arXiv:2601.09034v1 [math.AT] 13 Jan 2026

利用损失函数界定具体范畴上的交错距离

预印本

Astrid A. Olave　　Elizabeth Munch

2026年1月15日

摘要

交错距离可以说是拓扑数据分析（TDA）中应用最广泛的度量，因为它适用于众多值得关注的输入，例如（多参数）持久模、Reeb 图、合并树和之字形模。然而，众多此类情形中的绝大多数已知交错距离的计算是 NP 困难的，这限制了它在实际中的应用。受 Chambers 等人关于映射器图交错距离的研究启发，我们通过损失函数解决了一个更一般的问题：界定具体范畴上的广义持久模之间的交错距离。该损失函数衡量一个赋值距离构成真正交错的程度有多远；这种赋值可以看作一种可能不满足交换性的交错。我们给出了若干损失可在多项式时间内计算的情形，包括对 k-参数持久模施加某些假设的情形。

1 引言

持久同调是拓扑数据分析的核心（Ghrist，2007；Edelsbrunner 和 Harer，2008；Oudot，2015年）。在最简单的形式中，持久性可如下产生：给定一个单纯复形 K 以及一个滤过$\{K^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，其中 $K_i \subseteq K_j$ 对于 $i \leq j$，考虑同调群序列 $H(K^i)$，由此得到一个持久模，即一族由环上的模组成、以 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为指标的模（Zomorodian 和 Carlsson，2004）。后来，这些思想被推广到范畴论框架中，将持久模定义为从线性序（如 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 或 $\mathbb{R}$）到范畴 $\mathrm{Vec}_{\mathbb{F}}$ 的函子，其中 $\mathrm{Vec}_{\mathbb{F}}$ 是固定域 $\mathbb{F}$ 上有限维向量空间构成的范畴（Bubenik 和 J. A. Scott，2014）。进一步推广这一概念，从偏序集 P 到范畴 C 的函子称为取值于 C、以 P 为指标的广义持久模（Bubenik、Silva 和 J. Scott，2014）。

交错距离 d_I 是用于量化广义持久模之间差异性的最常用度量之一。它最初由 Chazal 等人于 2009 年提出，作为持久图组合瓶颈距离的一种代数推广。由于它可简化为瓶颈距离，$\mathrm{Vec}_{\mathbb{F}}$ 上的持久模的交错距离 $\mathbb{R}$可以在多项式时间内高效计算。此后，交错距离被推广到不同的偏序集和范畴。当 $P = \mathbb{R}^2$ 和 $C = \mathrm{Vec}_{\mathbb{F}}$时，便得到多参数持久模的交错距离（Lesnick，2015）。这些函子可以通过使用$C = \mathrm{Set}$来表示基于图的对象。为此，对于 $P = (\mathbb{R}, \leq)$，我们得到了合并树的交错距离（Morozov、Beketayev 和 Weber，2013；Beurskens 等人，2025）；而当 $P = \mathrm{Int}$ 时，则得到 Reeb 图的交错距离（de Silva、Munch 和 Patel，2016）。这些输入也有带标签的版本，例如带标签合并树（Munch 和 Stefanou，2019；Gasparovic 等人，2024；Yan 等人，2019；Curry 等人，2022）、带标签 Reeb 图（Lan、Parsa 和 B. Wang，2024）以及形式图（Kim 和 Mémoli，2017）。交错距离及其变体也已应用于滤过空间（Blumberg 和 Lesnick，2017）、推前映射和拉回映射（M. B. Botnan、Curry 和 Munch，2020）、之字形持久性（M. Botnan 和 Lesnick，2018；Bjerkevik，2021）以及动态度量空间（Kim 和 Mémoli，2020；Kim 和 Mémoli，2017）。去除函子对象这一假设，意味着交错

距离已针对更一般的范畴表述进行研究（de Silva、Munch 和 Stefanou，2018；McFaddin 和 Needham，2025；Meehan 和 Meyer，2017；Cruz，2019；Scoccola，2020；Berkouk 和 Petit，2019；Patel，2018）。虽然交错距离在理论上得到了广泛应用，但由于其在绝大多数情形下计算复杂度很高，实际应用受到限制。除单参数持久模（其交错距离就是瓶颈距离）、带标签合并树和形式图之外，几乎所有其他构造的计算都是 NP 困难的（ Bjerkevik 和 M. B. Botnan，2018 年；Bjerkevik 、 M. B. Botnan 和 Kerber，2020 年；Agarwal 等人，2018年）。尽管除非 $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$，否则找不到高效算法，但近期人们积极探索各种变通方法，以使计算成为可能（Curry等人，2022；Pegoraro，2025年；Farahbakhsh Touli 和 Y. Wang，2019；Chambers、Munch 等人，2025年；Chambers、Ghosh 等人，2026）。本文受到 Chambers、Munch 等人（2025年）所采用方法的启发。该文关注的是 Reeb 图离散化所得的映射器图的交错距离。交错距离定义在取值于 Set 的广义持久模上，因此交错由一对满足特定性质的自然变换构成。该文研究了一类映射：它们可能构成交错，但也可能不满足所要求的交换条件；这类映射称为赋值（另见 Robinson，2020年 中一般层的相关概念）。他们利用这些赋值，通过定义一个损失函数来衡量输入赋值偏离交换性的程度，从而为映射器图之间的交错距离建立了上界。在 Chambers、Ghosh 等人（2026 ）的工作中，该损失函数与线性规划框架相结合，用于寻找映射器图之间经实验验证为最优的交错。

我们的贡献 本文将 Chambers、Munch 等人于 2025年提出的赋值思想，推广到取值于具体范畴的广义持久模。具体而言，按照 de Silva、Munch 和 Stefanou 于 2018年所述，我们从一对持久模 $F, G\colon P \to C$ 以及一个流 $\mathcal{T}$开始，其中 $\mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}(\varepsilon)$ 是 P 的自同态，即 $\mathcal{T}\colon [0,\infty) \to \mathrm{End}(P)$。若一对自然变换 $\Phi\colon F \Rightarrow G\mathcal{T}_\varepsilon$和 $\Psi\colon G \Rightarrow F\mathcal{T}_\varepsilon$构成 F与 G 之间的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-交错，则

$$F[p \le \mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon p](p) = \Phi_p\Psi_{\mathcal{T}_\varepsilon p} \quad \text{and} \quad G[p \le \mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon p](p) = \Psi_p\Phi_{\mathcal{T}_\varepsilon p} \text{ for all } p \in P.$$

我们将 $d_I(F,G)$（即它们的交错距离）定义为满足存在 F与 G之间的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-交错的所有 ε’ 中的下确界。一组态射 $\varphi = \{\varphi_p\colon F(p) \to G\mathcal{T}_\varepsilon(p)\}$和 $\psi = \{\psi_p\colon G(p) \to F\mathcal{T}_\varepsilon(p)\}$称为一个 ε-赋值，若它们不一定构成 $\mathcal{T}_\varepsilon$-交错。我们为每个 $F(p)$ 中的元素（对称地，也为每个$G(p)$ 中的元素）定义一种伪度量，称为合并距离（定义 3.1）。利用该距离，对于给定的输入 ε-赋值 (φ,ψ)，我们可在定义 3.10 中定义一个推广了 (Chambers、Munch 等人，2025年) 中损失函数的损失函数，用以衡量该赋值距离成为交错还有多远。我们证明，该损失 $L(\varphi,\psi)$ 为持久模之间的交错距离提供了一个上界： $d_I(F,G) \le \varepsilon + L(\varphi,\psi)$（定理 3.15）。

接下来，在满足合理的附加条件时，我们优化按 $L(\varphi,\psi)$ 索引的持久模的计算，其中当 P（定理 4.11）或 P^k （定理 4.20）时，需要控制图表的数量。此处的 P为完备线性序。这使得我们能够为取值于范畴 C（其对象的底层集合有限）（算法 1）或 $\mathrm{Vec}_{\mathbb{F}}$ （算法 2）中的持久模计算提供多项式时间算法。我们的结果为一种算法方法开辟了可能性：利用这一框架，为多参数持久模等常用构造的交错距离给出上界。不过，我们指出，与（Chambers、Munch 等人，2025年；Chambers、Ghosh 等人，2026）的情形一样，这个界的效果取决于所提供的输入赋值，因此我们不保证它是紧的。未来还需要谨慎研究如何搜索赋值空间以优化此界；然而，由于我们不认为本研究过程中会意外证明 $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ ，这些搜索算法都不会属于 P否则，结合该界与搜索算法，就能在多项式时间内计算交错距离。

大纲 第 2 节介绍偏序集、范畴论以及广义持久模的交错距离相关背景。第 3 节定义损失函数 L并给出交错距离的界。第 L 节针对不同设置下的广义持久模进行优化计算 4。最后，我们将在第5节讨论研究结果的一些影响。

2 背景

2.1 偏序集

首先介绍偏序集的符号和定义（Harzheim，2007；Schröder，2016）。一个偏序集（*poset*）是一个有序对$(P, \leq)$其中P是一个集合，其上定义了自反、反对称且传递的关系$\leq$，该关系定义在P上。我们称$p, q \in P$为可比较，如果$p \leq q$或$q \leq p$。

子集$S \subset P$有一个上界p，如果$p \geq s$对所有$s \in S$都成立。S的上确界（或最小上界），如果存在，是一个元素$\sup S \in P$，使得对于任意作为S的上界的p，都有$\sup S \leq p$。类似地，对于给定集合S，我们可以通过反转前述定义中的不等式来定义下界和下确界（或最大下界）。如果每个具有上界的非空子集都有上确界，且每个具有下界的非空子集都有下确界，则称偏序集为完备。若对于任意$p, q \in S$，以及任意满足$p < r < q$的$r \in P$，都有$r \in S$，则子集$S \subset P$是凸的。

如果对于任意$p < q$，都存在一个中间元素$p < r < q$，我们就称P是稠密偏序集；否则称P是离散的。在离散情形下，如果$p < q$属于P，且不存在满足$p < r < q$的$r \in P$，那么p是q的前驱，而q是p的后继；这记作$p \prec q$。满足$p \prec q$或$p \prec q$的点p和q也称为相邻。我们用$d(P) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$表示$P$中任一元素的前驱数目的最大值。

非空序列$\gamma$of $x_i's$in P称为链，如果γ中的所有x_i's都是可比较的。如果P本身是一条链，我们称其为全序或线性偏序集。例如，集合$[0, \infty)$在通常的序关系下是一个线性偏序集。通过将元素∞添加到$[0, \infty)$中，并对所有$r \in [0, \infty)$设定$\infty > r$，我们可以构造另一个线性偏序集$[0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$

$P, h(P)$的高度是P中最长链的长度。如果存在任意长度的链，则$h(P) = \infty$。如果对于P中的所有$x \neq y$，x和y都不可比较，则称S是一个反链。我们将$P, w(P)$的宽度定义为P中最大反链的大小（如果存在这样的集合）；否则，$w(P) = \infty$。

给定偏序集P和Q，直积偏序集$P \times Q$的元素为$\langle p, q \rangle$，其中$p \in P$和$q \in Q$满足序关系$\langle p, q \rangle \leq_{P \times Q} \langle p', q' \rangle$，当且仅当$p \leq_P p'$且$q \leq_Q q'$。特别地，对于$k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，我们可以考虑$k$-重直积偏序集$P^k := P \times \cdots \times P = \bigtimes_{i=1}^{k} P$，其元素为$\mathbf{p} = \langle p^1, \cdots, p^k \rangle$。我们称$p^i$为$\mathbf{p}$的第$i$个坐标。偏序集的若干性质在其直积下得以保留。例如，完备偏序集的直积是完备的，两个凸子集的直积也是凸的

按照 M. Botnan 和 Crawley-Boevey，2020，一个区间I在P中是一个非空的凸连通子集P。给定$p \subset P$，我们将其开初始段，$(-\infty, p)$，以及开末段，(p, ∞)定义为

$$(-\infty, p) = \{q \in P \mid q < p\}, \qquad (p, \infty) = \{q \in P \mid q > p\}$$

类似地，我们定义$(-\infty, p] = \{q \leq p \mid q \in P\}$和$[p, \infty) = \{q \geq p \mid q \in P\}$，并称其为$p$的闭初始（分别为闭最终）段。这四类集合称为$P$的段。$P$的段及其交集都是$P$的区间；例如，对于$p \leq q$

$$[p, q] := [p, \infty) \cap (-\infty, q], \text{ the usual closed interval with ends } p, q$$
$$(p, q) := [p, \infty) \cap (-\infty, q), \text{ the usual open interval with ends } p, q$$

对于$p, q \in P$，我们用记号$\lfloor p, q \rceil$表示任意形如$[p, q], (p, q), (p, q]$，或$[p, q$的区间$)$.

在完备线性偏序集T中，任意区间要么是一个段（(∞, q)、$(\infty, q]$、(p, ∞)或$[p, \infty)$），要么具有某个$p < q \in T$对应的形式$\lfloor p, q \rceil$。然而，对于其他偏序集，情况并非如此。集合$\{x \mid x^2 < 5\} \subset \mathbb{Q}$是$\mathbb{Q}$的一个区间，但不能写成形如$\lfloor p, q \rceil$的通常区间。同样，集合$\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$是$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$的一个区间，但不具有$\lfloor p, q \rceil$的形式。

定义 2.1. P的序拓扑是由P的开段子基生成的拓扑，给定为$\{(p, \infty) \mid p \in P\} \cup \{(-\infty, q) \mid q \in Q\}$。

例如，$\mathbb{R}$的通常拓扑与其作为偏序集的序拓扑相同$(\mathbb{R}, \leq)$。

引理 2.2。 T是一个完备线性偏序集。任意区间$[s, t] \subseteq T$在T的序拓扑中都是紧致的.

证明。 设 $\mathcal{U}$是 $[s,t]$的一个给定开覆盖。定义 B为满足以下条件的元素 $r \in [s,t]$ 的集合： $[s,r]$ 可以由 $\mathcal{U}$中的有限个元素覆盖。集合 B 非空，因为 $s \in B$，且有上界 t。由于 T是完备偏序集，因此 sup B存在。若 sup $B < t$，则可以找到一个区间 $(x, y) \subset U \in \mathcal{U}$，使得 sup $B \in (x,y) \subset [s,t]$。于是 $y \in B$，但这与上确界的定义矛盾。因此 $t \leq$ sup B，所以 $[s,t]$ 是紧致的。 □

2.2 范畴论术语

我们给出本文所用范畴论术语的基本定义；详情请参见 Riehl，2017年。范畴 C由一组对象组成，例如 X、Y、$Z \in C$；对于任意一对对象 X、Y，都有一组（可能为空的）态射，记作 $C(X,Y)$。我们常写作 $f\colon X \to Y$，若 $f \in C(X,Y)$。我们称 f 的源为 X，靶为 Y。对于所有对象 $X \in C$，都必须存在恒等态射 $\mathrm{Id}_X \in C(X,X)$。此外，对于态射 $g \circ f \in C(X,Z)$（其中 $f\colon X \to Y$ 且 $g\colon Y \to Z$），存在复合运算，且该运算满足结合律。子范畴 S 是 C 的一个对象与态射的子集，且自身也是一个范畴。若对于任意对象 X、$Y \in S$，都有 $S(X,Y) = C(X,Y)$，则称子范畴 $S \subseteq C$ 为满子范畴。

例如，我们用 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$ 表示固定域 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间范畴，其中态射由向量空间之间的线性变换给出。另一个常见示例是带有集合映射的集合范畴，记作 **Set**。

我们还可以从任意偏序集 P得到一个范畴。该范畴为每个元素 $p \in P$ 设置一个对象，并且对于 P中的任意一对 $p \leq q$，都有唯一的态射 $p \to q$。这个范畴是一个薄范畴，意味着任意一对对象之间至多有一个态射。

一个函子 $F\colon C \to D$（从范畴 C 到 D）是一个映射，它将 C 中的对象 X 映射到 D 中的对象 $F(X)$，并将 C中的态射 f（X，Y）映射到 D中的态射 $F[f]$（$F(X)$ $F(Y)$）。这些映射与恒等态射以及复合的结合律相容。

函子的一种特殊类型是图表，它定义在 C上，即从一个范畴 J 到 C 的函子；该范畴具有一个（非常）小的对象集合和一个（非常）小的态射集合。范畴 J 称为该图表的指标范畴。直观地说，图表是一个有向图，其中 C 中的对象是顶点，态射是边。参见图1。如果有向图中任意两条具有相同源和靶的可复合箭头路径具有相同的复合，我们就称该图表是可交换的。例如，图1 中的图表当且仅当 $h \circ f = i \circ g$时可交换。

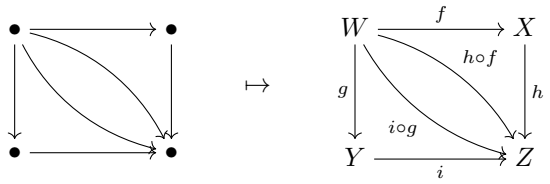


图 1：一个指标范畴 范畴 J以及范畴 C上的交换方图，其对象为 W, X, Y, Z，态射为 f, g, h, i

特别地，有限偏序集范畴是一个小范畴。因此，对于有限偏序集 P和范畴 C，函子$F\colon P \to C$是一个 C的图表。下面给出一个有用且显然适用于偏序集范畴的引理。

引理 2.3 (薄引理)。 在薄范畴中，只要任意两个对象之间至多有一个态射，所有图表都交换。

由引理 2.3 和函子的定义可得以下推论。

推论 2. **4.** F或对于有限偏序集 P、范畴 C 和图表 $F\colon P \to C$，在 P 中有 $p \leq r \leq q$

$$F[p \leq q] = F[(r \leq q) \circ (p \leq r)] = F[r \leq q] \circ F[p \leq r].$$

有许多特殊类型的态射值得考虑。态射 $f\colon X \to Y$若对所有对象 $Z \in C$ 以及满足 $f \circ h = f \circ g$ 的态射 $g, h\colon Z \to X$，都有 $g = h$，则称为单态射 。类似地，若对所有对象 Z以及满足 $h \circ g = g \circ f$ 的态射 $h, g\colon Y \to Z$，都有 $g = h$，则称 f 为满态射 。最后，若存在 $g\colon Y \to X$，使得 $f \circ g = id_Y$ 且 $g \circ f = id_X$，则 f 是同构 。注意，若 f 是同构，则它也是

单态射和满态射。例如，在 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$ 中，单态射与单射映射一致，而满态射与满射一致。若一个映射既是单射又是满射，则称其为双射。在这个范畴中，双射与同构一致。

与态射类似，函子也有不同的类型。设 C 和 D 为局部小范畴。若映射 $C(X,Y) \to D(F(X)\ F(Y))$ 是单射，则函子$F\colon C \to \mathcal{D}$称为忠实；若该映射为满射，则称其为满。如果范畴 C 配备了一个忠实函子 $U\colon C \to \mathbf{Set}$（也称为遗忘函子），则称其为具体范畴。如果 C 是一个具体范畴，我们可以将其对象视为带有附加结构的集合，将其态射视为保结构函数。我们将底层集合有限的具体范畴称为有限具体范畴。

设 $F,G\colon C \to D$ 为函子。一个自然变换 $\varphi\colon F \Rightarrow G$ 由一族态射组成，这些态射以 C的对象为索引，$\{\varphi_X\colon F(X) \to G(X) \mid X \in C\}$，并且对 $f\colon X \to Y$，图表

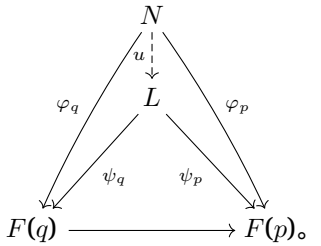
$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F[f]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G[f]} \\ F(Y) & \xrightarrow[\varphi_Y]{} & G(Y) \end{array}$$

可交换。如果对于所有对象 X，φ_X 都是同构，我们就称 φ 是自然同构。对于固定的 C 和 D，存在一个函子范畴，记作 D^C，其对象为函子，态射为自然变换。我们将范畴 C的自态射 记作 $\mathbf{End}(C) = C^C$。

我们有如下薄引理的推论（引理2.3）。

推论 2.5。固定一个偏序集 P、任意范畴 C以及函子 F、$G\colon C \to P$。存在一个自然变换$\varphi\colon F \Rightarrow G$，当且仅当对于所有 $X \in C$，$F(X) \leq G(X)$。如果这样的 φ 存在，我们记作 $F \leq G$。

取一个有限偏序集 P，并令 P^{op} 表示其对偶范畴。P_{op}的对象是元素 $p \in P$，并且对于 $p \leq q$ 中的 P，存在唯一态射 $q \to p$。考虑某个范畴 C上的图表 $F\colon P^{\mathrm{op}} \to C$。
取 N 和 C 中的对象，并定义函子 $\Delta_N\colon P_{\mathrm{op}} \to C$，其定义为：对于所有 $p \in P$，$\Delta_N(p) = N$。从 N 到 F 的一个锥是一个自然变换 $\varphi\colon \Delta_N \Rightarrow F$。我们称 N 为该锥的顶点，如下图所示：



