\rangle$）波函数对的有效量子电路。步骤 **(i)–(iv)** 的更多细节请参见正文。

本文余下部分将重点讨论如何同时制备 $|\pm\rangle$、$|a\rangle$ 态，通过微波缀饰实现式（2）中的相互作用，并最大限度地减少多体串扰。最强的非期望相互作用是里德堡-里德堡相互作用。为减弱这些相互作用的影响，我们利用微波缀饰来设计非对称相互作用 [30]。为进一步减弱已减弱的里德堡-里德堡相互作用以及非期望的分子-里德堡和分子-分子相互作用的影响，我们提出了多种技术，包括一种原则上能够消除所有非期望相互作用的类自旋回波方法。

非对称相互作用。—对于原子，我们设计了一种里德伯态 $|a\rangle$，它与分子存在偶极相互作用，但不与其他原子发生相互作用，从而实现一种多物种非对称相互作用。为此，我们通过微波场将三个里德伯态 $|r\rangle$，$|r_\pi\rangle$，$|r_\sigma\rangle$ 耦合起来，其哈密顿量为

$$\begin{aligned}\hat{H}_\mathrm{mw,a} = {}& \Omega_\pi(|r\rangle\langle r_\pi| + |r_\pi\rangle\langle r|) - \Delta_\pi|r_\pi\rangle\langle r_\pi| \\ & + \Omega_\sigma(|r\rangle\langle r_\sigma| + |r_\sigma\rangle\langle r|) - \Delta_\sigma|r_\sigma\rangle\langle r_\sigma|,\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\Omega_{\pi/\sigma}$ 为拉比频率， $\Delta_{\pi/\sigma}$ 为驱动 π 或 σ 跃迁的失谐量。此外，我们要求两个微波场中的一个与分子的转动态共振耦合（我们用偏振 $\wp = \pi$， σ表示），而另一个场则与任何相关的分子跃迁均失谐

$$\begin{aligned}\hat{H}_\mathrm{mw,m} &= \Omega_\mathrm{m}(|N, m_N\rangle\langle N', m'_N| + |N', m'_N\rangle\langle N, m_N|) \\ &= \Omega_\mathrm{m}(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|),\end{aligned} \tag{4}$$

对应的拉比频率 Ω_m 和本征态$|\pm\rangle$，从而将分子量子比特态实现为微波驱动的本征态，见图1**(b)** 中的 $\wp = \sigma$。根据 Ω_m的不同，核自旋产生的超精细耦合可能会变得重要。对于拉伸态（即 $m_N = N$， $m'_N = N'$ 以及核自旋类似的最大z投影值），需要驱动 $\wp = \sigma$ 跃迁，超精细耦合

它只会使分子态的能量发生偏移，因此我们假设正文中使用的是拉伸态。在补充材料中，我们将讨论适用于其他核态的策略。

我们考虑对分子进行共振驱动，原因有二。首先，这会使分子态的有效永久偶极矩最大化。其次，这确保不存在能够诱导两个分子缀饰态之间跃迁的分子-原子相互作用，即跃迁偶极矩为 $|\pm\rangle \to |\mp\rangle$。根据与分子跃迁共振的驱动，我们固定相应里德堡驱动的失谐

$$\Delta_\wp = \omega_{\rm m} - \omega_\wp, \tag{5}$$

其中，$\omega_{\rm m}$ 是分子态的跃迁频率，$\omega_\wp$ 是相应驱动下里德堡态的跃迁频率。尽管有这一限制，我们仍能确保消除偶极型和范德华（vdW）里德堡-里德堡相互作用。

里德堡态可表示为一般形式

$$|a\rangle \propto |r\rangle + a_\pi |r_\pi\rangle + a_\sigma |r_\sigma\rangle, \tag{6}$$

它与 $|a\rangle$ 中的其他原子发生相互作用，偶极相互作用强度为 [30, 33]

$$V_{\rm aa,dd} \propto |a_\pi|^2 \mu_\pi^2 - |a_\sigma|^2 \mu_\sigma^2/2, \tag{7}$$

跃迁偶极矩为 $\mu_\pi = \langle r_\pi | d_0 | r\rangle$和$\mu_\sigma = \langle r_\sigma | d_{\pm1} | r\rangle$（$d$的下标由所驱动的跃迁决定），其中 $d_p = \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = d\sqrt{4\pi/3} Y_p^1(\theta,\phi)$ $(p = 0, \pm1)$ 是偶极算符 $\mathbf{d}$ 的一个分量，$\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{0} = \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{e}}_{\pm\mathbf{1}} = \mp(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$，而 Y_p^1是球谐函数。关键在于，π和 σ 相互作用的符号相反，这意味着通过仔细选择 a_π, a_σ 的相对大小，可以根据以下约束将这种相互作用调节至 0

$$a_\sigma = \pm\sqrt{2}\mathcal{M} a_\pi, \quad \mathcal{M} \equiv |\mu_\pi/\mu_\sigma|, \tag{8}$$

这里我们假设拉比频率为实数，因此特征向量也为实数（关于复拉比频率的影响，参见补充材料）。此外，我们假设这些相位是均匀的，这是由于场的波长较长。

在驱动的旋转坐标系中，所得的原子—分子偶极相互作用强度为 $V_{\rm am,\ dd} = C_{3,\ \wp}/r_{\rm am}^3$，其色散系数为

$$C_{3,\wp} = \pm|c_\wp|^{1/2} \mu_{\rm m} \mu_\pi \frac{a_\pi}{1 + a_\pi^2(1 + 2\mathcal{M}^2)}, \tag{9}$$

