arXiv:2601.09047v1 [physics.plasm-ph] 14 Jan 2026

# 电子回旋漂移不稳定性的未扰动轨道积分与三维动理学色散关系

Yinjian Zhao*[1]

[1]哈尔滨工业大学能源科学与工程学院，中国哈尔滨 *150001*

2026年1月15日

**摘要**

交叉场（$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$）等离子体中的高频不稳定性被广泛认为是霍尔推力器及相关装置中反常横向电子输运的诱因。在 Ducrocq *et al.* 以及后来 Lafleur*et al.*报告的全动理学三维静电色散关系基础上，我们简明而完整地推导了其中缺失的关键步骤：通过沿未扰动轨道进行推迟积分，从线性化 Vlasov 方程得到磁化电子密度扰动 $n_{e1}$，其中包含有限拉莫尔半径效应和回旋谐波。我们在附录中汇总了所需的数学恒等式，并阐明 Ducrocq 泊松形式与 Lafleur 介电形式表示之间的对应关系，其中包括离子闭合关系（冷流体与动理学朗道响应）。最后，我们简要讨论这些假设及其向更真实构型扩展的可能性。

## 1 引言

交叉场（$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$）等离子体广泛存在于基础等离子体物理研究和具有重大影响的应用中。典型例子包括用于电推进的霍尔效应推力器 [1], 潘宁型放电和磁控管 [2], ，以及广泛用于等离子体处理和等离子体源的一类部分磁化等离子体装置。在这些系统中，施加的垂直于磁场的电场驱动方位向电子漂移，而离子通常仅受到弱磁化影响，或实际上未被磁化。由此产生的物种间磁化差异带来了丰富的波粒动力学，并促成了多种微观不稳定性。

$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 等离子体中的一个核心挑战，是长期存在的反常跨磁场电子输运问题。在许多实际工况下，测得的电子沿磁力线横向迁移率比经典碰撞理论预测高出数个数量级。一种广受认可的物理图景是，高频静电不稳定性会产生湍流和关联涨落，增强电子动量与能量交换，从而形成有效的“反常电导率”。在这些不稳定性中，电子回旋漂移不稳定性（ECDI）及其长波长扩展（常与修正双流体物理联系起来）在类霍尔推力器参数范围内尤为重要。

*通讯作者：Yinjian Zhao，zhaoyinjian@hit.edu.cn

要定量理解这些不稳定性，需要对磁化电子进行动理学描述，其中包括有限拉莫尔半径（FLR）效应和回旋谐波，并将其与离子响应耦合；离子响应的描述可以从冷流体模型延伸到动理学（朗道）行为。Ducrocq 等人 [3] 首次为这类交叉场构型推导出完整的三维（3D）静电动理学色散关系。后来，Lafleur等人 [1] 以介电形式给出了等价的三维（3D）表述，并强调了该表述在霍尔推力器反常输运建模中的实用价值，其中包括保留动理学（非磁化）离子响应的选项。尽管这些成果十分重要，但两种推导都以篇幅冗长著称：原论文仅报告了关键的中间步骤，使初次接触该理论的读者难以重现完整的推导逻辑。

因此，本研究的主要目的是教学。我们从电子 Vlasov 方程出发，通过沿未受扰粒子轨道进行迟滞（因果）积分，全面且自成一体地推导磁化电子密度扰动 $n_{e1}$。这一关键步骤——从线性化 Vlasov 方程推导出 $n_{e1}$ 的闭式表达式——是完整三维色散关系的技术核心，也是若干标准但并不简单的恒等式发挥作用之处（回旋相位动力学、Jacobi–Anger 展开、朗道处方以及等离子体色散函数的运算）。为便于研习，附录汇集并推导了深入理解计算过程所需的主要数学工具。

完成以本文符号体系对电子响应的推导后，我们阐明 Ducrocq 的“泊松形式”色散关系与 Lafleur 的“介电形式”色散关系在代数上等价，并明确指出两者符号之间的对应关系（热速度约定、谐波求和形式以及离子闭合关系）。最后，我们讨论本推导所依据的主要假设（均匀交叉场、静电扰动、线性响应以及简化的平衡态闭合关系），并概述可能的拓展方向，包括更一般的平衡态、额外的物理效应（例如碰撞或电磁效应），以及未来理论发展的方向。