令 $L \in C$。如果存在 $\psi\colon \Delta_L \Rightarrow F$，即从 L 到 F 的一个锥，并且对于任意其他锥 $\varphi\colon \Delta_N \Rightarrow F$，存在唯一态射 u，使得对于所有 $p \in P$，$\psi_p \circ u = \varphi_p$，则称 L 是 F 的逆极限。我们将其记为 $L = \varprojlim(F(p) \mid p \in P)$。逆极限的定义性质称为泛性质，因为任何其他锥都通过逆极限分解；即 $\psi \circ u = \varphi$。

2.3 偏序集上的流

由于我们的目标是为函子范畴定义交错距离 C^P，现在我们将按照 Bubenik、Silva 和 J. Scott 2014 年以及 de Silva、Munch 和 Stefanou 2018年的做法，讨论如何在偏序集上定义流。偏序集 上的平移 是 P，$\mathcal{S} \in \mathrm{End}(P)$中的一个自同态，它满足 P，其中 $\mathrm{Id} \leq \mathcal{S}$ 且 $\mathrm{Id}: P \to P$是恒等自同态。令$\mathrm{Trans}(P)$表示 P的平移集合，其中我们将 $\mathrm{Trans}(P)$ 视为 $\mathbf{End}(P)$的满子范畴。

定义 2.6. 偏序集 P上的一个流 $\mathcal{T}$由一个函子 $\mathcal{T}\colon ([0,\infty) \leq) \to \mathbf{Trans}(P)$ 构成，其中 $\mathcal{T}(\varepsilon) = \mathcal{T}_\varepsilon$，满足$\mathcal{T}_\varepsilon \circ \mathcal{T}_{\varepsilon'} \leq \mathcal{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}$。若还满足 $\mathcal{T}_{\varepsilon'} \circ \mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}_\varepsilon \circ \mathcal{T}_{\varepsilon'}$，则称 $\mathcal{T}$为交换的 。若 $\mathcal{T}_0 = \mathrm{Id}$ 且 $\mathcal{T}_\varepsilon \circ \mathcal{T}_{\varepsilon'} = \mathcal{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}$，则称 $\mathcal{T}$为严格流 。具体而言，流 是一个函数 $\mathcal{T}\colon ([0,\infty) \leq) \to \mathbf{End}(P)$，满足以下四个条件：

(1) 对所有 $0 \le \varepsilon$ 以及所有 $p \le q \in P$， $\mathcal{T}_\varepsilon p \le \mathcal{T}_\varepsilon q$。

(2) 对所有 $0 \le \delta < \varepsilon$ 以及所有 $p \in P, \mathcal{T}_\delta p \le \mathcal{T}_\varepsilon p$。

(3) 对所有 $0 \le \varepsilon$ 以及所有 $p \in P, p \le \mathcal{T}_\varepsilon p$。

(4) 对所有 $0 \le \varepsilon$， ε' 以及所有 $p \in P, \mathcal{T}_\varepsilon \circ \mathcal{T}_{\varepsilon'} p \le \mathcal{T}_{\varepsilon+\varepsilon'} p$。

我们将特别关注由某个输入 $\mathcal{T}$ 的态射有限次复合所得到的平移，定义如下。

定义 2.7。 全子范畴 $\mathrm{Flows}_\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Trans}(P) \subseteq \mathrm{End}(P)$ 由 P 的平移构成，这些平移是态射 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 的有限次复合，

$$\mathrm{Flows}_\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{\varepsilon_\ell} \mid \ell \ge 0, \varepsilon_i \ge 0\}.$$

如果流是交换的（即 $\mathcal{T}_{\varepsilon'} \circ \mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}_\varepsilon \circ \mathcal{T}_{\varepsilon'}$），那么 $\mathrm{Flows}_\mathcal{T}$中的复合是交换的（即，对于 $\mathcal{S}$， $\mathcal{S}' \in \mathrm{Flows}_\mathcal{T}$，有 $\mathcal{S} \circ \mathcal{S}' = \mathcal{S}' \circ \mathcal{S}$）。

定义 2.8. 如果流 $\mathcal{T}$在偏序集 P 上满足：对于所有 $p < q$，在 P 中都存在 δ 使得$\mathcal{T}_\delta\, p \ge q$，则称其为阿基米德流。

例如，定义流 $\mathcal{T}$: $[0,\infty) \to \mathrm{Trans}(\mathbb{R})$，使其满足 $T_\varepsilon(x) = x + \varepsilon$。对于 $x < y$，我们可以验证 $\mathcal{T}_{y-x}(x) = y$，因此 $\mathcal{T}$是阿基米德的。在 $\mathcal{T}$是 $\mathbb{R}$上的流这一特殊情形下，我们有如下结果。

引理 2.9. 流 $\mathcal{T}$在 $\mathbb{R}$ 上是阿基米德的，当且仅当对于所有 $x \in \mathbb{R}$，都存在 $M_x > 0$，使得若 $\varepsilon \ge M_x$，则$\mathcal{T}_\varepsilon(x) > x$。

证明。“仅当”部分通过逆否命题证明。取一个带有 x 的流，使得对于所有 $M > 0$ 和 $\varepsilon \le M$，$\mathcal{T}_\varepsilon(x) \le x$。于是，对于所有 $M > 0$， $x \le \mathcal{T}_M(x) \le x$。鉴于对于 $y > x$ 不存在满足 $\mathcal{T}_\varepsilon(x) \ge y$ 的 ε，该流不是阿基米德的。

对于“如果”部分，取 $\mathcal{T}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的一个流，并满足：对于所有 $x \in \mathbb{R}$，存在 $M_x > 0$，使得若 $\varepsilon \ge M_x$，则 $\mathcal{T}_\varepsilon(x) > x$。我们可以将 $\mathcal{T}$ 写成函数 $\mathcal{T}$： $[0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。利用条件 3)，定义 φ： $\mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，使得 $\varphi(\varepsilon, x) = \mathcal{T}_\varepsilon(x) - x$。根据条件 1) 和 2)， φ 在两个变量上都是非递减的。此外，由于我们对 $\mathcal{T}$ 的假设， $\varphi(\varepsilon, x) > 0$ 对于 $\varepsilon \ge M_x$。于是，根据条件 4)

$$\begin{aligned} x + \varphi(\varepsilon', x) + \varphi(\varepsilon, x) &\le x + \varphi(\varepsilon', x) + \varphi(\varepsilon, x + \varphi(\varepsilon', x)) \qquad \text{(Non decr in 2nd entry)} \\ &= \mathcal{T}_\varepsilon \circ \mathcal{T}_{\varepsilon'}(x) \\ &\le \mathcal{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}(x) \qquad \text{(Condition (4))} \\ &= x + \varphi(\varepsilon + \varepsilon', x). \end{aligned}$$

因此， $\varphi(\cdot,\ x)$ 是超可加的，也就是说 $\varphi(\varepsilon',\ x) + \varphi(\varepsilon,\ x) \le \varphi(\varepsilon + \varepsilon',\ x)$。我们通过归纳法证明，对于 $n \in \mathbb{N}$, $n\varphi(\varepsilon,\ x) \le \varphi(n\varepsilon,\ x)$。

反设 $\mathcal{T}$ 不是阿基米德的，因此存在 $x < y$ 属于 $\mathbb{R}$，使得对于所有 $\varepsilon > 0$ 都有 $\mathcal{T}_\varepsilon x < y$。于是，对于一个固定但任意的 $\varepsilon \ge M_x$,

$$y > \mathcal{T}_{n\varepsilon}(x) = x + \varphi(n\varepsilon, x) \ge x + n\varphi(\varepsilon, x).$$

两边除以 n，并令 n 趋于无穷，得到 $0 \ge \varphi(\varepsilon,\ x)$。然而，这与 $\varphi(\varepsilon,\ x) > 0$ 矛盾，证明完毕。

□

定义 2.10。 设 T 是线性偏序集。若平移 $\mathcal{S}$ 在 T^k 上满足后续引理中的任一等价条件，则称其为保线的，即 $\mathcal{S}$ 满足相应条件。

引理 2.11。 设 T 是线性偏序集， $\mathcal{S}$ 是 T^k 上的一个平移。以下条件等价：

i) 对于每个 $1 \le i \le k$，都有平移 $\mathcal{S}^i$： $T \to T$，使得对于 $\mathbf{p} = \langle p^1$、...、$p^k \rangle \in T^k$，我们有$\mathcal{S}(\mathbf{p}) = \langle \mathcal{S}^1(p^1)$ ..., $\mathcal{S}^k(p^k) \rangle$。

ii) 对于任意介于 1 与 k 之间的 i，若 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$ 属于 T^k，且除第 i 个坐标外，它们的所有坐标都相同，那么 $\mathcal{S}(\mathbf{p})$ 与 $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ 的坐标也都相同，至多第 i 个坐标不同。

证明。 命题 i) $\implies$ ii) 是显然的。

对于反向蕴含，假设 ii)。固定一个介于 j 与 1 之间的 k。让我们证明，对于 T^k 中满足$p^j = q^j$ 的 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$，有 $(\mathcal{S}(\mathbf{p}))^j = (\mathcal{S}(\mathbf{q}))^j$。然后，对于任何满足$p^j = t$的 $\mathbf{p} \in T^k$，我们可以将 $S^j(t)$ 定义为这个公共值。

取满足 T^k 中该条件的不同 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$。考虑非空集合 $U = \{i \mid p^i = q^i\}$。让我们通过反向归纳法进行证明。如果 $|U| = k-1$，根据假设， $\mathcal{S}(\mathbf{p})$ 和 $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ 除了不属于 U 的坐标外都相同。特别地，$(\mathcal{S}(\mathbf{p}))^j = (\mathcal{S}(\mathbf{q}))^j$。假设若 $k-1 \geq |U| \geq \ell$，则意味着 $(\mathcal{S}(\mathbf{p}))^j = (\mathcal{S}(\mathbf{q}))^j$。设 $|U| = \ell - 1$。对于固定的 j'， $j'' \notin U$，选取满足以下条件的 $\mathbf{r}$：若 $i \in U$，则 $r^i = p^i$ 、 $r^{j'} = p^{j'}$ 和 $r^{j''} = q^{j''}$。于是，集合 $\{i \mid p^i = r^i\}$ 和 $\{i \mid q^i = r^i\}$ 的基数都严格大于 $\ell - 1$，因此

$$(\mathcal{S}(\mathbf{p}))^j = (\mathcal{S}(\mathbf{r}))^j = (\mathcal{S}(\mathbf{q}))^j.$$

□

考虑由 $\mathcal{T}\colon [0,\infty) \to \mathsf{Trans}(\mathbb{N}^2)$ 给出的示例映射

$$T_\varepsilon(\langle m, n\rangle) = \langle m, n + \lfloor \varepsilon \rfloor m\rangle. \tag{1}$$

让我们检查 $\mathcal{T}$是一个流，验证定义2.6中的每个条件。

1) 取 $0 \leq \varepsilon$ 和 $\langle m,\ n\rangle \leq \langle m',\ n'\rangle$。则 $\langle m,\ n + \lfloor\varepsilon\rfloor m\rangle \leq \langle m',\ n' + \lfloor\varepsilon\rfloor m'\rangle$。
2) 取 $0 \leq \delta < \varepsilon$ 和任意 $\langle m,\ n\rangle$。则 $\langle m,\ n + \lfloor\delta\rfloor m\rangle \leq \langle m,\ n + \lfloor\varepsilon\rfloor m\rangle$。 3) 取 $0 < \varepsilon$ 和任意 $\langle m,\ n\rangle$。则 $\langle m,\ n\rangle \leq \langle m,\ n + \lfloor\varepsilon\rfloor m\rangle$。 4) 取 $0 < \varepsilon,\ \varepsilon'$ 和任意 $\langle m,\ n\rangle$。则 $\langle m,\ n + \lfloor\varepsilon\rfloor m + \lfloor\varepsilon'\rfloor m\rangle \leq \langle m,\ n + \lfloor\varepsilon + \varepsilon'\rfloor m\rangle$。

根据引理2.11，对于 $\mathcal{T}_\varepsilon$ <style id='8}，方程（1）的平移对 $\varepsilon \geq 1$ 不是保线的，因为在这种情况下 $n + \lfloor\varepsilon\rfloor m$ 依赖于 m。

请注意，保线流不一定是单射。例如，考虑 $\mathcal{T}\colon [0,\infty) \to \mathsf{Trans}(\mathbb{R}^2)$，其定义为 $T_0(\langle m,\ n\rangle) = \langle m,\ n\rangle$ 以及 $T_\varepsilon(\langle m,\ n\rangle) = \langle m + \varepsilon,\ \lceil n\rceil + \lfloor\varepsilon\rfloor\rangle$，其中 $\varepsilon > 0$。由于函数 $m + \epsilon$ 不依赖于 n，且函数 $\lceil n\rceil + \lfloor\varepsilon\rfloor$ 不依赖于 m，因此这是保线的；但它不是单射，因为$T_\varepsilon(\langle 1,\ 1.5\rangle) = T_\varepsilon(\langle 1,\ 2\rangle)$。

2.4 广义持久模

对于偏序集 P和范畴 C，函子 $F\colon P \to C$ 称为 广义持久模，取值于 C 并定义在 P(Bubenik、Silva和J. Scott，2014）。这些函子构成的集合本身是一个（薄）范畴，其态射为自然变换，记作 C^P。

这一术语源自持久性中的以下标准构造。设 $\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots K_n = K$ 是单纯复形 K 的一个滤过。记 $H_k(-)$ 为取系数于某个域 $\mathbb{F}$的第 k 个同调。定义函子： $F\colon \{0,\ldots,n\} \to \mathsf{Vec}_\mathbb{F}$，其定义为 $F(i) := H_k(K_i)$，且 $F[i \leq j] := H_k(K_i) \to H_k(K_j)$ 为由$K_i \hookrightarrow K_j$诱导的映射。于是， F 是取值于 $\mathsf{Vec}_\mathbb{F}$、定义在 $\{0,\ldots,n\}$ 上的广义持久模。若对所有 $r < p \in P$，相应的映射 $F[r \leq p]$ 都具有有限秩，则称模 $F\colon P \to \mathsf{Vec}_\mathbb{F}$ 为q-驯化模。[1]

再举一个示例，考虑之前的同一个滤过。定义函子 $G\colon \{0,\ldots,n\} \to \mathsf{Set}$，其由$G(i) := \pi_0(K_i)$ 给出，其中 K_i 的连通分支集合带有由包含映射诱导的态射 $G(i) \to G(j)$。这样的模称为合并树，因为它是同名拓扑构造的范畴表示，用于追踪 K 在该滤过中的连通性。

2.4.1 持久性模的临界值

定义 2.12。 设 $F \in C^P$ 为一个广义持久模，且 $I \subseteq P$为一个区间。若 F 在上为常值 I，或者说 I 是 F 的常值区间，则称对所有 $p \leq q \in I$， $F[p \leq q]$ 都是一个同构。

[1]我们注意到，术语 q-驯化的在文献中很常见（例如 Oudot，2015年，定义 1.12），但它与任何固定的 $q \in P$选择都无关。

定义 2。 **13.** 设 T为一个线性偏序集，并固定 $t \in T$。子集 $I \subseteq T$称为围绕 t的开区间 if:

- 集合 I等于 $(x,\ y)$、$(x,\ \infty)$ 或 $(-\infty,\ y)$，其中某个 $x < t < y \in T$。
- 每当 t 在 T中有上界时，就存在 $u \in I$ 使得 $t < u$。
- 每当 t 在 T中有下界时，就存在 $s \in I$ 使得 $s < t$。

因此， I 是通常意义上的开区间，并包含 t，即高于 t 的一个元素（若存在）和低于 t 的一个元素（若存在）。例如，在 $T = \mathbb{Z}$的情况下，集合 $I = \{2\} \subset \mathbb{Z}$ 的形式为 (1，3)，然而，它不是围绕 $t = 2$ 的开区间，因为不存在满足 $2 < u$的 $u \in I$。不过，集合 (0，4) 将是围绕 $t = 2$的一个开区间。

定义2.14。 设 T是一个完备线性偏序集，并固定一个 $F \in C^T$。如果对于 t周围的任意开区间， F在 I上都不是常值函数，则称 $t \in T$为 F的临界值。否则，称 t为 F的正则值。如果 $F \in C^T$的临界值数量有限，则称其为驯化的。在这种情况下， F的所有临界值组成的集合 $\{c_1, \ldots, c_m\}$称为 F的临界集。

范畴论意义下的临界值和驯化模的概念由Bubenik和Scott在Bubenik和J. A. Scott，2014 关于 $P = \mathbb{R}$中引入。这里给出的定义适用于任意完备线性偏序集。我们可以通过添加 $-\infty$，并将 ∞ 和 $\mathbb{R}$分别视为序的最小元和最大元，使其成为完备的。

引理2.15 （临界值引理）。 区间 $I \subseteq T$不包含 F的任何临界值： $T \to C$，当且仅当 F在 I上为常值函数。

证明。 设 I <style id='6}>是一个不包含临界点的区间。充分条件由 Bubenik 和 J. A. Scott 的 2014，引理 4.4 中的临界值引理（4.4）与引理 2.2 共同满足适当条件而得出。必要条件源于这样一个事实：包含 F的临界点的区间不可能是 F的常值区间。

□

定义 2.16。 固定一个完备线性偏序集 T 和一个广义持久模 F： $T^k \to C$。如果存在某些 t_1、.....、 t_{j-1}， t_{j+1}.....、 $t_k \in T$，使得 (t_1、.....、 t_{j-1}， t， t_{j+1}、.....、 t_k) 是 F_j： $T \to C$ 的一个临界值； $s \mapsto F((t_1$、.....、 t_{j-1}， s， t_{j+1}， $\ldots t_k))$，则称 $t \in T$ 是 j-坐标的临界。

定义 2.17。 如果 F: $T^k \to C$ 是立方体驯服的，则称其为立方体驯服的，当且仅当它只有有限个临界坐标。

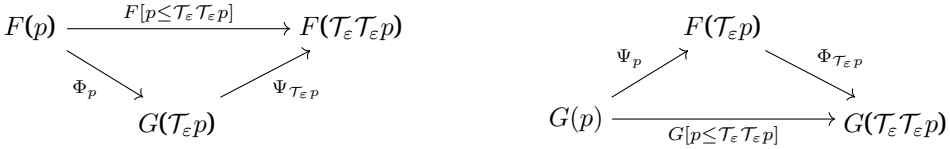
2.4.2 持久模之间的距离

接下来，我们利用第 C^P 2.3 节中的流概念来定义一个距离。

定义 2.18。 假设偏序集 P赋有一个交换流 $\mathcal{T}$。如果存在一对自然变换，则称 $F, G \in C^P$是 $\mathcal{T}_\varepsilon$-交错的

$$\Phi : F \Rightarrow G\mathcal{T}_\varepsilon \qquad \Psi : G \Rightarrow F\mathcal{T}_\varepsilon$$

使得图表



交换。交错距离定义为

$$d_I(F, G) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid F, G \text{ are } \mathcal{T}_\varepsilon\text{-interleaved}\}$$

并且，如果不存在 $\mathcal{T}_\varepsilon$-交错，则设 $d_I(F,\ G) = \infty$。

命题 2.19 (Bubenik、Silva和J. Scott，2014，定理 3.15)。 交错距离 d_I 是定义在 C^P上的扩展伪度量。

3 用一般损失函数界定交错距离

本节受 Chambers、Munch 等人2025年的启发，通过定义损失函数，为广义持久模的交错距离给出一个界。本节中，我们假设 F 和 G 是具体范畴 C^P 中的广义持久模，其中 C 是偏序集 P，且带有交换流 $\mathcal{T}$。

3.1 合并距离函数

固定 $p \in P$。我们将通过测量在 $F(p)$ 上“需要流动”多少才能达到元素相等，来构造一种距离。基于此，我们假设 $\mathcal{T}_0 = \mathrm{Id}$。

定义 3.1。对于 a， $b \in F(p)$，定义

$$d_p^F(a,b) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid F[p \leq T_\varepsilon p](a) = F[p \leq T_\varepsilon p](b)\}.$$

由于该函数是 i　　事实上是一个距离（这将在定理 3.4中证明），我们称之为合并距离函数　　.

