# 令牌位置博弈*

Guillaume Bagan[1], Quentin Deschamps[1], Florian Galliot[2], Mirjana Mikalaˇcki †[3]，以及 Nacim Oijid‡[4]

[1]里昂大学、法国国家科学研究中心、里昂第一大学、里昂国立应用科学学院、LIRIS、UMR5205，法国维勒班 F-69622[2]艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、马赛中央理工学院、I2M、UMR 7373，法国马赛 13453[3]诺维萨德大学理学院数学与信息学系，塞尔维亚[4]瑞典于默奥大学

arXiv:2601.08967v1 [cs.DM] 13 Jan 2026

摘要

经典的 Maker-Breaker 位置游戏在一个作为超图 $\mathcal{H}$的棋盘上进行，两名玩家 Maker 和 Breaker 轮流认领 $\mathcal{H}$ 的顶点，直到所有顶点都被认领。游戏结束时，如果 Maker 已认领 $\mathcal{H}$某条超边的所有顶点，则 Maker 获胜；否则 Breaker 获胜。现实中进行这种游戏时，可以将棋子放在棋盘的顶点上。本文研究一种不利情况：一名或两名玩家的棋子不足以覆盖所有顶点，因此在某些时候不得不移动棋子，而不是放置新棋子。双方的棋子数量也可能存在偏置，即 Maker 和 Breaker 拥有的棋子数量不一定相同。本文开创了对位置博弈这一推广形式的研究，并将其称为令牌位置博弈。

一个特别有趣的情形是 Maker 在经典博弈中拥有获胜策略：面对棋子数量不受限制的 Breaker，Maker 至少需要多少枚棋子才能获胜？我们特别证明，对于顶点数任意大的 $k$-均匀超图，若 $k \in \{2,3\}$，这个数量等于 $k$；若 $k \geq 4$，则该数量可在 $k$ 到 $\Omega(n)$ 之间变化。从算法角度来看，一般情形的 PSPACE-困难性可由经典位置博弈的结果直接推出；不过，对于 Breaker 只有一枚棋子的情形，我们给出了一个多项式时间算法。此外，我们还证明了该博弈一种称为“令牌滑动”的变体是 EXPTIME 完全的。

## 1 引言

经典 Maker-Breaker 博弈 [12] 是在超图上进行的双人组合博弈。设$\mathcal{H}$ 为一个有限超图，其顶点集 $V(\mathcal{H})$称为该博弈的棋盘，其边集$E(\mathcal{H})$可视为一族获胜集合。两位玩家分别称为 Maker 和 Breaker，轮流认领棋盘上尚未被认领的元素，Maker 先行。如果在博弈结束时，Maker 已认领某个获胜集合中的所有元素，则她获胜；我们称她填满了该获胜集合。否则，Breaker 获胜。注意，此博弈不可能出现和局。我们将结果定义为一个函数，它把超图 $\mathcal{H}$映射到在 $\mathcal{H}$ 上拥有获胜策略的玩家（简言之，我们称该玩家在 $\mathcal{H}$上获胜）。

*本研究得到法国国家研究署 P-GASE 项目（ANR-21-CE48-0001-01）的资助

†部分研究经费由伏伊伏丁那省省高等教育与科学研究秘书处（资助编号 142-451-2686/2021）提供。部分研究经费由塞尔维亚共和国科学、技术发展与创新部（资助编号 451-03-66/2024-03/200125 和 451-03-65/2024-03/200125）提供。

‡Kempe基金会资助，编号 JCSMK24-515（瑞典）

由于具有诸多便利性质，在超图上的一大类位置博弈中，Maker-Breaker 博弈迄今为止受到的研究最多。这类位置博弈的一般研究始于20世纪下半叶 [22, 14], ，多年来大致沿着两个方向发展。一方面，人们考虑了不同的规则：这意味着采用其他玩家获胜条件，例如 Maker-Maker [22], 、Avoider-Avoider[23] 和 Avoider-Enforcer [29] 规则；或者采用其他选择顶点的方式，例如 Client-Waiter 和 Waiter-Client [6] 规则。另一方面，位置博弈的一般框架通过多种方式得以扩展：近年来，人们引入了计分位置游戏，不再询问 Maker 能否填满至少一条超边，而是统计她填满的超边数量 [1], ；此外，还有一种变体，其中顶点带有偏序，因而某些着法必须先于其他着法进行 [2]。

对位置博弈的这些变体进行研究，通常旨在针对各种超图类，刻画哪些超图上某个玩家会获胜，并确定计算博弈结果的算法复杂度。后者通常根据超边的大小进行研究。超图的秩定义为其最大超边的大小；若超图的所有超边大小均恰为 $k$，则称其为 $k$-均匀超图。最初，人们通过 POS CNF [31],证明，Maker-Breaker 博弈在秩为 11 的超图上是 PSPACE 完全的；过去四年间，这一结果数次得到改进 [30, 27, 17], ，如今已知，即使将范围限制在 4-一致超图上，这类博弈仍然是 PSPACE 完全的。在经典复杂性假设下，这一界是紧的，因为在秩为 3 [18] 的超图上，Maker-Breaker 博弈可以在多项式时间内求解。

从历史上看，许多 Maker-Breaker 博弈是在完全图上进行的，玩家争夺图的超边，而 Maker 的目标是占据一个具有特定结构的子图。由于 Maker 通常很容易赢得这类博弈，因此人们赋予 Breaker 更多能力：引入偏置，允许 Breaker 每步占据 $q > 1$ 个元素，而 Maker 仍然每步只能占据一个 [12]。由此产生了大量关于各种 Maker-Breaker 博弈阈值偏置的研究，即使 Breaker 获胜的最小 $q$ 值 [12, 5, 8]。后来，Maker 也被赋予偏置 $p$，从而推动了对 Breaker 的阈值偏置如何随 $p$ [3, 7, 20, 26, 15] 变化的研究。

本文介绍令牌位置博弈，作为改变 Maker-Breaker 博弈力量平衡的一种不同方式。我们不采用偏置，而是给玩家棋子： $a$ 红色棋子供 Maker 使用， $b$ 蓝色棋子供 Breaker 使用。超图 $\mathcal{H}$ 上的 $(a, b)$-博弈定义如下。轮到某位玩家时，该玩家将自己的一枚棋子放到一个未占用顶点上。玩家可以放置一枚尚未使用的棋子，也可以移动一枚已经放在棋盘上的棋子（请注意，所有棋子都放置完毕后，就必须采用后一种方式着法）。我们允许弃权着法。请注意，当玩家移动一枚棋子时，腾出的顶点便可供另一位玩家（或该玩家本人）稍后放置棋子。玩家可以在自己的棋子尚未全部用完之前移动棋子，但这样做并非最优，因为这会让该顶点暴露给对手。此设定下，Maker 的获胜条件与经典版本相同：若她成功用红色棋子填满某条超边，则获胜；而若 Breaker 能无限期阻止 Maker 获胜，或博弈局面两次达到相同状态，则 Breaker 获胜。请注意，若$\varnothing \in E(\mathcal{H})$，则博弈尚未开始，Maker 就已获胜。与经典 Maker-Breaker 博弈一样，若棋盘上的蓝色棋子构成 $\mathcal{H}$ 的一个横截集，则 Breaker 获胜，因为他只需在之后的所有回合弃权，博弈便会两次达到相同状态。若玩家拥有足够多的棋子，能够每回合使用一枚新棋子，我们用符号 $*$ 表示这种情况；这可以理解为该玩家拥有无限数量的棋子。请注意，$(*, *)$-博弈与经典 Maker-Breaker 博弈一致。对于拥有无限数量棋子的玩家而言，“令牌”这一视角无关紧要，因此我们可以像经典博弈中那样，简单地说他们占据顶点。

这种涉及棋子的位置博弈变体最早见于第三位作者的博士论文 [16], ，但这类博弈实际上有着自身的发展历史。具体而言， [34] 提到，在古罗马帝国时期，存在一种名为 Terni Lapilli 的井字棋变体：双方各有三枚棋子，并在最初的

三个回合中将棋子放置在棋盘上，之后不断移动，直到某位玩家形成所需的三子连线配置（但在采用最优策略时，这种情况永远不会发生）。该博弈实际上对棋子的移动方式设有一些限制，但正如 Kraitchik 和 Gardner [19, 28] 所指出的，法国也有一种名为 Les Pendus 的类似博弈，没有这些限制。九子棋可能同样可以追溯至罗马帝国，也具有类似性质，不过该博弈并不会在某位玩家形成三个对齐的棋子时结束；相反，该玩家可以从棋盘上移除对手的一枚棋子。

第 2 节介绍了令牌位置博弈的一些初步结果，这些结果将在后续章节中发挥作用。第 3 节解决了 Breaker 只有一枚棋子的情形：特别地，我们得到了一个多项式时间算法。与之相反，第 4 节讨论了 Breaker 拥有无限枚棋子的情形。我们考察 Maker 获胜所需棋子数的阈值如何随超边大小 $k$ 变化，并将其与经典博弈的持续时间联系起来；持续时间是位置博弈中一个经过深入研究的参数。对于所有超边大小，我们都给出了这两个参数的界，这些界要么是精确的，要么几乎是紧的。第 5 节专门介绍算法结果。一般而言，令牌位置博弈是 PSPACE 困难的，但以双方玩家的棋子数为参数时属于 XP。我们还证明了一个博弈变体是 EXPTIME 完全的，在该变体中，棋子只能沿超边滑动。第 6 节总结全文，并提出了一些未来研究方向。

## 2 预备知识和一般结果

一个显而易见的结论是，棋子越多总是越有利。

命题 1. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，并设 $a$、$a'$、$b$、$b' \in \mathbb{Z}_+$，使得 $a' \geq a$ 且 $b' \leq b$。如果 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上赢得了 $(a,b)$-博弈，那么 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上也能赢得 $(a',b')$-博弈。

证明. 假设 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上赢得了 $(a,b)$-博弈。Maker 可以采用相同的策略赢得 $\mathcal{H}$ 上的 $(a',b)$-博弈：她只需始终不使用额外的 $a'-a$ 个棋子。同理，Breaker 不可能在 $\mathcal{H}$ 上赢得 $(a',b')$-博弈，因为这样一来，他就可以采用相同的策略赢得 $\mathcal{H}$ 上的 $(a',b)$-博弈。■

超图 $\mathcal{H}$ 的子超图是一个超图 $\mathcal{H}'$，满足 $V(\mathcal{H}') \subseteq V(\mathcal{H})$ 且 $E(\mathcal{H}') \subseteq E(\mathcal{H})$（注意，这不一定是一个诱导结构）。经典 Maker-Breaker 博弈的一个便利性质——这在很大程度上解释了为什么这种约定最受研究——是：如果 Maker 在 $\mathcal{H}$ 的子超图 $\mathcal{H}'$ 上获胜，那么 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上也能获胜，因为她可以忽略发生在 $\mathcal{H}'$ 之外的任何行动。这一性质对令牌位置博弈仍然成立。

命题 2（子超图单调性）。设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，$\mathcal{H}'$ 是 $\mathcal{H}$的一个子超图，且 $a,b \in \mathbb{Z}_+$。如果 Maker 在 $\mathcal{H}'$上赢得了 $(a,b)$-博弈，那么 Maker 就能在 $\mathcal{H}$上赢得 $(a,b)$-博弈。

证明。如果 Maker 在 $\mathcal{H}'$上赢得了 $(a,b)$-博弈，那么她可以在 $\mathcal{H}$上采用相同的获胜策略，把自己的所有步都下在 $V(\mathcal{H}')$内，最终在 $E(\mathcal{H}') \subseteq E(\mathcal{H})$ 中占满一条超边。确实，如果 Breaker 曾在 $V(\mathcal{H}')$ 之外放置棋子，Maker 可以假装 Breaker 将该棋子放在 $V(\mathcal{H}')$ 中某个任意的未占用顶点上，然后继续执行她的获胜策略。■

配对是由两两不相交的顶点对组成的集合。在经典 Maker-Breaker 博弈中，任意配对 $\Pi$ 都对应着 Breaker 的一种配对策略。这意味着，如果 Maker 占据一个顶点$x \in \{x,y\} \in \Pi$，且 $y$ 可用，那么 Breaker 就占据 $y$作为应对；否则，Breaker 任意占据一个顶点。如果超图 $\mathcal{H}$ 中的每条超边 $e \in E(\mathcal{H})$都被覆盖，即对于某个 $\pi \in \Pi$，有 $\pi \subseteq e$，则称配对 $\Pi$ 在 $\mathcal{H}$中是完备的。如果某个配对 $\Pi$ 在 $\mathcal{H}$中是完备的，那么与 $\Pi$ 对应的配对策略就是在 $\mathcal{H}$上进行 Maker-Breaker 博弈时 Breaker 的获胜策略，因为它保证 Breaker 在每条超边中至少占据一个顶点。

显然，只要 Breaker 有足够的棋子来执行配对策略，这些策略就可以调整后用于令牌位置博弈。由于我们还需要在博弈进行中使用此类策略，下面先给出一些定义。$(a,b)$-博弈的一个局面是一个三元组$(\mathcal{H},M,B)$，其中 $\mathcal{H}$ 是一个超图，而$M$、 $B \subseteq V(\mathcal{H})$对应于双方玩家当前在棋盘上拥有的棋子：$M \cap B = \varnothing$、 $|M| \leq a$和 $|B| \leq b$。注意，在超图 $\mathcal{H}$上进行博弈时，局面$(\mathcal{H},\varnothing,\varnothing)$就是初始局面。我们可以将局面 $\mathcal{P} = (\mathcal{H},M,B)$的顶点集和边集分别定义为 $V(\mathcal{P}) = V(\mathcal{H}) \setminus (M \cup B)$以及 $E(\mathcal{P}) = \{e \setminus M \mid e \in E(\mathcal{H})\ e \cap B = \varnothing\}$。这是一个自然的定义，因为在局面$(\mathcal{H},M,B)$中，一条超边 $e \in E(\mathcal{H})$要么与 $B$ 不相交，此时 Maker 只需填满 $e \setminus M$；要么与 $B$ 相交，此时 Breaker 已经防守了超边 $e$。于是，如果配对在顶点集为 $V(\mathcal{P})$、边集为 $E(\mathcal{P})$的超图中是完备的，就称它在局面 $\mathcal{P} = (\mathcal{H},M,B)$中是完备的。我们有如下结果。