# 2 电子密度扰动的推导

## 2.1 模型设定与线性化

我们采用 Ducrocq 等人 [3]) 所述的相同模型设定，仅推导有关电子密度扰动的缺失部分。出发点是电子 Vlasov 方程（Ducrocq 等人 [3] 中的方程 (8)），

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}} f_e - \frac{e}{m}\Big[-\nabla\Phi + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\Big]\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f_e = 0, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{v}$ 是电子速度（省略下标“e”），$f_e$ 是电子分布函数，$\Phi$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是电势和磁场。

We c考虑具有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0$ 和稳态静电势的均匀交叉场平衡 $\Phi_0(\boldsymbol{r})$：

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \Phi_0(\boldsymbol{r}) + \Phi_1(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{E}_0 = -\nabla\Phi_0, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0, \tag{2}$$

其中，一阶扰动用下标“1”表示。平衡态电子分布

假定为漂移麦克斯韦分布，

$$f_0(\boldsymbol{v}) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}_d)^2}{2V_{\rm th}^2}\right], \tag{3}$$

$$V_{\rm th} = \sqrt{\frac{T}{m}}, \qquad \boldsymbol{V}_d = V_d\,\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{4}$$

˜我们假设存在复振幅为 $\Phi$ 的静电平面波扰动，

$$\Phi_1(\boldsymbol{r},t) = \tilde{\Phi}\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \qquad \boldsymbol{E}_1 = -\nabla\Phi_1 = -i\boldsymbol{k}\,\Phi_1, \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{k}$ 表示波矢，$\omega$ 表示角频率。我们将分布函数分解为

$$f_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = f_0(\boldsymbol{v}) + f_1(\boldsymbol{v})\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}. \tag{6}$$

对于均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$，因此 $\boldsymbol{E}_0$ 位于 $-\hat{x}$ 中，扰动振幅 $f_1(\boldsymbol{v})$ 的线性化方程可在漂移系中写成紧凑形式

$$\left[-i\omega + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \Omega\frac{\partial}{\partial\theta}\right] f_1 = -\frac{e}{m}\, i\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f_0\, \tilde{\Phi}, \qquad \Omega = \frac{eB_0}{m}, \tag{7}$$

其中 $\theta$ 是垂直（$x$，$y$）速度平面内的回旋相位角。从 Vlasov方程到线性化扰动方程的详细推导见附录 A。

## 2.2 延迟轨道积分解

接下来，将式（7）改写为关于回旋相位的一阶方程：

$$\Omega\frac{\partial f_1}{\partial\theta} + i\big(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}-\omega\big) f_1 = S(\boldsymbol{v},\theta), \qquad S(\boldsymbol{v},\theta) \equiv -\frac{e}{m}\, i\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f_0\, \tilde{\Phi}. \tag{8}$$

我们沿未扰动轨道积分（特征线法），以求解方程（8）。在均匀磁场中，回旋相位的演化为

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega. \tag{9}$$

引入回溯时间 $s \equiv t - t' \geq 0$（迟滞解），沿未扰动轨道的回旋相位为

$$\theta(s) = \theta - \Omega s. \tag{10}$$

定义在该轨道上求得的扰动：

$$g(s) \equiv f_1\big(\boldsymbol{v}(s),\theta(s)\big) = f_1\big(\boldsymbol{v}(s),\theta-\Omega s\big), \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{v}$（$s$）为未扰动速度（对于均匀 $B_0$，$v_\perp$ 和$v_\parallel$ 为常数，而垂直方向则以 $\theta$（$s$）旋转）。根据链式法则，

$$\frac{dg}{ds} = \frac{\partial f_1}{\partial\theta}\frac{d\theta}{ds} = -\Omega\,\frac{\partial f_1}{\partial\theta}, \tag{12}$$

从而使方程（8）成为沿轨道的常微分方程，

$$\frac{dg}{ds} - i\big(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}(s)-\omega\big) g(s) = -S\big(\boldsymbol{v}(s),\theta(s)\big). \tag{13}$$

引入积分因子

$$\mu(s) = \exp\left[-i \int_0^s \big(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}(\sigma) - \omega\big)\, d\sigma\right], \tag{14}$$

可得

$$\frac{d}{ds}\Big[g(s)\mu(s)\Big] = -S\big(\boldsymbol{v}(s),\theta(s)\big)\mu(s). \tag{15}$$