引理 3.2. 设 $a, b \in F(p)$。若存在 $\mathcal{S} \in \mathrm{Trans}(P)$ 使得 $F[p \leq \mathcal{S}p](a) = F[p \leq \mathcal{S}p](b)$，则对任意$\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$，$F[p \leq \mathcal{S}'p](a) = F[p \leq \mathcal{S}'p](b)$。

这可以改述如下：如果在 F 中平移 $\mathcal{S}$ 使 a 与 b相等，则任何平移 $\mathcal{S}' \geq \mathcal{S}$都能使它们相等。

引理 *3.2* 的证明。 我们计算得

$$F[p \leq \mathcal{S}'p](a) = F[\mathcal{S}p \leq \mathcal{S}'p]F[p \leq \mathcal{S}p](a) = F[\mathcal{S}p \leq \mathcal{S}'p]F[p \leq \mathcal{S}p](b) = F[p \leq \mathcal{S}'p](b)$$

其中，第一个和第三个等式由推论 2.4 得出，第二个等式则由假设得出。 □

于是我们立即得到以下推论。

推论 3.3. 对于任意 $\delta > d_p^F(a,b)$，我们有 $F[p \leq \mathcal{T}_\delta p](a) = F[p \leq T_\delta p](b)$。

接下来，我们检验 d_p^F的距离性质。

定理 3.4. 合并距离 d_p^F是 $F(p)$上的扩展伪超度量。

证明。对于任意 $a, b \in P$，根据定义可立即得到 $d_p^F(a,b) = d_p^F(b,a)$、$d_p^F(a,b) \geq 0$，以及$d_p^F(a,a) = 0$。但是，可能出现这样的情况：$d_p^F(a,b) = 0$，但 a和 b不相等，参见示例 3.5。距离可能取无穷值，因为若不存在满足 $F[p \leq T_\varepsilon p](a) = F[p \leq \mathcal{T}_\varepsilon p](b)$ 的 $\varepsilon \geq 0$，则 $d_p^F(a,b) = \infty$。
最后我们证明

$$d_p^F(a,b) \leq \max\{d_p^F(a,c), d_p^F(c,b)\}$$

对于任意 $c \in F(p)$，超度量性质成立。若 $d_p^F(a,c)$ 或 $d_p^F(c,b)$ 为无穷大，则结论显然成立。因此不失一般性，假设 $d_p^F(a,c) \leq d_p^F(c,b) < \infty$。取满足以下条件的 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$

$$F[p \leq \mathcal{T}_\varepsilon p](a) = F[p \leq \mathcal{T}_\varepsilon p](c) \qquad and \qquad F[p \leq \mathcal{T}_{\varepsilon'} p](c) = F[p \leq \mathcal{T}_{\varepsilon'} p](b).$$

于是，由引理 3.2, $F[p \leq \mathcal{T}_{\varepsilon'} p](a) = F[p \leq \mathcal{T}_{\varepsilon'} p](c) = F[p \leq \mathcal{T}_{\varepsilon'} p](b)$。因此，由于 ε' 是任意的，我们得到$d_p^F(a,b) \leq d_p^F(c,b)$。 □

示例 3.5. 定义流 $\mathcal{T}\colon [0,\infty) \to \mathrm{Trans}([0,\infty))$，使得 $T_\varepsilon(m) = m + \varepsilon$。考虑 $\mathrm{Set}^{[0,\infty)}$ 中的模 F和 F'，它们由以下方式给出

$$F(i) = \begin{cases} \{a,b\} & i < 3 \\ \{a\} & i \geq 3 \end{cases} \qquad\qquad F'(i) = \begin{cases} \{a,b\} & i \leq 3 \\ \{a\} & i > 3 \end{cases}$$

其态射在可能时将 $a \to a$ 和 $b \to b$ 映射到对应对象，否则将 $b \to a$ 映射到对应对象。从直观上看，我们可以将 F 视为映射图

$$\begin{array}{ccccccccccccc} F(0) & \longrightarrow & F(1) & \longrightarrow & F(2) & \longrightarrow & F(3) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F(i) & \longrightarrow & \cdots \\ a_0 & \longmapsto & a_1 & \longmapsto & a_2 & \longmapsto & a_3 & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & a_i & \longrightarrow & \cdots \\ b_0 & \longmapsto & b_1 & \longmapsto & b_2 & \nearrow & & & & & & & \end{array}$$

而 F'除映射到 $F(3)$ 之外都相同。注意， F和 F'几乎相同：它们有相同的临界点，但在 3 的两侧以不同方式改变集合的大小。我们可以验证，对于 $i < 3$， $d_i^F(a,\ b) = d_i^{F'}(a,\ b) = 3 - i$，并且 $d_3^{F'}(a,\ b) = 0$。这表明，距离为 0 的元素可能并不相同。

另外请注意，这个距离对应于沿流的意义下， i 距离 3 有“多远”。由此可得，对于$i < j < 3$ 和 $\delta \geq (j - i)$

$$d_j^F(a,b) < d_i^F(a,b) \leq d_j^F(a,b) + \delta$$

以下引理将这一结果形式化。

引理 3.6。若 $p \leq q$ 在 P和 b中，若 $b' \in F\ (p)$ ，其中 $c = F[p \leq q]\ (b)$ ，且 $c' = F[p \leq q]\ (b')$ ，则 $d_q^F\ (c,\ c') \leq d_p^F\ (b,\ b')$.

证明。 固定 $\delta > d_p^F(b', b)$。由推论 3.3 可知 $F[p \leq \mathcal{T}_\delta p](b) = F[p \leq \mathcal{T}_\delta p](b') =: x$。由薄引理，图表

$$\begin{array}{ccc} F(p) & \longrightarrow & F(q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(T_\delta p) & \longrightarrow & F(T_\delta q) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \begin{matrix} b \\ b' \end{matrix} & \longmapsto & \begin{matrix} c \\ c' \end{matrix} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

交换，取 $y = F[T_\delta p \leq T_\delta q](x)$。 因此，由于 b, b'映射到同一个元素， c和 c'也映射到同一个元素，具体而言， $y = F[q \leq \mathcal{T}_\delta q](c) = F[q \leq \mathcal{T}_\delta q](c')$。这意味着 $\delta \geq d_q^F(c', c)$；又由于 δ是任意的，根据下确界的定义，结论得证。 □

直观地说，引理3.6 表明，合并距离在向前流动时不会增加。此外，对于任意 $q = \mathcal{T}_\delta\ p$，在引理 3.6 中令 $\delta \in (d_p^F(b', b)\ \infty)$，由推论 3.3 对于任意 $c, c' \in F(T_\delta\ p) = F(q)$，我们得到$d_q^F(c', c) = 0$。

要用 $d_q^F(c, c')$ 来界定 $d_p^F(b', b)$，流的阿基米德性质是一个充分条件。引理 3.7. 设 $\mathcal{T}$ 是 P 上的阿基米德流。若 $p \leq q$ 属于 P 且 $b, b' \in F(p)$，其中 $c = F[p \leq q](b)$ 且 $c' = F[p \leq q](b')$，则存在 δ 使得 $d_q^F(b, b') < d_p^F(c, c') + \delta$。

证明。 沿用前一个引理中的相同记号，我们将证明存在 δ 使得 $d_p^F(b, b') < d_q^F(c, c') + \delta$。为找到这样的 δ，取 $\gamma > d_q^F(c, c')$。于是，根据推论 3.3 可得 $F[q \leq T_\gamma q](c) = F[q \leq T_\gamma q](c')$。因此

$$\begin{aligned} F[p \leq T_\gamma q](b) &= F[q \leq T_\gamma q]F[p \leq q](b) \\ &= F[q \leq T_\gamma q](c) \\ &= F[q \leq T_\gamma q](c') \\ &= F[q \leq T_\gamma q]F[p \leq q](b') \\ &= F[p \leq T_\gamma q](b'). \end{aligned}$$

ˆ 由于 $\mathcal{T}$是一个流， $p < \mathcal{T}_\gamma q$，因此根据阿基米德假设，存在一个 δ 使得 $\mathcal{T}_{\hat{\delta}} p > T_\gamma q$。注意，结合 ˆ 与 $\mathcal{T}_{\hat{\delta}} q \geq \mathcal{T}_{\hat{\delta}} p > T_\gamma q$，这意味着 $\delta > \gamma$，因此

$$F[p \leq \mathcal{T}_{\hat{\delta}} p](b) = F[p \leq \mathcal{T}_{\hat{\delta}} p](b')$$

因此，令 $\delta = \hat{}\delta - d_q^F(c, c')$，我们得到

$$\gamma + \delta = \gamma + (\hat{\delta} - d_q^F(c, c')) > \gamma + (\hat{\delta} - \gamma) = \hat{\delta} > d_p^F(b, b')$$

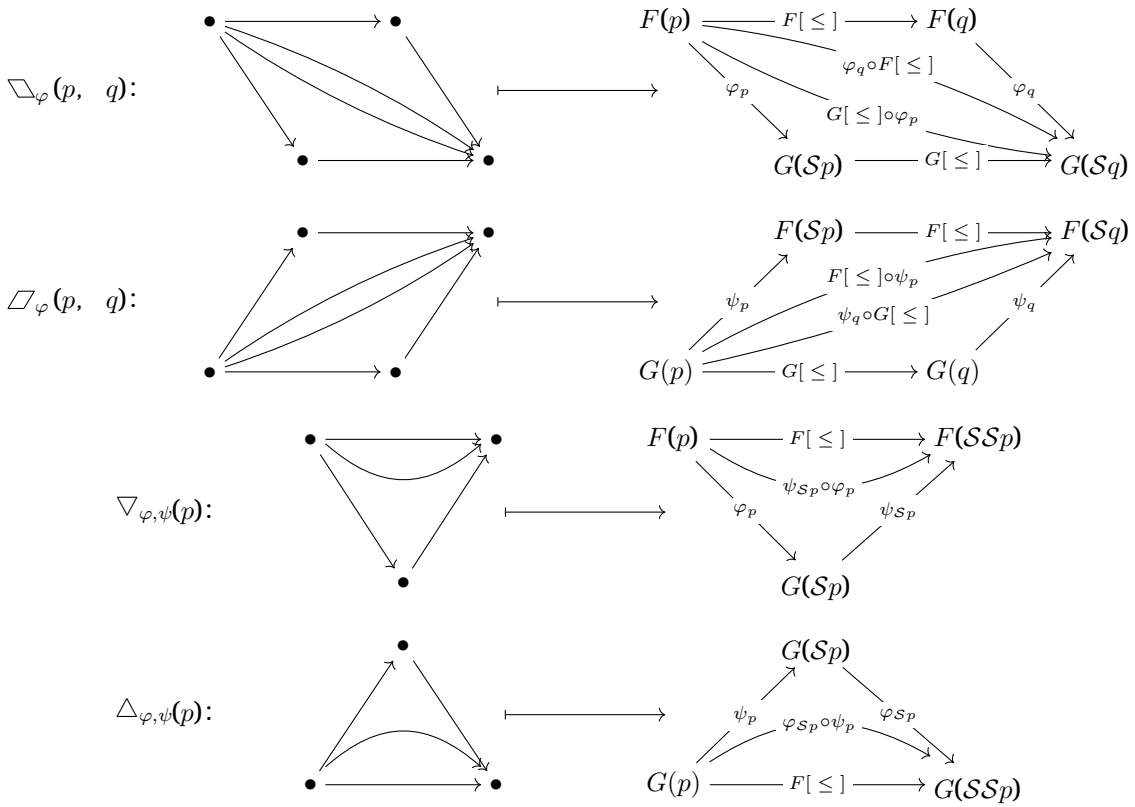
由于 γ 是任意的，我们得到 $d_q^F(c,c') + \delta > d_p^F(b,b')$，证明完成。 □

3.2 损失函数

我们的下一项工作是定义具有自然变换形式、但缺乏通常保证的结构。

定义 3.8. 给定函子 F、$F' \in C^P$，非自然变换 $\eta\colon F \succ F'$ 是一族映射 $\eta_p\colon F(p) \to F'(p)$，不额外保证交换性。对于固定的 $\mathcal{S} \in \text{流}_{\mathcal{T}}$（定义 2.7）以及函子 F、$G \in C^P$，$\mathcal{S}$-赋值 F 和 G 是一对非自然变换 $\varphi\colon F \succ G\mathcal{S}$ 和 $\psi\colon G \succ F\mathcal{S}$，我们将其记作 (φ,ψ)。

对于固定的 $p,\ q \in P$ 和 $(\varphi,\ \psi)$，$\mathcal{S}$-赋值 F 和 G，考虑由范畴 C 中的有限范畴所索引的下列图表。



我们为每个图表左侧的图表分别命名。我们的目标是通过检查每个图表中定义的平行态射距离相等还有多远，来衡量给定赋值（$\varphi,\ \psi$）的质量。这是因为如果它们相等，那么所讨论的结构确实会是一个自然变换（由前两个图表可知）和一个交错（由后两个图表可知）。下面的定义使用陪域中已经定义的距离来表示自然变换之间的距离函数，这主要是为了简化后续的记号。

定义 3.9。固定 $q \in P$，令 $f,\ g\colon\ A \to F(q)$ 为 C 中源为 $A \in C$ 的一对态射。我们定义 f 与 g 之间的距离为

$$d(f,g) = \sup_{a\in A} \left\{ d_q^F(f(a), g(a)) \right\}.$$

有了这个定义，我们现在需要对上述图表进行四项测量。

定义 3.10。固定一个 $\mathcal{S}$-赋值 (φ,ψ)。我们将每个图表的损失定义为

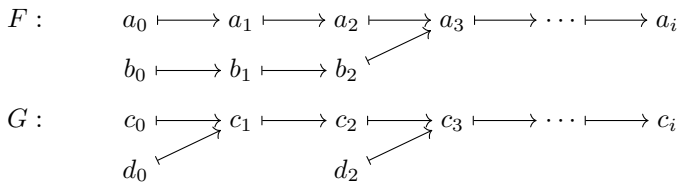
$$L_{\ulcorner}^{p,q}(\varphi) = d(\varphi_q \circ F[p \le q], G[\mathcal{S}p \le \mathcal{S}q] \circ \varphi_p) \qquad L_{\triangledown}^{p}(\varphi,\psi) = d(F[p \le \mathcal{S}\mathcal{S}p], \psi_{\mathcal{S}p} \circ \varphi_p)$$
$$L_{\lrcorner}^{p,q}(\psi) = d(\psi_q \circ G[p \le q], F[\mathcal{S}p \le \mathcal{S}q] \circ \psi_p) \qquad L_{\triangle}^{p}(\varphi,\psi) = d(G[p \le \mathcal{S}\mathcal{S}p], \varphi_{\mathcal{S}p} \circ \psi_p).$$

给定赋值的损失定义为

$$L(\varphi,\psi)=\sup_{p<q}\left\{L^{p,q}_{\searrow}(\varphi),L^{q}_{\triangledown}(\varphi,\psi),L^{p,q}_{\square}(\psi),L^{q}_{\triangle}(\varphi,\psi)\right\}. \tag{2}$$

注意，损失为 0 的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值（φ，ψ）是 F 与 G 之间的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-交错。

例 3.11。如例 3.5中一样，定义流 $\mathcal{T}\colon [0,\infty)\to\mathrm{Trans}(\mathbb{N})$ 为 $\mathcal{T}_\varepsilon(m)=m+\lfloor\varepsilon\rfloor$。考虑合并树$F$和 G，它们位于$\mathrm{Set}^{\mathbb{N}}$ 中，定义如下：



相应集合中各点之间的距离为：

$$d_0^F(a_0,b_0)=3\qquad d_1^F(a_1,b_1)=2\qquad d_2^F(a_2,b_2)=1\qquad d_0^G(c_0,d_0)=1\qquad d_2^G(c_2,d_2)=1$$

考虑由以下内容给出的 $\mathcal{T}_1$-赋值 φ和 ψ：

$$\varphi_i(a_i)=c_{i+1}\qquad \varphi_0(b_0)=c_1\qquad \varphi_1(b_1)=d_2,\qquad \varphi_2(b_2)=c_3$$
$$\psi_i(c_i)=a_{i+1}\qquad \psi_0(d_0)=b_1\qquad \psi_2(d_2)=a_3$$

那么，我们得到的非零损失项为

$$L^{0,1}_{\searrow}(\varphi)=L^{0}_{\triangle}(\varphi,\psi)=d_2^G(c_2,d_2)=1\quad\text{and}\quad L^{0}_{\triangledown}(\varphi,\psi)=L^{0,1}_{\square}(\varphi)=d_2^F(a_2,b_2)=1.$$

所以 $L(\varphi,\psi)=1$。

3.3 界定交错距离

在本小节中，我们展示如何利用损失为 δ 的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值诱导出一个 $\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon$-交错，从而以 $\delta+\varepsilon$ 为交错距离设定上界。

定义 3.12。令 $\mathcal{S}\in\mathrm{Flows}_{\mathcal{T}}$，并取 (φ,ψ) 作为一个 $\mathcal{S}$-赋值。给定一个平移 $\mathcal{R}\in\mathrm{Flows}_{\mathcal{T}}$，由 $\varphi'=G[\mathcal{R}]\circ\varphi$ 和 $\psi'=F[\mathcal{R}]\circ\psi$ 给出的 $\mathcal{RS}$-赋值 (φ',ψ') 称为 (φ,ψ) 的 $\mathcal{R}$-平移。

接下来，我们分析 $\mathcal{R}$-平移如何变换赋值 (φ,ψ) 的损失。

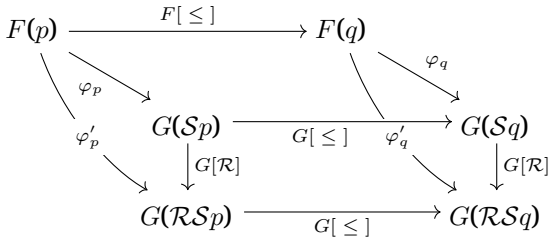
定理 3.13。固定 p,q，其中 P，以及 $\mathcal{R},\mathcal{S}\in\mathrm{Flows}_{\mathcal{T}}$。令 (φ,ψ) 为一个 $\mathcal{S}$-赋值，并令 (φ',ψ') 为(φ,ψ) 的 $\mathcal{R}$-平移。则以下结论成立。

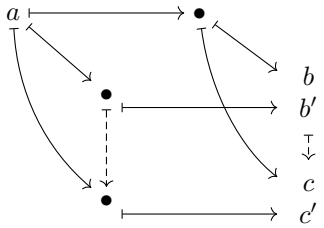
1. $L^{p,q}_{\searrow}(\varphi')\le L^{p,q}_{\searrow}(\varphi)$ 2. $L^{p}_{\triangledown}(\varphi',\psi')\le\max\{L^{p}_{\triangledown}$
(φ,ψ) $L^{\mathcal{S}p,\mathcal{RS}p}(\psi)\}$3. $L^{p,q}(\psi')\le L^{p,q}_{\square}(\psi)$ 4. $L^{p}_{\triangle}$
$(\varphi',\psi')\le\max\{L^{p}_{\triangle}(\varphi,\psi)$ $L^{\mathcal{S}p,\mathcal{RS}p}(\varphi)\}$.

$\square$

证明。注意到（1）与（3），以及（2）与（4）是对称的。因此，我们只需证明陈述（1）和（2）。

我们从陈述（1）开始。固定 $a\in F(p)$。考虑元素 $b=\varphi_q\circ F[p\le q](a)$、$b'=G[\mathcal{S}p\le\mathcal{S}q]\circ\varphi_p(a')$、$c=\varphi'_q\circ F[p\le q](a)$ 和 $c'=G[\mathcal{RS}p\le\mathcal{RS}q]\circ\varphi'_p(a')$。这些元素可见于以下非交换图表中：



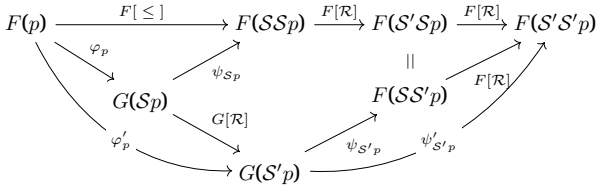


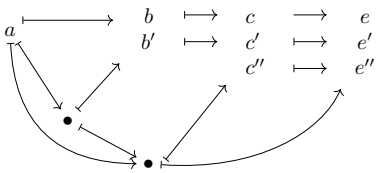
根据定义， $\varphi' = G[\mathcal{R}] \circ \varphi$，左侧和右侧三角形交换，因此 $c = G[\mathcal{R}](b)$ 以及 $c' = G[\mathcal{R}](b')$。根据引理 3。6，我们有

$$d^G_{\mathcal{R}\mathcal{S}q}(c, c') \leq d^G_{\mathcal{S}q}(b, b').$$

因此，根据平行四边形损失的定义以及上确界的性质，我们有 $L^{p,\ q}(\varphi') \leq L^{p,\ q}(\varphi)$，从而完成陈述（1）。

对于命题（2），令 $\mathcal{R}\mathcal{S} = \mathcal{S}'$，并考虑以下不一定交换的图表。





对于 $a \in F(p)$ 集 $e = F[p \leq \mathcal{S}\mathcal{S}'p](a)$ 和 $e'' = \psi'_{\mathcal{S}'p} \circ \varphi'_p(a)$。由于定理3.4 表明合并距离是超度量，因此我们有

$$d^F_{\mathcal{S}\mathcal{S}'p}(e, e'') \leq \max\left\{d^F_{\mathcal{S}'\mathcal{S}'p}(e, e'), d^F_{\mathcal{S}'\mathcal{S}'p}(e', e'')\right\}.$$

根据引理3.6， $d^F_{\mathcal{S}'\mathcal{S}'p}(e,\ e') \leq d^F_{\mathcal{S}'\mathcal{S}p}(c,\ c') \leq d^F_{\mathcal{S}\mathcal{S}p}(b,\ b')$。另一方面，根据同一引理， $d^F_{\mathcal{S}'\mathcal{S}'p}(e',\ e'') \leq d^F_{\mathcal{S}\mathcal{S}'p}(c',\ c'')$。因此

$$d^F_{\mathcal{S}\mathcal{S}'p}(e, e'') \leq \max\left\{d^F_{\mathcal{S}\mathcal{S}p}(b, b'), d^F_{\mathcal{S}\mathcal{S}'p}(c', c'')\right\}.$$

根据平行四边形图和三角形图的损失的定义以及上确界的定义，我们得出

$$L^p_{\bigtriangledown}(\varphi', \psi') \leq \max\{L^p_{\bigtriangledown}(\varphi, \psi), L^{\mathcal{S}p,\mathcal{R}\mathcal{S}p}_{\square}(\psi)\}$$

从而完成命题（2）和证明。 □

直观地说，定理3.13 表明，沿 $\mathcal{R}$平移时，损失不会增加。此外，对于某个特殊的 $\mathcal{T}_\delta$-平移，我们可以使损失为零。

引理 3.14。 给定一个 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值(φ, ψ)，取一个 δ 使得

$$\delta > \max\{L^{p,q}_{\bigtriangleup}(\varphi), L^{p,q}_{\square}(\psi), L^p_{\bigtriangledown}(\varphi, \psi), L^{\mathcal{T}_\varepsilon p,\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon p}_{\square}(\psi), L^p_{\triangle}(\varphi, \psi), L^{\mathcal{T}_\varepsilon p,\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon p}_{\bigtriangleup}(\varphi)\}.$$

定义(Φ, Ψ) 为(φ, ψ)的 $\mathcal{T}_\delta$-平移。则

$$L^{p,q}_{\bigtriangleup}(\Phi) = 0, \qquad L^{p,q}_{\square}(\Psi) = 0, \qquad L^p_{\bigtriangledown}(\Phi, \Psi) = 0, \qquad \textit{and} \qquad L^p_{\triangle}(\Phi, \Psi) = 0.$$

证明。 对于平行四边形损失，考虑定理 3.13 中陈述（1）的证明。由于

$$\delta > L^{p,q}_{\bigtriangleup}(\varphi) \geq d^G_{\mathcal{T}_\varepsilon q}(b, b')$$

再由 C 或者。3.3， $d^G_{\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon q}(c,\ c') = 0$。因此 $L^{p,\ q}(\Phi) = 0$。对称论证可得 $L^{p,\ q}(\Psi) = 0$.