其中 $r_{\rm am}$ 为原子-分子间距，$\wp$ 表示分子驱动偏振的两种选择，而相互作用的符号对于 $|\pm\rangle$态是相反的。请注意，只有与分子和原子的近共振跃迁相关的偶极相互作用才有贡献。在两种情况下，当 ( ) 时，相互作用强度均达到最大值 $C_{3,}$ $\pm|c_\wp|^{1/2}\mu_{\rm m}\mu_\pi/\ 2\sqrt{1+2\mathcal{M}^2}$ $|a_\pi| = 1/\sqrt{1+2\mathcal{M}^2}$ $^{\wp}$ $^{=}$ $^{-1/2}$ ( )。我们将 $a_\pi \equiv \alpha/\sqrt{1+2\mathcal{M}^2}$ or 参数化为 $\beta \equiv \alpha^{-1} - \alpha$，其中采用 β 会使相互作用强度$C_{3,\wp} = \pm|c_\wp|^{1/2}\mu_{\rm m}\mu_\pi/\sqrt{(1+2\mathcal{M}^2)(4+\beta^2)}$ 关于 $\beta \to -\beta$ 对称。两种分子驱动偏振情况下的缀饰完整表达式见补充材料。

范德华相互作用。——尽管里德堡原子之间的偶极相互作用已被消除，但仍可能存在如下形式的强相互作用：

$$\hat{V}_{\rm aa}(r_{\rm aa}) = \left(\frac{C_6}{r_{\rm aa}^6} + \frac{C_9}{r_{\rm aa}^9} + \frac{C_{12}}{r_{\rm aa}^{12}}\right) |aa\rangle\langle aa|, \tag{10}$$

其中 $r_{\rm aa}$ 为原子间距，我们必须将其纳入考虑。除了范德华相互作用（C_6）外，我们还纳入微扰展开中的高阶相互作用（其色散系数为 C_9，C_{12}），以便在将 C_6 调至 0 时加以考虑。

缀饰态可用三个自由实参数进行参数化（每个态的两个系数受到三个正交条件的约束），且对缀饰哈密顿量进行缩放不会改变这些态，因此还存在第四个自由参数（对应于四个缀饰参数）。然而，由于分子驱动对应的失谐是固定的，且必须满足式（7），这两个约束使得只剩下两个自由参数，我们选取 β 和里德堡拉比频率 $\Omega_\wp$。通过调节 β，$\Omega_\wp$，可以像消除偶极相互作用那样，通过不同符号的不同贡献相互抵消来消除范德华相互作用。在这种情况下，调节缀饰的两个自由参数，相当于调节相关的跃迁偶极矩（由缀饰基决定）以及里德堡态能量（由光移决定）。

在图3中，我们研究了两个范例中的相互作用，其中里德堡态之间的范德华相互作用被抵消。我们分别考察 NaCs 和 RbCs 的一个范例；这两种双碱金属分子都已被囚禁在光镊阵列中。两种情况下，我们都使用铯原子进行探测。对于 NaCs，分子态被缀饰为$|N = 0, m_N = 0\rangle$，对应 $|N' = 1, m'_N = 1\rangle$；对于 RbCs，则被缀饰为$|N = 1, m_N = 1\rangle$，对应 $|N' = 2, m'_N = 2\rangle$。两种情况下，里德堡态都被缀饰为 $|r\rangle = |n, L = 1, J = 3/2, m_J = 1/2\rangle$, $|r_\pi\rangle = |n, L = 2, J = 3/2, m_J = 1/2\rangle, |r_\sigma\rangle = |n-1, L = 2, J = 3/2, m_J = 3/2\rangle$，NaCs 和 RbCs 的主量子数分别为 $n = 64$ 和 $n = 77$。两种情况下，我们都考虑了原子超精细结构，并确保相互作用的抵消并非由 $|aa\rangle$与另一态近简并所致，从而避免微扰展开中的某一项占主导（见补充材料）。

对于 NaCs，我们采用的里德伯驱动参数 $(\Omega_\pi, \Delta_\pi, \Omega_\sigma, \Delta_\sigma)/2\pi \approx (-1250, 483, -348, 22.5)$ 兆赫，分子驱动为 $\Omega_m/2\pi = -120$ 千赫。对于 RbCs，我们采用的里德伯驱动参数 $(\Omega_\pi, \Delta_\pi, \Omega_\sigma, \Delta_\sigma)/2\pi \approx (-668, 329, -196, 32.0)$ 兆赫，分子驱动为 $\Omega_m/2\pi = -12.9$ 千赫。两种情况下，Ω_σ 均设为分子跃迁频率的 10%（因此约为原子跃迁频率的 10%），而 Ω_π 均低于相应原子跃迁频率的 4%，从而确保旋转波近似成立。我们采用文献[30]中的 Floquet方法，在截断希尔伯特空间中对相互作用进行对角化。有关截断希尔伯特空间以及被抵消的 C_3, C_6 对驱动参数的敏感性的详细信息，见补充材料。

NaCs（RbCs）的分子-里德伯相互作用强度为 $C_3 = 2\pi \times 86\,\text{kHz}\,\mu\text{m}^3$（$2\pi \times 35\,\text{kHz}\,\mu\text{m}^3$），里德伯态 $|a\rangle$ 的寿命为 $\tau_a = 225\,\mu\text{s}$（391 μs）[35]。当原子–分子间距为 1 μm 时，相互作用时间是叠加态寿命的 154（110）倍 $(|g\rangle + ie^{\pm iV_{am}t}|a\rangle)/\sqrt{2}$，因此里德伯衰减造成的测量误差很小。在这两种情况下，偶极相互作用和范德华相互作用都已被抵消，因此高阶 C_9 和 C_{12} 系数在更短距离处变得相关。同样，我们还计算了参与其中的中间成对态所占比例，该比例描述了单原子缀饰态基和非简并微扰理论的适用性，并且具有额外的 $1/r_{aa}^{12}$