命题 3（配对策略）。设 $a,b \in \mathbb{Z}_+$。若在 $(a,b)$-博弈的局面 $\mathcal{P} = (\mathcal{H},M,B)$ 中，配对 $\Pi$ 是完备的，且 $b - |B| \geq \min(a, |\Pi \cap 2^{V(\mathcal{P})}|)$，则 Breaker 赢得从该局面开始的 $(a,b)$- 博弈（如常，由 Maker 先行）。

证明。Breaker 始终将棋子留在 $B$ 上，只使用他的 $b-|B|$ 个其他棋子。每当 Maker 在某个 $x \in \{x,y\} \in \Pi$ 上放置棋子，且 $y$ 空闲时，Breaker 就在 $y$ 上放置棋子。如果 $b - |B| \geq |\Pi \cap 2^{V(\mathcal{P})}|$，显然可以做到，甚至无需移动棋子。如果 $a \leq b - |B| < |\Pi \cap 2^{V(\mathcal{P})}|$，Breaker 可能需要移动棋子，但他的棋子数量足够，可以“跟随” Maker，同时绝不腾空 Maker 已在其上放置棋子的配对。采用这一策略，Breaker 可确保 Maker 在 $B$ 的任何顶点上都没有棋子，也不会同时在 $\Pi \cap 2^{V(\mathcal{P})}$ 中一对顶点的两个顶点上都放置棋子。根据完全配对的定义，这意味着 Maker 永远无法填满 $\mathcal{H}$ 的超边。■

作为配对策略的首个应用，我们可以轻松解决 2-均匀超图上的令牌位置博弈。请注意，一般而言，含有大小为 1 的边的超图可以忽略，因为在这种情况下，Maker 一步即可获胜。

命题 4. 设 $\mathcal{H}$ 为一个 2-均匀超图，且 $a,b \in \mathbb{Z}_+$，其中 $a \geq 2$。Breaker 在 $\mathcal{H}$ 上的 $(a,b)$-博弈中获胜，当且仅当 $\mathcal{H}$ 的超边两两不相交，且 $b \geq \min(a, |E(\mathcal{H})|)$。

证明. 若 $\mathcal{H}$ 有两条形如 $\{x,y\}$ 和 $\{y,z\}$ 的超边，Maker 可以先在 $y$ 上放置一枚棋子，并在下一步将棋子放在 $x$ 或 $z$ 上，从而赢得博弈。现在，设 $\mathcal{H}$ 的超边 $\{x_i,y_i\}$ 两两不相交。若 $b \geq \min(a, |E(\mathcal{H})|)$，则根据命题 3，Breaker 使用配对 $E(\mathcal{H})$ 即可获胜，而该配对显然在 $\mathcal{H}$ 中是完备的。若 $b < \min(a, |E(\mathcal{H})|)$，则 Maker 可以先在 $x_1,\ldots,x_b$ 上分别放置不同的棋子，这迫使 Breaker 依次在 $y_1,\ldots,y_b$ 上分别放置不同的棋子作为回应。随后，Maker 可以在 $x_{b+1}$ 上放置一枚新棋子：Breaker 回合结束后，必然有某个 $y_i$ 满足 $i \in [\![1, b+1]\!]$ 尚未被占据，因此 Maker 可以将自己的一个棋子移至 $y_i$，赢得博弈。■

最后地，我们介绍一种构造，它有助于将结果推广到任意超边大小 s.

命题5. 对于任意 $k$-一致超图 $\mathcal{H}$（其顶点数为 $n$），存在一个 $(k+1)$-一致超图 $\mathcal{H}'$（其顶点数为 $n+2$），满足以下两个性质：

- 对于所有 $a,b \in \mathbb{Z}_+$，Maker 在 $\mathcal{H}$ 上的 $(a,b)$-博弈中获胜，当且仅当 Maker 在 $\mathcal{H}'$ 上的 $(a+1, b+1)$-博弈中获胜。
- 对于所有 $t \in \mathbb{Z}_+$，Maker 存在一种策略，确保她在 $\mathcal{H}$ 上的 $(*,*)$-博弈前 $t$ 回合内占满一条超边，当且仅当 Maker 存在一种策略，确保她在 $\mathcal{H}'$ 上的 $(*,*)$-博弈前 $t+1$ 回合内占满一条超边。

证明。设 $\mathcal{H}'$ 由以下方式定义： $V(\mathcal{H}') = V(\mathcal{H}) \cup \{v, \overline{v}\}$，其中 $v$ 和 $\overline{v}$ 是新顶点；并且 $E(\mathcal{H}') = E_1 \cup E_2$，其中 $E_1 = \{e \cup \{v\} \mid e \in E(\mathcal{H})\}$ 和 $E_2 = \{\{v,\overline{v}\} \cup U \mid U \subseteq V(\mathcal{H})\ |U| = k-1\}$。它

显然， $\mathcal{H}'$ 是（$k+1$）-均匀的。现在，令 $a,b \in \mathbb{Z}_+$，并考虑在 $\mathcal{H}'$ 上进行的（$a+1,b+1$）-博弈。回想一下，如果 $a$ 和 $b$ 足够大，（$a,b$）-博弈和（$a+1,b+1$）-博弈都与（$*,*$）-博弈相同，因此我们可以同时处理该命题的两个断言。我们认为，在第一回合中，Maker 和 Breaker 应分别将棋子放在 $v$ 和 $\overline{v}$ 上，此后不再移动这两枚棋子，否则他们就会陷入必败局面。确实：

– 如果 $v$ 曾对 Breaker 可用，那么他只需在 $v$ 上放置一个棋子并始终保留在那里即可赢得博弈，因为 $\mathcal{H}'$ 的每条超边都包含 $v$。– Maker 首次行动在 $v$ 上放置棋子后，有两种可能。如果 $\min\left(a+1, \frac{|V(\mathcal{H}')|}{2}\right) \leq k$），那么 Maker 总共至多放置 $k$ 个棋子，这不足以填满一条大小为 $k+1$的超边，因此 Breaker 可以任意行动并获胜。如果 $\min\left(a+1, \frac{|V(\mathcal{H}')|}{2}\right) > k$）且 $\overline{v}$ 曾对 Maker ~~可用，~~ 那么她可以在 $\overline{v}$ 上放置一个棋子，然后将剩余棋子任意放置在 $V(\mathcal{H})$ 内：事实上，由于 $|V(\mathcal{H})| \geq 2k-1$，且 Maker 需要在 $\{v,\overline{v}\}$之外放置 $a-1 \geq k-1$ 个棋子，Maker 将在 $V(\mathcal{H})$ 中的 $k-1$个顶点上获得棋子，并自动填满 $E_2 \subseteq E(\mathcal{H}')$ 中的一条超边。

因此，我们可以假设 Maker 和 Breaker 在第一回合分别将棋子放在 $v$ 和 $\overline{v}$ 上，并且之后始终不移动这两枚棋子。第一回合结束后，Maker 和 Breaker 分别还剩下 $a$ 和 $b$ 枚棋子可用。此外，$E_2$ 中的所有超边都包含 $\overline{v}$，因此 Maker 永远不会填满 $E_2$中的超边；而 $E_1$ 中的所有超边都包含 $v$，因此 Maker 填满 $E_1$ 中的超边等价于 Maker 填满 $E$（$\mathcal{H}$）中的超边。总而言之，第一回合结束后的局面归结为在 $\mathcal{H}$上的（$a$，$b$）-博弈。■

## 3 当 Breaker 只有一枚棋子时

如果一对不同的超边（$e_1$，$e_2$）满足 $|e_1 \cap e_2| \geq |e_1| + |e_2| - a - 2$，我们就称其为 $a$-可约的。注意，我们可能有 $e_1 \cap e_2 = \varnothing$。

引理 6. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，且 $a \in \mathbb{Z}_+$。如果 Maker 在 $\mathcal{H}$上的（$a$，1）-博弈中获胜，那么其中必定存在一条大小至多为 1 的超边，或一对 $a$-可约的超边 $\mathcal{H}$。

证明。若没有大小为 0 或 1 的超边，那么 Maker 要制造双重威胁，就必须在某个时刻分别在两个不同超边 $e_1$ 和 $e_2$ 的所有顶点中，除了各一个顶点外都放上棋子。由于 Maker 有 $a$ 枚棋子，只有当 $a \geq (|e_1|-1) + (|e_2|-1) - |e_1 \cap e_2|$时才可能发生。■

引理 7. 设 $\mathcal{H}$ 是一个包含一对 $a$-可约超边 $(e_1, e_2)$ 的超图，并设 $\mathcal{H}'$ 是由 $V(\mathcal{H}') = V(\mathcal{H})$ 和 $E(\mathcal{H}') = (E(\mathcal{H}) \setminus \{e_1, e_2\}) \cup \{e_1 \cap e_2\}$定义的“约化”超图。那么，对于 $(a, 1)$-博弈，$\mathcal{H}$和 $\mathcal{H}'$ 的结果相同。

证明。若 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上赢得 $(a, 1)$-博弈，那么同一获胜策略在 $\mathcal{H}'$ 上也适用，因为 $\mathcal{H}'$ 的每条超边都是 $\mathcal{H}$中某条超边的子集。反过来，假设 Maker 在$\mathcal{H}'$ 上赢得 $(a, 1)$-博弈，并在 $\mathcal{H}$上采用该获胜策略。她要么在 $\mathcal{H}$上获胜，要么在$e_1 \cap e_2$的所有顶点上都放上棋子。若是后一种情况，她会始终让这些棋子留在 $e_1 \cap e_2$ 上，并在之后的每一回合中，用她的另一枚棋子，将其放到 $e_1$ 或 $e_2$ 中当前没有 Breaker 棋子的那个超边上。某个时刻，她会在比如说 $e_1$的所有顶点中，除了一个顶点外都放上棋子，并且直到对局的最后一步之前都不移动这些棋子，从而迫使 Breaker 将他的棋子放在 $e_1$ 的最后一个顶点上，并一直留在那里直到对局结束。随后，Maker 在 $e_2$的所有顶点中，除了一个顶点外都放上棋子，最后用一枚不在 $e_2$ 上的棋子，将其移到 $e_2$ 的最后一个顶点上，从而赢得博弈。■

定理 8. 判定 $(a, 1)$-博弈的结果可在多项式时间 $O(m^3)$ 内完成，其中$m$ 是超边的数量，即使 $a$是输入的一部分也是如此。

证明。只要存在一对 $a$-可归约超边，就执行引理 7 中的归约，该归约不改变博弈结果。此过程结束后，根据引理 6：若存在大小为 0 或 1 的超边，则 Maker 获胜；否则 Breaker 获胜。寻找一对 $a$- 可归约超边需要 $O(m^2)$ 时间，总共至多执行 $m-1$ 次归约。■

在解决了 Breaker 只有一枚棋子的令牌位置博弈之后，我们现在进一步确定当 Maker 的棋子数等于超边大小时，Maker 获胜所需的最少超边数。

命题 9. 设 $\mathcal{H}$ 是一个 $k$-均匀超图，且 $k \in \mathbb{Z}_+$。如果 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上赢得 $(k,1)$-博弈，那么 $|E(\mathcal{H})| \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$。

证明. 假设 $k \geq 2$，因为当 $k = 1$ 时结论显然。只需证明，在 $\mathcal{H}$ 上至少需要进行 $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ 次引理 7 中的归约，才会产生大小为 0 或 1 的超边。令 $r(p)$ 表示从 $\mathcal{H}$ 出发，得到大小至多为 $p$ 的超边所需进行的最少归约次数。我们要证明 $r(1) \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$，即 $r(1) \geq \frac{k-1}{2}$。实际上，我们断言：

$$r(p) \geq \frac{k-p}{2}, \quad \text{for all } p \in [\![1,k]\!].$$

我们通过对 $k-p$ 进行归纳法证明这一结论。对于 $p=k$，显然有 $r(k)=0$，因为 $\mathcal{H}$ 是$k$-均匀的。现在，令 $p \in [\![1,k-1]\!]$，并假设对于所有 $p' \in [\![p+1,k]\!]$，都有 $r(p') \geq \frac{k-p'}{2}$。假设从一个 $k$-可归约对 $(e_1,e_2)$ 中生成了一条大小至多为 $p$ 的超边 $e = e_1 \cap e_2$。定义 $p_1 = |e_1|$ 和$p_2 = |e_2|$，我们得到 $p \geq |e| = |e_1 \cap e_2| \geq |e_1| + |e_2| - k - 2 = p_1 + p_2 - k - 2$。由于生成 $e_1$ 和 $e_2$ 本身分别至少需要 $r(p_1)$ 次和 $r(p_2)$ 次归约，结合归纳假设，可得：

$$r(p) \geq 1 + r(p_1) + r(p_2) \geq 1 + \frac{k-p_1}{2} + \frac{k-p_2}{2} \geq 1 + \frac{k-p_1}{2} + \frac{p_1-p-2}{2} = \frac{k-p}{2}.$$

这证明了该断言和命题。 ■

命题 10. 对于所有 $k \geq 1$，存在一个 $k$-均匀超图 $\mathcal{H}$，满足 $|E(\mathcal{H})| = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$，使得 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上的 $(k,1)$-博弈中获胜。

证明. 我们定义 $\mathcal{H}$ 如下（见图 1）：

$$V(\mathcal{H}) = \{u_1,\dots,u_k\} \cup \bigcup_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \left\{ v_1^{(i)},\dots,v_{k-1-2\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - i\right)}^{(i)} \right\} \quad \text{and} \quad E(\mathcal{H}) = \{e_0, e_1, \dots, e_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}\},$$