对于三角损失，考虑定理（2）的证明 3.13。利用推论 3.3，我们有，对于任意 $a \in F(p)$,$d^F_{\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon p}(e, e') = 0$ 在满足以下条件时

$$\delta > L^p_{\bigtriangledown}(\varphi, \psi) \geq d^F_{\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon p}(b, b').$$

同理 $d^F_{\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon p}(e', e'') = 0$ 在满足以下条件时

$$\delta > L_{\square}^{\mathcal{T}_\varepsilon p, \mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon p}(\psi) \geq d^F_{T_\delta\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon p}(c', c'').$$

因此，$d^F_{\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon p}(e,\ e'') = 0$，所以，$L^p_\triangledown(\Phi,\ \Psi) = 0$。同理，对称地，$L^p_\triangledown(\Phi,\ \Psi) = 0$. □

定理 3.15。对于任意由 $\varphi\colon\ F \succ G\mathcal{T}_\varepsilon$ 和 $\psi\colon\ G \succ F\mathcal{T}_\varepsilon$给出的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值，

$$d_I(F, G) \leq \varepsilon + L(\varphi, \psi).$$

证明。令 $\delta > L(\psi, \varphi)$。根据引理 3.14，由 $\Phi = G[\mathcal{T}_\delta] \circ \varphi$ 和 $\Psi = F[\mathcal{T}_\delta] \circ \psi$给出的 $\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值 (Φ, Ψ) 是 F和 G之间的 $\mathcal{T}_\delta\mathcal{T}_\varepsilon$-交错。根据交错的单调性，我们有 F和 G 是 $\mathcal{T}_{\delta+\varepsilon}$-交错的。因此，由于 δ是任意的，我们得到 $d_I(F, G) \leq \varepsilon + L(\psi, \varphi)$，正如所需。 □

例 3.16. 取 $F,\ G$和 $\mathcal{T}$，它们来自示例 3.11。对于 $\varepsilon = 1$，我们计算得 $L(\varphi,\ \psi) = 1$，因此由定理 3.15可得 $d_I(F,\ G) \leq 2$。

我们注意到，该定理并不保证界是紧的，事实上，我们也不期待如此。相反，它可以被视为针对任意输入赋值给出一个界，因而目标是在某些情况下找到一个能给出尽可能好界的赋值。不过，这一具体方向留待未来工作；我们将转而着重确定，对于给定的输入赋值，计算 $L(\varphi,\ \psi)$ 需要哪些条件。

4 化简计算

本节致力于利用距离函数的不同性质，并将 P 和 $\mathcal{C}$ 限定在若干特定情形，以创建算法和策略来计算 $L(\varphi, \psi)$；这些情形大多是拓扑数据分析（TDA）领域关注的。除非另有明确说明，本节中我们假设 $F,\ G \in \mathcal{C}^P$，$\mathcal{T}$ 是交换流，且 $(\varphi,\ \psi)$ 是 $\mathcal{S}$-赋值，定义在 F 和 G 之间。

4.1 改进合并距离函数的计算

定义 4.1. 对于固定的 $q \in P$，如果对于所有满足 $\gamma_1 \neq \gamma_2$ 的 $0 \leq \gamma_1 < \delta \leq \gamma_2$，$F[\mathcal{T}_{\gamma_1} q \leq \mathcal{T}_{\gamma_2} q]$ 都是非单态射，我们就称 $\delta \in [0, \infty)$ 是 q 在 F 上的约化常数。否则，我们称 δ 是 q 在 F 上的非约化常数。

对于 $q \in P$，我们用 $D^F_q \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示 q 在 F 上的约化常数集合。

示例 4.2. 继续使用示例 $\mathcal{T}$中的流和模 F，3.11，考虑点 $q = 1 \in \mathbb{N}$。我们将证明，$\mathbf{1}$ 在 1 上 F的约化常数集合为 $D^F_1 = \{2\}$。注意，对于 $0 < \gamma_1 < 2$，我们有 $\mathcal{T}_{\gamma_1}(1) < 2$。与此同时，对于 $\gamma_2 \geq 2$，我们得到$\mathcal{T}_{\gamma_2}(1) \geq 3$。于是，对于这些值，

$$F[\mathcal{T}_{\gamma_1}(1) \leq \mathcal{T}_{\gamma_2}(1)] = F[1 + \lfloor \gamma_1 \rfloor \leq 2] \circ F[2 \leq 3] \circ F[3 \leq 1 + \lfloor \gamma_2 \rfloor]$$

因此，由于 $F[2 \leq 3]$ 不是单射，这个态射不是单态射。此外，请注意，这是形如 $F[i \leq i+1]$的唯一非单射态射，因此在这个示例中，D^F_1没有其他元素。

下一个引理表明，距离只能取这个约化常数集合中的值。

引理 4.3. 固定 $q \in P$。如果 D^F_q是有限的，那么对于任意属于 $F(q)$的 $a \neq b$，都有 $d^F_q(a, b) \in D^F_q \cup \{\infty\}$.

证明。设 $D := D^F_q = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$按如下方式排序：$\delta_i < \delta_{i+1}$。为导出矛盾，假设存在一对 $a \neq b \,\mathrm{in} F(q)$，以及一个 i，使得 $\delta_{i-1} < d^F_q(a,\ b) < \delta_i$（必要时令 $\delta_0 = 0$）。那么，对于任意满足 $d^F_q(a,\ b) \leq \delta < \delta_i$ 的 δ，都有 $F[q \leq \mathcal{T}_\delta q](a) = F[q \leq \mathcal{T}_\delta q](b)$。由于 $\delta \notin D$，选取 $0 < \gamma < \delta$使得 $F[\mathcal{T}_\gamma q \leq \mathcal{T}_\delta q]$是一个单态射。回想一下，$F[q \leq \mathcal{T}_\delta q] = F[\mathcal{T}_\gamma q \leq \mathcal{T}_\delta q] \circ F[q \leq \mathcal{T}_\gamma q]$。这意味着 $F[q \leq \mathcal{T}_\gamma q](a) = F[q \leq \mathcal{T}_\gamma q](b)$，于是$d^F_q(a,\ b) \leq \gamma$。由于 δ 是任意的，我们得到

$$F[q \leq \mathcal{T}_{d^F_q(a,b)} q](a) = F[q \leq \mathcal{T}_{d^F_q(a,b)} q](b).$$

然后，对 $\delta = d_q^F(a,\ b) < \delta_i$ 进行类似分析，可找到 $\gamma < d_q^F(a,\ b)$，使得 $F[q \le \mathcal{T}_\gamma q](a) = F[q \le \mathcal{T}_\gamma q](b)$，这就产生了矛盾。因此，在 $d_q^F(a,\ b)$ 与 δ_i 之间存在一个 δ 会导致矛盾。因此，$\delta_i = d_q^F(a,\ b)$。

现在，考虑 $\delta_n \le d_q^F(a,\ b)$ 的情形。若 $d_q^F(a,\ b) = \infty$，则证明完成。否则，注意到对于 $\delta_n < \delta < d_q^F(a,\ b)$，我们可以找到 $\delta < \gamma \le d_q^F(a,\ b)$，其中 $F[\mathcal{T}_\delta q \le \mathcal{T}_\gamma q]$ 是单态射。通过类似的过程，我们可以得到一个$\gamma > d_q^F(a,\ b)$，满足 $F[q \le \mathcal{T}_\gamma q](a) \ne F[q \le \mathcal{T}_\gamma q](b)$，这与矛盾相矛盾。因此 $\delta_n = d_q^F(a,\ b)$，证明完毕。□

由此引理，我们立即得到以下定理，它可以限制损失函数的可能取值。

定理 4.4。以下结论成立：

1) 若 $q \in P$ 使得 $D_{\mathcal{S}q}^G$ 是有限的，则对任意 $p \le q$, $L^{p,\ q}(\varphi) \in D_{\mathcal{S}q}^G \cup \{\infty\}$。
2) 若 $q \in P$ 使得 $D_{\mathcal{S}\mathcal{S}q}^F$ 是有限的，则 $L_\nabla^q(\varphi, \psi) \in D_{\mathcal{S}\mathcal{S}q}^F \cup \{\infty\}$。 *3)* 若 $q \in P$ 使得 $D_{\mathcal{S}q}^F$ 是有限的，则对任意 $p \le q$, $L^{p,\ q}(\varphi) \in D_{\mathcal{S}q}^F \cup \{\infty\}$。 *4)* 若 $q \in P$ 使得 $D_{\mathcal{S}\mathcal{S}q}^G$ 是有限的，则 $L_\Delta^q(\varphi, \psi) \in D_{\mathcal{S}\mathcal{S}q}^G \cup \{\infty\}$。

请注意，在许多我们感兴趣的情形下（例如，在 $\mathbf{Vec}^P$ 中的 q-驯化持久模；或 P 是有限集；或 $\mathcal{C}$ 的对象的底层集合是有限的），约化常数的集合始终是有限的。

4.1.1 计算 FC 范畴中的损失

我们将使用定理 4.4 来介绍计算 $L^{p,\ q}(\varphi)$ 的不同算法，其中 p 和 q 固定。本节中，我们始终假设 C 是一个对象的底层集合有限的具体范畴；也就是说，是一个 FC 范畴。在这些假设下，我们可以给出一个计算 $L^{p,\ q}(\varphi)$ 的算法，并注意到计算 $L^{p,\ q}(\psi)$、$L_\nabla^p(\varphi,\ \psi)$ 和 $L_\Delta^p(\varphi,\ \psi)$ 的算法也类似。

接下来，我们固定 $p < q \in P$并记作 $D_{\mathcal{S}q}^G = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$。我们固定一组交错值 $\{\gamma_i\}_{i=0}^m \subseteq \mathbb{R}_{\ge 0}$，其中 $0 = \gamma_0 < \delta_0 < \gamma_1 < \cdots < \delta_i < \gamma_i < \delta_{i+1} < \cdots \delta_m < \gamma_m$。为简化算法中的记号，我们将平行四边形两侧的复合态射记为 $f = \varphi_q \circ F[p \le q]$ 和 $g = G[\mathcal{S}p \le \mathcal{S}q] \circ \varphi_p$，于是有 $L^{p,\ q}(\varphi) = d(f,\ g)$。其思路基于二分搜索（例如参见 Erickson，2019）：每一步检查 γ_i时，我们只保留 $F(p)$ 中那些在图表 $_{p,\ q}(\varphi)$ 的末端不会映射到同一元素的元素，这发生在 $G(\mathcal{T}_{\delta_i}\mathcal{S}q)$ 中。

算法 1 在有限范畴中计算 $L^{p,\ q}(\varphi)$ 的算法

给定： $D_{\mathcal{S}q}^G = \{\delta_1 < \cdots < \delta_m\}$ 与交错的 $\{\gamma_i\}_{i=0}^m$
Set $L \leftarrow 0$、$H \leftarrow m+1$ 和 $A \leftarrow F(p)$。
当 $L \ne H$ **时执行**
    $i \leftarrow \lfloor \frac{H+L}{2} \rfloor$
    $A' \leftarrow \{a \in A \mid G[\mathcal{S}q < \mathcal{T}_{\gamma_i}\mathcal{S}q](f(a)) \ne G[\mathcal{S}q < \mathcal{T}_{\gamma_i}\mathcal{S}q](g(a))\}$
    如果 $A' = \emptyset$, **则**
        $H \leftarrow i$
    else
        $L \leftarrow i+1$
        $A \leftarrow A'$
    结束如果
结束循环
如果 $0 < L \le m$**则**
    返回 δ_L ▷ $L_\nabla^{p\ q}(\varphi) = \delta_L$
否则，如果 $L = 0$**则**
    返回 0 ▷ $L_\nabla^{p,\ q}(\varphi) = 0$
否则
    返回 ∞ ▷ $L_\nabla^{p,\ q}(\varphi) = \infty$，因为 $L = m+1$
结束 if

基本思路是在集合 $D^G_{\mathcal{S}q}$ 上进行二分搜索，以找到满足以下条件的最小 δ_i：所有 $a \in F(p)$ 在 $G(\mathcal{T}_{\delta_i}\mathcal{S}q)$ 中都有相同的像 $f(a)$ 和 $g(a)$。这意味着计算 $L^{p,\,q}(\varphi)$ 的时间复杂度为 $O(n\log(m))$，其中 $n = \sum|F(p)|$ 且 $m = |D^G_{\mathcal{S}q}|$。

类似的计算表明，确定 $L^p_{\triangledown}(\varphi,\ \psi)$ 的复杂度为 $O(|F(p)|\log|D^F_{\mathcal{SS}p}|)$；对于 $L^{p,\,q}(\psi)$，复杂度为$O(|F(p)|\log|D^F_{\mathcal{S}q}|)$；对于 $L^p_{\triangle}(\varphi,\ \psi)$，复杂度为 $O(|F(p)|\log|D^G_{\mathcal{SS}p}|)$。

4.1.2 计算向量域的损失

现在我们转而讨论可利用 $\mathcal{C}$ 上额外结构的情形，特别是 $\mathcal{C} = \mathsf{Vec}_{\mathbb{F}}$ 对某个域 $\mathbb{F}$ 成立的情形。在这一部分中，设 $F,\ G \in \mathsf{Vec}^P_{\mathbb{F}}$ 为 q-温和模。与之前一样，我们固定 $p < q \in P$，并将具有交错值 $\{\gamma_i\}_{i=0}^m \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的对象记作 $D^G_{\mathcal{S}q} = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$。

回忆一下，对于任意线性变换 $h,\ h' \colon V \to W$，有 $h(v) = h'(v)$ 当且仅当 $v \in \ker(h - h')$。此外，$\ker(h - h') = V$ 当且仅当 $\mathrm{Im}(h - h') = \{0\}$。

线性映射 f 和 g 与上一节中的相同。下面的算法再次通过二分搜索查找该图表的损失。这一次，它检查 γ_i，以找出满足 $G[\mathcal{S}q \leq \mathcal{T}_{\delta_i}\mathcal{S}q](Im(f-g)) = \{0\}$ 的最小 δ_i。

算法 2 计算 $\mathsf{Vec}_{\mathbb{F}}$ 中 $L^{p,\,q}(\varphi)$ 的算法

```
Set V ← Im(f − g) ⊆ G(Sq)。
如果 V = {0}，则
    返回 0                                              ▷ L^{p,q}(φ) = 0
否则
    Set L ← 1, H ← m + 1
结束 if
当 L ≠ H 时执行
    i ← ⌊(H+L)/2⌋
    V′ ← 线性映射 M = G[T_{γ_{L−1}}Sq < T_{γ_i}Sq] 的 Im(M|_V)
    如果 V′ = {0}，则
        H ← i
    else
        L ← i + 1
        V ← V′
    结束条件判断
结束循环
如果 L ≤ m 则
    返回 δ_L                                            ▷ L^{p,q}(φ) = δ_L
否则
    返回 ∞                                              ▷ L^{p,q}(φ) = ∞，其中 L = m + 1
结束 if
```

对于这种情况，计算 $L^{p,\,q}(\varphi)$ 的时间复杂度为 $O(n^3\log(m))$，其中 $n = \mathrm{rk}(f-g)$，因为我们要在 $G(\mathcal{T}_{\delta_i}\mathcal{S}q)$ 中搜索使 $Im(f-g)$ 映射到 0 的最小 δ_i。

与之前一样，我们可以使用类似的方法，利用 $\mathcal{S}q$ 在 F 上、$\mathcal{SS}p$ 在 F 上以及 G 上的约化常数相应限制，分别计算 $L^{p,\,q}(\psi)$、$L^p_{\triangledown}(\varphi,\ \psi)$ 和 $L^p_{\triangle}(\varphi,\ \psi)$。

4.2 减少图表数量

在上一节中，我们在特定条件下优化了固定 p 和 q 时 $L^{p,q}(\varphi)$、$L^{p,q}(\psi)$、$L^p_{\triangledown}(\varphi,\psi)$ 和 $L^p_{\triangle}(\varphi,\psi)$ 的计算。接下来，我们将减少计算 $L(\varphi,\psi)$ 所需检查的图表数量。

给定 $p < r < q$ 属于 P，我们首先建立对应于不同元素对的平行四边形损失界。

引理 4.5。 设 $p < r < q$ 属于 P。则有：

1)

$$L_{\triangle}^{p,q}(\varphi) \leq \max\left\{L_{\triangle}^{p,r}(\varphi), L_{\triangle}^{r,q}(\varphi)\right\}.$$

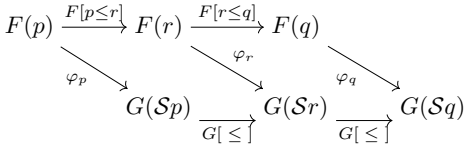
2) 若 $F[p \leq r]$ 是一个同构，则

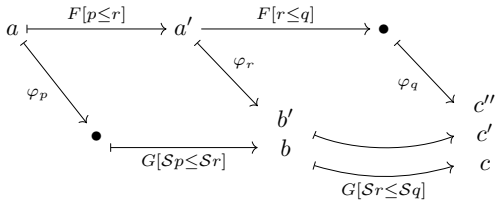
$$L_{\triangle}^{r,q}(\varphi) \leq \max\left\{L_{\triangle}^{p,r}(\varphi), L_{\triangle}^{p,q}(\varphi)\right\}.$$

3) 若 $\mathcal{T}$ 是阿基米德流（定义 2.8），则存在 $\delta > 0$ 使得

$$L_{\triangle}^{p,r}(\varphi) \leq \max\left\{L_{\triangle}^{p,q}(\varphi), L_{\triangle}^{r,q}(\varphi)\right\} + \delta$$

证明。 对于 $a \in F(p)$，考虑以下元素：





由定理 3.4 可知 $d_{\mathcal{S}q}^{G}$，于是，$d_{\mathcal{S}q}^{G}(c, c'') \leq \max\left\{d_{\mathcal{S}q}^{G}(c, c')\ d_{\mathcal{S}q}^{G}(c', c'')\right\}$。一方面，最右侧的方块是 $\varphi(r, q)$，因此我们有 $d_{\mathcal{S}q}^{G}(c', c'') \leq L^{r,q}(\varphi)$。另一方面，由引理 3.6，$d_{\mathcal{S}q}^{G}(c, c') \leq d_{\mathcal{S}r}^{G}(b, b')$，并且由于左侧方块是 $\varphi(p, r)$，这意味着 $d_{\mathcal{S}r}^{G}(b, b') \leq L^{p,r}(\varphi)$。因此我们有 $d_{\mathcal{S}q}^{G}(c, c') \leq L^{p,r}(\varphi)$。综合以上结果，我们得到

$$d_{\mathcal{S}q}^{G}(c, c'') \leq \max\left\{L_{\triangle}^{r,q}(\varphi), L_{\triangle}^{p,r}(\varphi)\right\}$$

根据上确界的定义，陈述 1）得证。

对于陈述 2），假设 $F[p \leq r]$ 是一个同构，并考虑 $a' \in F(r)$。取 $a = F[p \leq r]^{-1}(a')$。根据上述相同的推理，结论成立，因为我们有 $d_{\mathcal{S}q}^{G}(c',\ c'') \leq$ 最大值 $\left\{d_{\mathcal{S}q}^{G}(c',\ c)\ d_{\mathcal{S}q}^{G}(c,\ c'')\right\}$

最后，对于陈述 3），假设 $\mathcal{T}$ 是一个阿基米德流。由于 $c = G[\mathcal{S}r \leq \mathcal{S}q](b)$ 和 $c' = G[\mathcal{S}r \leq \mathcal{S}q](b')$根据引理 3.7 存在 δ 使得 $d_{\mathcal{S}r}^{G}(b,\ b') < d_{\mathcal{S}q}^{G}(c,\ c') + \delta$。因此，由于 $d_{\mathcal{S}q}^{G}$ 是一个超度量，

$$d_{\mathcal{S}r}^{G}(b, b') \leq \max\left\{d_{\mathcal{S}q}^{G}(c, c''), d_{\mathcal{S}q}^{G}(c'', c')\right\} + \delta$$