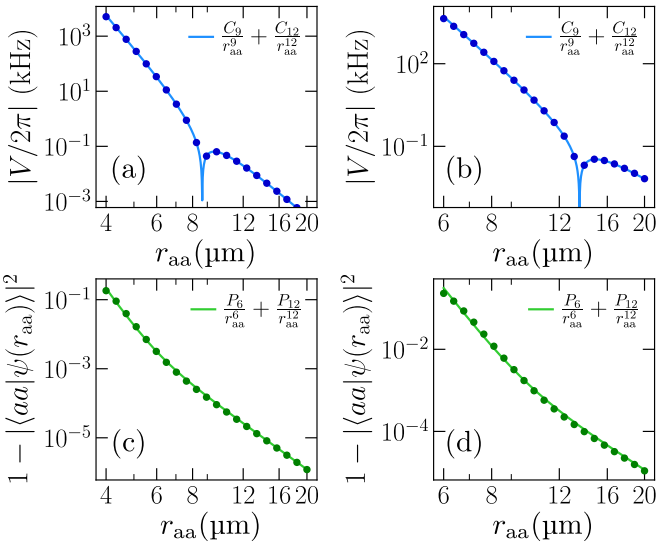

图3。NaCs（a）和 RbCs（b）的范德华相互作用归零[30, 34]。我们绘制了相应双原子本征态 $|\psi(r_{aa})\rangle$ 与 $|aa\rangle$ 在 NaCs（c）和 RbCs（d）中的重叠。曲线表示使用 $C_6 = 0$、P_6 的微扰值（见补充材料）进行拟合，其中 C_9、C_{12}、P_{12} 为拟合参数。对于 NaCs，$(C_9, C_{12})/2\pi =$（163 吉赫 微米^9、−105 太赫 微米^{12}），以及 $(P_6, P_{12}) =$（[2.06 微米]^6、[3.49 微米]^{12}）。对于 RbCs，$(C_9, C_{12})/2\pi =$（4.8 太赫 微米^9、−12 拍赫 微米^{12}），以及 $(P_6, P_{12}) =$（[3 微米]^6、[5.42 微米]^{12}）。

项。尽管如此，在较远距离处，混合仍处于微扰范围内；对于 NaCs（RbCs），这一情况分别持续到约 4μm（6μm），由此确定了检测方案的最小长度尺度。

在这些最小距离下，里德堡-里德堡相互作用仍处于兆赫量级，但随着 r_{aa} 增大而迅速减弱，因为它们主要由 C_9，C_{12} 相互作用主导；在 $r_{aa} = 6$微米（9.5 微米）处，NaCs（RbCs）的相互作用为 $2\pi \times 10$ 千赫量级，相较于典型的缀饰范德华相互作用，约减小了 50 倍。在这一范围内，只需足够强的拉比脉冲，便可轻易克服里德堡阻塞效应。尽管在这些距离下，里德堡-里德堡相互作用仍与 1 微米处的分子-里德伯相互作用相当，但由此产生的相互作用足够弱，因此我们下文讨论的各种抑制串扰来源的技术都适用。

剩余串扰。—当研究超出分子-原子对的情形时，串扰形式的多体效应便变得重要。串扰有三种形式，其强度依次递减：(i) 里德堡-里德堡相互作用，(ii) 非预期的分子-里德堡相互作用，以及 (iii) 分子-分子相互作用。在前几节中，我们讨论了如何通过消除里德伯态的偶极相互作用和范德华相互作用，大幅抑制但无法彻底消除 (i)；瞬态偶极相互作用和范德华相互作用的大小取决于驱动参数的精度。本节将讨论降低这三种串扰影响的一般策略。

最直接的方法是几何操控和交替测量。对于前者，增大不必要相互作用所涉及的距离可以减弱其影响，但代价是任何期望的相互作用也会随之减弱。另一种方法是，在测量时将原子-分子对彼此分开，之后再将它们移近。在某些情况下，还可以采用这样的几何构型：最强的不必要相互作用沿着$1 - 3\cos^2\theta = 0$方向，从而进一步减弱其影响；不过，这种方法不适用于范德华相互作用。

同样，通过交替测量分子、在每一步中只测量其中一部分，可以增大不必要相互作用所涉及的特征长度，但代价是需要进行多个测量周期才能测量所有分子。例如，在原子位于最短微扰距离处的线性链中，如果我们只对每隔一对进行测量，里德堡-里德堡距离就会增至 $r_{aa} = 8$ 微米（12 微米），使 NaCs（RbCs）的里德堡-里德堡相互作用减弱至 $2\pi \times 1$kHz 以下；若将测量间隔增至每三对一次，强度还可再降低一个数量级。