其中 $e_0 = \{u_1,\dots,u_k\}$ 以及 $e_i = \left\{ v_1^{(i)},\dots,v_{k-1-2\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - i\right)}^{(i)}, u_{k-2\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - i\right)}, \cdots, u_k \right\}$ 对所有 $i \in [\![1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor]\!]$ 均成立。注意，$\mathcal{H}$ 是 $k$-均匀的。现在我们执行归约，直到得到一条大小为 1 的边。定义 $e_i' = \left\{ u_{k-2\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - i\right)}, \cdots, u_k \right\}$ 对所有 $i \in [\![1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor]\!]$ 均成立。我们有：

- $e_0 \cap e_1 = e_1'$，并且

$$|e_0 \cap e_1| = |e_1'| = 2\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1\right) + 1 \geq k - 2 = |e_0| + |e_1| - k - 2.$$

- 对于所有 $i \in [\![2, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor]\!]$：$e_{i-1}' \cap e_i = e_i'$，并且

$$|e_{i-1}' \cap e_i| = |e_i'| = 2\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - i\right) + 1 \geq 2\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - (i-1)\right) + 1 - 2 = |e_{i-1}'| + |e_i| - k - 2.$$

因此，$(e_0, e_1)$ 是一个 $k$-可归约对；将 $e_0$ 和 $e_1$ 替换为超边 $e_1' = e_0 \cap e_1$ 后，我们得到 $(e_1', e_2)$ 作为一个 $k$-可归约对；再将 $e_1'$ 和 $e_2$ 替换为超边 $e_2' = e_1' \cap e_2$ 后，我们得到 $(e_2', e_3)$ 作为一个 $k$-可归约对，依此类推，直到得到大小为 1 的超边 $e'_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \{u_k\}$。根据引理 7，在整个归约过程中，结果保持不变，因此 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上赢得了 $(k, 1)$-博弈。■

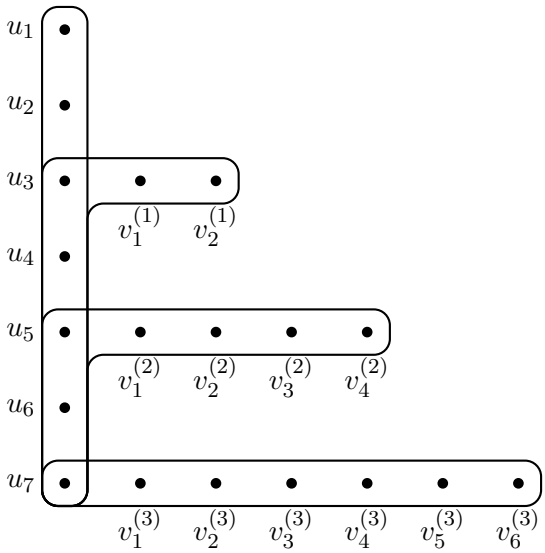



图 1：命题 10 中针对 $k = 7$ 的构造。

## 4 当 Breaker 拥有无限数量的棋子时

本节讨论 $(a, *)$-博弈。因此，我们引入以下记号：对于任意超图 $\mathcal{H}$，定义 $\theta(\mathcal{H})$ 为使 Maker 能在 $\mathcal{H}$ 上赢得 $(a, *)$-博弈的最小 $a$。若 Breaker 在 $\mathcal{H}$ 上赢得 $(*, *)$-博弈，则 $\theta(\mathcal{H}) = \infty$。

我们将对 $\theta$ 的研究与另一个超图参数的研究联系起来，该参数在位置博弈文献 [12, 24, 25, 10, 9, 11] 中已得到广泛研究：对于任意超图 $\mathcal{H}$，令 $\tau(\mathcal{H})$ 表示使 Maker 有策略在至多 $t$ 个对局轮次内赢得 $\mathcal{H}$ 上的 $(*, *)$-博弈的最小 $t$（也就是说，Maker 至多走 $t$ 步后便填满一条超边）。若 Breaker 在 $\mathcal{H}$ 上赢得 $(*, *)$-博弈，则 $\tau(\mathcal{H}) = \infty$。

当 Maker 在超图 $\mathcal{H}$ 上赢得 $(*, *)$-博弈时，我们可以通过两种方式改变规则，增加她的任务难度。第一种是限制她填满一条超边的时间：这对应于研究 $\tau(\mathcal{H})$。第二种是限制她的棋子数量（而 Breaker 的棋子数量仍不受限制），并求出她仍能获胜所需的最少棋子数：这对应于研究 $\theta(\mathcal{H})$。这两个量通过以下不等式相互关联，其中 $\mathrm{ark}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 的反秩，即其最小超边的大小。

命题11. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，并假设 $\theta(\mathcal{H})$ 和 $\tau(\mathcal{H})$ 都是有限的，即 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上赢得了 $(*, *)$-博弈。那么，$\mathrm{ark}(\mathcal{H}) \leq \theta(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}) \leq \left\lceil \binom{|V(\mathcal{H})|}{2} \right\rceil$。

证明. Maker 至少需要 $\mathrm{ark}(\mathcal{H})$ 个棋子才能填满一条超边，因此得到第一个不等式。此外，Maker 在 $\mathcal{H}$ 上至多经过 $t$ 回合赢得 $(*, *)$-博弈的策略，同样能赢得 $(t, *)$-博弈，因为每次行动都使用一个新棋子。最后，显然 Maker 行动 $\lceil |V(\mathcal{H})|/2 \rceil$ 次后，所有顶点都已被占据。■

容易看出，存在一些超图，使得命题11中的所有量都相等：例如，当 $\mathcal{H}$ 有 $2k-1$ 个顶点和 $\binom{2k-1}{k}$ 条超边，且这些超边对应所有

大小为 $k$ 的可能子集时，情况便是如此。但一般而言，这些量之间的差距最大可以有多大？我们首先指出，2-一致情形很简单。

命题12. 设 $\mathcal{H}$ 是一个 2-均匀超图，并假设 $\theta(\mathcal{H})$ 和 $\tau(\mathcal{H})$ 都是有限的，即 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上的 $(*,*)$-博弈中获胜。那么 $\theta(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}) = 2$。

证明. 由于 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上的 $(*,*)$-博弈中获胜，根据命题 4，存在两条相交的超边，因此 Maker 在两回合内获胜。■

本节余下部分将讨论 $k$-均匀超图，其中 $k \geq 3$。在所有图示中，我们将按照图2的方式表示大小为 3 或 4 的超边：圈出的顶点表示 Maker 的棋子，划掉的顶点表示 Breaker 的棋子（强调从 Maker 的角度看，这些顶点已永久退出博弈）。

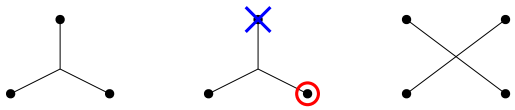


图2：左：一条大小为 3 的超边。中：一条大小为 3 的超边，其中 Maker 和 Breaker 各有一枚棋子。右：一条大小为 4 的超边。

## 4.1 3-均匀超图中的情况

[18] 给出了 Maker 在 $(*,*)$-博弈中获胜的 3-均匀超图的结构刻画。该刻画基于图3中展示的两种基本结构。长度为$L \geq 1$ 的双节棍，其顶点集为 $\{a_0, \ldots, a_L, b_1, \ldots, b_L\}$，边集为 $\{\{a_{i-1}, b_i, a_i\} \mid i \in [\![1, L]\!]\}$；其上唯一的棋子是分别位于 $a_0$ 和 $a_L$ 上的 Maker 棋子。长度为 $L \geq 2$ 的项链，其顶点集为$\{a_1, \ldots, a_L, b_1, \ldots, b_L\}$，边集为 $\{\{a_i, b_i, a_{i+1}\} \mid i \in [\![1, L-1]\!]\} \cup \{\{a_L, b_L, a_1\}\}$；其上唯一的棋子是位于 $a_1$ 上的 Maker 棋子。在下文的定理中，“对局轮次”必须是完整的回合，也就是说，我们始终考察 Maker 行动之前的局面。

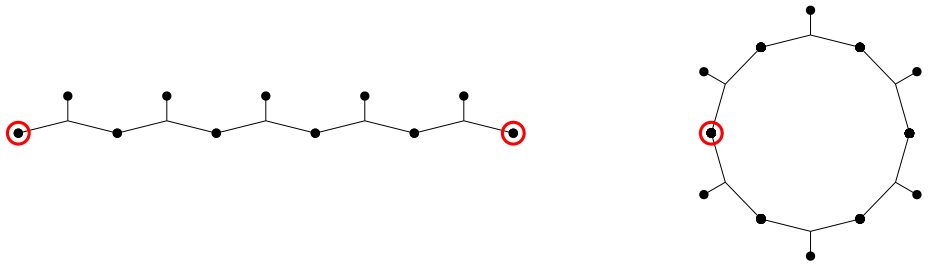


图3：左：长度为5的双节棍。右：长度为6的项链。

定理13（[18, 定理3.23]）。设 $\mathcal{H}$ 为一个3-均匀超图。当且仅当她拥有一种策略，能够确保在至多三个回合后得到的局面包含一个双节棍或一条项链时，Maker才能在 $\mathcal{H}$ 上赢得（$*$，$*$）-博弈。

一个推论是，在3-均匀超图上对抗数量不限的Breaker棋子时，Maker所拥有的棋子数量并无影响：她要么只用三个棋子就能获胜，要么根本无法获胜。

推论14。每个3-均匀超图 $\mathcal{H}$ 都满足 $\theta(\mathcal{H}) \in \{3, \infty\}$。

证明。假设 $\theta(\mathcal{H}) < \infty$，即 Maker 在 $\mathcal{H}$ 上进行的（$*$，$*$）-博弈中获胜。根据定理13，Maker 有一种策略，确保在至多三个对局轮次后得到的局面中包含一根双节棍

或一条项链。因此，Maker 也可以通过进行（3，$*$）-博弈来达到这样的局面。现在我们证明，Maker 有一种“强制策略”，可以强迫 Breaker 进行每一步移动，直到他陷入困境。首先，假设存在一根顶点集为 $\{a_0,\dots,a_L,b_1,\dots,b_L\}$、边集为 $\{\{a_{i-1},b_i,a_i\}\mid i\in[\![1,L]\!]\}$，且 Maker 的棋子位于 $a_0$ 和 $a_L$上的双节棍。Maker 将她的第三个棋子移至 $a_1$，威胁填满边$\{a_0,b_1,a_1\}$，从而迫使 Breaker 占据 $b_1$。然后，对于所有 $i\in[\![2、L-1]\!]$，Maker 将一个棋子从 $a_{i-2}$ 移至 $a_i$，威胁填满边 $\{a_{i-1},b_i,a_i\}$，从而迫使 Breaker 占据$b_i$。然而，由于 Maker 在 $a_L$ 上的棋子尚未移动，她现在可以将一个棋子从 $a_{L-2}$ 移至 $b_L$，从而填满边 $\{a_{L-1},b_L,a_L\}$。至此，存在双节棍的情形得证。如果存在项链，则相同的强制策略仍然有效：Maker 让项链上的棋子留在原处，然后利用另外两个棋子沿着环制造威胁，直到回到那个未移动的棋子处；此时会同时出现两个威胁。■

与 2-一致情形的区别在于，$\tau$ 的有限取值没有上界。因此，$\theta$ 与 $\tau$之间可能存在差距，而且我们可以准确知道这个差距有多大。

命题15。对于所有 $n\geq 7$，都存在一个具有 $n$ 个顶点的 3-均匀超图 $\mathcal{H}$，使得$\theta(\mathcal{H})=3$ 且 $\tau(\mathcal{H})=\log_2(n)+O(1)$。此外，对于一般的 3-均匀超图，$\tau$ 的有限取值至多为 $\lceil\log_2(n)\rceil+3$，因此在相差一个加法常数的意义下，这使 3-均匀超图中的 $\theta$ 与 $\tau$ 之间的差距达到最大。

证明。严格来说，这并不是一个有效的例子，因为其中有些棋子已经放置好了；不过，我们先来考虑一条长度为 $L$ 的双节棍，其顶点集为 $\{a_0,\dots,a_L,b_1,\dots,b_L\}$，边集为 $\{\{a_{i-1},b_i,a_i\}\mid i\in[\![1,L]\!]\}$，而 Maker 棋子位于 $a_0$ 和 $a_L$上。我们已经看到的强制策略可以在 $\Theta(L)$回合内获胜，因为它会从双节棍的一端一路走到另一端。然而，我们声称 Maker 可以快得多地获胜，即在 $1+\lceil\log_2(L)\rceil$ 回合内获胜，而且这是最优的。这个结果在 [18, 引理 5.6], 中得到了证明，不过我们可以在这里简单说明，因为它用到了一个非常简单的二分论证。显然，选择某个 $b_i$ 对 Maker 来说是一步败着，因为 Breaker 接下来可以选择 $a_{i-1}$ 或 $a_i$，从而破坏 Maker的进攻。因此，Maker 应该选择某个 $a_i$，从而实际上将双节棍分成两条较短的双节棍。Breaker 无法同时在这两条双节棍中落子，因此他下一步落子后，其中一条仍可供 Maker 继续行动。如果两条双节棍长度不同，Breaker 就应该在较短的那条中落子。因此，Maker 的第一步应该选择$a_{\lceil L/2\rceil}$，将双节棍分成长度至多相差 1 的两条双节棍。之后，Maker 不断选择 Breaker 尚未落子的那条双节棍中间的 $a_i$，最终恰好经过$1+\lceil\log_2(L)\rceil$ 回合获胜。

要得到一个不含棋子的初始超图，只需取一个双节棍，并将每个棋子替换成图4中的一个“菱形”。注意，如果 Maker 占据了一个度为3的顶点，而 Breaker 没有立即在对应的菱形内应对，那么 Maker 再走两步即可获胜。对于任意奇数 $n\geq 7$，都可以在 $n$ 个顶点上进行这种构造（$n=7$ 的情形是两个菱形共用一个顶点），并且通过添加一个孤立顶点，可将其扩展到任意偶数 $n\geq 8$。二分论证在这个超图 $\mathcal{H}$上仍然成立，因此$\tau(\mathcal{H})=\log_2(n)+O(1)$。另一方面，由推论14可得 $\theta(\mathcal{H})=3$。