这意味着 $d_{\mathcal{S}r}^{G}(b,\ b') \leq$ 最大值 $\{L_{\triangle}^{p,q}(\varphi)\ L_{\triangle}^{r,\ q}(\varphi)\} + \delta$。因此，陈述 3）得证。 □

为了得到涉及三角图的等式，我们需要流满足某些特定性质

引理 4.6。 设 $p < q$ *in* P 满足 $L^{p,\ q}(\varphi) = 0$ 且 $L^{p,\ q}(\psi) = 0$。

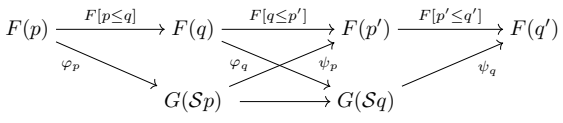
(1) 若 $F[p \leq q]$ 是同构，则有

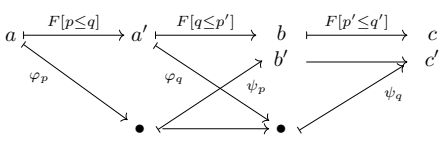
$$L_{\triangledown}^{q}(\varphi, \psi) \leq L_{\triangledown}^{p}(\varphi, \psi).$$

(2) 若 $\mathcal{T}$ 是阿基米德流（定义 2.8），则存在 $\delta > 0$ 使得

$$L_{\triangledown}^{p}(\varphi, \psi) < L_{\triangledown}^{q}(\varphi, \psi) + \delta.$$

证明。 不失一般性，假设 $q \leq \mathcal{S}\mathcal{S}p$。为简洁起见，令 $p' = \mathcal{S}\mathcal{S}p$ 和 $q' = \mathcal{S}\mathcal{S}q$，并考虑以下图表：





给定 $a' \in F(q)$，且由于 $F[p \le q]$ 是一个同构，我们可以选取 $a = F[p \le q]^{-1}(a')$。由于左侧三角形是 $\nabla_{\varphi,\ \psi}(p)$，我们有 $d_p^F(b', b) \le L_\nabla^p(\varphi, \psi)$。此外，根据引理 3.6，$d_{q'}^F(c, c') \le d_{p'}^F(b', b)$，因此$d_{q'}^F(c, c') \le L_\nabla^p(\varphi, \psi)$。由上确界的定义可知，$L_\nabla^q(\varphi, \psi) \le L_\nabla^p(\varphi, \psi)$，从而完成陈述（1）。
对于命题（2），假设 $\mathcal{T}$是一个阿基米德流，并任取 $a \in F(p)$。由引理 3.7，鉴于$c = F[p' \le q'](b)$且 $c' = F[p' \le q'](b')$，存在 δ使得 $d_p^F(b, b') < d_{q'}^F(c, c') + \delta$，进而可得 $L_\nabla^p(\varphi, \psi) < L_\nabla^q(\varphi, \psi) + \delta$。

□

推论 4.7。 若 P是离散的，

$$L(\varphi, \psi) = \sup_{p \prec q} \left\{ L_{\diagdown}^{p,q}(\varphi), L_\nabla^q(\varphi, \psi), L_{\square}^{p,q}(\psi), L_\Delta^q(\varphi, \psi) \right\}.$$

证明。 固定 $p \prec p'$和 $q' \prec q$。由引理 4.5，我们有 $L^{p,\ q}_{\diagdown}(\varphi) \le \max\left\{ L^{p,\ p'}_{\diagdown}(\varphi),\ L^{q',\ q}_{\diagdown}(\varphi) \right\}$。由于图表中没有涉及的数对，因此三角形不受影响，推论得证。

□

考虑 P一个有限偏序集。对于固定的 $q \in P$，推论4.7 意味着需要检查的平行四边形图数量为 $d(P) \cdot |P|$，其中 $d(P)$是 P中任一元素的前驱数量的最大值。这意味着，在有限偏序集 $L(\varphi, \psi)$和 P一个 $\mathcal{C}$ FC范畴的情况下，计算

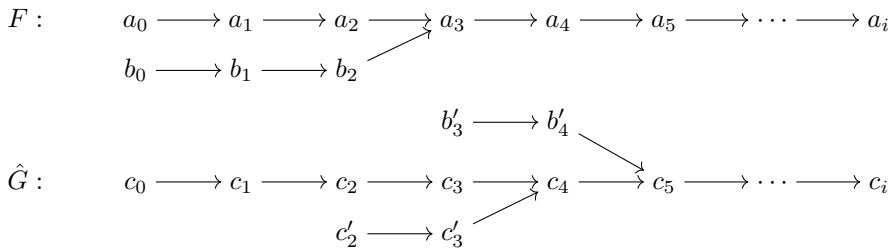
$$O\left(|P|\ d(P)\ N\ log(|P|)\right)$$

其中 $N = \max_{p \in P}\{|F(P)|,\ |G(P)|\}$对于 $\mathcal{C} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$，有

$$O\left(|P|\ d(P)\ N^3\ log(|P|)\right)$$

其中 $N^3 = \max_{p \prec q \in P}\{\mathrm{rk}\ F([p \prec q],\ \mathrm{rk}\ G([p \prec q],\ \mathrm{rk}\ \varphi_p,\ \mathrm{rk}\ \psi_p\}$，回顾线性变换 h，$h' : V \to W$，我们有 $\mathrm{rk}(h - h') \le \mathrm{rk}(v) + \mathrm{rk}(v')$。
请注意，需要检查的图表数量无法进一步减少。一般而言，在 P 中，赋值缺乏交换性意味着 $L_\nabla^p(\varphi,\ \psi)$和 $L_\nabla^q(\varphi,\ \psi)$ 不能相互界定，除非我们有一些额外条件，例如引理 4.6 中的条件。同样，$L^{p,\ r}_{\diagdown}(\varphi)$ 和 $L^{r,\ q}_{\diagdown}(\varphi)$ 也不能相互界定。下面的示例可以说明这一点。

例 4.8. 我们继续使用示例 3.11 中的流 $\mathcal{T}$，由 $\mathcal{T}_\varepsilon = m + \lfloor \varepsilon \rfloor$给出。我们取相同的 F以及 $\hat{}G$（对 G的修改，来自该示例）在 $\mathrm{Set}^{\mathbb{N}}$ 中给出



它们各自集合中这些点之间的距离为：

$$d_0^F(a_0, b_0) = 3 \quad d_1^F(a_1, b_1) = 2 \quad d_2^F(a_2, b_2) = 1 \quad d_3^{\hat{G}}(b'_3, c_3) = 2$$
$$d_2^{\hat{G}}(c_2, c'_2) = 2 \quad d_3^{\hat{G}}(b'_3, c'_3) = 2 \quad d_4^{\hat{G}}(b'_4, c_4) = 1$$
$$d_3^{\hat{G}}(c_3, c'_3) = 1$$

$\hat{}$ 设 $\mathcal{T}_1$赋值 φ 和 ψ 分别定义在 F与 G 之间，其中 φ 给出为

$$\varphi_i(a_i) = c_{i+1},\ i \in \{0, 1, 2\} \qquad \varphi_3(a_3) = b'_4$$
$$\varphi_0(b_0) = c_1 \quad \varphi_1(b_1) = c'_2 \quad \varphi_2(b_2) = b'_3$$

并且 ψ 将所有内容发送至 a，即 $\psi_i(\bullet_i) = a_{i+1}$。那么，我们得到的一些损失为

$$L^{0,1}_{\searrow}(\varphi) = L^{0}_{\triangle}(\varphi,\psi) = d^{\hat{G}}_2(c_2, c'_2) = 1 \qquad L^{1}_{\triangle}(\varphi,\psi) = 0 \qquad L^{1,2}_{\searrow}(\varphi) = d^{\hat{G}}_2(b'_3, c'_3) = 2$$
$$L^{1,3}_{\searrow}(\varphi) = L^{2,3}_{\searrow}(\varphi) = L^{2}_{\triangle}(\varphi,\psi) = d^{\hat{G}}_4(c_4, b'_4) = 1 \qquad L^{0,2}_{\searrow}(\varphi) = d^{\hat{G}}_2(c_3, b'_3) = 2$$

由此我们得到

$$1 = L^{0,1}_{\searrow}(\varphi) < L^{1,2}_{\searrow}(\varphi) = 2 \quad \text{but} \quad 2 = L^{1,2}_{\searrow}(\varphi) > L^{2,3}_{\searrow}(\varphi) = 1, \qquad \text{and}$$
$$1 = L^{0}_{\triangle}(\varphi,\psi) > L^{1}_{\triangle}(\varphi,\psi) = 0 \quad \text{but} \quad 0 = L^{1}_{\triangle}(\varphi,\psi) < L^{2}_{\triangle}(\varphi,\psi) = 1.$$

因此，我们无法从 $L^{r,\,q}(\varphi)$ 确定 $L^{p,\,r}_{\searrow}(\varphi)$，反之亦然；对于 $L^{p}_{\triangle}(\varphi,\ \psi)$ 和 $L^{q}_{\triangle}(\varphi,\ \psi)$，情况也类似。

4.3 完备线性序上的优化

本节假设 P 是一个完备线性序。此外，为简单起见，我们假设 $(\varphi,\ \psi)$ 是一个 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值，而不是 $\mathcal{S}$-赋值。虽然这些结果对任意 $\mathcal{S} \in \text{流}_{\mathcal{T}}$ 都成立，但我们重点关注 $\mathcal{T}_\varepsilon$，因为我们感兴趣的是由 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值诱导的交错情形。

请注意，要获得类似推论 4.7中的约简公式，我们需要在离散偏序集上进行研究；然而，许多有趣的情形来自更一般的 P。在下一个示例中，$P = \mathbb{R}$ 的稠密性使我们能够选择一些赋值，使得损失 $L(\varphi,\ \psi)$ 不是有限的。

例 4.9. 考虑 $\mathcal{T}_\varepsilon(m) = m + \varepsilon$ 来自示例 3.5。定义 Set 中的合并树 F 和 G 在 $\mathrm{Set}^{[0,\infty)}$ 如下

$$F\colon \quad a_0 \to a_1 \to a_2 \to a_3 \to \cdots \to a_t \to \cdots \qquad\qquad F(t) = \{a_t\}$$

$$G\colon\ b^0_0 \to b^0_1 \to b^0_2 \to b^0_3 \to \cdots \to b^0_t \to \cdots \quad G(t) = \{b^0_t\} \cup \{b^j_t\}_{j=\lfloor t\rfloor+1}^{\infty} \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$b^1_0 \to b^2_0 \to b^3_0$$
$$b^2_1 \to b^3_1$$
$$b^3_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

考虑由下式给出的 $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}}$-赋值 φ 和 ψ

$$\varphi_t(a_t) = \begin{cases} b^0_{t+\frac{1}{2}} & \text{if} \quad t = 0 \text{ or } t \geq 1 \\ b^n_{t+\frac{1}{2}} & \text{if} \quad \dfrac{1}{2^{n+1}} \leq t < \dfrac{1}{2^n} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \psi_t(\bullet_t) = a_{t+\frac{1}{2}}.$$

我们可以验证，对于 $\frac{1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{1}{2^n}$ 和 $n > 0$

$$L^{0,t}_{\searrow}(\varphi) = d^{G}_{t+\frac{1}{2}}\left(b^0_{t+\frac{1}{2}}, b^n_{t+\frac{1}{2}}\right) = n - 1 + (1 - (t + \tfrac{1}{2})) = n - t - \tfrac{1}{2}.$$

由于 $G(0) \cong \mathbb{N}$，这意味着对于任意 N，都存在一对距离至少为 N 的元素，因此 $L(\varphi,\psi) = \infty$。

直观而言，该赋值之所以失效，是因为当 φ 越来越接近 0（G的一个临界值）时，它并不正则。因此，我们来定义相对于该函子正则的赋值。

定义 4.10。 给定完备线性序 P上的 $F,\ G \in C^P$。若对于 F 的常值区间 I 中的所有 $p \leq q$，都有 $L^{p,\,q}(\varphi) = 0$；且对于 G 的常值区间 J 中的所有 $p \leq q$，都有 $L^{p,\,q}_{\searrow}(\psi) = 0$，则称 $(\varphi,\ \psi)$ 是一个 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值，且为可构造的 。

▱

令 $F,\ G \in C^P$为温和模（定义 2.14），其 F和 G的临界值分别为 $c_1 < \cdots < c_m$和 $d_1 < \cdots < d_n$。令 $c_0 = d_0 = -\infty$ 和 $c_{m+1} = d_{n+1} = \infty$ 分别表示 P的下确界元素和上确界元素。目标是将常值区间 $(c_i,\ c_{i+1})$ 划分为若干区间，使其经由映射 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 映入常值区间

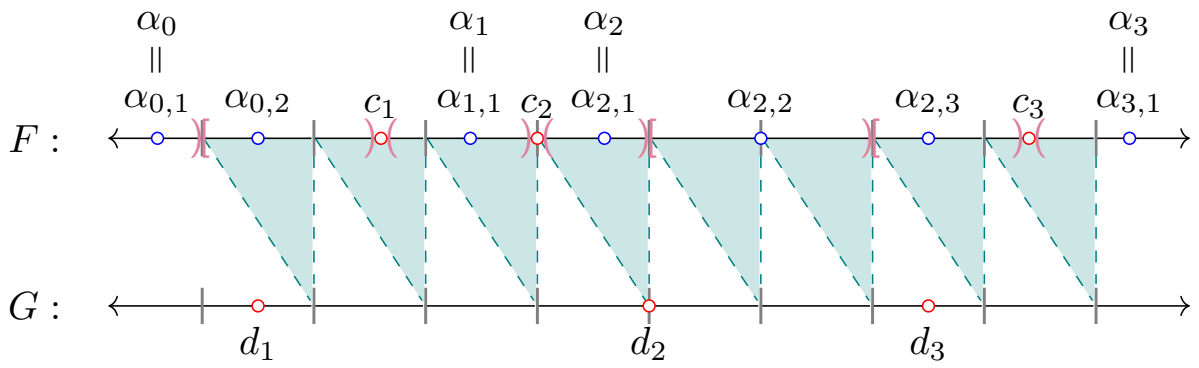


图2：区间的构造示例 $I_{i,\ k}$ 对于映射 $\mathcal{T}_1$： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，其定义为 $\mathcal{T}_1(m)=\lfloor m\rfloor+1$，以及函子 F： $\mathbb{R}\to C$，其临界集为 $\{c_1,c_2,c_3\}$，和 G： $\mathbb{R}\to C$，其临界集为 $\{d_1,d_2,d_3\}$。对于每个区间，我们有$\alpha_{i,\ k}=I_{i,\ k}$。

属于 G 的区间，然后使用为该分解第一部分中的代表元定义的 φ 和 ψ 映射，将其扩展到区间其余部分的值。

对于 $i\in\{0,\dots,m\}$，考虑这些（可能为空的）区间

$$\begin{aligned} J_{ij} &= (c_i,c_{i+1})\cap\{t\in P\mid \mathcal{T}_\varepsilon t=d_j\} \qquad j\in\{1,\dots,n\}\\ J'_{ij} &= (c_i,c_{i+1})\cap\{t\in P\mid \mathcal{T}_\varepsilon t\in(d_j,d_{j+1})\} \quad j\in\{0,\dots,n\}. \end{aligned}$$

在图2 的示例中，对于 $i=2$，我们将区间（c_2，c_3）分成三个区间：$J_{2,\ 2}=$（c_2，c_2+1），$J'_{2,\ 2}=[c_2+1,c_2+3)$，以及 $J'_{2,\ 3}=[c_2+3,c_3)$。
从每个非空的 J_{ij} 或 J'_{ij} 中选取一个元素，并将它们记作 $\{\alpha_{i,k}\mid k\in 1,\cdots,k_i\}$。再次参照图 2 中的示例，我们有 $\alpha_{2,\ 1}\in J_{2,\ 2}$，$\alpha_{2,\ 2}\in J'_{2,\ 2}$，以及 $\alpha_{2,\ 3}\in J'_{2,\ 3}$。
为简化记号，我们对所有非空区间重新编号，并将 $I_{i,k}$ 记作包含 $\alpha_{i,k}$的区间（形式为$J_{i,\cdot}$ 或$J'_{i,\cdot}$）。注意，若 $k\neq k'$ 且 $(c_i,c_{i+1})=\bigcup_{k=1}^{k_i} I_{i,k}$，则 $I_{i,k}\cap I_{i,k'}=\emptyset$。此外，根据引理 2.15，$I_{i,k}$ 在 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 下的像是 G的一个常值区间。因此，我们将 (c_i,c_{i+1}) 划分为映射到常值区间的区间。令 R_F 为 P中选出的代表元或临界点 c_i，具体而言

$$R_F=\big\{\alpha_{i,k}\mid i\in\{0,\cdots,m\},k\in\{1,\cdots,k_i\}\big\}\cup\big\{c_i\mid i\in\{1,\cdots,m\}\big\}.$$

类似地，我们可以将 G 中形式为 (d_j,d_{j+1}) 的常值区间拆分为若干部分，使其映射到 F的常值区间。然后，我们为这些子区间选取代表元 $\beta_{j,\ell}$，并将 R_G 定义为

$$R_G=\big\{\beta_{j,\ell}\mid j\in\{0,\cdots,n\},\ell\in\{1,\cdots,\ell_j\}\big\}\cup\big\{d_j\mid j\in\{1,\cdots,n\}\big\}.$$

我们通常只使用每个区间中的第一个代表元，因此记作 $\alpha_i=\alpha_{i,1}$ 和 $\beta_j=\beta_{j,1}$，然后将 R_F和 R_G 的相关子集写为

$$\begin{aligned} B_F &= \big\{\alpha_i\mid i\in\{0,\cdots,m\}\big\}\cup\big\{c_i\mid i\in\{1,\cdots,m\}\big\}, \qquad \text{and}\\ B_G &= \big\{\beta_j\mid j\in\{0,\cdots,n\}\big\}\cup\big\{d_j\mid j\in\{1,\cdots,n\}\big\}. \end{aligned}$$

定理4.11。 设 F、$G\in\mathcal{C}^P$是驯化的，且$(\varphi$、$\psi)$是它们之间给定的一个可构造的阿基米德 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值。那么，损失由下式给出

$$\begin{aligned} L(\varphi,\psi)=\max\Bigg\{ &\max_{s\prec t\ \in B_F}\{L^{s,t}_{\square}(\varphi)+\delta_t\},\max_{s\in R_F}\{L^{s}_{\triangledown}(\varphi,\psi)+\delta_s\},\\ &\max_{s\prec t\ \in B_G}\{L^{s,t}_{\square}(\psi)+\delta'_t\},\max_{s\in R_G}\{L^{s}_{\triangle}(\varphi,\psi)+\delta'_s\}\Bigg\} \end{aligned}$$

其中， $B_F \subset R_F$ 和 $B_G \subset R_G$ 如上所定义， δ_t 和 δ_s 由下式给出

$$\delta_t = \begin{cases} 0 & t = c_i \\ \sup\limits_{t' \in (c_i, c_{i+1})} \inf\{\delta \geq 0 \mid L_{\square}^{c_i,t'}(\varphi) < L_{\square}^{c_i,\alpha_i}(\varphi) + \delta\} & t = \alpha_i \end{cases}$$

$$\delta_s = \begin{cases} 0 & s = c_i \\ \sup\limits_{s' \in I_{i,k}} \inf\{\delta \geq 0 \mid L_{\triangledown}^{s'} < L_{\triangledown}^{\alpha_{i,k}}(\varphi, \psi) + \delta\} & s = \alpha_{i,k} \end{cases}$$

并且 δ'_t 和 δ'_s 通过使用 β_{ij}以类似方式定义。

该定理使我们能够减少计算赋值的总体损失时需要考虑的图表数量。例如，我们无需计算 $L^{p,\,q}(\varphi)$ 对于 $\sim |P|^2$ 中形如 $p < q$ 的所有配对，只需计算 $L^{s,\,t}(\varphi)$ 对于 B中的 $|B|-1 = 2m$ 个配对即可。类似地，我们无需对 P中的所有元素 p计算 $L^{p}_{\triangledown}(\varphi,\ \psi)$，只需对 P的有限子集 $s \in R_F \subset P$计算 $L^{s}_{\triangledown}(\varphi,\ \psi)$。

我们首先需要一个简单的引理来简化证明。

引理 4.12。 取 F、 $G \in \mathcal{C}^P$以及它们之间一个可构造的阿基米德 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值 (φ, ψ) 。设 (c, c') 是 F的一个常值区间。那么，对所有 $s < t \in (c, c')$，

$$L_{\square}^{s,c'}(\varphi) = L_{\square}^{t,c'}(\varphi)$$

并且存在一个 $\delta > 0$使得

$$L_{\square}^{c,t}(\varphi) \leq L_{\square}^{c,s}(\varphi) \leq L_{\square}^{c,t}(\varphi) + \delta.$$