最后，也可以采用自旋回波方法，如参考文献 [36] 中的态转移协议所示。这种方法基于这样一个事实：底层相互作用具有伊辛型特征。在这种情况下，π 脉冲对

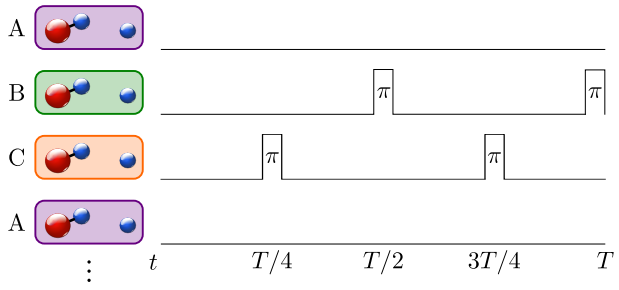

图4. 用于减少串扰的自旋回波脉冲序列。只有属于同一脉冲类别（A、B、C.....）的原子/分子彼此发生相互作用，从而减少不必要的串扰。在上述示例中，共有三类。

单个粒子的作用，相当于有效地翻转它与任意其他粒子之间伊辛相互作用的符号；由于有效纵向场项（即哈密顿量中的单粒子 Z 项），还需进行单量子比特旋转。然而，如果两个粒子同时施加了 π 脉冲，则符号不会改变。例如，在相互作用时间 T内，如果一组粒子“A”不施加脉冲，而另一组“B”在时刻 π 施加 $T/2$脉冲，那么 A 与 B 之间的伊辛相互作用会被回波消除，但 A-A 和 B-B 之间的相互作用仍然存在（在时刻 π 对 B 额外施加一个 T脉冲，以返回初始基底）。将 T 按更高的 2 的幂次进一步细分，可以得到更多脉冲类别，见图4。

通过这种方法，分子-里德堡对可以通过包含 2^{c-1} 个总计 π 个脉冲的脉冲序列被分为总共 $c > 1$ 种颜色；对于由分子-里德堡对组成的一维阵列，这种方法可以消除 $c-1$ 个最近邻对之间不必要的相互作用。这里需要注意的是，里德堡-里德堡相互作用已经得到削弱。原则上，即使是很强的里德堡-里德堡相互作用，也可以通过这种方式消除，但这依赖于足够强的哈达玛脉冲和 π 脉冲；如果脉冲时序不准确，这些脉冲更容易引入错误。

展望。——我们的方法很容易扩展到多分子奇偶测量。若每个分子都以强度 $|a\rangle$ V与 $t = \pi/V$ 相互作用，作用时间 ±1会使叠加态的相对相位中累积一个依赖于奇偶性的 $|g\rangle + |a\rangle/\sqrt{2}$因子，并可通过类似的脉冲序列进行测量（$H_Y \to H_X$）。这将为量子纠错 [37, 38]，（例如表面码） [39——42], 带来新的可能性，只需为每次测量执行一个纠缠序列即可。类似地，光谱学方法可利用单个里德堡原子同时测量多个分子，不过若不增加额外的原子，这种方法无法扩展。或者，本文的技术也可扩展到不存在原子-分子对的极性分子气体；在这种情况下，原子上累积的相位

尽管如此，仍可借此了解分子的局域状态。最后，由于我们的方案只使用单个缀饰里德堡态，因此它提供了一种实用且技术难度较低的初步方案，之后还可扩展到基于多个缀饰里德堡态的提案[30, 43]。

我们感谢 A. Safavi-Naini、B. Gerritsen 和 S. Cornish 的讨论。J.T.Y. 获NWO人才计划（项目编号 VI.Veni.222.312）支持，该计划由荷兰研究理事会（NWO）部分资助。A.V.G. 获AFOSR多学科大学研究计划、ONR多学科大学研究计划、美国能源部ASCR量子测试平台探路者计划（拨款编号 DE-SC0019040 和 DE-SC0024220）、美国国家科学基金会量子跃迁挑战研究所（拨款编号 OMA-2120757）、美国国家科学基金会 STAQ计划、美国陆军研究实验室（W911NF-24-2-0107）、DARPA SAVaNT ADVENT 以及 NQVL:QSTD:Pilot:FTL 的部分支持。A.V.G. 还感谢美国能源部科学办公室、国家量子信息科学研究中心、量子系统加速器，以及美国能源部科学办公室“量子计算加速研究”项目——面向量子实用性的基础算法研究（FAR-Qu）的支持。K.-K.N. 感谢 AFOSR多学科大学研究计划（FA9550-20-1-0323）的支持。

* 通讯作者：j.t.young@uva.nl

[1] M. Endres、H. Bernien、A. Keesling、H. Levine、E. R. Anschuetz、A. Krajenbrink、C. Senko、V. Vuletic、M. Greiner和M. D. Lukin，逐原子组装无缺陷一维冷原子阵列，《科学》354，1024（2016年）。[2] D. Barredo、S. de L´es´eleuc、V. Lienhard、T. Lahaye和A. Browaeys，逐原子组装器可组装无缺陷任意二维原子阵列，《科学》354，1021（2016年）。[3] A. Browaeys和T. Lahaye，利用单独控制的里德堡原子研究多体物理，《自然·物理》16，132（2020年）。[4] A. M. Kaufman和K.-K. Ni，利用超冷原子和分子的光镊阵列开展量子科学，《自然·物理》17，1324（2021年）。[5] D. Bluvstein、S. J. Evered、A. A. Geim、S. H. Li、H. Zhou、T. Manovitz、S. Ebadi、M. Cain、M. Kali- nowski、D. Hangleiter、J. P. Bonilla Ataides、N. Maskara、I. Cong、X. Gao、P. Sales Rodriguez、T. Karolyshyn、G. Semeghini、M. J. Gullans、M. Greiner、V. Vuleti´c和M. D. Lukin，基于可重构原子阵列的逻辑量子处理器，《自然》（伦敦）626，58（2023年）。[6] H. J. Manetsch、G. Nomura、E. Bataille、X. Lv、K. H. Leung和M. Endres，具有6,100个高度相干原子量子比特的镊子阵列，《自然》（伦敦）647，60（2025年）。[7] L. R. Liu、J. D. Hood、Y. Yu、J. T. Zhang、N. R. Hutzler、T. Rosenband和K. K. Ni，由两个原子组成一个分子，《科学》360，900（2018年）。[8] L. Anderegg、L. W. Cheuk、Y. Bao、S. Burchesky、W. Ketterle、K. K. Ni和J. M. Doyle，一个超冷分子光镊