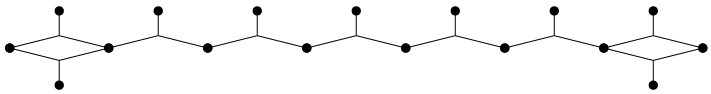


图4：双节棍的一个不含棋子的“等价物”。

至于该命题的最后一个结论，它是定理13的推论。事实上，如果 Maker 在一个 3-均匀超图上赢得 $(*,*)$-博弈，那么她有一种策略，能够确保至多经过三个回合的对局后所形成的局面包含一条双节棍或一条项链。由于她能在长度为 $L$ 的双节棍上用 $1+\lceil\log_2(L)\rceil$ 个回合获胜（长度为 $L$ 的项链也同理，

采用相同的证明），因此她总共至多能用 $3+(1+\lceil\log_2(L)\rceil) = \lceil\log_2(L)\rceil+4$ 个回合获胜。最后，由于长度为 $L$ 的双节棍（分别是项链）有 $2L+1$ （分别是 $2L$）个顶点，我们有$L \le \frac{n}{2}$因此 $\lceil\log_2(L)\rceil + 4 \le \lceil\log_2(n)\rceil + 3$。■

## 4.2 在 $k \ge 4$ 的 $k$-均匀超图中

我们刚刚看到，对于 3-均匀超图， $\theta$ 与 $\tau$ 之间的差距可以任意大，但不会超过对数级。现在我们将证明，对于满足 $k \ge 4$的 $k$-均匀超图，这一差距可以大得多，因为此时存在一些例子，使命题11给出的 $\theta$ 下界和 $\tau$ 上界都恰好达到。我们的构造将项链推广到大小大于 3 的超边；不过，二分策略不再奏效，Maker 必须采用（非常缓慢的）强制策略。

命题16。对于任意 $k \ge 4$ 和 $n \ge 2k+1$，都存在一个定义在 $n$个顶点上的 $k$-均匀超图 $\mathcal{H}$，使得 $\theta(\mathcal{H}) = k$且 $\tau(\mathcal{H}) = \lceil\frac{n}{2}\rceil$。此外，这使 $\theta$与 $\tau$之间的差距达到最大。

证明。我们首先说明，只需处理 $k=4$ 这一情形。假设该结论对 $k=4$成立。设 $k \ge 5$，并设 $n \ge 2k+1$。由于 $n-2(k-4) \ge 9$，我们知道存在一个定义在 $n-2(k-4)$ 个顶点上的 4-均匀超图 $\mathcal{H}$，使得 $\theta(\mathcal{H}) = 4$ 且 $\tau(\mathcal{H}) = \left\lceil\frac{n-2(k-4)}{2}\right\rceil$。连续应用命题5 $k-4$次后，我们得到一个定义在 $n$ 个顶点上的 $k$-均匀超图 $\mathcal{H}'$，使得$\theta(\mathcal{H}') = \theta(\mathcal{H}) + (k-4) = k$且 $\tau(\mathcal{H}') = \tau(\mathcal{H}) + (k-4) = \left\lceil\frac{n-2(k-4)}{2}\right\rceil + (k-4) = \lceil\frac{n}{2}\rceil$。

现在，对于 $k=4$ 的情形，我们可以假设 $n$ 为奇数：事实上，如果 $n$ 为偶数，那么只需在针对 $n-1$ 的构造中添加一个孤立顶点即可。定义 $L = \frac{n-3}{2}$ 和 4-均匀超图 $\mathcal{H}$ 如下（见图5）：

$$
\begin{aligned}
V(\mathcal{H}) &= \{a_1,\dots,a_{L+1},b_1,\dots,b_L,\overline{a_1},\overline{a_2}\} \cup \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\};\\
E(\mathcal{H}) &= \{e_1,\dots,e_L\} \cup E_1 \cup E_2, \text{ where}\\
e_i &= \{a_i,a_{i+1},a_{i+2},b_i\} \text{ for all } i \in [\![1,L-1]\!],\ e_L = \{a_L,a_{L+1},a_1,b_L\}, \text{ and}\\
E_i &= \{\{a_i,\overline{a_i},u_j,u_{j'}\} \mid j \ne j' \in [\![1,5]\!]\} \text{ for all } i \in [\![1,2]\!].
\end{aligned}
$$

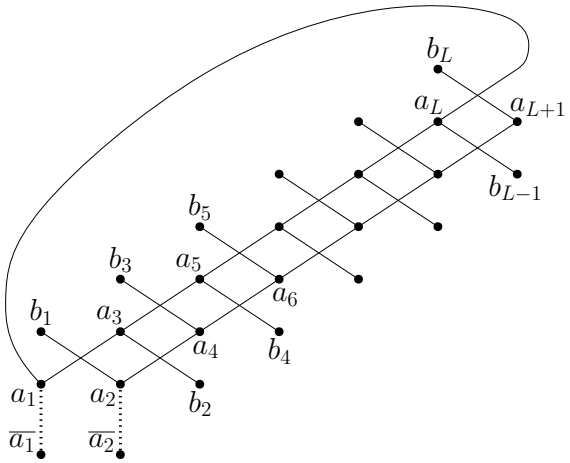



图5：命题16的构造，其中 $L=11$。底部的两条虚线分别表示 $E_1$ 和 $E_2$ 中的超边。

为了尽量减少此构造中使用的顶点数，我们实际上从 $2L-1$ 个顶点 $a_3,\dots,a_{L+1},b_1,\dots,b_L$ 中任意选取 $u_1,u_2,u_3,u_4,u_5$（这得益于 $n \ge 9$，因此 $L \ge 3$），从而 $\mathcal{H}$ 确实有 $(L+1)+L+2 = n$ 个顶点。不过，我们更愿意用不同的方式为它们命名，因为设想 $u_j$ 与其他顶点彼此分开，应当有助于读者理解。

$E_1 \cup E_2$ 中的超边是唯一包含某些 $u_j$ 的超边；无论如何，在博弈的第一阶段结束后，它们就无关紧要了，因为它们的存在只是为了让 Maker 能在博弈开始时毫无争议地占有 $a_1$ 和 $a_2$。集合 $E_i$ 的作用是模拟一条超边 $\{a_i, \overline{a_i}\}$，因为在 4-均匀构造中无法使用这样的超边。

对于 $\mathcal{H}$上的（$*$，$*$）-博弈，我们现在定义常规玩法，即博弈的一种特定展开形式。在这种形式下，Maker 恰好经过 $\frac{n+1}{2} = L + 2$ 步并且只使用四枚棋子获胜：

- 阶段 1：Maker 按任意顺序将棋子放置在 $a_1$ 和 $a_2$ 上，Breaker 则分别回应，将 $\overline{a_1}$ 和 $\overline{a_2}$ 据为己有。

- 第二阶段：Maker 按 $e_1$、……、$e_L$ 的顺序沿着超边采用强制策略，持续制造一步威胁，直到博弈结束，其方式与我们在 3-一致情形中所见的类似。她首先将一枚棋子放在 $a_3$上，这促使 Breaker 由于超边 $e_1$而占据 $b_1$；随后她将一枚棋子放在 $a_4$上，这促使 Breaker 由于超边 $e_2$ 而占据 $b_2$。此时，Maker 在棋盘上已有四枚棋子。$a_1$ 上的棋子保持不动，并且对于所有 $i \in [\![3, L-1]\!]$，Maker 将 $a_{i-1}$ 上的棋子移至 $a_{i+2}$，这促使 Breaker 由于超边 $e_i$而占据 $b_i$。最后，Maker 将 $a_{L-1}$ 上的棋子移至 $b_L$，并通过填满超边 $e_L$获胜。

现在我们证明，常规玩法对双方玩家都是最优的。这里的最优性是指 Maker 力求尽快获胜，而 Breaker 则力求尽可能长久地坚持下去。尽管 Maker 在整个常规玩法中只使用四枚棋子，但我们将证明，即使使用更多棋子，她也无法更快获胜。

断言 1. 如果双方从一开始就遵循常规玩法，而 Maker 随后偏离常规玩法（即使 Maker 每步都使用一枚新棋子），那么 Maker 会陷入必败局面。

断言 2. 如果双方此前一直遵循常规玩法，那么 Breaker 在自己的回合遵循常规玩法是最优的。

假设断言 1 成立时的断言 2 的证明。我们先给出较简单的证明，并假设断言 1 成立。在自己的回合，Breaker 可以继续遵循常规玩法，只要 Maker 也这样做：如果 Maker 偏离玩法，那么根据断言 1，Breaker 就会获胜；否则，Breaker 会在 $\frac{n+1}{2}$ 步后落败，而这是可能拖延最久的败局。因此，偏离常规玩法对 Breaker 来说更好的唯一可能，就是这样做能让他赢得博弈。所以，只需证明偏离常规玩法会导致 Breaker 输掉博弈。第二阶段的情况显然如此，因为 Breaker 只是在防守 Maker 接连发起的一步获胜威胁。至于阶段 1，假设 Maker 刚刚占据了 $a_i$，其中 $i \in [\![1, 2]\!]$（也可能是 Maker 先前已占据 $a_{3-i}$，而 Breaker 按照常规玩法回应并占据了 $\overline{a_{3-i}}$），并假设 Breaker 回应时占据了某个 $x \neq \overline{a_i}$。此时 Maker 可以自己占据 $\overline{a_i}$。这样一来，至少还有四个 $u_j$ 可用（总共五个，但 $x$ 可能已经被占据）。因此，Maker 可以在接下来的两步中任意占据 $u_j$ 中的两个顶点，从而自动填满 $E_i$ 中的某条超边。□

断言 1 的证明。我们证明，如果 Maker 偏离常规玩法，那么 Breaker 就有一步棋可以使最终局面存在一个完全配对，因此根据命题 3，从此刻起 Breaker 就有获胜策略。

- 情形 1：Maker 在阶段 1 中偏离常规玩法，即 Maker 认领某个 $x \notin \{a_1, a_2\}$，但此前尚未同时认领 $a_1$ 和 $a_2$。如果对于某个 $i \in [\![1, 2]\!]$，$x = \overline{a_i}$，那么 Breaker 认领 $y = a_i$；否则 Breaker 任意认领一个可用顶点 $y \in \{a_1, a_2\}$。在所有情况下，我们现在都给出一个配对 $\Pi(x, y)$，它在最终局面中是完备的（见图6）。

  – 情况e 1.a：$x = a_{i_0}$ 对于某些 $i_0 \in [\![3, L+1]\!]$ 和 $y = a_1$。由于 $E_1 \cup \{e_1, e_L$ 中的超边 $\}$

都包含 $y$，我们只需覆盖 $E_2 \cup \{e_2, \ldots, e_{L-1}\}$ 中的那些。为此，我们定义：

$$\Pi(x,y) = \{\{a_2, \overline{a_2}\}\} \cup \{\{a_j, b_{j-1}\} \mid j \in [\![3, i_0 - 1]\!]\} \cup \{\{a_j, b_{j-2}\} \mid j \in [\![i_0 + 1, L + 1]\!]\}.$$

注意，$a_2$ 和 $\overline{a_2}$ 可能已分别在第一回合被 Maker 和 Breaker 占据，但这并无妨，因为在这种情况下，无需覆盖 $E_2$ 中的超边。我们的配对定义允许纳入已被占据的顶点；只要这些顶点并非覆盖必要超边所需，该配对仍可以是完备的。

– 情况1.b：对于某些 $i_0 \in [\![1、 L]\!]$ 和 $y = a_1$，$x = b_{i_0}$。我们定义：

$$\Pi(x,y) = \{\{a_2, \overline{a_2}\}\} \cup \left\{ \{a_{2j-1}, a_{2j}\} \,\middle|\, j \in \left[\!\!\left[2, \left\lfloor \frac{L+1}{2} \right\rfloor \right]\!\!\right] \right\}.$$

最高索引的配对是 $\{a_L, a_{L+1}\}$（若 $L$ 为奇数）或 $\{a_{L-1}, a_L\}$（若 $L$ 为偶数），因此它覆盖$e_{L-1}$。

– 情形 1.c：对于某些 $i_0 \in [\![3、 L+1]\!]$ 和 $y = a_2$，$x = a_{i_0}$。由于 $E_2 \cup \{e_1, e_2\}$中的超边都包含 $y$，我们只需覆盖 $E_1 \cup \{e_3, \ldots, e_L\}$中的超边。我们定义：

$$\Pi(x,y) = \{\{a_1, \overline{a_1}\}\} \cup \{\{a_j, b_j\} \mid j \in [\![3, i_0 - 1]\!]\} \cup \{\{a_j, b_{j-1}\} \mid j \in [\![i_0 + 1, L + 1]\!]\}.$$

– 情形 1.d：对于某些 $i_0 \in [\![1、 L]\!]$ 和 $y = a_2$，$x = b_{i_0}$。我们定义：

$$\Pi(x,y) = \{\{a_1, \overline{a_1}\}\} \cup \left\{ \{a_{L-2j}, a_{L+1-2j}\} \,\middle|\, j \in \left[\!\!\left[0, \left\lceil \frac{L}{2} \right\rceil - 2 \right]\!\!\right] \right\}.$$

最低编号的配对是 $\{a_3, a_4\}$（若 $L$ 为奇数）或 $\{a_4, a_5\}$（若 $L$ 为偶数），因此它覆盖 $e_3$。

– 情形 1.e：对于某些 $i_0 \in [\![1、 2]\!]$，$x = \overline{a_{i_0}}$。由于在此情形下 $y = a_{i_0}$，$E_i$ 中的超边无需覆盖，因此我们可以重复使用前面情形中定义的某个配对，例如 Π（$x$、 $y$） = Π（$a_3$、 $a_{i_0}$）。