证明。 取 $s < t \in (c,\ c')$。对于第一个结论，由于 $F[s \leq t]$ 是同构，利用引理 4.5 的陈述 1) 和 2)，可得

$$L_{\square}^{s,c'}(\varphi) \leq \max\left\{L_{\square}^{s,t}(\varphi), L_{\square}^{t,c'}(\varphi)\right\} = L_{\square}^{t,c'}(\varphi) \leq \max\left\{L_{\square}^{s,t}(\varphi), L_{\square}^{s,c'}(\varphi)\right\} = L_{\square}^{s,c'}(\varphi).$$

这两个等式成立，是因为 $(\varphi,\ \psi)$ 是一个可构造的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值，因此 $L^{s,\,t}(\varphi) = 0$。类似地，对于第二个结论，由引理 4.5 的陈述 1) 和 3)，存在 δ 使得

$$L_{\square}^{c,t}(\varphi) \leq \max\left\{L_{\square}^{c,s}(\varphi), L_{\square}^{s,t}(\varphi)\right\} = L_{\square}^{c,s}(\varphi) \leq \max\left\{L_{\square}^{c,t}(\varphi), L_{\square}^{s,t}(\varphi)\right\} + \delta = L_{\square}^{c,t}(\varphi) + \delta$$

从而完成证明。 □

定理 4.11 的证明。首先考虑平行四边形项。我们证明，对于所有 $s' < t' \in P$， $L^{s',t'}(\varphi) \leq \max_{s \prec t \in B_F}\{L_{\square}^{s,t}(\varphi) + \delta_t\}$，这意味着该平行四边形项为原始损失定义中的类似形式提供上界。对于 (c_i, c_{i+1}) 中的所有 $s' \leq t'$，根据 (φ, ψ) 可构造这一假设，按定义有 $L^{s',t'}(\varphi) = 0$，因此此情形得证。接下来，假设 $s \prec t'$ 属于 P，且它们之间至少有一个 F 的临界值。具体而言，令 $\{c_i, ..., c_j\}$ 为 s' 与 t' 之间的临界值。即 $s' < c_i < \cdots < c_j < t'$。由归纳法和引理 4.5 的陈述 1)，可得

$$L_{\square}^{s',t'}(\varphi) \leq \max\left\{L_{\square}^{x,y}(\varphi) \mid (x,y) \in \{(s', c_i), (c_j, t')\} \cup \{(c_k, \alpha_k)\}_{k=i}^{j-1} \cup \{(\alpha_k, c_{k+1})\}_{k=i}^{j-1}\right\}.$$

根据引理4.12， $L^{s',c_i}(\varphi) = L^{\alpha_{i-1},c_i}(\varphi)$，且存在 $\delta_{t'}$ 使得 $L^{c_j,t'}(\varphi) \leq L_{\square}^{c_j,\alpha_j}(\varphi) + \delta_{t'}$。因此，

$$L_{\square}^{s',t'}(\varphi) \leq \max\left\{L_{\square}^{x,y}(\varphi) + \delta_y \mid (x,y) \in \{(c_k, \alpha_k)\}_{k=i}^{j} \cup \{(\alpha_k, c_{k+1})\}_{k=i-1}^{j-1}\right\}$$

其中，若 $\delta_y = \delta_{t'}$ $y = \alpha_j$， 否则 $\delta_y = 0$。由此可得

$$L_{\square}^{s',t'}(\varphi) \leq \max_{s \prec t \in B_F}\{L_{\square}^{s,t}(\varphi) + \delta_t\}.$$

对 G 和 β_j 的临界值进行对称论证可得

$$L_{\square}^{s',t'}(\psi) \leq \max_{s \prec t \in B_G}\{L_{\square}^{s,t}(\psi) + \delta'_t\}.$$

对于三角项，我们将证明，对于任意 $s' \in P$，都有 $L_{\triangledown}^{s'}(\varphi,\ \psi) \leq \max_{s\in R_F}\{L_{\triangledown}^{s}(\varphi,\ \psi) + \delta_s\}$，这意味着该三角项为原始损失定义中的类似版本提供了上界。回忆

$$P = \bigcup_{i=1}^{m}\{c_i\} \cup \bigcup_{i=0}^{m}(c_i, c_{i+1}) = \bigcup_{i=1}^{m}\{c_i\} \cup \bigcup_{i=0}^{m}\bigcup_{k=1}^{k_i} I_{i,k}.$$

那么，对于 $s' \in P$，元素 s' 要么是 F 的临界点，要么是 $s' \in I_i,\ _k$，其中 I_i是某个区间，$_k$。如果 s' 是临界点，那么它属于集合 R_F，因此问题得证。在 $s' \in I_i,\ _k$的情况下，根据 $I_i,\ _k$ 的定义以及 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 是可构造赋值这一事实，我们有，对于 I_i中的任意 $x < y$，$_k$，$L^x,\ ^y(\varphi) = 0$ 且 $L^x,\ ^y(\psi) = 0$。鉴于 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 是阿基米德赋值，由引理 4.6 (2)，存在 $\delta > 0$ 使得

$$L_{\triangledown}^{y}(\varphi,\psi) \leq L_{\triangledown}^{x}(\varphi,\psi) < L_{\triangledown}^{y}(\varphi,\psi) + \delta.$$

鉴于 s' 和$\alpha_{i,\ k}$ 都属于$I_{i,\ k}$，这意味着存在 $\delta \geq 0$ 使得

$$L_{\triangledown}^{s'}(\varphi,\psi) < L_{\triangledown}^{\alpha_{i,k}}(\varphi,\psi) + \delta.$$

因此，对于任意 $s' \in P$,

$$L_{\triangledown}^{s'}(\varphi,\psi) \leq \max_{s\in R_F}\{L_{\triangledown}^{s}(\varphi,\psi) + \delta_s\}.$$

同理，利用 G和 $\beta_{j,\ \ell}$ 的临界值可得

$$L_{\triangle}^{s'}(\varphi,\psi) \leq \max_{s\in R_G}\{L_{\triangle}^{s}(\varphi,\psi) + \delta'_s\}.$$

□

注。区间 $I_{i,\ k}$ 的形式为 $\lfloor \inf I_{i,\ k},\ \inf I_{i,\ k+1}\rceil$ 或 $\lfloor \inf I_{i,\ k},\ c_{i+1}\rceil$，其中符号 $\lfloor$ 和 $\rceil$ 表示下端点和上端点分别为闭或开，这取决于它们是否包含在 $I_{i,\ k}$中。此外，如果我们选择 $\alpha_{i,\ k} = \min I_{i,\ k}$，那么在其存在时可得 $\delta_{\alpha_{i,\ k}} = 0$。

创建一个可构造赋值 让我们针对在集合 B_F 和 B_G 上给定的映射选择，创建一个可构造的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值（$\varphi,\ \psi$），其介于 F 和 G 之间。具体而言，假设我们选取了一组映射 $\varphi_r\colon\ F(r) \to G\mathcal{T}_\varepsilon(r)$，对于 $r \in B_F$ 成立。通过设定下式，我们将这些映射扩展为一个非自然变换 $\varphi\colon\ F \succ G\mathcal{T}_\varepsilon$

$$\varphi_t = \begin{cases} \varphi_t & \text{if } t \in B_F \\ (G[\mathcal{T}_\varepsilon t \leq \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i])^{-1} \circ \varphi_{\alpha_i} \circ F[t \leq \alpha_i] & \text{if } t \in (c_i, \alpha_i) \\ G[\mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i \leq \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ \varphi_{\alpha_i} \circ (F[\alpha_i \leq t])^{-1} & \text{if } t \in (\alpha_i, c_{i+1}). \end{cases}$$

对称地，从一组映射 $\psi_r\colon\ G(r) \to F\mathcal{T}_\varepsilon(r)$ 构造 $\psi\colon\ G \succ F\mathcal{T}_\varepsilon$，其中 $r \in B_G$ 成立，并将其扩展到 $t \in P$ 的所有取值。注意，为了使这些映射定义良好，我们使用了这样的事实：区间（$c_i,\ c_{i+1}$）和（$d_j,\ d_{j+1}$）分别对于 F 和 G 是常值的。

取（$\varphi,\ \psi$），我们得到 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 对 F 和 G 的赋值。对于这一赋值，我们得到：如果 $t \in (c_i,\ \alpha_i)$

$$G[\mathcal{T}_\varepsilon t \leq \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i] \circ \varphi_t = G[\mathcal{T}_\varepsilon t \leq \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i] \circ (G[\mathcal{T}_\varepsilon t \leq \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i])^{-1} \circ \varphi_{\alpha_i} \circ F[t \leq \alpha_i] = \varphi_{\alpha_i} \circ F[t \leq \alpha_i]. \tag{3}$$

等价地，如果 $t \in (\alpha_i,\ c_{i+1})$

$$\varphi_t \circ F[\alpha_i \leq t] = G[\mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i \leq \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ \varphi_{\alpha_i} \circ (F[\alpha_i \leq t])^{-1} \circ F[\alpha_i \leq t] = G[\mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i \leq \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ \varphi_{\alpha_i}. \tag{4}$$

引理 4.13。上面定义的 (φ, ψ) 是一个可构造的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值。

证明。注意，对于任意作为 F 的常值区间的 I，存在某个 i，使得 $I \subseteq (c_i,\ c_{i+1})$。我们需要证明，对于 I 中的 $s < t$，$L^{s,\ t}(\varphi) = 0$。我们分三种情况证明 $G[\mathcal{T}_\varepsilon s \leq \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ \varphi_s = \varphi_t \circ F[s \leq t]$。

• 如果 $s < t \le \alpha_i$:

$$\begin{aligned} G[\mathcal{T}_\varepsilon t \le \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i] \circ G[\mathcal{T}_\varepsilon s \le \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ \varphi_s &= G[\mathcal{T}_\varepsilon s \le \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i] \circ \varphi_s \\ &= \varphi_{\alpha_i} \circ F[s \le \alpha_i] && \text{by Eqn. (3)} \\ &= \varphi_{\alpha_i} \circ F[t \le \alpha_i] \circ F[s \le t] \\ &= G[\mathcal{T}_\varepsilon t \le \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i] \circ \varphi_t \circ F[s \le t] && \text{by Eqn. (3)} \end{aligned}$$

由于 $G[\mathcal{T}_\varepsilon t, \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i]$ 是同构，因此可以从左侧消去 $G[\mathcal{T}_\varepsilon t, \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i]$，从而得到该结果。

• 如果 $s < \alpha_i \le t$。

$$\begin{aligned} G[\mathcal{T}_\varepsilon s \le \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ \varphi_s &= G[\mathcal{T}_\varepsilon s \le \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i] \circ G[\mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i, \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ \varphi_s \\ &= G[\mathcal{T}_\varepsilon s \le \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i] \circ \varphi_{\alpha_i} \circ F[s \le \alpha_i] && \text{Eqn. (3)} \\ &= \varphi_t \circ F[\alpha_i, t] \circ F[s \le \alpha_i] && \text{Eqn. (4)} \\ &= \varphi_t \circ F[s \le t] \end{aligned}$$

• 如果$\alpha_i \le s < t$

$$\begin{aligned} G[\mathcal{T}_\varepsilon s \le \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ \varphi_s \circ F[\alpha_i \le s] &= G[\mathcal{T}_\varepsilon s \le \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ G[\mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i \le \mathcal{T}_\varepsilon s] \circ \varphi_{\alpha_i} && \text{Eqn. (4)} \\ &= G[\mathcal{T}_\varepsilon \alpha_i \le \mathcal{T}_\varepsilon t] \circ \varphi_{\alpha_i} \\ &= \varphi_t \circ F[\alpha_i \le t] && \text{Eqn. (4)} \\ &= \varphi_t \circ F[s \le t] \circ F[\alpha_i \le s] \end{aligned}$$

由于 $F[\alpha_i \le s]$ 是同构，因此可以从右侧消去 $F[\alpha_i \le s]$，从而得到该结果。

□

4.4 完备线性序的积上的优化

让我们将前一个关于 P^k 上的模的结果推广到线性偏序集 P 的 k 次笛卡尔积。取 F, G C^{P^k} 上的驯化模，并在它们之间取一个可构造且保线的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值。推广分为以下几个步骤:

1. 定义 P^k 相对于 F, G 的常值区间。2. 将 F 的每个常值区间细分为若干区间，使其通过 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 映射到 G 的常值区间（反之亦然）。3. 定义这些区间的代表元偏序集。4. 证明损失有界于代表元集合的损失。

4.4.1 在 P^k 上定义常值区间

令 F, G为 C^{P^k}中的立方良性模（定义 2.17），并令 $x_2^i < x_4^i < \cdots < x_{2m_i}^i$为 F的临界 i-坐标。同样，令 $y_2^i < \cdots < y_{2n_i}^i$为 G的临界 i-坐标。设 $x_0^i = y_0^i = -\infty$，并设 $x_{2(m+1)} = y_{2(n+1)} = \infty$，其中 $-\infty$ 和 ∞ 分别表示 P 的下确界元和上确界元。

首先，我们将 P^k划分为 F的常值区间。考虑指标集

$$\Lambda = \{(j_1, \ldots, j_k) \mid \text{for } 0 \le j_i \le 2m_i + 1\}.$$

对于 Λ 中的每个 $I = (j_1, \ldots, j_k)$，定义立方体 $S_I = X_{j_1}^1 \times \cdots \times X_{j_k}^k$，其中若 j 为偶数，则 $X_j^i = \{x_j^i\}$；若 j 为奇数，则 $X_j^i = (x_{j-1}^i, x_{j+1}^i)$。例如，在图3中，立方体 $S_{33} = (x_2^1, x_4^1) \times (x_2^2, x_4^2)$，而 $S_{32} = (x_2^1, x_4^1) \times \{x_2^2\}$。

定理 4.14. $S_I \subseteq P^k$ 的立方体是 F的常值区间。

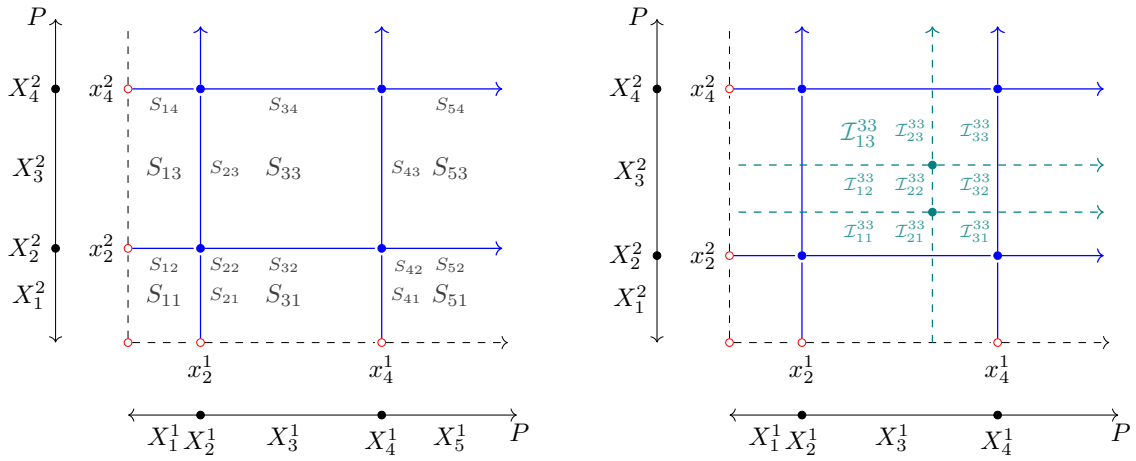


图3：左侧：函子 $F\colon P^2 \to C$ 的立方体 $S_{(j_1,j_2)} = X_{j_1}^1 \times X_{j_2}^2$ 的构造示例，其临界坐标为 $\{x_2^1, x_4^1\}$ 和 $\{x_2^2, x_4^2\}$。右侧：我们将立方体 S_{33} 划分为区间 $\mathcal{I}_j^{33}$，它们通过态射 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 映射到常值立方体 R_J。例如，$p \in \mathcal{I}_{12}^{33}$ 当且仅当 $p \in S_{33}$ 和 $\mathcal{T}_\varepsilon p \in R_{12}$。

证明。固定 $I = (j_1, \dots, j_k) \in \Lambda$。由于每个 X_j^i 都是 P 的凸连通子集，因此 S_I 是 P^k 的凸连通子集，故为一个区间。我们将证明，对于任意 $p \le q \in S_I$，$F[p \le q]$ 都是一个同构，因此 S_I 是常值的。若所有 j_i 均为偶数，则 S_I 是一个点，而 F 在一个点上为常值，因此结论成立。于是设 I 至少有一个奇数下标，并取 $p < q \in S_I$。

我们将对 p 和 q 中不同项的数量进行归纳。若 p 和 q 除一个坐标外，其余坐标均相同，则可写成 $p = \langle p^1, \dots, p^k \rangle$ 和 $q = \langle p^1, \dots, p^{i-1}, q^i, p^{i+1}, \dots, p^k \rangle$，其中 $p^i < q^i$ 和 j_i 为奇数，如下所示：

$$\begin{array}{ccc} \langle p^1, \dots, p^{i-1}, q^i, p^{i+1}, \dots, p^k \rangle & & \\ \uparrow & & \\ \langle p^1, \dots, p^k \rangle. & & \end{array}$$

如果 $F[p \le q]$ 不是同构，则存在临界值 $\langle p^1$、……、p^{i-1}、t、p^{i+1}、……、$p^k \rangle$，其属于 $F(\langle p^1$、……、p^{i-1}、$\cdot$、p^{i+1}、……、$p^k \rangle)$：$P \to C$，其中 $x_{j_i-1}^i < p_i \le t \le q_i < x_{j_i+1}^i$。然而，后一个陈述与临界 i-坐标的完整列表相矛盾。因此，$F[p \le q]$ 是同构。

现在假设 p 和 q 在 n 个坐标上不同，并假设在 $n-1$ 个坐标上不同的任意点都会产生一个同构。记 $p = \langle p^1$、……、$p^k \rangle \le \langle q^1$、……、$q^k \rangle = q$ 为 S_I，令 i 为两者之间存在差异的坐标之一。不失一般性，假设 $p^i < q^i$，并令

$$r = \langle p^1, \dots, p^{i-1}, q^i, p^{i+1}, \dots, p^k \rangle.$$

因此我们得到图表

$$\begin{array}{ccc} \langle p^1 \dots, p^{\,i-1} \;\; q^i \;\; p^{i+1} \dots, p^{\,k} \rangle & \longrightarrow & \langle q^1 \dots, q^{\,k} \rangle \\ \uparrow & \nearrow & \\ \langle p^1 \dots, p^{\,k} \rangle & & \end{array}$$

根据归纳法，$F[p \le r]$ 和 $F[r \le q]$ 是同构。

那么，由于 $F[p \le q] = F[r \le q] \circ F[p \le r]$，我们知道 $F[p \le q]$ 是一个同构。因此，F 在 S_I 上为常数。□

我们注意到， Λ 中用于枚举 S_I 的指标是按照与 P^k 的排序相兼容的方式构造的。我们在下面的引理中明确说明这一点。

引理 4.15。 用于标记集合 S_I 的 $\Lambda \subseteq \mathbb{N}^k$ 上的乘积序与 P^k 的序相容。明确地说，以下陈述成立：

(a) 如果 $p \leq q \in P^k$ 满足 $p \in S_I$ 和 $q \in S_{I'}$，那么 $I \leq_{\mathbb{N}^k} I'$。

(b) 如果 $I \leq_{\mathbb{N}^k} I'$ 和 $q \in S_{I'}$，则存在一个 $p \in S_I$ 使得 $p \leq q$。

证明。*(a)* 设 $I = (j_1, \ldots\ldots, j_k)$ 和 $I' = (j'_1, \ldots\ldots, j'_k)$ 是 Λ 中给定的元素。一方面，假设 $p \leq q \in P^k$ 满足 $p \in S_I$ 和 $q \in S_{I'}$。于是，对于每个 $1 \leq i \leq k$，都有 $p^i \in X^i_{j_i}$ 和 $q^i \in X^i_{j'_i}$ 以及 $p^i \leq q^i$。根据 X_j 的构造，我们可以验证这意味着 $j_i \leq j'_i$。

(b) 假设 $I \leq I'$，并选取 $q \in S'_I$。如果 $I = I'$，则我们已得证，因为 q 与自身可比较。因此，设 $I < I'$，并取 $p \in S_I$。如果 $q < p$。根据第 *(a)* 部分， $I' \leq I$，但这与 $I < I'$ 的假设矛盾。因此，如果 p 且 q 可比较，那么 $p \leq q$，如所需。

如果 p 和 q 不可比较，考虑非空集合 $U = \{i \mid p^i \leq q^i\}$ 和 $V = \{i \mid p^i > q^i\}$。定义 $r \in P^k$：当 $i \in U$ 时取 $r^i = p^i$，当 $i \in V$ 时取 $r^i = q^i$。根据构造，我们有 $r < p$ 和 $r < q$，如下图表所示：

$$\begin{array}{ccc} & & \langle q^1, \ldots, q^k \rangle \\ & & \uparrow \\ \langle r^1, \ldots, r^k \rangle & \longrightarrow & \langle p^1, \ldots, p^k \rangle. \end{array}$$

令 $I'' \in \Lambda$ 使得 $r \in S_{I''}$；我们将证明 $I'' = I$，从而得到 $r \in S_I$，这就完成了证明。如果 $i \in U$，则 $j''_i = j_i$，因为 $X^i_{j''_i} \ni r^i = p^i \in X^i_{j_i}$。同样地，对于 $i \in V$，鉴于 $X^i_{j''_i} \ni r^i = q^i \in X^i_{j'_i}$，我们有 $j''_i = j'_i$。现在，鉴于 $r < p$ 且根据第 *(a)* 部分，这意味着 $I'' \leq I$。因此，如果 $i \in V$，则 $j_i \leq j'_i = j''_i \leq j_i$。所以，如果 $i \in V$ 也成立，则 $j''_i = j_i$，从而 $I'' = I$。 □

注意，集合 $\{S_I \mid I \in \Lambda\}$ 覆盖了 P^k 的全部。我们将 $\{S_I \mid I \in \Lambda\}$ 称为 F 的常值立方体集合。类似地，我们可以定义 Λ'，表示 G 的临界值索引集合，并用 $\{R_J \mid J \in \Lambda'\}$ 表示形如 $Y^1_{j_1} \times \cdots \times Y^k_{j_k}$ 的 G 的常值立方体集合。

4.4.2 细分为映射到常值区间的区间

接下来，我们将把每个 S_I 细分为一些区间，使其经由 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 映射到 G 的常值区间中。对于每个 $I \in \Lambda$ 和 $J \in \Lambda'$，定义

$$\mathcal{I}^I_J = S_I \cap \{p \in P^k \mid \mathcal{T}_\varepsilon p \in R_J\}.$$

类似地，我们定义

$$\mathcal{J}^J_I = R_J \cap \{p \in P^k \mid \mathcal{T}_\varepsilon p \in S_I\}$$

用于将 G 的常值区间细分为经由 $\mathcal{T}$ 映射到 F 的常值区间的区间

$_\varepsilon$.