阵列，《科学》365，1156（2019年）。[9] X. He、K. Wang、J. Zhuang、P. Xu、X. Gao、R. Guo、C. Sheng、M. Liu、J. Wang、J. Li、G. V. Shlyapnikov和M. Zhan，在光学阱中相干地形成单个分子，《科学》370，331（2020年）。[10] J. T. Zhang 、 L. R. B. Picard 、 W. B. Cairncross 、 K. Wang、Y. Yu、F. Fang和K.-K. Ni，基态极性分子的光镊阵列，《量子科学与技术》7，035006（2022年）。[11] Y. Bao、S. S. Yu、L. Anderegg、E. Chae、W. Ketterle、K. K. Ni和J. M. Doyle，光镊阵列中分子间的偶极自旋交换与纠缠，《科学》382，1138（2023年）。[12] C. M. Holland、Y. Lu和L. W. Cheuk，在可重构光镊阵列中按需实现分子纠缠，《科学》382，1143（2023年）。[13] A. Guttridge、D. K. Ruttley、A. C. Baldock、R. Gonz´alez- F´erez、H. R. Sadeghpour、C. S. Adams和S. L. Cornish，观测到原子与极性分子间的电荷-偶极相互作用引起的里德堡阻塞，《物理评论快报》131，013401（2023年）。[14] N. B. Vilas、P. Robichaud、C. Hallas、G. K. Li、L. An- deregg和J. M. Doyle，超冷多原子分子的光镊阵列，《自然》（伦敦）628，282（2024年）。[15] L. R. B. Picard、A. J. Park、G. E. Patenotte、S. Gebret- sadkan、D. Wellnitz、A. M. Rey和K.-K. Ni，分子量子比特间的纠缠与iSWAP门，《自然》（伦敦）637，821（2025年）。[16] D. K. Ruttley、T. R. Hepworth、A. Guttridge和S. L. Cornish，魔幻波长光镊中分子的长寿命纠缠，《自然》（伦敦）637，827（2025年）。[17] K.-K. Ni、T. Rosenband和D. D. Grimes，极性分子的偶极交换量子逻辑门，《化学科学》9，6830（2018年）。[18] S. L. Cornish、M. R. Tarbutt和K. R. A. Hazzard，利用超冷分子进行量子计算与量子模拟，《自然·物理》20，730（2024年）。[19] D. K. Ruttley、A. Guttridge、T. R. Hepworth和S. L. Cornish，利用光镊阵列增强单个超冷分子的量子控制，PRX Quantum 5，020333（2024年）。[20] L. R. B. Picard、G. E. Patenotte、A. J. Park、S. F. Ge- bretsadkan和K.-K. Ni，光镊中分子的位点选择性制备与多态读出，PRX Quantum 5，020344（2024年）。[21] J. P. Covey、L. D. Marco、 ´O. L. Acevedo、A. M. Rey和J. Ye，一种自旋分辨分子气体显微术方案，《新物理学杂志》20，043031（2018年）。[22] L. Christakis、J. S. Rosenberg、R. Raj、S. Chi、A. Morn- ingstar、D. A. Huse、Z. Z. Yan和W. S. Bakr，探测超冷分子自旋系统中的位点分辨关联，《自然》（伦敦）614，64（2023年）。[23] J. S. Rosenberg、L. Christakis、E. Guardado-Sanchez、Z. Z. Yan和W. S. Bakr，观测到超冷分子的韩伯里·布朗–特威斯效应，《自然·物理》18，1062（2022年）。[24] W. G. Tobias、K. Matsuda、J.-R. Li、C. Miller、A. N. Car- roll、T. Bilitewski、A. M. Rey和J. Ye，偶极自旋交换介导的层分辨分子间反应，《科学》375，1299（2022年）。[25] Q. Guan, M. Highman, E. J. Meier, G. R. Williams, V. Scarola, B. Demarco, S. Kotochigova 和 B. Gadway，《转动激发超冷分子的非破坏性色散成像》，物理化学化学物理 22, 20531（2020年）。[26] E. Kuznetsova、S. T. Rittenhouse、H. R. Sadeghpour 和 S. F. Yelin，《极性分子阵列中集体转动态的里德堡原子介导的非破坏性读出》，《物理评论A》94, 032325（2016年）。[27] M. Zeppenfeld，《通过里德堡原子非破坏性探测极性分子》，欧洲物理快报 118, 13002（2017年）。[28] K. Wang、C. P. Williams、L. R. Picard、N. Y. Yao 和 K.-K. Ni，《利用里德堡原子丰富超冷分子的量子工具箱》，PRX Quantum 3, 030339（2022年）。[29] C. Zhang 和 M. Tarbutt，《分子与里德堡原子的混合阵列中的量子计算》，PRX Quantum 3, 030340（2022年）。[30] J. T. Young、P. Bienias、R. Belyansky、A. M. Kaufman 和 A. V. Gorshkov，《通过偶极-偶极相互作用实现非对称阻塞和多量子比特门》，《物理评论快报》127, 120501（2021年）。[31] S. Blatt、J. W. Thomsen、G. K. Campbell、A. D. Ludlow、M. D. Swallows、M. J. Martin、M. M. Boyd 和 J. Ye，《一维光晶格钟中的拉比光谱与激发非均匀性》，《物理评论A》80, 052703（2009年）。[32] L. Zhu、J. Luke、R. Shaham、Y.-X. Liu 和 K.-K. Ni，《探测里德堡原子与超冷极性分子之间的偶极相互作用》，《物理评论快报》135, 153001（2025年）。[33] A. V. Gorshkov、S. R. Manmana、G. Chen、E. Demler、M. D. Lukin 和 A. M. Rey，《极性碱金属二聚体的量子磁性》，《物理评论A》84, 033619（2011年）。[34] S. Weber、C. Tresp、H. Menke、A. Urvoy、O. Firstenberg、H. P. B¨uchler 和 S. Hofferberth，《里德堡相互作用势的计算》，J. Phys. B 50, 133001（2017年）。[35] E. J. Robertson、N. ˇSibali´c、R. M. Potvliege 和 M. P. Jones，《ARC 3.0：用于原子物理计算的扩展版 Python 工具箱》，Comput. Phys. Commun. 261, 107814（2021年）。[36] A. Y. Guo、J. T. Young、R. Belyansky、P. Bienias 和 A. V. Gorshkov，《幂律系统中最优量子态传输与纠缠生成的实验路线图》，arXiv:2402.07974（2024年）。[37] S. J. Devitt、W. J. Munro 和 K. Nemoto，《量子纠错入门》，Reports Prog. Phys. 76, 076001（2013年）。[38] B. M. Terhal，《量子存储器的量子纠错》，Rev. Mod. Phys. 87, 307（2015年）。[39] S. B. Bravyi 和 A. Y. Kitaev，《具有边界的晶格上的量子码》，arXiv:9811052 [quant-ph]（1998年）。[40] E. Dennis、A. Kitaev、A. Landahl 和 J. Preskill，《拓扑量子存储器》，J. Math. Phys. 43, 4452（2002年）。[41] R. Raussendorf 和 J. Harrington，《具有高阈值的二维容错量子计算》，《物理评论快报》98, 190504（2007年）。[42] A. G. Fowler、M. Mariantoni、J. M. Martinis 和 A. N. Cleland，《表面码：迈向实用的大规模量子计算》，《物理评论A》86, 032324（2012年）。[43] B. Gerritsen 等，准备中。