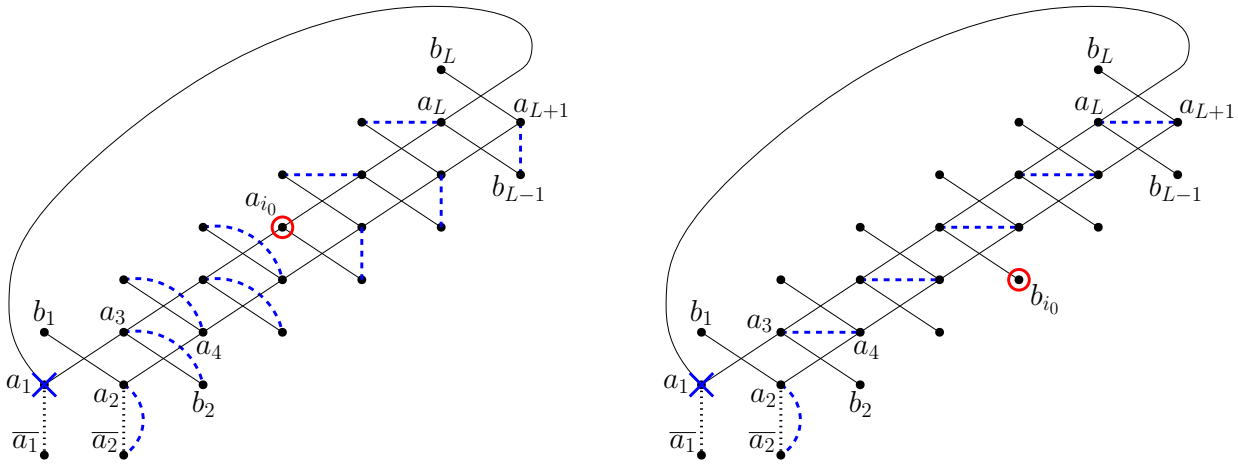



图6：$L = 11$ 时情形 1.a（左）和 1.b（右）的示意图。蓝色虚线表示配对。

• 情况2：Maker 在第二阶段偏离常规玩法。假设这发生在恰好进行了 $i-1$ 回合常规玩法之后（$i \in [\![3, L+1]\!]$ 是唯一的），在此期间，玩家依次占据的顶点为：Maker 占据 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{i-1}$，Breaker 占据 $\overline{a_1}, \overline{a_2}, b_1, \ldots, b_{i-3}$。此时，Maker 偏离常规玩法，改为占据某个 $x \neq a_i$，而不是按照常规玩法占据 $a_i$。随后，Breaker 自行占据 $a_i$。注意，此时 Breaker 尚未使用的唯一超边为 $e_{i+1}, \ldots, e_L$。同样，在所有情况下，我们都展示一个配对 Π($x$)，它在最终局面中是完备的（见图7）。

– 情况2.a：对于某些 $i_0 \in [\![i+1, L+1]\!]$，$x = a_{i_0}$。我们定义：

$$\Pi(x) = \{\{a_j, b_j\} \mid j \in [\![i+1, i_0-1]\!]\} \cup \{\{a_j, b_{j-1}\} \mid j \in [\![i_0+1, L+1]\!]\}.$$

– 情形2.b：$x = b_{i_0}$ 对于某些 $i_0 \in [\![i-2、\ L]\!]$。我们定义：

$$\Pi(x) = \left\{ \{a_{L-2j}, a_{L+1-2j}\} \,\middle|\, j \in \left[\!\!\left[0, \left\lceil \frac{L-i}{2} \right\rceil - 1 \right]\!\!\right] \right\}.$$

最低编号的配对是 $\{a_{i+2}, a_{i+3}\}$，如果 $L$ 和 $i$ 的奇偶性相同；否则是 $\{a_{i+1}, a_{i+2}\}$，因此它覆盖了 $e_{i+1}$。□

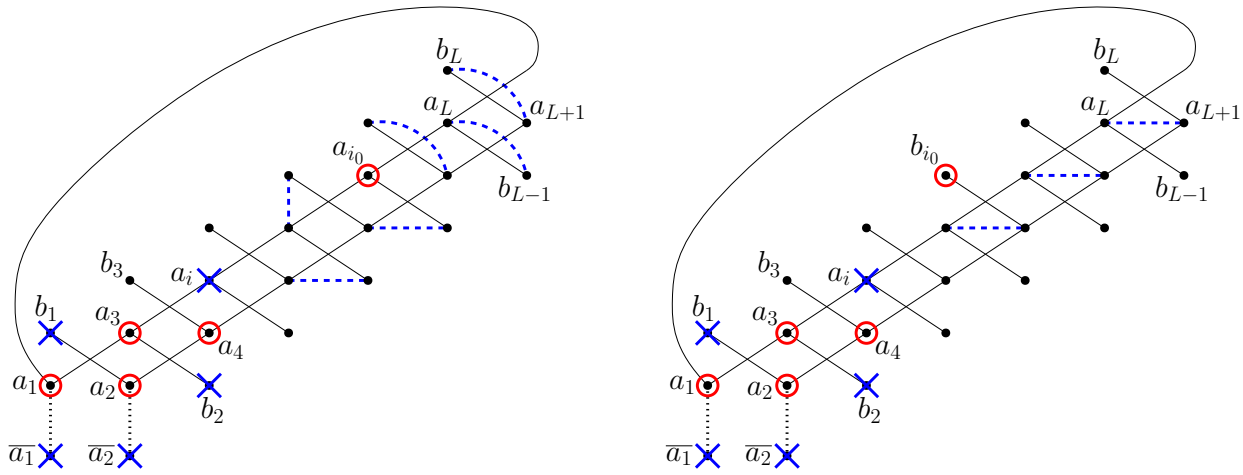



图7：$L = 11$ 和 $i = 5$ 下情况2.a（左）和2.b（右）的示意图。蓝色虚线表示配对。

结合断言1和2，我们得到双方采用常规玩法时的最优性，因此$\theta(\mathcal{H}) = 4$ 和 $\tau(\mathcal{H}) = \frac{n+1}{2}$。于是，命题的最后一个断言直接由命题11得出。■

我们已经看到，在3-均匀超图中，Maker 选择的顶点除了一个以外，都只会帮助她在连续一两个回合内制造威胁，之后便毫无用处；这也解释了为什么她只需三个棋子就能应对。在4-一致超图中，情况则大不相同：Maker 可能需要长时间保留许多顶点，而这只有在她有足够多棋子可用时才能做到。我们实际上证明了，Maker 获胜所需的棋子数量可能与顶点总数呈线性关系。

命题 17. 对所有 $k \geq 4$ 和所有 $n \geq 2k + 12$，存在一个 $k$-均匀超图 $\mathcal{H}$，它有 $n$ 个顶点，使得 $\theta(\mathcal{H}) \geq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$。

证明. 我们先说明，只需处理 $k = 4$ 这一情形。假设结论对 $k = 4$ 成立。令 $k \geq 5$，并令 $n \geq 2k + 12$。由于 $n - 2(k-4) \geq 20$，我们知道存在一个 4-均匀超图 $\mathcal{H}$，它有 $n - 2(k-4)$ 个顶点，使得 $\theta(\mathcal{H}) \geq \left\lfloor \frac{n-2(k-4)}{6} \right\rfloor$。连续应用命题 5 $k-4$ 次后，我们得到一个 $k$- 均匀超图 $\mathcal{H}'$，它有 $n$ 个顶点，使得$\theta(\mathcal{H}') = \theta(\mathcal{H}) + (k-4) \geq \left\lfloor \frac{n-2}{6}(k-4) \right\rfloor + (k-4) = \lfloor \frac{n+4k-16}{6} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$。

为了证明情形 $k = 4$，我们将证明如下结论：对于所有 $N \geq 2$，都存在一个 4-均匀超图 $\mathcal{H}$，其顶点集为 $6N + 8$，满足 $\theta(\mathcal{H}) = N + 2$。事实上，假设该结论成立。给定 $n \geq 20$，我们便可以定义 $N = \lfloor \frac{n-8}{6} \rfloor$，并得到一个 4-均匀超图 $\mathcal{H}$，其顶点集为

$6N+8$，满足 $\theta(\mathcal{H}) = N+2$。通过向 $\mathcal{H}$ 添加至多五个孤立顶点，我们得到一个 4-均匀超图 $\mathcal{H}'$，其顶点集为 $n$，满足 $\theta(\mathcal{H}') = \theta(\mathcal{H}) = N+2 = \left\lfloor \frac{6N+13}{6} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$。

令 $N \geq 2$。我们定义 4-均匀超图 $\mathcal{H}$ 如下（见图 8）：

$$V(\mathcal{H}) = \{a_0, \ldots, a_{2N}, b_1, \ldots, b_{2N}, c_1, \ldots, c_N, \overline{c_1}, \ldots, \overline{c_N}, \overline{a_0}, \overline{a_{2N}}, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\};$$
$$E(\mathcal{H}) = \{e_1, \ldots, e_{2N}\} \cup E_{a_0} \cup E_{a_{2N}} \cup E_{c_1} \cup \cdots \cup E_{c_N},\ \text{其中} e_i = \{a_{i-1}, a_i, b_i, c_i\}$$
$$\text{对所有 } i \in [\![1,\ N]\!] e_i = \{a_{i-1}, a_i, b_i, c_{i-N}\} \text{ 对所有 } i \in [\![N+1,\ \text{且} 2N]\!]$$
$$E_v = \{\{v, \overline{v}, u_j, u_{j'}\} \mid j \neq j' \in [\![1,5]\!]\} \text{对所有 } v \in \{a_0, a_{2N}, c_1, \ldots, c_N\}.$$

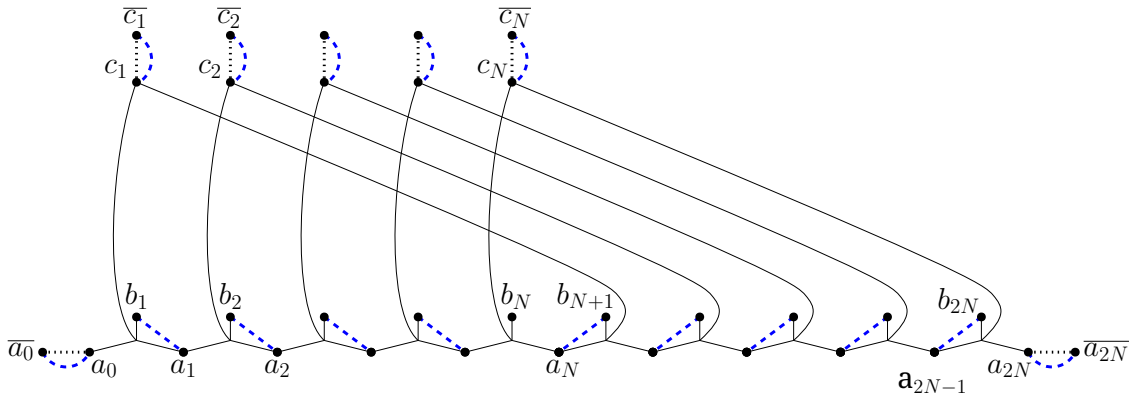



图 8：命题 17 的构造。黑色点线表示 $E_v$ 中的超边。蓝色虚线表示配对 $\Pi$。

显然，$\mathcal{H}$ 有 $6N+8$ 个顶点。总之，我们必须证明 $\theta(\mathcal{H}) = N+2$。我们的构造思路很简单。与命题 16 的证明中的 $E_i$类似，设置 $E_v$是为了让 Maker 能够不受阻碍地在每个 $v \in \{a_0, a_{2N}, c_1, \ldots, c_N\}$ 上放置棋子：事实上，如果 Breaker 不通过占据对应的 $\overline{v}$来应对，那么 Maker 就可以自己在 $\overline{v}$ 上放置棋子，并在接下来的两步中于 $u_1$、$u_2$、$u_3$、$u_4$、$u_5$ 中的任意两个顶点上放置棋子，从而获胜。$\theta(\mathcal{H})$的上界来自以下观察：如果 Maker 已在 $a_0$、$a_{2N}$、$c_1$、……、$c_N$上放置棋子，那么她可以让棋子留在这些位置，并利用强制策略，只需再放置一个棋子即可获胜；这是因为此时超边 $e_1$、……、$e_{2N}$将构成一条路径，其作用与 3-一致情形中的双节棍完全相同。至于 $\theta(\mathcal{H})$的下界，关键在于每个 $E_v$ 中的超边都只能“单次使用”：如果 Maker 曾从顶点 $v$上移走棋子，那么之后再把棋子放回 $v$ 也毫无作用，因为 Breaker 第一次就已经占据了$\overline{v}$ 。因此，Maker 必须始终在$c_1$、……、$c_N$上保留棋子。下面给出严格证明。

我们先证明 $\theta(\mathcal{H}) \leq N+2$，这显而易见。在 $\mathcal{H}$ 上进行（$N+2, *$）-博弈时，Maker 首先在 $a_0, c_1, \ldots, c_N$ 上放置棋子，迫使 Breaker 分别占据 $\overline{a_0}, \overline{c_1}, \ldots, \overline{c_N}$。注意，她暂时并未在 $a_{2N}$ 上放置棋子，因此保留了最后一枚棋子，并将其放在 $a_1$ 上。由于 Maker 威胁要填满 $e_1$，Breaker 只能占据 $b_1$。之后，对于所有 $i \in [\![2, 2N]\!]$，Maker 都将她放在 $a_{i-2}$ 上的棋子移到 $a_i$ 上，威胁填满 $e_i$，并迫使 Breaker 占据 $b_i$。接着，Maker 可以移动任意三枚不在 $a_{2N}$ 上的棋子，依次将它们放到 $\overline{a_{2N}}$ 上，以及 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ 中任意两个位置上，从而填满 $E_{a_{2N}}$ 中的某条超边并赢得博弈。

最后，我们来证明 $\theta(\mathcal{H}) \geq N+2$。首先定义以下配对（如图 8 所示）；它在 $\mathcal{H}$ 中并不完备，但覆盖了除 $e_N$ 之外的所有超边：

$$\Pi = \{\{v, \overline{v}\} \mid v \in \{a_0, a_{2N}, c_1, \ldots, c_N\}\} \cup \{\{a_i, b_i\} \mid i \in [\![1, N-1]\!]\} \cup \{\{a_i, b_{i+1}\} \mid i \in [\![N, 2N-1]\!]\}.$$