注。 由于我们假设 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 是保线的， $\mathcal{I}^I_J$ 只能写成如下形式的项 $\inf \mathcal{I}^I_{J'}$ 的组合。考虑某个 $U = \{1 \leq i \leq k \mid p^i \neq q^i$，其中 p， $q \in \mathcal{I}^I_J\}$。设 $I = (j_1, \ldots\ldots, j_k)$ 和 $J = (\hat{}j_1, \ldots\ldots, \hat{}j_k)$。对每个 $i \in U$，取指标

$$J_i = (\hat{j}_1, \ldots, \hat{j}_{i-1}, \hat{j}_i + 1, \hat{j}_{i+1}, \ldots, \hat{j}_k).$$

Then

$$\mathcal{I}^I_J = \begin{cases} \inf \mathcal{I}^I_J & \text{if } U = \emptyset \\ \bigtimes_{i \in U} \lfloor (\inf \mathcal{I}^I_J)^i, (\inf \mathcal{I}^I_{J_i})^i \rceil & \text{if } U \neq \emptyset \text{ and } \inf \mathcal{I}^I_{J_i} \neq \emptyset \\ \bigtimes_{i \in U} \lfloor (\inf \mathcal{I}^I_J)^i, x^i_{j_i+1} \rceil & \text{if } U \neq \emptyset \text{ and } \inf \mathcal{I}^I_{J_i} = \emptyset \end{cases}$$

其中 $(a)^i$ 表示 $a \in P^k$ 的第 i 个坐标。符号 $\lfloor$ 和 $\rceil$ 分别表示下端点和上端点是闭的还是开的，具体取决于它们是否包含在 $\mathcal{I}_J^I$ 中。因此，当 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 是保线的时，区间 $\mathcal{I}_J^I$ 和 $\mathcal{J}_I^J$ 是立方体。

引理 4.16。设 $I \leq I' \in \Lambda$ 和 $J < J' \in \Lambda'$，并假设 $\mathcal{I}_J^I$ 和 $\mathcal{I}_{J'}^{I'}$ 非空。那么，对每个 $q \in \mathcal{I}_{J'}^{I'}$，存在 $p \in \mathcal{I}_J^I$ 使得 $p \leq q$。

证明。假设 $J = (j_1, \ldots\ldots, j_k) < (j_1', \ldots\ldots, j_k') = J'$。设定 $q \in \mathcal{I}'^I_{J'}$ 和 $p \in \mathcal{I}_J^I$。若 $q < p$，则 $\mathcal{T}_\varepsilon q \leq \mathcal{T}_\varepsilon p$，但这与 $J < J'$ 这一假设矛盾。因此，若 p 和 q 可比较，则 $p \leq q$，如所求。

若 p 和 q 不可比较，则按照引理 r 的证明中所用的集合 U 和 V 来定义 4.15(b)。由于 $p \in S_I$，$r \in S_I$ 根据该引理。令 $J'' \in \Lambda'$ 满足 $\mathcal{T}_\varepsilon r \in R_{J''}$，因此根据构造，$r \in \mathcal{I}_{J''}^I$。

由于 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 保持直线 性，并利用引理 2.11，对于每个 $1 \leq i \leq k$，都存在平移 $\mathcal{T}_\varepsilon^i\colon\ P \to P$ 使得 t

$$\mathcal{T}_\varepsilon r = (\mathcal{T}_\varepsilon^1(r^1), \ldots, \mathcal{T}_\varepsilon^k(r^k)).$$

这意味着，若 $i \in U$，$(\mathcal{T}_\varepsilon(r))^i = (\mathcal{T}_\varepsilon(p))^i$；若 $i \in V$，$(\mathcal{T}_\varepsilon(r))^i = (\mathcal{T}_\varepsilon(q))^i$。因此，运用引理 4.15 中的相同论证，可得 $\mathcal{T}_\varepsilon r \in R_J$。于是 $r \in \mathcal{I}_J^I$ 证明完成。 □

4.4.3 为每个区间选择代表元

在第4.3 节中，我们研究了 $P = P^1$ 上的模，可以在 F 的常值区间中选择一个代表元 $\alpha_{i,\ k}$，使其映射到 G 的常值区间，因为这些区间中的所有元素都与其代表元可比较。然而，当我们考虑 P^k 上关于 $k \geq 2$ 的模时，情况就不再如此，因为我们可以在立方体 I 中找到彼此不可比较的元素。例如，考虑 $I = (0,\ 1) \times (0,\ 1) \in \mathbb{R}^2$。对于所有 $\langle x,\ y\rangle \in I$，都存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\langle x-\varepsilon,\ y+\varepsilon\rangle \in I$，并且 $\langle x-\varepsilon,\ y+\varepsilon\rangle$ 与 $\langle x,\ y\rangle$ 不可比较。因此，我们需要采用不同策略，在 P^k 中寻找代表元。

对于给定的流 $\mathcal{T}$ 在 P^k 上，下一个定义通过构造符号 $\hat{}P$ 给出一个偏序集 α_J^I，这些符号将用于表示每个 $\mathcal{I}_J^I$。具体而言，$\hat{}P$ 的元素将写作 $\mathcal{S}\alpha_J^I$，对每个 $\mathcal{S} \in \text{流}_\mathcal{T}$（定义 2.7）均如此。虽然由于 $\mathcal{S}$ 在 α_J^I 上的实际取值未定义，因为 $\mathcal{T}$ 并未定义在 $\hat{}P$ 上，而只定义在 P^k 上，但我们将用它来以符号形式表示那些映射到常值区间的逆极限中的元素。

定义 4.17。令 $\hat{}P = \{\mathcal{S}\alpha_J^I \mid \mathcal{I}_J^I \neq \emptyset \text{ 和 } \mathcal{S} \in \text{流}_\mathcal{T}\}$。在 $\hat{}P$ 中定义关系 $\leq$ 如下：

- 如果 $I \leq I'$ 和 $J \leq J'$，对于所有 $\mathcal{S} \in \text{流}_\mathcal{T}$，则 $\mathcal{S}\alpha_J^I \leq \mathcal{S}\alpha_{J'}^{I'}$。
- 对于 $\text{Flows}_\mathcal{T}$ 中的所有 $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$，$\mathcal{S}\alpha_J^I \leq \mathcal{S}'\alpha_J^I$。

注意，为了简化记号，我们将把元素 $\alpha_J^I = \mathrm{Id}\,\alpha_J^I$ 记作该形式。此外，由于 $\mathrm{Id} \in \mathcal{S}$，第一个假设意味着，如果 $I \leq I'$ 且 $J \leq J'$，那么 $\alpha_J^I \leq \alpha_{J'}^{I'}$。

$\hat{}\,\hat{}$ 通过这一构造，我们利用逆极限定义映射 $F\colon\ P \to C$，具体如下

$$\hat{F}(\mathcal{S}\alpha_J^I) = \varprojlim(F(\mathcal{S}p) \mid p \in \mathcal{I}_J^I).$$

如果上下文已明确给出指标 I，或该指标并非必需，我们就用 α_J 代替 α_J^I。

接下来我们证明这个映射确实具有函子性。

$\hat{}\quad\hat{}$**定理 4.18.** 映射 $F\colon\ P \to C$ 是一个函子。

证明。首先，我们需要证明，对于 $\hat{}p \leq \hat{}q \text{ in } \hat{}P$，$\hat{}F(\hat{}p) \to \hat{}F(\hat{}q)$ 存在。我们先来找出当 $I \leq I'$ 和 $J \leq J'$ 时的映射 $F(\alpha_J^I) \to F(\alpha_{J'}^{I'})$。回忆引理 4.16，若取 $q \in \mathcal{I}_{J'}^{I'}$，则存在 $p \in \mathcal{I}_J^I$ 满足 $p \leq q$。取 $q \leq q' \in \mathcal{I}_{J'}^{I'}$，则 $p \leq p' \in \mathcal{I}_J^I$。鉴于 $\hat{}F(\alpha_J^I)$ 是逆极限，并根据图 4 左侧的图表，我们有

$$F[p' \leq q'] \circ (F[p \leq p'] \circ F[\alpha_J \leq p]) = F[p' \leq q'] \circ (F[\alpha_J \leq p']).$$



图4：用于定义 F 在定理证明中的 4.18。

根据薄引理，我们知道 $F[p' \le q'] \circ F[p \le p'] = F[q \le q'] \circ F[p \le q]$。将这个等式代入方程左侧可得

$$F[q \le q'] \circ F[p \le q] \circ F[\alpha_J \le p] = F[p' \le q'] \circ F[\alpha_J \le p'].$$

令 $\gamma_q = F[p \le q] \circ F[\alpha_J \le p]$，这等同于写作 $F[q \le q'] \circ \gamma_q = \gamma'_{q'}$。

因此，根据 $\hat{F}(\alpha_{J'}^{I'})$ 的泛性质，我们得到唯一的态射 $\hat{F}(\alpha_J^I) \to \hat{F}(\alpha_{J'}^{I'})$，它导出了 $\hat{F}[\alpha_J^I \le \alpha_{J'}^I]$。此外，由这一性质可得

$$F[p \le q] \circ F[\alpha_J^I \le p] = F[\alpha_{J'}^{I'} \le q] \circ \hat{F}[\alpha_J^I \le \alpha_{J'}^{I'}] \tag{5}$$

对于任意 $p \le q$，其中 $p \in \mathcal{I}_J^I$ 和 $q \in \mathcal{I}_{J'}^{I'}$ 属于 $p \le q$。通过类似的论证，对于任意 $\mathcal{S} \in \mathbf{Flows}_{\mathcal{T}}$，我们可以找到态射 $\hat{F}[\mathcal{S}\alpha_J^I \le \mathcal{S}\alpha_{J'}^{I'}]$。

同样，对于所有 $\mathcal{S} \le \mathcal{S}' \in$ 流$_{\mathcal{T}}$，我们都有态射 $\hat{F}[\mathcal{S}\alpha_J \le \mathcal{S}'\alpha_J]$，根据$F(\mathcal{S}'\alpha_J)$的泛性质，如图4右侧的图表所示。此外，泛性质所保证的唯一性 $\hat{}$确保 F 与恒等态射以及复合的结合律相容。

□

对称地，我们定义函子 $G\colon P \to C$，如下所示

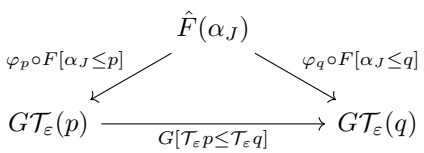
$$\hat{G}(\mathcal{S}\alpha_J^I) = \varprojlim(G(\mathcal{S}p) \mid p \in \mathcal{I}_J^I)$$

其典范态射为 $G[\mathcal{S}\alpha_J^I \le \mathcal{S}p] : \hat{G}(\mathcal{S}\alpha_J^I) \to G(\mathcal{S}p)$。

注意，对于每个 $p \in \mathcal{I}_J^I$，我们都有一个典范态射 $\hat{F}(\mathcal{S}\alpha_J^I) \to F(\mathcal{S}p)$。我们将滥用记号，把这个态射称为 $F[\mathcal{S}\alpha_J^I \le \mathcal{S}p]$。

假设给定了 $(\varphi,\ \psi)$，这是一个从 F 到 G 的可构造的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值，由 $\varphi\colon F \to G\mathcal{T}_\varepsilon$ 和 $\psi\colon F \to \hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,G\mathcal{T}_\varepsilon$ 定义。我们的下一个目标是将这些集合“扩展”为 $\varphi_{\alpha_J}\colon F(\alpha_J) \to G(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J)$ 和 $\psi_{\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J}\colon G(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J) \to F(\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J)$，其中所有 α_J^I 均属于 $\hat{}P$。

考虑图 5 左侧的图表，其中 $p \le q \in \mathcal{I}_J^I$。我们可以验证，以 $\hat{}F(\alpha_J)$、$F(p)$ 和 $F(q)$ 为顶点的三角形是交换的，因为 $\hat{}F(\alpha_J)$ 是 F 的逆极限。根据假设，F 在 $\mathcal{I}_J^I \subseteq S_I$ 上是常值的，因此底部方形是交换的；等价地，$L^{p,\ q} = 0$。因此，该图表



交换，从而构成一个锥。但由于 $\hat{}G(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J)$ 是一个逆极限，这意味着存在唯一的映射 $\varphi_{\alpha_J}\colon \hat{}F(\alpha_j) \to \hat{}G(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J)$ 使图 4 左侧的图表交换，即满足以下性质：

$$\varphi_p \circ F[\alpha_J \le p] = G[\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J \le \mathcal{T}_\varepsilon p] \circ \varphi_{\alpha_J}. \tag{6}$$

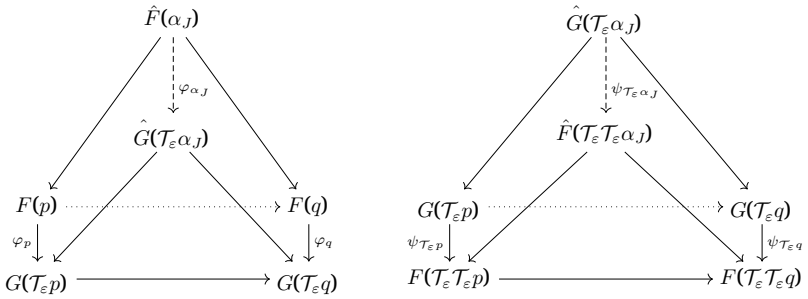


图 5：根据泛性质，展示映射 $\hat{F}(\alpha_J) \to \hat{G}(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J)$ 和 $\hat{G}(\alpha_J) \to \hat{F}(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J)$ 存在的图表。

对称地，我们可以定义 ψ，使图 5 右侧的图表交换。因此，以下等式成立：

$$\psi_{\mathcal{T}_\varepsilon p} \circ G[\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J \le \mathcal{T}_\epsilon p] = F[\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J \le \mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\epsilon p] \circ \psi_{\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J} \tag{7}$$

这样，对于 $\alpha_J^I \le \alpha_{J'}^{I'}$ 我们可以定义平行四边形图 $\varphi(\alpha_J^I,\ \alpha_{J'}^I)$ 以及三角图 $\triangledown_{\varphi,\ \psi}(\alpha_J^I)$ 其定义方式与第 3.2 节相同。

$\hat{}$ 请注意，以上所有工作都是为了在 P 上定义 φ 和 ψ，即 F 的常值区间映射到 G 的常值区间。然而，我们需要这些信息来处理 G 的常值区间映射到 F 的常值区间的情况。因此，我们将以类似的方式定义

$$\tilde{P} = \{\mathcal{S}\beta_J^I \mid \mathcal{J}_I^J \text{ and } \mathcal{S} \in \mathrm{Flows}_\mathcal{T}\}$$

在符号 β_J^I 上，它们与 $\hat{}P$ 具有类似的序关系。此外，定义 $\tilde{G}\colon \tilde{P} \to C$ 和 $\tilde{F}\colon \tilde{P} \to C$，如下：

$$\tilde{G}(\mathcal{S}\beta_I^J) = \varprojlim \left(G(\mathcal{S}p) \mid p \in \mathcal{J}_I^J\right) \qquad \text{and} \qquad \tilde{F}(\mathcal{S}\beta_I^J) = \varprojlim \left(F(\mathcal{S}p) \mid p \in \mathcal{J}_I^J\right).$$

~ ~ ~根据相同的论证，G和 F都是函子。

我们还有映射 $\psi_{\beta_I}\colon G(\beta_I) \to F(\mathcal{T}_\varepsilon\beta_I)$ 和~ ~$\psi_{\mathcal{T}_\varepsilon\beta_I}\colon F(\mathcal{T}_\varepsilon\beta_I) \to G(\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon\beta_I)$。将这些组合起来，我们得到与之前相同的图表：平行四边形图$\psi(\beta_I^J,\ \beta_{I'}^{J'})$和三角图 $\triangle_{\varphi,\ \psi}(\beta_I^J)$。

4.4.4 代表元集的损失函数

注意，尽管我们尚未在 $\hat{}P$ 上定义流 $\mathcal{T}$，但仍可在 $\hat{}\hat{}F(\hat{}p)$ 上为 $\hat{}p \in P$ 定义合并距离（定义 3.1） $d_{\hat{}F\hat{p}}$，其定义如下

$$d_{\hat{p}}^{\hat{F}}(a,b) = \inf\{\varepsilon \ge 0 \mid \hat{F}[\hat{p} \le T_\varepsilon\hat{p}](a) = \hat{F}[\hat{p} \le T_\varepsilon\hat{p}](b)\}.$$

类似地，我们有距离 $d_{\hat{G}\hat{p}}$，定义在 $\hat{G}(\hat{p})$ 上。因此，对于 $\alpha_J^I \le \alpha_{J'}^{I'}$，我们可以按照定义 3.10 的相同方式，定义平行四边形图 $\varphi(\alpha_J^I, \alpha_{J'}^I)$ 的损失 $L^{\alpha_J^I,\alpha_{J'}^{I'}}(\varphi)$，以及三角图 $\triangledown_{\varphi,\psi}(\alpha_J^I)$ 的损失 $L_{\triangledown}^{\alpha_J^I}(\varphi,\psi)$。引理 4.19. 对于任意满足 $p \in \mathcal{I}_J^I$ 和 $q \in \mathcal{I}_{J'}^{I'}$ 的 $p \le q$，我们有

$$L_{\square}^{p,q}(\varphi) \le L_{\square}^{\alpha_J^I,\alpha_{J'}^{I'}}(\varphi) \qquad \textit{and} \qquad L_{\triangledown}^{p}(\varphi,\psi) \le L_{\triangledown}^{\alpha_J^I}(\varphi,\psi).$$

证明。固定 $p \le q$，使得 $p \in \mathcal{I}_J^I$ 且 $q \in \mathcal{I}_{J'}^{I'}$，这意味着 $\alpha_J^I \le \alpha_{J'}^{I'}$。考虑图 6 左侧的图表 6，右侧给出了元素追踪。仅由 F 的各个版本构成的平行四边形由式（5）可知是交换的。类似地，由 G 的各个版本构成的平行四边形也交换。左侧和右侧的平行四边形，即

$$\begin{array}{ccc} \hat{F}(\alpha_J^I) & \xrightarrow{\varphi_{\alpha_J^I}} & \hat{G}(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_J^I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(p) & \xrightarrow{\varphi_p} & G(\mathcal{T}_\varepsilon p) \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{F}(\alpha_{J'}^{I'}) & \xrightarrow{\varphi_{\alpha_{J'}^{I'}}} & \hat{G}(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha_{J'}^{I'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(q) & \xrightarrow{\varphi_q} & G(\mathcal{T}_\varepsilon q) \end{array}$$

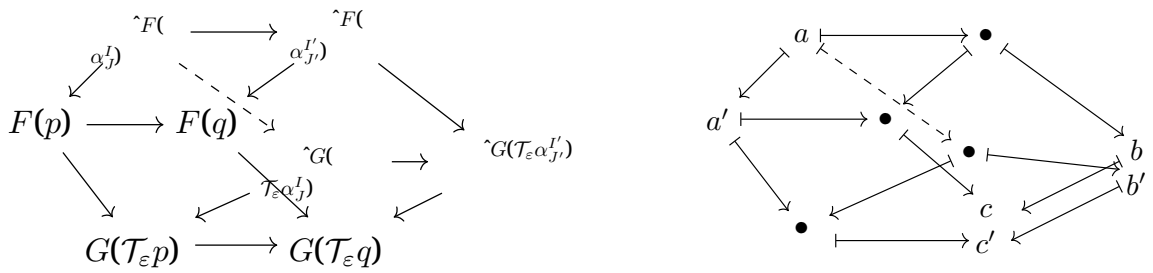


图 6：引理的证明所用的图表。4.19

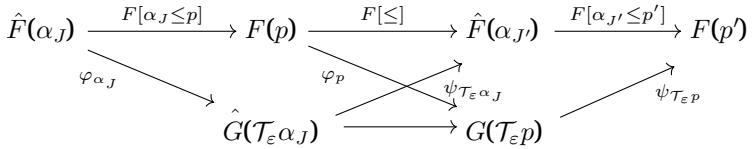
当 $\varphi_{\alpha_J^I}$ 和 $\varphi_{\alpha_{J'}^{I'}}$ 有定义时，由式（6）可知它们交换。剩下的两个平行四边形是 $\varphi(p,\ q)$ 和 $\varphi(\square_{\alpha_J},\ \alpha_{J'})$，我们分别称它们为后侧和前侧。