[44] J. Aldegunde 和 J. M. Hutson，《……的超精细结构》 碱金属双原子分子，《物理评论A》96，042506（2017年）。

补充材料

附录*A*：分子超精细结构。——在本附录中，我们讨论分子超精细结构的作用。超精细哈密顿量为 [44]

$$H_{\rm hf} = H_Q + H_{IN} + H_{\rm t} + H_{\rm sc}, \tag{11a}$$

$$H_Q = -e\sum_{i=1}^{2} T^2(\nabla \mathbf{E}_i)\cdot T^2(\mathbf{Q}_i), \quad H_{IN} = \sum_{i=1}^{2} c_i \mathbf{N}\cdot\mathbf{I}_i,$$
$$H_{\rm t} = -c_3\sqrt{6}T^2(\mathbf{C})\cdot T^2(\mathbf{I}_1,\mathbf{I}_2), \quad H_{\rm sc} = c_4 \mathbf{I}_1\cdot\mathbf{I}_2, \tag{11b}$$

其中，$\mathbf{I}_i$ 是两个碱金属原子的核自旋，e是电荷，T^k_p 是秩为 k的张量的第 p个分量，而 $T^k_p(\mathbf{C}) \equiv C^k_p(\theta,\phi)$ $= \sqrt{4\pi/(2k+1)}Y_{k,p}(\theta,\pi)$是一个（经过归一化的）球谐函数。$H_Q$ 是四极相互作用，可写成$H_Q = \sum_{i=1}^{2}(eQq)_{i\,4I_i}{}^{\sqrt{6}}(2I_i-1)T^2(\mathbf{C})\cdot T^2(\mathbf{I}_i,\mathbf{I}_i)$的形式，其中 eQ_i是电四极矩，q_i 是原子核 i电场梯度的负值。 H_{IN} 是自旋-转动耦合，而 $H_{\rm t}$ 和 $H_{\rm sc}$ 是核偶极矩之间的张量相互作用和标量相互作用。

H_Q，H_{IN}，$H_{\rm t}$ 以耦合具有不同 m_N的态。在这种情况下，对分子进行强微波缀饰，可通过态依赖光移使这些过程失谐。然而，鉴于正文中采用的拉比频率较小（受里德堡拉比频率限制），固有的缀饰并不总是足够。在这种情况下，可以对分子施加额外的微波驱动。例如，对于 NaCs，施加一个从 $N=1$ 到 $N=2$的强共振 π 驱动，使我们能够改为将 $|N=0,\ m_N=0\rangle$ 态与一个叠加态（$|N=1,\ m_N=1\rangle + |N=2,\ m_N=1\rangle$）$/\sqrt{2}$耦合。在这里，额外的微波缀饰不受里德堡态限制，因此可以施加强光移。但需注意，诱导产生的分子偶极矩，进而分子-里德伯相互作用，会减小 $\sqrt{2}$倍。同样，如果两个拉比频率相近，就必须确保适当调节额外的微波缀饰，使修改后的 $|\pm\rangle$态之间不存在跃迁偶极矩。

若 m_N 守恒，则剩余的误差来源是不同转动态对应的核自旋本征态之间的差异。一种可能的做法是使用强塞曼场，不过磁场也会改变里德伯态，因此在减弱里德堡相互作用时必须将这一点考虑在内。另一种做法是，如果存在某些超精细态，其核自旋基中的本征态基本不受所处转动态的影响，那么这些超精细态同样可以使用。对于 NaCs，在额外施加 π 驱动至 $N=2$ 态的情况下，除两个核自旋拉伸态外，我们还发现了一组额外的态；两对耦合态在核自旋基中的重叠度至少为 $\sim 97\%$。对于 RbCs，若将用于减弱 m_N 耦合的驱动施加至 $|N=3,\ m_N=3\rangle$ 态，我们发现，除核自旋拉伸态外，还有十四组额外的态，两对耦合态在核自旋基中的重叠度超过 99%。如此多的态，部分归因于 RbCs 中显著的核标量相互作用。