我们将证明，以下两阶段策略是 Breaker 在 $\mathcal{H}$ 上进行的 $(N+1, *)$-博弈中的获胜策略：

- 阶段 1：如果 Breaker 可以占据一个顶点，使得最终局面存在完全配对，那么他就占据任意一个这样的顶点，并切换到第二阶段。否则，他采用与不完全配对 $\Pi$ 相对应的配对策略。也就是说，记 $x$ 为 Maker 刚刚放置棋子的顶点：如果 $x$ 属于 $\Pi$ 中的一对，那么 Breaker 就占据它的配对顶点，即该对中的另一个顶点；如果 $x$ 不属于 $\Pi$ 中的任何一对，或者虽然属于某一对，但其配对顶点已经被 Breaker 占据（这可能发生，因为 Maker 可以先腾空一个顶点，之后再将棋子放回该顶点），那么 Breaker 就占据任意一个顶点。

- 第二阶段：Breaker 使用与某个完全配对对应的配对策略，直至游戏结束。让 $(N+1,*)$-博弈进行下去，Maker 采用她选择的任意策略，而 Breaker 则采用上述策略。接下来需要证明的是，第二阶段确实会到来，因为届时命题 3 便允许我们得出结论。

每当 Maker 移动一个已经放置的棋子时，我们将其视为两个连续动作：Maker 移除一个棋子，然后 Maker 放置一个棋子。将“移除”动作视为前一回合的一部分会很有帮助。因此，我们按以下顺序定义第 $t \geq 1$ 回合中的行动：

1. Maker 在某个空闲顶点 $x_t$ 上放置一个棋子。（此时，我们将 Maker 放有棋子的所有顶点组成的集合定义为 $M_t \subseteq \{x_1, \ldots, x_t\}$，其中 $M_0 = \varnothing$。）2. Breaker 占据某个空闲顶点 $y_t$。3. 若适用，Maker 移除她的一个棋子。（我们将第 $t$ 回合结束时得到的局面定义为 $\mathcal{P}_t$，其中 $\mathcal{P}_0 = (\mathcal{H}, \varnothing, \varnothing)$ 为初始局面。）

反设 Maker 获胜。令 $T$ 为博弈的持续时间，即 Maker 在第 $T$ 回合完成一条超边。注意，对于 $t \in [\![0, T]\!]$，定义了 $x_t, M_t$；而对于 $t \in [\![0, T-1]\!]$，定义了 $y_t, \mathcal{P}_t$。为考虑从给定局面 $\mathcal{P} = (\mathcal{H}, M, B)$ 出发的落子，我们引入记号 $(\mathcal{P}, M', B') = (\mathcal{H}, M \cup M', B \cup B')$。

断言 3. Breaker 的所有落子均按照与 $\Pi$ 相关联的配对策略进行；并且，对于所有 $t \in [\![1, T]\!]$ 以及局面 $(\mathcal{P}_{t-1}, \{x_t\}, \varnothing)$ 中的每个空闲顶点 $y$，在局面 $(\mathcal{P}_{t-1}, \{x_t\}, \{y\})$ 中都不存在完备的配对。此外，对于所有 $t \in [\![0, T-1]\!]$，$\Pi$，覆盖了 $E(\mathcal{P}_t)$ 中除 $e_N$ 之外的所有超边。

断言 3 的证明。Maker 获胜意味着在整个博弈持续期间，Breaker 都被困在阶段 1 中。至于该断言的最后一项，我们知道它对 $t = 0$ 成立，而 Breaker 使用与 $\Pi$ 相关联的配对策略这一事实，确保它在整个博弈过程中始终成立。□

下面的断言只是一个简单的观察：Maker 为获胜而填满的超边必定是 $e_N$，而 Maker 只有在最后一步才会将棋子放在 $b_N$ 上。

引理 4。我们有 $e_N \subseteq M_T$，此外还有 $x_1, \ldots, x_{T-1} \neq b_N$ 和 $x_T = b_N$。

引理 4 的证明。由于 Breaker 使用与 $\Pi$ 相关联的配对策略，该策略覆盖了 $E(\mathcal{H})$ 中除 $e_N$ 之外的所有超边，因此 Maker 唯一能填满的超边是 $e_N$。现在，反设对于某个 $t \in [\![1, T-1]\!]$，有 $x_t = b_N$。由于 $t < T$，存在 $y \in e_N \setminus M_t$：考虑局面 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_{t-1}, \{b_N\}, \{y\})$。由断言 3 可知，$\Pi$ 覆盖了 $E(\mathcal{P}_{t-1})$ 中除 $e_N$ 之外的所有超边；此外，由于 $y \in e_N$，$e_N \notin E(\mathcal{P})$，因此 $\Pi$ 在 $\mathcal{P}$ 中是完备的。这与断言 3 矛盾。□

对于所有 $i \in [\![1, N]\!]$，引入以下记号（见图 9）：

- $I_i^L = \{a_i, \ldots, a_{N-1}\} \cup \{b_i, \ldots, b_N\}$；
- $I_i^R = \{a_N, \ldots, a_{N+i-1}\} \cup \{b_N, \ldots, b_{N+i}\}$；
- $I_i = I_i^L \cup I_i^R$；
- $t(i) = \text{分钟}\{t \in [\![1, T]\!] \mid x_t \in I_i\} = \text{分钟}\{t \in [\![1, T]\!] \mid M_t \cap I_i \neq \varnothing\}$。

注意，由于对所有 $i \in [\![1, N]\!]$ 和 $b_N \in M_T$，$b_N \in I_i$，因此 $t(i)$ 定义良好，依据断言 4.

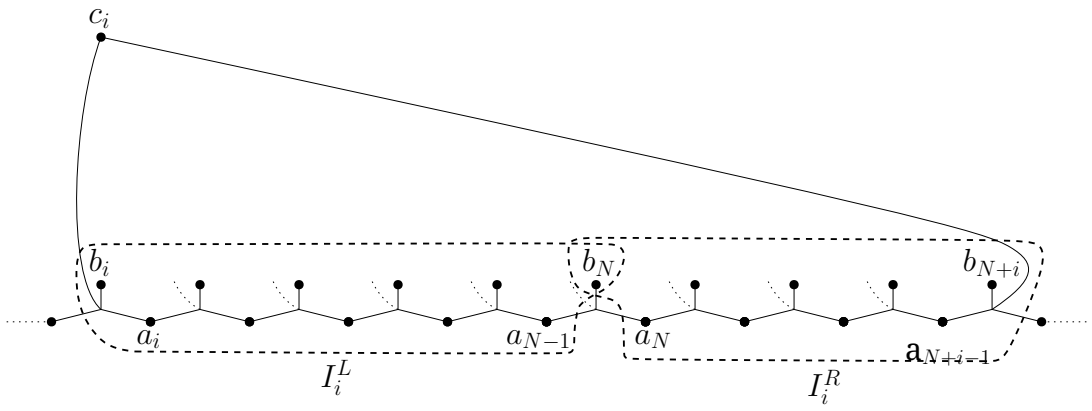



图 9： $I_i^L$和 $I_i^R$的定义。

在上界的证明中，我们已经看到，控制 $c_i$（即在 $c_1$、……、$c_N$ 上放置棋子）对 Maker 至关重要：这使她能够迫使 Breaker 走出所有步，从而从左向右推进，直到赢得博弈。证明结尾的思路依赖于这一原则，具体如下。Maker 首次在“区间” $I_i$ 内的某个 $x_t$ 上放置棋子时，Maker 必须控制 $c_i$（这将是断言 5）；否则，Breaker 可以通过自行占据 $c_i$ 来应对，这会从 $x_t$ 的两侧阻断路径，并形成完全配对。由于对所有 $i$ 都有 $b_N \in I_i$，这意味着每个 $c_i$ 都会在某个时刻由 Maker 控制。然而，Maker 总共至多使用 $N+1$ 个棋子，因此她必然会在博弈过程中从某个 $c_i$ 上移走一个棋子（这将是断言 6）。首次发生这种情况时，该 $c_i$ 便空了出来，可以用来帮助构建完全配对，因为 Breaker 已经占据了 $\overline{c_i}$。现在我们给出详细说明。

断言 5。对于所有 $i \in [\![1, N]\!]$，都有 $c_i \in M_{t(i)-1}$。

断言 5 的证明。反设对于某个 $i \in [\![1, N]\!]$，$c_i \notin M_{t(i)-1}$。利用如下事实：根据 $t(i)$ 的极小性，在 $\mathcal{P}_{t(i)-1}$ 中的 $I_i$ 内没有 Maker 棋子，我们将构造一个配对 $\Pi'$，使其在 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_{t(i)-1}, \{x_{t(i)}\}, \{c_i\})$ 中完备。这应理解为：“Maker 将她的棋子放在 $x_{t(i)}$ 上之后，Breaker 本可以占据 $c_i$，从而获得一个完全配对。”我们从 $\Pi$ 出发，只修改 $I_i$ 内部的配对来构造该配对（见图 10）：

- 第一种情况：$x_{t(i)} = b_i$（情况 $x_{t(i)} = b_{N+i}$ 类似）。我们定义 $\Pi'$，使其与 $\Pi$ 相同，只是将 $I_i$ 内部的配对替换为 $\ell \in [\![i+1, N+i-1]\!]$ 对应的配对 $\{a_\ell, b_\ell\}$。
- 第二种情况：$x_{t(i)} = b_j$ 对于某些 $j \in [\![i+1, N+i-1]\!]$。我们定义 $\Pi'$，使其与 $\Pi$相同，只是将 $I_i$中的配对替换为配对 $\{a_{j-1}, a_j\}, \{a_\ell, b_{\ell+1}\}$（对于 $\ell \in [\![i, j-2]\!]$），以及 $\{a_\ell, b_\ell\}$（对于 $\ell \in [\![j+1, N+i-1]\!]$）。
- 第三种情况：$x_{t(i)} = a_j$ 对于某些 $j \in [\![i, N+i-1]\!]$。我们定义 $\Pi'$，使其与 $\Pi$ 相同，只是将 $I_i$ 中的配对替换为配对 $\{a_\ell, b_{\ell+1}\}$（对于 $\ell \in [\![i, j-1]\!]$），以及 $\{a_\ell, b_\ell\}$（对于$\ell \in [\![j+1, N+i-1]\!]$）。

在所有情况下，新定义的配对都覆盖超边 $e_{i+1}, \ldots, e_{N+i-1}$（注意，这包括 $e_N$，它是唯一未被 $\Pi$覆盖的超边）。此外，$e_i, e_{N+i} \notin E(\mathcal{P})$，因为 $c_i \in e_i$ 和 $c_i \in e_{N+i}$，因此 $\Pi'$ 覆盖了 $E(\mathcal{P})$ 中的所有超边。这与断言 3 矛盾。□

断言 6. 存在 $(t, i) \in [\![0, T-1]\!] \times [\![1, N]\!]$，使得 $c_i \in M_t$ 且 $c_i \notin M_{t+1}$。换句话说，在博弈进行到某个时刻时，Maker 会从某个 $c_i$ 中移除一个棋子。此外，对于满足$t$ 且最小的此类 $(t, i)$，我们有 $M_t \cap I_i^L = \varnothing$ 或 $M_t \cap I_i^R = \varnothing$。

断言 6 的证明。反设第一个断言不成立：那么根据断言 5，对所有 $i \in [\![1$，都有 $c_i \in M_T\ N]\!]$。由于根据引理 4 有 $e_N \subseteq M_T$，我们得到 $|M_T| \geq N+3$，这与以下事实矛盾：

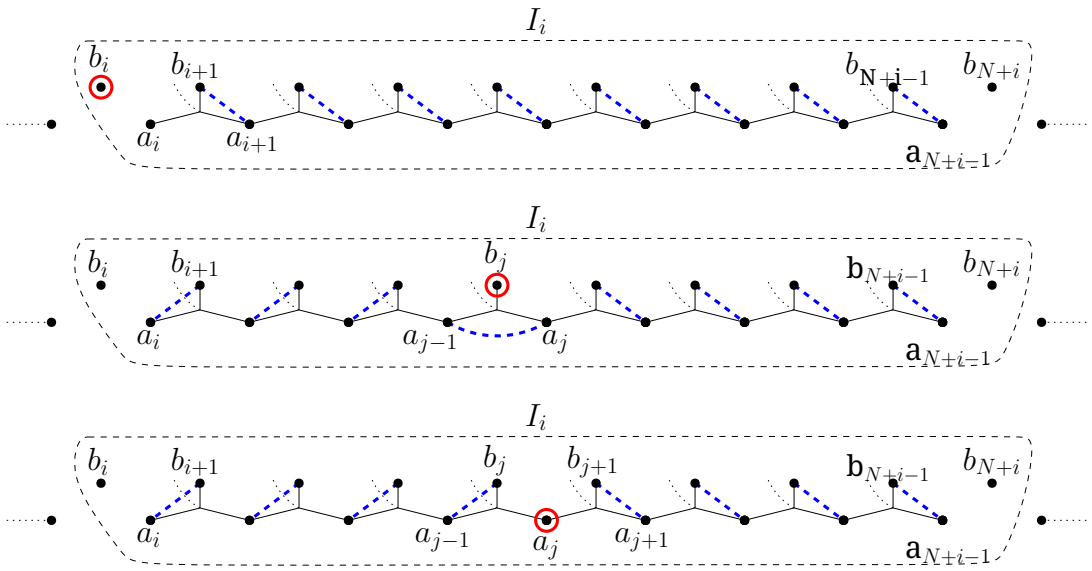



图 10：断言 5 的证明中 $I_i$ 使用的配对。从上到下的三种情况：$x_{t(i)} = b_i$，$x_{t(i)} = b_j$（$j \in [\![i+1, N+i-1]\!]$），$x_{t(i)} = a_j$。蓝色虚线表示配对。超边 $e_i$ 和 $e_{i+N}$ 未画出，以强调它们无需被覆盖，因为它们包含 $c_i$。