接下来，考虑 $a' \in F(p)$ 和 $a = F[\alpha_J \le p]^{-1}(a')$，并分别沿着其位于后侧和前侧的像，跟随标记在图 6 右侧的平行四边形。由引理 6，我们有 $d^G_{\mathcal{T}_\varepsilon q}(c,\ c') \le d^G_{\mathcal{T}_\varepsilon \alpha_{J'}}(b,\ b')$，根据引理 3.6，因此根据损失的定义可知

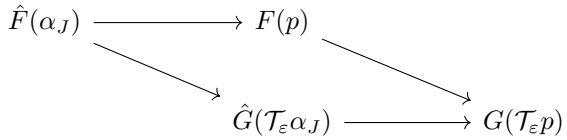
$$L^{p,q}_{\square}(\varphi) \le L^{\alpha_J,\alpha_{J'}}_{\square}(\varphi)$$

正如所需。

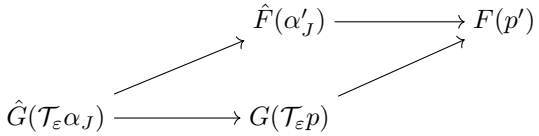
现在，让我们给三角损失设定上界。考虑以下图表



其中我们已设定 $p' = \mathcal{T}_\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon p$ 和 $\alpha'_J = \mathcal{T}_\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon \alpha_J$。左侧平行四边形



由方程（6）交换，右侧平行四边形



由方程（7）交换。此外，$F[\alpha^I_J \le p]$ 是同构，因为对于所有 $p \le q$ 中的 $\mathcal{I}^I_J \subset S_I$ 态射 $F[p \le q]$ 都是同构。于是，根据泛性质可知，$F[\alpha^I_J \le p]$ 也是同构。由于引理4.6（1）的所有条件都已满足，我们可以得出

$$L^p_{\triangledown}(\varphi,\psi) \le L^{\alpha_J}_{\triangledown}(\varphi,\psi)$$

证明完成。 □

类似地，我们可以定义图表 $\psi(\beta^J_I,\ \beta^{J'}_{I'})$ 和 $\triangle_{\varphi,\ \psi}(\beta^J_I)$，以及相应的损失 $L^{\beta^J_I,\ \beta^{J'}_{I'}}_{\square}(\psi)$ 和 $L^{\beta^J_I}_{\triangle}(\varphi,\ \psi)$。随后，通过对称论证可证明，对于 $p \le q$，若满足 $p \in \mathcal{J}^J_I$ 和 $q \in \mathcal{J}^J_I$，则有

$$L^{p,q}_{\square}(\psi) \le L^{\beta^J_I,\beta^{J'}_{I'}}_{\square}(\psi) \qquad \text{and} \qquad L^p_{\triangle}(\varphi,\psi) \le L^{\beta^J_I}_{\triangle}(\varphi,\psi).$$

综合以上所有准备，并沿用定理 4.11 中相同的论证，我们得到最终的主定理。**定理 4.20**。 设 F，G 属于 C^P，且为立方体驯服的；并设$(\varphi,\ \psi)$ 为它们之间给定的可构造的、保线的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值。那么，损失为

$$L(\varphi,\psi)=\max\left\{\max_{\hat{p}\prec\hat{q}\ \in\hat{B}}\{L_{\diagdown}^{\hat{p},\hat{q}}(\varphi)\},\ \max_{\hat{p}\in\{\alpha_J^I\}}\{L_{\triangledown}^{\hat{p}}(\varphi,\psi)\},\ \max_{\tilde{p}\prec\tilde{q}\ \in\tilde{B}}\{L_{\diagup}^{\tilde{p},\tilde{q}}(\psi)\},\ \max_{\tilde{p}\in\{\beta_J^I\}}\{L_{\triangle}^{\tilde{p}}(\varphi,\psi)\}\right\}$$

其中

$$\hat{B}=\{\alpha_J^I\mid\alpha_J^I\ \textit{minimal in the poset}\ \{\alpha_{J'}^I\mid\mathcal{I}_{J'}^I\neq\emptyset,J'\in\Lambda\}\}$$

and

$$\tilde{B}=\{\beta_I^J\mid\beta_I^J\ \textit{minimal in the poset}\ \{\beta_{I'}^J\mid\mathcal{J}_{I'}^J\neq\emptyset,I'\in\Lambda'\}\}.$$

最后，我们使用该定理计算多参数持久模的损失。设 $F,G\colon P^k\to\mathrm{Vec}_{\mathbb{F}}$为立方体驯化的，且$(\varphi,\psi)$为一个可构造的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值。首先，我们令 E 为所有指标 i上 F和 G 的i-临界坐标数量的最大值。然后，对于损失函数相关平行四边形图表和三角图中沿两条边绕行的所有映射对，我们将其秩差的最大值定义为 N。明确地说，它是

$$\begin{aligned}N=\max\Bigg\{&\max_{\hat{p}\prec\hat{q}\ \in\hat{B}}\left\{\mathrm{rk}(\varphi_{\hat{q}}\circ\hat{F}[\hat{p}\le\hat{q}]-\hat{G}[\mathcal{T}_\varepsilon\hat{p}\le\mathcal{T}_\varepsilon\hat{q}]\circ\varphi_{\hat{p}})\right\},\ \max_{\hat{p}\in\{\alpha_J^I\}}\left\{\mathrm{rk}(\psi_{\mathcal{T}_\varepsilon\hat{p}}\varphi_{\hat{p}}-\hat{F}[\hat{p}\le\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon\hat{p}])\right\},\\&\max_{\tilde{p}\prec\tilde{q}\ \in\tilde{B}}\left\{\mathrm{rk}(\psi_{\tilde{q}}\circ\tilde{G}[\tilde{p}\le\tilde{q}]-\tilde{F}[\mathcal{T}_\varepsilon\tilde{p}\le\mathcal{T}_\varepsilon\tilde{q}]\circ\psi_{\tilde{p}})\right\},\ \max_{\tilde{p}\in\{\beta_I^J\}}\left\{\mathrm{rk}(\varphi_{\mathcal{T}_\varepsilon\tilde{p}}\psi_{\tilde{p}}-\tilde{G}[\tilde{p}\le\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon\tilde{p}])\right\}.\Bigg\}\end{aligned}$$

然后我们定义 M 为所需检验的约化常数数量的上界，具体定义为

$$M=\max\left\{\max_{\hat{p}\in\{\alpha_J^I\}}\left\{D_{\mathcal{T}_\varepsilon\hat{p}}^{\hat{G}},D_{\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon\hat{p}}^{\hat{F}}\right\},\ \max_{\hat{p}\in\{\beta_I^J\}}\left\{D_{\mathcal{T}_\varepsilon\tilde{p}}^{\tilde{F}},D_{\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon\tilde{p}}^{\tilde{G}}\right\}\right\}.$$

利用这些常数，我们可以如下界定计算损失所需的时间。

推论 4.21. 设 $F,G\colon P^k\to Vec_{\mathbb{F}}$ 是 q-驯化的且立方体驯服的，并且 (φ,ψ) 是一个可构造的 $\mathcal{T}_\varepsilon$-赋值。计算 $L(\varphi,\psi)$ 的时间复杂度为

$$O(E^{2k}N^3\log(M))$$

其中 E、N 和 M 如上所述。

证明. 由算法 2 可知，计算 $L^{p,q}(\varphi)$ 所需的时间为 $O(n^3\log(m))$，其中$n=\mathrm{rk}($
$\varphi_q\circ F[p\le q]-G[\mathcal{T}_\varepsilon p\le\mathcal{T}_\varepsilon q]\circ\varphi_p)$ 且 $m=|D_{\mathcal{T}_\varepsilon p}^G|$。根据构造，$n\le N$且 $m\le M$。对于 $L^{p,q}(\varphi)$，也有类似的表达式。类似的论证可得，计算 $L_{\triangledown}^p(\varphi,\psi)$ 所需的时间为$O(n'^3\log(m'))$，其中 $n'=\mathrm{rk}($
$F[p\le\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon p]-\psi_{\mathcal{T}_\varepsilon p}\circ\varphi_p)\}$ 且 $m'=|D_{\mathcal{T}_\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon p}^F|$。同样，$n'\le N$且 $m'\le M$。类似地，我们有一个关于 $L_{\triangle}^p(\varphi,$
$\psi)$ 的表达式。因此，$O(N^3log(M))$ 给出了计算任意图表的损失所需时间的上界。最后，由定理 4.20 可知，我们需要检查的图表数量上界为 $2|\{\alpha_J^I\}|+2|\{\beta_I^J\}|$，并且每个基数的上界为 $(2E+1)^{2k}$。 □

5 讨论

本文研究以偏序集为指标、取值于具体范畴的持久模，定义了一种损失函数，用于衡量一个赋值（即一族类似于自然变换的映射）距离成为交错还有多远。我们证明了，该损失为广义持久模之间的交错距离提供了一个上界。随后，当 P 是完备线性序时，我们优化了以 $P\,\mathrm{pr}\ P^k$ 为指标的持久模的损失计算。此外，对于其对象具有底层有限集的范畴，或向量空间范畴，我们给出了计算持久模损失的多项式时间算法。

我们的结果为通过算法方法求取常用构造的交错距离上界带来了可能性，例如多参数持久模，而其精确计算

已被证明是 NP 完全问题（Bjerkevik 和 M. B. Botnan，2018年）。不过，我们强调，我们的方法并不保证能得到紧确的上界。因此，未来一个自然的研究方向是实现算法，在所有可能的赋值中搜索最佳上界。虽然这个问题不可避免地是 NP 困难的，但如果在制定探索赋值空间的策略时更加周全，或许能够获得实验上实用的结果，正如 Chambers、Ghosh 等人（2026）利用线性规划为映射器图研究这一损失函数时所做的那样。

此外，我们的框架适用于任何可以表示为广义持久模的结构，包括合并树（Morozov、Beketayev 和 Weber，2013）、Reeb 图（deSilva、Munch 和 Patel，2016）、映射器图（Chambers、Munch 等人，2025年）、具体范畴中的层和余层。因此，所提出的损失为这些结构之间的交错距离提供了一个上界。计算该损失的算法开发仍需进一步研究，并且本质上取决于具体情境，依赖于每种结构的特定性质；例如，当指标偏序集由开集的集合构成时，基元素的存在性（Chambers、Munch 等人，2025年）。

我们的工作还有一些直接的推广方向，值得在未来研究中探讨。可以将 $\mathcal{T}_\varepsilon$-交错替换为弱 $\mathcal{T}_\varepsilon$-交错（de Silva、Munch 和 Stefanou，2018年），并使用更一般的度量。另一条路径是研究在非具体范畴（如拓扑空间范畴）中定义的持久模的交错距离。我们的损失函数定义基于范畴中某个对象内部元素之间的距离。因此，关键在于找到一个与对象内容无关的损失函数定义。最后，我们针对指标为 P^k 且 P 为完备线性序的持久模，优化了损失的计算，这是由于我们对多参数持久性的应用感兴趣。未来，我们希望探索当偏序集 P 具有模性和格性等其他性质时的此类优化。例如，层和余层自然地由分配格进行指标化。

致谢 EM 和 AO 感谢 Peter Bubenik、Vin de Silva 和 Håvard Bjerkevik 提供的有益讨论。本研究部分由美国国家科学基金会通过 CCF-2142713 和 CCF-2106578 项目资助。

参考文献

Agarwal, Pankaj K. 等（2018年6月）。“度量树的 Gromov-Hausdorff 距离计算”。载于：《ACM 算法汇刊》14.2，第 1–20 页。DOI：10.1145/3185466。Berkouk, Nicolas 和 François Petit（2019年2月26日）。“瞬逝持久模与距离比较”。载于：《代数与几何拓扑》21.1，第 247–277 页。ISSN：1472-2747。DOI：10.2140/agt.2021.21.247。arXiv：1902.09933 [math.AT]。Beurskens, Thijs 等（2025年1月）。“通过有序合并树关联交错距离与 Fréchet 距离”。载于：2025年 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集（SODA）。工业与应用数学学会，第 5027–5050 页。ISBN：9781611978322。DOI：10.1137/1.9781611978322.170。Bjerkevik, Håvard Bakke（2021年5月）。“区间可分解持久模的稳定性”。载于：《离散与计算几何》66.1，第 92–121 页。DOI：10.1007/s00454-021-00298-0。Bjerkevik, Håvard Bakke 和 Magnus Bakke Botnan（2018年12月）。“交错距离的计算复杂性”。载于：第34届国际计算几何研讨会（SoCG 2018）。Bettina Speckmann 和 Csaba D.Tóth 编。第 99 卷。《莱布尼茨国际信息学会议录》（LIPIcs）。德国 Dagstuhl：Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik，13:1–13:15。ISBN：978-3-95977-066-8。DOI：10.4230/LIPIcs.SoCG. 2018.13。arXiv：1712.04281v1 [cs.CG]。URL：http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2018/8726。Bjerkevik, Håvard Bakke、Magnus Bakke Botnan 和 Michael Kerber（2020）。“计算交错距离是 NP 困难的”。载于：《计算数学基础》20.5，第 1237–1271 页。Blumberg, Andrew 和 Michael Lesnick（2017年5月4日）。“同伦交错距离的普适性”。载于：《美国数学会会刊》。ISSN：1088-6850。DOI：10.1090/tran/8738。arXiv：1705. 01690v1 [math.AT]。Botnan, Magnus 和 William Crawley-Boevey（2020）。“持久模的分解”。载于：《美国数学会会刊》148.11，第 4581–4596 页。

Botnan, Magnus 和 Michael Lesnick（2018）。“之字形持久模的代数稳定性”。载于：《代数与几何拓扑》18.6，第 3133–3204 页。Botnan, Magnus Bakke、Justin Curry 和 Elizabeth Munch（2020年4月）。“交错的相对理论”。载于：arXiv。arXiv：2004.14286v1 [math.CT]。Bubenik, Peter 和 Jonathan A. Scott（2014年1月28日）。“持久同调的范畴化”。载于：《离散与计算几何》51.3，第 600–627 页。DOI：10.1007/s00454-014-9573-x。Bubenik, Peter、Vin de Silva 和 Jonathan Scott（2014年10月9日）。“广义持久模的度量”。载于：《计算数学基础》15.6，第 1501–1531 页。DOI：10.1007/s10208-014-9229-5。Chambers, Erin Wolf、Ishika Ghosh 等（2026年4月）。《求映射器图上交错距离的最优界》。DOI：10.48550/ARXIV.2504.03865。arXiv：2504.03865 [cs.CG]。Chambers, Erin Wolf、Elizabeth Munch 等（2025年7月）。“利用损失函数界定映射器图的交错距离”。载于：《应用与计算拓扑学期刊》9.3。ISSN：2367-1734。DOI：10.1007/s41468- 025-00215-x。arXiv：2307.15130 [cs.CG]。URL：https://arxiv.org/abs/2307.15130。Chazal, Frédéric 等（2009）。“持久模及其图表的邻近性”。载于：第二十五届计算几何年度研讨会论文集，第 237–246 页。Cruz, Joshua（2019年1月）。“带流范畴中的度量极限”。载于：arXiv:1901.04828。arXiv：1901.04828v1[math.CT]。Curry, Justin 等（2022年3月）。“用于持久拓扑的装饰合并树”。载于：《应用与计算拓扑学期刊》6.3，第 371–428 页。ISSN：2367-1734。DOI：10.1007/s41468-022-00089-3。de Silva, Vin、Elizabeth Munch 和 Amit Patel（2016）。“范畴化 Reeb 图”。载于：《离散与计算几何》，第 1–53 页。ISSN：1432-0444。DOI：10.1007/s00454-016-9763-9。URL：http://dx.doi.org/10. 1007/s00454-016-9763-9。de Silva, Vin、Elizabeth Munch 和 Anastasios Stefanou（2018）。“带流范畴上的交错理论”。载于：《范畴论及其应用》33.21，第 583–607 页。URL：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/ 33/21/33-21.pdf。Edelsbrunner, Herbert 和 John Harer（2008）。“持久同调：综述”。载于：《当代数学》453.26，第 257–282 页。Erickson, Jeff（2019）。《算法》。S.L：S.N。ISBN：9781792644832。Farahbakhsh Touli, Elena 和 Yusu Wang（2019）。“用于计算树之间 Gromov-Hausdorff 距离和交错距离的固定参数可处理算法”。载于：第27届欧洲算法研讨会（ESA 2019）。Michael A. Bender、Ola Svensson 和 Grzegorz Herman 编。第 144 卷。《莱布尼茨国际信息学会议录》（LIPIcs）。德国 Dagstuhl：Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik，83:1–83:14。ISBN：978-3-95977-124-5。DOI：10.4230/LIPIcs.ESA.2019.83。URL：http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/11204。Gasparovic, Ellen 等（2024年12月）。“合并树的内禀交错距离”。载于：《La Matematica》4.1，第 40–65 页。ISSN：2730-9657。DOI：10.1007/s44007-024-00143-9。Ghrist, Robert（2007年10月）。《条形码：数据的持久拓扑》。第 45 卷。01。美国数学会（AMS），第 61–76 页。DOI：10.1090/s0273-0979-07-01191-3。Harzheim, Egbert（2007）。《偏序集》。Springer London, Limited。ISBN：9780387242224。Kim, Woojin 和 Facundo Mémoli（2017年12月11日）。“通过莫比乌斯反演提取动态数据中的持久簇”。载于：《离散与计算几何》71.4，第 1276–1342 页。ISSN：1432-0444。DOI：10.1007/s00454- 023-00590-1。arXiv：1712.04064 [math.AT]。–（2020年2月）。“动态度量空间的时空持久同调”。载于：《离散与计算几何》。DOI：10.1007/s00454-019-00168-w。Lan, Fangfei、Salman Parsa 和 Bei Wang（2024年9月）。“Reeb 图的带标签交错距离”。载于：《应用与计算拓扑学期刊》8.8，第 2367–2399 页。ISSN：2367-1734。DOI：10.1007/s41468-024-00193-6。Lesnick, Michael（2015）。“多维持久模上的交错距离理论”。载于：《计算数学基础》15.3，第 613–650 页。McFaddin, Patrick K. 和 Tom Needham（2025年11月）。“交错距离、幺半作用与2-范畴”。载于：即将发表于《代数与几何拓扑》。DOI：10.48550/ARXIV.2311.11936。arXiv：2311.11936[math.AT]。Meehan, Killian 和 David Meyer（2017年10月）。“作为极限的交错距离”。载于：arXiv:1710.11489。arXiv：1710.11489v1 [math.AT]。URL：http://arxiv.org/pdf/1710.11489v1。Morozov, Dmitriy、Kenes Beketayev 和 Gunther Weber（2013）。“合并树之间的交错距离”。载于：TopoInVis 论文集。

Munch, Elizabeth 和 Anastasios Stefanou（2019年2月）。“用于系统发育树的 ℓ_∞-Cophenetic 度量作为交错距离”。载于：女性数学家协会丛书。施普林格国际出版公司，第 109–127 页。DOI：10.1007/978-3-030-11566-1_5。arXiv：1803.07609v1 [cs.CG]。Oudot, Steve Y.（2015年）。《持久性理论：从箭图表示到数据分析》。美国数学会。ISBN：9781470425456。Patel, Amit（2018年5月）。“广义持久图”。载于：《应用与计算拓扑学杂志》1.3-4，第 397–419 页。DOI：10.1007/s41468-018-0012-6。Pegoraro, Matteo（2025年11月）。“合并树之间交错距离的图匹配表述”。载于：AIMS数学 10.6，第 13025–13081 页。ISSN：2473-6988。DOI：10.3934/math.2025586。arXiv：2111.15531[math.CO]。Riehl, Emily（2017年）。《语境中的范畴论》。Courier Dover出版社。Robinson, Michael（2020年5月）。“赋值到伪度量空间层”。载于：组合性 2。DOI：10.32408/compositionality-2-2。arXiv：1805.08927 [math.AT]。Schröder, Bernd（2016）。《偏序集》。第 328 卷。施普林格。Scoccola, Luis（2020）。《局部持久范畴与交错距离的度量性质》。博士论文。西安大略大学。Yan, Lin 等（2019）。“用于不确定性可视化的带标签合并树的结构平均”。载于：IEEE可视化与计算机图形学汇刊，第 1–1 页。DOI：10.1109/tvcg.2019.2934242。arXiv：1908.00113。Zomorodian, Afra 和 Gunnar Carlsson（2004年11月）。《计算持久同调》。DOI：10.1007/s00454-004-1146-y。URL：http://dx.doi.org/10.1007/s00454-004-1146-y。