附录 *B*：缀饰参数。——在本附录中，我们给出三能级里德伯系统中缀饰参数的解析公式。当分子由 $\wp=\pi$ 偏振驱动时，σ 驱动对应的里德伯缀饰参数为

$$\mp\Omega_\sigma = \frac{1-\alpha^2+2\mathcal{M}^2}{\Omega_\pi} - \frac{\sqrt{1+2\mathcal{M}^2}}{\sqrt{2\mathcal{M}^2}\alpha}\Delta_\pi, \tag{12a}$$

$$\Delta_\sigma = \frac{2\mathcal{M}^2\alpha^2-(1+2\mathcal{M}^2)}{2\mathcal{M}^2\alpha^2}\Delta_\pi + \frac{(1+2\mathcal{M}^2)^{3/2}(1-\alpha^2)}{2\mathcal{M}^2\alpha^3}\Omega_\pi, \tag{12b}$$

而当分子由 $\wp=\sigma$偏振驱动时，π 驱动对应的缀饰参数为

$$\Omega_\pi = \pm\frac{1-\alpha^2+(2\mathcal{M}^2)^{-1}}{(\sqrt{2}\mathcal{M})^{-1}\alpha^2}\Omega_\sigma - \frac{\sqrt{1+(2\mathcal{M}^2)^{-1}}}{\sqrt{2\mathcal{M}^2}^{-1}\alpha}\Delta_\sigma, \tag{13a}$$

$$\Delta_\pi = \frac{(2\mathcal{M}^2)^{-1}\alpha^2-(1+(2\mathcal{M}^2)^{-1})}{2\mathcal{M}\alpha^3}\Delta_\sigma \pm \frac{(1+(2\mathcal{M}^2)^{-1})^{3/2}(1-\alpha^2)}{(2\mathcal{M}^2)^{-1}\alpha^3}\Omega_\sigma. \tag{13b}$$

我们注意到，方程在变换 $\alpha\to-\alpha$,$\Omega_\sigma\to-\Omega_\sigma$ 下保持不变，对应于$|r_\sigma\rangle\to-|r_\sigma\rangle$，因此我们只考虑 $\alpha>0$。此外，只需调整 Ω_σ 的符号，即可用一个解涵盖两种可能的解，因此在不失一般性的情况下，我们在正文中采用 $(\pm,\mp)\to(+,-)$ 解。

附录 *C*：里德伯精细结构。—当驱动强度与里德伯精细结构相当或更强时，它会耦合到其他态，从而改变相互作用，因此也会改变消除里德堡相互作用所需的缀饰参数。我们忽略超精细结构，其量级比拉比频率小好几个数量级

。对于每个原始态 $|r\rangle$，$|r_\pi\rangle$，$|r_\sigma\rangle$，还会有一个仅在 J 上有所不同的附加态与之耦合（这是由电子自旋$S=1/2$导致的），我们将其记作 $|r'\rangle$，$|r'_\pi\rangle$，$|r'_\sigma\rangle$；但如果对应的未加撇态是 $S^{1/2}$ 态，则不会有额外的加撇态。因此我们写作 $|a\rangle \propto |r\rangle + a|r'\rangle + a_\pi|r_\pi\rangle + a'_\pi|r_\pi\rangle + a_\sigma|r_\sigma\rangle + a'_\sigma|r'_\sigma\rangle$。

由此得到的微波缀饰哈密顿量为

$$H'_{\rm mw} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_\pi & \Omega_\sigma & f_\pi\Omega_\pi & f_\sigma\Omega_\sigma \\ 0 & -\Delta & g_\pi\Omega_\pi & g_\sigma\Omega_\sigma & g'_\pi\Omega'_\pi & g'_\sigma\Omega_\sigma \\ \Omega_\pi & g_\pi\Omega_\pi & -\Delta_\pi & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_\sigma & g_\sigma\Omega_\sigma & 0 & -\Delta_\sigma & 0 & 0 \\ f_\pi\Omega_\pi & g'_\pi\Omega_\pi & 0 & 0 & -\Delta'_\pi & 0 \\ f_\sigma\Omega_\sigma & g'_\sigma\Omega_\sigma & 0 & 0 & 0 & -\Delta'_\sigma \end{pmatrix}, \tag{14a}$$

$$f_\pi = \frac{\langle r'_\pi|d_0|r\rangle}{\langle r_\pi|d_0|r\rangle}, \qquad f_\sigma = \frac{\langle r'_\sigma|d_+|r\rangle}{\langle r_\sigma|d_+|r\rangle}, \tag{14b}$$

$$g_\pi = \frac{\langle r_\pi|d_0|r'\rangle}{\langle r_\pi|d_0|r\rangle}, \qquad g_\sigma = \frac{\langle r_\sigma|d_+|r'\rangle}{\langle r_\sigma|d_+|r\rangle}, \tag{14c}$$

$$g'_\pi = \frac{\langle r'_\pi|d_0|r'\rangle}{\langle r_\pi|d_0|r\rangle}, \qquad g'_\sigma = \frac{\langle r'_\sigma|d_+|r'\rangle}{\langle r_\sigma|d_+|r\rangle}, \tag{14d}$$

$$\Delta' = E_{r'} - E_r, \quad \Delta_\pi = E_{r'_\pi} - E_r, \quad \Delta_\sigma = E_{r'_\sigma} - E_r. \tag{14e}$$