Maker 只有 $N+1$ 枚棋子。

对于第二个断言，设 $(t, i) \in [\![0, T-1]\!] \times [\![1, N]\!]$，使得 $c_i \in M_t$ 且 $c_i \notin M_{t+1}$，其中 $t$ 是极小的。反设存在 $v^L \in M_t \cap I_i^L$ 和 $v^R \in M_t \cap I_i^R$。注意 $v^L \neq v^R$：事实上，根据定义有 $I_i^L \cap I_i^R = \{b_N\}$，而引理 4 保证 $b_N \notin M_t$，因为 $t < T$。现在，对所有 $j \in [\![1, N]\!]$：

- 我们有 $t \geq t(j)$。事实上，如果 $j \leq i$，那么 $I_j \supseteq I_j^L \supseteq I_i^L \ni v^L$；如果 $j \geq i$，那么 $I_j \supseteq I_j^R \supseteq I_i^R \ni v^R$。
- 根据断言 5，我们知道 $c_j \in M_{t(j)-1}$。由 $t$ 的极小性可知，这枚棋子在 $c_j$ 上不会在第 $t$ 回合之前被移除，因此 $c_j \in M_t$。

总之，我们有 $\{c_1, \ldots, c_N, v^L, v^R\} \subseteq M_t$，因此 $|M_t| \geq N+2$，这再次与 Maker 只有 $N+1$ 枚棋子的事实矛盾。□

令 $(t, i) \in [\![0, T-1]\!] \times [\![1, N]\!]$ 满足断言 6，其中 $t$ 取极小值，并假设 $M_t \cap I_i^L = \varnothing$（$M_t \cap I_i^R = \varnothing$ 的情形类似）。我们将利用以下几个事实，构造一个在 $\mathcal{P}_t$ 中完备的配对 $\Pi'$：

- 回想一下，$\mathcal{P}_t$ 是回合 $t$ 结束时的局面，即刚刚移除 $c_i$ 上的棋子之后的局面，因此，$\mathcal{P}_t$ 恰好在 $M_t \setminus \{c_i\}$ 上包含 Maker 棋子。特别地，$I_i^L \cup \{c_i\}$ 内部没有 Maker 棋子：所有这些顶点都可以用于我们的配对。

- 由于 $c_i \in M_t$，存在 $t' \in [\![1, t]\!]$ 使得 $x_{t'} = c_i$。根据 Breaker 的策略定义，这意味着 $y_{t'} = \overline{c_i}$。因此，$E_{c_i}$ 中的所有超边都已经由 Breaker 在 $\mathcal{P}_{t'}$ 中处理完毕；对于 $\mathcal{P}_t$ 也同样如此，因为 $t \geq t'$。

定义 $\Pi'$ 如下：令其与 $\Pi$ 相同，但将 $I_i^L$ 内部的 $\{c_i, \overline{c_i}\}$ 及各配对分别替换为 $\{c_i, b_i\}$ 和 $\{a_\ell, b_{\ell+1}\}$，其中 $\ell \in [\![i, N-1]\!]$，如图 11 所示。

这些新配对覆盖了 $e_i, \ldots, e_N$，因此上述事实保证 $\Pi'$ 在 $\mathcal{P}_t$ 中是完备的。特别地，如果 $y$ 表示 $\Pi'$ 中 $x_{t+1}$ 的孪生顶点（或者，如果 $x_{t+1}$ 不属于 $\Pi'$ 中的任何一对，则表示任意一个顶点），那么 $\Pi'$ 在 $(\mathcal{P}_t, \{x_{t+1}\}, \{y\})$ 中也完备，这与断言 3 矛盾。■

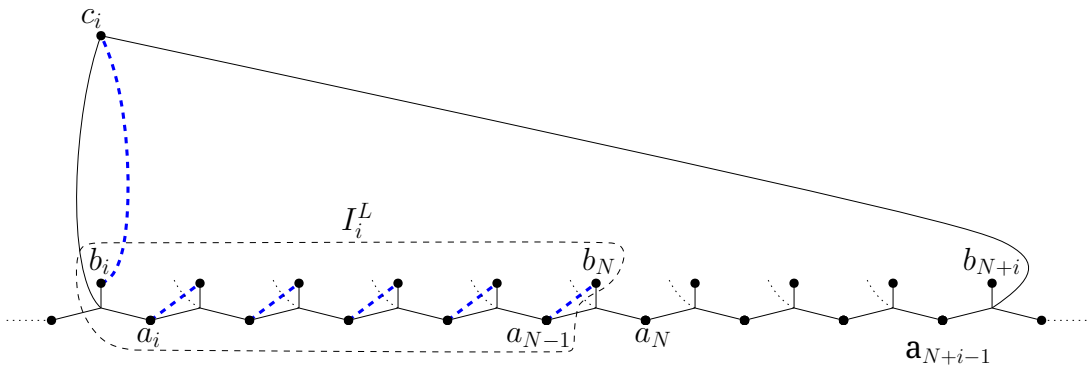



图 11：在 $I_i^L \cup \{c_i\}$ if $M_t \cap I_i^L = \varnothing$ 中使用的配对。蓝色虚线表示配对。

# 5 复杂性结果

## 5.1 一般结果

由于 $(*,*)$-博弈与经典的 Maker-Breaker 博弈相同，4-一致超图上的令牌位置博弈继承了经典版本的 PSPACE-困难性。

定理 18（[17, 定理 3.1]）。判定令牌位置游戏的胜者是 PSPACE 困难的，即使将范围限制在 4-均匀超图上也是如此。

然而，与经典 Maker-Breaker 博弈不同，如果棋子总数（将两位玩家的棋子相加）严格少于顶点数，就无法保证博弈会在多项式数量的步数内结束。因此，令牌位置博弈可能不属于 PSPACE。不过，我们可以证明它们属于 EXPTIME。

命题 19. 判定令牌位置游戏的胜者可以在 EXPTIME 内完成。

证明。设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，且 $n = |V(\mathcal{H})|$。$\mathcal{H}$ 中的每个顶点要么是空闲的，要么放有 Maker 棋子，要么放有 Breaker 棋子。因此，该博弈的不同局面数为 $3^n$。如果 Maker 有获胜策略，那么她有一种策略，使得同一局面不会出现两次，因此博弈至多进行 $3^n$ 步便会结束。因此，极小极大算法可以在 EXPTIME 内遍历所有可能的局面。■

还要回顾一下，根据定理 8，Breaker 只有一个棋子的令牌位置博弈可以在多项式时间内求解。

## 5.2 XP 算法

XP 算法的思路是：当两位玩家的棋子数都有上限时，所有局面的集合规模为多项式级，因此可以对其进行完整遍历。

下文中，博弈状态指令牌位置游戏的一个局面，以及关于下一步由哪位玩家行动的信息。给定超图 $\mathcal{H}$ 和两个整数 $a, b \in \mathbb{Z}_+$，我们定义有向图 $G_{a,\ b}(\mathcal{H})$，其顶点集为在$\mathcal{H}$上进行的 $(a, b)$ 博弈的所有可能博弈状态；当且仅当博弈状态 $v$ 可由博弈状态 $u$ 经由恰好一步（由 $u$指定的玩家执行）到达时，图中存在一条弧 $(u, v)$。

引理 20. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，且 $a, b \in \mathbb{Z}_+$。图 $G_{a,b}(\mathcal{H})$ 至多有 $2n^{2k}$ 个顶点和 $2kn^{2k+1}$ 条弧，其中 $n = |V(\mathcal{H})|$ 且 $k = \max(a, b)$。

证明. 一个博弈状态由三个选择描述：Maker 占据的顶点集合、Breaker 占据的顶点集合，以及下一位玩家的身份。这至多对应 $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k} \times 2$ 种可能。由于 $\binom{n}{k} \leq n^k$，$G_{a,b}(\mathcal{H})$ 的顶点数至多为 $2n^{2k}$。

为了界定 $G_{a,b}(\mathcal{H})$ 中顶点的最大出度。从任意博弈状态 $u$ 出发，一步操作包括选择一个棋子（最多有 $k$ 种选择）及其目的顶点（最多有 $n$ 种选择），因此 $u$ 的出度至多为 $kn$。所以，$G_{a,b}(\mathcal{H})$ 中弧的数量至多为 $2kn^{2k+1}$。■

最后，我们将令牌位置游戏编码为一个可达性游戏。这类游戏在有向图 $G$ 上进行，其中给定顶点的一个子集 $T$，我们将其视为目标集。一个唯一的棋子最初放在 $G$ 的指定顶点上。随后，玩家轮流沿着 $G$ 的一条弧移动棋子，即新顶点必须是前一个顶点的出邻居。如果棋子曾到达 $T$ 中的某个顶点，则先手玩家获胜。反之，如果游戏无限持续，且没有访问 $T$ 中的任何顶点，则后手玩家获胜。已知，只需计算目标集 [32, 21] 的 0-吸引子，即可在线性时间内判定可达性游戏的胜者。

定理 21. 若以双方棋子总数为参数，判定令牌位置游戏的胜者属于 XP。更准确地说，在含有 $n$ 个顶点的超图上，判定 $(a,b)$-博弈的胜者可在 $O(n^{2\max(a,b)+2})$ 时间内完成。

证明. 令 $F$ 为超图 $\mathcal{H}$ 上 $(a,b)$-博弈的所有博弈状态的集合，其中至少有一条 $\mathcal{H}$ 超边被 Maker 棋子填满。显然，对于目标集为 $F$ 的 $G_{a,\ b}(\mathcal{H})$ 上的可达性游戏，无论哪位玩家拥有获胜策略，该玩家在 $\mathcal{H}$ 上的 $(a,b)$-博弈中也拥有获胜策略。注意，我们规定若同一博弈状态出现两次则 Breaker 获胜，这条规则在此并不构成问题，因为先手执行可达性游戏的获胜策略时，不会重复访问任何顶点（否则就会形成无限循环的移动，这与最终会到达 $T$ 相矛盾）。

因此，利用 [21], 中的线性时间算法，判定 $\mathcal{H}$ 上 $(a,b)$-博弈的胜者可在 $O(|V|+|A|)$ 时间内完成，其中 $V$ 和 $A$ 分别是 $G_{a,\ b}(\mathcal{H})$ 的顶点集和弧集。根据引理 20，令 $k = \max(a,b)$，可得运行时间 $O(n^{2k} + kn^{2k+1}) = O(n^{2k+2})$。■

## 5.3 棋子滑动的 EXPTIME 完全性

这里我们研究令牌位置博弈中令牌滑动版本的算法复杂度。这意味着，只有当超图中存在一条同时包含顶点 $u$ 和顶点 $v$ 的超边时，棋子才能从顶点 $u$ 移动到顶点 $v$；与之相对的是不受此限制的令牌跳跃版本，前文各节研究的都是这一版本。研究这一变体的动机来自与重配置问题的类比：在这类问题中，通常会同时研究令牌跳跃和令牌滑动两种情形 [13, 4]。请注意，在令牌滑动版本中，所有超边都与问题相关，包括大小大于 Maker 棋子数的超边，因为它们可能允许执行某些移动。还要指出，只要添加一条包含超图中所有顶点的超边（这条超边无法被填满），就总能在令牌滑动情形下模拟令牌跳跃。

我们将从永恒支配集问题归约而来，该问题定义如下。设 $G$ 为一个图，$D$ 为我们称为守卫的顶点子集。永恒支配博弈由两名玩家——攻击者和防守者——进行。每一回合，攻击者选择（攻击）一个顶点 $v \notin D$，随后防守者选择一个与 $v$ 相邻的守卫 $u \in D$，并将其移动到 $v$，然后博弈以新的守卫集合 $(D \cup \{v\}) \setminus \{u\}$继续。如果在任何时候，防守者都没有合法走法，即没有守卫与 $v$相邻，那么攻击者获胜。否则，防守者获胜，即博弈将无限持续。如果防守者拥有获胜策略，我们就称初始集合 $D$ 是 $G$的一个永恒支配集。Virgile 证明了，判定 $D$ 是否为永恒支配集是

$G$ 的永恒支配集问题是 EXPTIME 完全的 [33]。我们利用这一结果证明我们的结论，该结论针对令牌滑动游戏的一般局面，也就是说，我们考虑从某个已有部分棋子放置在棋盘上的局面开始的博弈。

定理 22. 即使限制为秩 2 的超图，且 Maker 只有一枚棋子，判定令牌滑动令牌位置游戏的胜者仍是 EXPTIME-完备的。

证明. 设 $(G, D)$ 是永恒支配集问题的一个实例，其中将 $G$ 的顶点集记为 $\{v_1, \ldots, v_n\}$。我们按如下方式构造一个局面实例 $\mathcal{P} = (\mathcal{H}, M, B)$。由于此证明涉及图和超图，我们将特别使用“超边”一词，并将“边”一词留用于图。

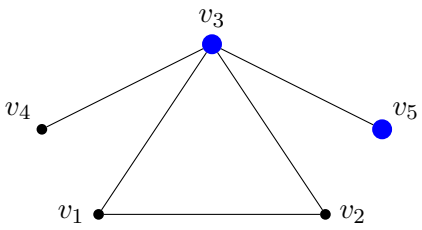
- $V(\mathcal{H}) = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{u'_1, \ldots, u'_n\}$。
- $E(\mathcal{H}) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$，其中：
  - $E_1 = \{\{u'_i\} \mid i \in [\![1, n]\!]\}$；
  - $E_2 = \{\{u_i, u'_i\} \mid i \in [\![1, n]\!]\}$；
  - $E_3 = \{\{u_i, u_j\} \mid i \neq j \in [\![1, n]\!]\}$；
  - $E_4 = \{\{u'_i, u'_j\} \mid i \neq j \in [\![1, n]\!], v_i \text{ 和 } v_j \text{ 在 } G\}$ 中相邻。
- $M = \{u_{i_0}\}$ 对于任意的 $i_0 \in [\![1, n]\!]$ 使得 $v_{i_0} \in D$。
- $B = \{u'_i \mid i \in [\![1, n]\!], v_i \in D\}$。

该构造如图 12 所示。注意，由于 Maker 只有一枚棋子，她无法通过大小为 2 的超边获胜：这些超边仅用于允许棋子滑动。

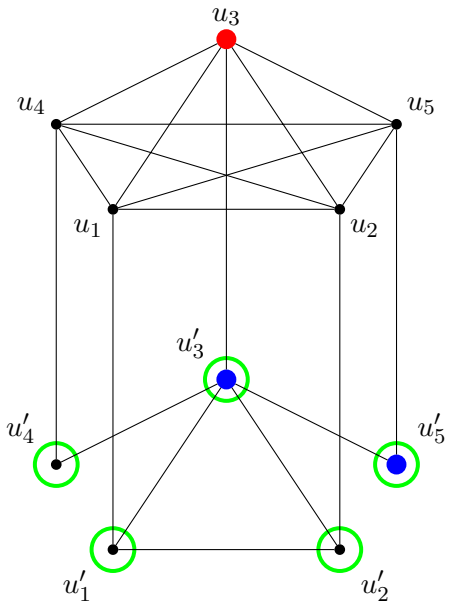
我们来证明：当且仅当 Maker 在从局面 $\mathcal{P}$ 开始的带令牌滑动的 $(1, |D|)$-博弈中获胜时，攻击者才能在 $(G, D)$ 上的永恒支配博弈中获胜。对于这一等价关系的两个方向，思路都是将永恒支配博弈中的获胜策略模拟到令牌位置游戏中，使得每回合开始时，Breaker 的棋子都位于与并行永恒支配博弈中防守者的守卫所在的 $v_j$ 相对应的 $u'_j$ 上（注意，根据 $B$ 的定义，第一回合开始时情况确实如此）。

首先，假设攻击者在 $(G, D)$ 上的永恒支配博弈中拥有获胜策略 $\mathcal{S}$。为此，每当 $\mathcal{S}$ 指示攻击某个 $v_i$时，Maker 只需将她的棋子滑到 $u_i$ （这是 $E_3$中的超边所允许的）。由于此时防守者在 $v_i$ 上没有守卫，我们知道 Breaker 在 $u'_i$上没有棋子，因此 Maker 威胁要在下一步中将棋子从 $u_i$ 滑到$u'_i$ （这是 $E_2$中的超边所允许的），从而获胜。因此，存在两种情况。如果 Breaker 未能立即自行将某个棋子滑到 $u'_i$ ，那么他就会输。否则，Breaker 将一个棋子从某个$u'_k$ 滑到 $u'_i$，而我们认为，在永恒支配博弈中，防守者已将一个守卫从 $v_k$ 移到 $v_i$ （这是因为 $E_4$ 中的超边对应于 $G$的边）。由于 $\mathcal{S}$是攻击者的获胜策略，因此某个时刻会出现前一种情况，也就是说，Maker 将获胜。

现在，假设防守者在 $(G, D)$ 上的永恒支配博弈中有一个获胜策略 $\mathcal{S}$ 。只需证明 Breaker 能确保 Maker 的棋子始终停留在某个 $u_j$ 上。注意，根据 $M$ 和 $B$ 的定义，在 Maker 的第一步之后情况确实如此：事实上，Breaker 在博弈开始时就在 $u'_{i_0}$ 上有一枚棋子，这阻止了 Maker 将她的棋子从 $u_{i_0}$ 滑到 $u'_{i_0}$。此后，每当 Maker 将她的棋子移到某个 $u_i$ 时，就有两种情况。如果 Breaker 已经在 $u'_i$ 上有一枚棋子，那么他就跳过自己的回合。否则，我们设攻击者攻击顶点 $v_i$：此时策略 $\mathcal{S}$ 指示将一名守卫从某个 $v_k$ 移到 $v_i$，Breaker 则通过将一枚棋子从 $u'_k$ 滑到 $u'_i$ 来照做（因为 $E_4$ 中的超边与 $G$ 的边相对应，所以这是允许的）。由于 $\mathcal{S}$ 是防守者的获胜策略，Breaker 可以无限期地执行这一策略。因此，在每个回合结束时，Maker 的棋子都位于某个顶点 $u_i$ 上，而 Breaker 在 $u'_i$ 上有一枚棋子，所以 Maker 永远无法获胜。■




(a) 永恒支配博弈的一个实例（$G, D$）。守卫集合 $D$ 以蓝色顶点表示。




(b) 由我们的归约得到的对应超图。红色顶点表示 Maker 的棋子；蓝色顶点表示 Breaker 的棋子。

图 12：定理 22 的证明中的构造。大小为 1 的超边用绿色圆圈表示，大小为 2 的超边用黑线表示。

## 6 结论

本文开启了对 Maker-Breaker 棋子位置博弈的研究。具体而言，我们证明，对于一个 $k$-均匀超图 $\mathcal{H}$（若其有限），当 $k \in \{2, 3\}$ 时，其棋子数 $\theta(\mathcal{H})$ 等于$k$；但对于所有 $k \geq 4$，该值可以从 $k$ 变化到 $\Omega(|V(\mathcal{H})|)$。我们的结果还从两个方面加深了对经典 Maker-Breaker 博弈的理解。首先，由于较大的棋子数意味着 Maker 的着法在走出很久之后仍可能发挥作用，我们可以看到，与 $k = 3$ 相比，Maker 在 $k = 4$ 中的获胜策略可能复杂得多。这与算法复杂度上的差距相符：经典 Maker-Breaker 博弈在 $k = 3$[18] 时易于求解，而在 $k = 4$ [17]时则是 PSPACE 完全。其次，我们证明，对于所有 $k \geq 4$，都存在任意大的超图 $\mathcal{H}$，使得经典 Maker-Breaker 博弈的持续时间 $\tau(\mathcal{H})$ 达到平凡上界 $\lceil |V(H)|/2 \rceil$；这再次与 $k = 3$ 的情形形成对比。棋子数是否也能达到这一上界仍是一个开放问题，因为我们目前构造出的最高棋子数约为 $|V(H)|/6$。

Breaker 只有一枚棋子（$b = 1$）的实例已得到完备研究，我们也为其提供了一个多项式时间算法。人们或许会希望，可约边对这一对 $b = 1$ 情形至关重要的概念，能够推广到任意常数值的 $b$，并可能由此得到一个以 $b$ 为参数的固定参数可解算法。然而，情况似乎并非如此。事实上，尽管当 $b = 1$ 时 Maker 显然需要制造两个同时威胁才能获胜，但例如当 $b = 2$ 时，Maker 获胜可能并不需要制造三个同时威胁。以长度至少为 4 的线性 3-均匀环（即没有初始棋子的项链）为例：可以证明，Maker 能赢得 (3, 2)-博弈，尽管她从未在三个不同的超边中同时形成一步取胜的威胁。对 Maker 能获胜的超图进行结构刻画，将有助于理解 $b = 2$ 情形。

我们关于该博弈的令牌滑动版本的 EXPTIME 完全性结果仍有改进空间。由于该结果针对的是一般位置，即棋子已位于棋盘上的特定位置，因此该博弈在初始位置下的复杂性仍未可知。此外，我们也

期待能有关于“标准”令牌位置博弈（即令牌跳跃版本）的 EXPTIME 完全性结果。

最后，对于令牌位置博弈，还可以考虑 Maker-Breaker 之外的其他规则。特别是，研究 Maker-Maker 令牌位置博弈是很自然的，其中率先填满一条超边的玩家获胜。

## 参考文献

[1] Guillaume Bagan、Quentin Deschamps、Eric Duchˆene、Bastien Durain、Brice Effantin、Valentin Gledel、Nacim Oijid 和 Aline Parreau。图上的计分位置游戏：关联性。《离散数学》，347(8):113570，2024年。[2] Guillaume Bagan、Eric Duchˆene、Florian Galliot、Valentin Gledel、Mirjana Mikalaˇcki、Nacim Oijid、Aline Parreau 和 Miloˇs Stojakovi´c。偏序集位置游戏。《离散数学》，348(7):114455，2025年。[3] J´ozsef Balogh、Ryan Martin 和 Andr´as Pluh´ar。直径博弈。《随机结构与算法》，35(3):369–389，2009年。[4] Valentin Bartier、Nicolas Bousquet、Cl´ement Dallard、Kyle Lomer 和 Amer E. Mouawad。围长与令牌滑动和令牌跳跃的参数化复杂性。《算法学》，83(9):2914–2951，2021年9月。[5] J´ozsef Beck。关于位置博弈的评注。《匈牙利数学学报》，40(1-2):65–71，1982。[6] J´ozsef Beck。位置博弈与二阶矩方法。《组合数学》，22(2):169–216，2002年。[7] J´ozsef Beck。《组合博弈：井字棋理论》，第114卷。剑桥大学出版社，2008年。[8] Malgorzata Bednarska 和 Tomasz Luczak。随机策略近乎最优的偏置位置博弈。《组合数学》，20:477–488，2000年4月。[9] ´Edouard Bonnet、Serge Gaspers、Antonin Lambilliotte、Stefan R¨ummele 和 Abdallah Saffidine。位置博弈的参数化复杂性。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Piotr Indyk、Fabian Kuhn 和 Anca Muscholl（编），第44届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2017），《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs）第80卷，第90:1–90:14页，德国达格施图尔，2017年。Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心。[10] ´Edouard Bonnet、Florian Jamain 和 Abdallah Saffidine。关于连接游戏的复杂性。《理论计算机科学》，644:2–28，2016年。[11] Csilla Bujt´as 和 Pakanun Dokyeesun。Maker–Breaker 支配游戏中 Staller 的快速制胜策略。《离散应用数学》，344:10–22，2024年。[12] Vaˇsek Chv´atal 和 Paul Erd¨os。偏置位置游戏。载于 B. Alspach、P. Hell 和 D.J. Miller（编），《组合数学的算法方面》，《离散数学年刊》第2卷，第221–229页。爱思唯尔，1978年。[13] Erik D. Demaine、Martin L. Demaine、Eli Fox-Epstein、Duc A. Hoang、Takehiro Ito、Hirotaka Ono、Yota Otachi、Ryuhei Uehara 和 Takeshi Yamada。树上令牌滑动的多项式时间算法。载于 Hee-Kap Ahn 和 Chan-Su Shin（编），《算法与计算》，第389–400页，查姆，2014年。施普林格国际出版社。

[14] Paul Erd¨os 和 John L. Selfridge。一种组合博弈。《组合理论杂志 A 辑》，14(3):298–301，1973年。[15] Adnane Fouadi、Mourad El Ouali 和 Anand Srivastav。(a:b) 最小度博弈的渐近阈值。《Games》，16(5):47，2025年。[16] Florian Galliot。超图与 Maker-Breaker 博弈：一种结构方法。博士论文，格勒诺布尔阿尔卑斯大学 [2020-....], 2023。[17] Florian Galliot。4-均匀 Maker-Breaker 博弈和 Maker-Maker 博弈均为 PSPACE 完全。预印本，2025年。[18] Florian Galliot、Sylvain Gravier 和 Isabelle Sivignon。秩 3 超图上的 Maker-Breaker 可在多项式时间内求解。预印本，2025年。[19] Martin Gardner。《六面翻转纸及其他数学消遣》，第“Tic-Tac-Toe”章，第38–40页。芝加哥大学出版社，第2版，ISBN 978-0226282541，1959年。[20] Heidi Gebauer。关于团博弈。《欧洲组合学杂志》，33(1):8–19，2012年。[21] Erich Gr¨adel、Wolfgang Thomas 和 Thomas Wilke（编）。《自动机、逻辑与无限博弈：当前研究指南》，第2500卷：《人工智能讲义》，《计算机科学讲义》。施普林格，柏林 [等地], 2002。[22] Robert I. Hales 和 Alfred W. Jewett。正则性与位置博弈。《美国数学会汇刊》，106:222–229，1963年。[23] Frank Harary。由定理设计的达成与避免博弈。《米兰数学与物理研讨会报告》，51:163–172，1981年。[24] Dan Hefetz、Michael Krivelevich、Milo˘s Stojakovi´c 和 Tibor Szab´o。位置博弈中的快速制胜策略。《离散数学电子札记》，29:213–217，2007年。欧洲组合学、图论与应用会议。[25] Dan Hefetz、Michael Krivelevich、Milo˘s Stojakovi´c 和 Tibor Szab´o。Maker–Breaker 博弈中的快速制胜策略。组合理论杂志 B 辑，99(1):39–47，2009年。[26] Dan Hefetz、Mirjana Mikala˘cki 和 Milo˘s Stojakovi´c。双重偏置 Maker-Breaker 连通性博弈。《组合学电子杂志》，第P61页，2012年。[27] Finn Orson Koepke。在 5-均匀超图上求解 Maker-Breaker 博弈是 PSPACE 完全的。arXiv 预印本 arXiv:2502.20271，2025年。[28] Maurice Kraitchik。《数学消遣》，第“位置博弈”章，第290–292页。W.W. Norton & Company inc.，纽约，1942年。[29] Xiaoyun Lu。哈密顿博弈。J. Comb. Theory, Ser. B，55(1):18–32，1992年。[30] Md Lutfar Rahman 和 Thomas Watson。6-均匀 Maker-Breaker 博弈是 PSPACE 完全的。《组合数学》，43(3):595–612，2023年。[31] Thomas J Schaefer。关于某些双人完全信息博弈的复杂性。《计算机与系统科学杂志》，16(2):185–225，1978年。[32] Wolfgang Thomas。无限博弈与验证。载于 Ed Brinksma 和 Kim Guldstrand Larsen（编），《计算机辅助验证》，第58–65页，柏林、海德堡，2002年。施普林格柏林海德堡。

[33] Virg´elot Virgile. 图监视与保护中的移动守卫策略. 博士论文，维多利亚大学，2024年。[34] Claudia Zaslavsky. 井字棋：从古埃及到现代计算机的其他三子棋游戏。Crowell，1982。