在这种情况下，当满足以下条件时，不存在偶极里德堡相互作用：

$$|a_\pi + f_\pi a'_\pi + a(g_\pi a_\pi + g'_\pi a'_\pi)|^2\mu_\pi^2 - |a_\sigma + f_\sigma a'_\sigma + a(g_\sigma a_\sigma + g'_\sigma a'_\sigma)|^2\mu_\sigma^2/2 = 0. \tag{15}$$

尽管引入了额外的态，从而带来了更多约束（以确保 $|a\rangle$ 是本征态），但同时也引入了相应的额外自由度（体现在态系数中）。与三能级情形不同，驱动参数无法通过解析方法确定，因此必须求得数值解。我们通过绝热方式实现这一点：逐渐增大分子驱动强度，并将上一步的自由参数用作下一步的初始猜测。因此，在弱驱动极限下，该方法会退化为三能级解。对于这种数值方法，与三能级情形的参数相比，我们只允许改变不耦合分子态的驱动失谐，而其他缀饰参数保持不变。

附录 *D*：范德华相互作用消零。——本节中，我们说明如何识别可使范德华相互作用消零的参数。我们采用参考文献 [30] 中的微扰 Floquet 方法来确定 C_6 在 $\theta=\pi/2$ 处的值，所用原子数据来自参考文献 [34]。此外，我们通过将分子拉比频率设定为对应于里德堡拉比频率的值，来限制所考察的参数范围

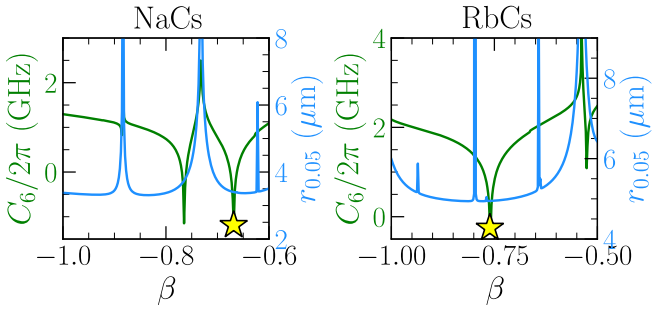

图 5. NaCs（左）和 RbCs（右）的微扰范德华相互作用消零。星号表示正文中使用的参数。对于 NaCs（RbCs），希尔伯特空间截断至 $L \leq 3$, 60 73 $\leq n \leq$ 67 80 $2\pi \times$ ( ) 16 $2\pi \times 9$ ( )，双原子态能量则取至与缀饰态能量相差 GHz（ GHz）的范围内。

该值为分子跃迁频率的 10%。这样做是为了获得较大的分子拉比频率，从而减小超精细结构的影响。

分子拉比频率确定后，β是唯一的自由参数。在图5中，我们展示了 C_6 随 β变化的函数关系。我们还通过 $r_{0.05}$量化偶极相互作用保持微扰性的程度；该值表示双原子态重叠$1-|\langle aa|\psi(r_{0.05})\rangle|^2 \approx P_6/r_{0.05}^6 = 0.05$ 达到微扰系数 P_6 时对应的距离（忽略高阶项）。这确保范德华相互作用消零并非由于共振使某个单项变强，因此原子对以及原子-分子对都能保持较近距离。

一个重要的考量是，偶极相互作用和范德华相互作用的抵消对缀饰参数不完善的敏感程度。我们通过 $\mathrm{J}_p \equiv \mathrm{v} \odot \partial_{\mathrm{v}} C_\alpha$ 量化 $\mathrm{v} \equiv (\Omega_\pi, \Omega_\sigma, \Delta_\pi, \Delta_\sigma)$ 的分数灵敏度，其中 $\alpha = 3$、6 分别表示偶极和范德华系数，而 $\odot$ 表示逐元素乘法。对于 NaCs，我们发现 $\mathrm{J}_3 = 2\pi \times (123, -114, 43.9, -1.57)$ 兆赫 微米^3，以及 $\mathrm{J}_6 = 2\pi \times (175, 12.9, 5.47, -0.118)$ 吉赫 微米^6,；最大的不确定性来自 Ω_π。当 Ω_π 存在 0.1% 的分数误差时，在 4 微米（8 微米）处，额外相互作用为$2\pi \times 45$千赫（$2\pi \times 1$ 千赫）。对于 RbCs，我们发现 $\mathrm{J}_3 = 2\pi \times (232, -237, 115, -8.45)$ 兆赫 微米^3，以及 $\mathrm{J}_6 = 2\pi \times (356, 24.3, 29.9, -0.035)$ 吉赫 微米^6,；最大的不确定性同样来自 Ω_π。当 Ω_π 存在 0.1% 的分数误差时，在 6 微米（12 微米）处，额外相互作用为 $2\pi \times 8.7$ 千赫（$2\pi \times 0.25$千赫）。

最后，我们确定了 ϕ 和复拉比频率对 C_6、C_9、C_{12}数值的影响。由于缀饰态是多个态的叠加态，在微扰展开中，这些态之间的虚过程可能会为缀饰态相互作用引入相位依赖（例如，$|rr\rangle \to |r_\sigma r_\sigma\rangle$），而驱动相位和 ϕ也起着类似的作用。对于上述截断希尔伯特空间，根据微扰计算，我们发现 C_6 没有变化。如果截断的

将希尔伯特空间中的哈密顿量对角化后，我们发现 C_9 的变化不超过2%，而 C_{12} 在 ϕ的几种选择下变化可以忽略不计。