施加推迟边界条件 $g(s\to\infty) = 0$ 并注意到 $\mu(0) = 1$，可得

$$f_1(\boldsymbol{v},\theta) = g(0) = \int_0^\infty ds\; S\big(\boldsymbol{v}(s),\theta(s)\big)\; \exp\left[-i\int_0^s \big(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}(\sigma) - \omega\big)\, d\sigma\right]. \tag{16}$$

相位积分可用未扰动轨道位移表示，

$$\int_0^s \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}(\sigma)\, d\sigma = \boldsymbol{k}\cdot\int_0^s \boldsymbol{v}(\sigma)\, d\sigma = \boldsymbol{k}\cdot\big[\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t-s)\big], \tag{17}$$

因此

$$f_1(\boldsymbol{v},\theta) = -\frac{e}{m}\, i\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f_0\, \tilde{\Phi}\int_0^\infty ds\; \exp\big\{\, i\boldsymbol{k}\cdot\big[\boldsymbol{r}(t-s) - \boldsymbol{r}(t)\big] + i\omega s\big\}. \tag{18}$$

在交叉场中，未扰动轨道可分解为 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{\rho}(t)$，其中 $\boldsymbol{R}$ 是导心位置，$\boldsymbol{\rho}$ 是拉莫尔半径矢量。导引中心以 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}_d + v_\parallel \hat{\boldsymbol{z}}$ 漂移，因此

$$\boldsymbol{R}(t-s) - \boldsymbol{R}(t) = -(\boldsymbol{V}_d + v_\parallel\hat{\boldsymbol{z}})\, s. \tag{19}$$

因此，

$$\boldsymbol{k}\cdot\big[\boldsymbol{r}(t-s) - \boldsymbol{r}(t)\big] = -(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_d + k_\parallel v_\parallel)s + \boldsymbol{k}_\perp\cdot\big[\boldsymbol{\rho}(t-s) - \boldsymbol{\rho}(t)\big], \tag{20}$$

以及方程（18）可改写为标准未扰动轨道积分形式

$$f_1(\boldsymbol{v},\theta) = -\frac{e}{m}\, i\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f_0\, \tilde{\Phi}\int_0^\infty ds\; e^{i(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_d - k_\parallel v_\parallel)s}\; \exp\big[i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\big(\boldsymbol{\rho}(t-s) - \boldsymbol{\rho}(t)\big)\big]. \tag{21}$$

方程（21）将扰动表示为粒子沿未扰动轨道向后追踪时所经历的累积波驱动（迟滞响应）。

## 2.3 有限拉莫尔半径相位与贝塞尔展开

接下来，我们将（$x$，$y$）平面中的拉莫尔半径矢量写作

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \rho_L\big(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}\big), \qquad \rho_L \equiv \frac{v_\perp}{\Omega}, \tag{22}$$

因此，利用 $\theta(s) = \theta - \Omega s$，

$$\boldsymbol{\rho}(t-s) = \rho_L\big(\sin(\theta - \Omega s)\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos(\theta - \Omega s)\,\hat{\boldsymbol{y}}\big). \tag{23}$$

引入垂直波矢的极角 $\alpha$，

$$\boldsymbol{k}_\perp = k_\perp(\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}), \qquad \lambda \equiv k_\perp\rho_L = \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}. \tag{24}$$

Then

$$\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}(t)=\lambda\sin(\theta-\alpha),\qquad \boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}(t-s)=\lambda\sin(\theta-\Omega s-\alpha), \tag{25}$$

以及方程（21）中的轨道相位因子变为

$$\exp\big[i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\big(\boldsymbol{\rho}(t-s)-\boldsymbol{\rho}(t)\big)\big]=\exp[i\lambda\sin(\theta-\Omega s-\alpha)]\,\exp[-i\lambda\sin(\theta-\alpha)]\,. \tag{26}$$

利用 Jacobi–Anger 展开

$$e^{\,i\lambda\sin\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda)e^{in\varphi},\qquad e^{-i\lambda\sin\varphi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(\lambda)e^{-im\varphi}, \tag{27}$$

我们得到贝塞尔级数表示

$$\begin{aligned}\exp\big[i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\big(\boldsymbol{\rho}(t-s)-\boldsymbol{\rho}(t)\big)\big]&=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda)e^{in(\theta-\Omega s-\alpha)}\right]\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(\lambda)e^{-im(\theta-\alpha)}\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda)J_m(\lambda)\,e^{i(n-m)(\theta-\alpha)}\,e^{-in\Omega s}.\end{aligned} \tag{28}$$

将式（28）代入式（21）可得

$$f_1(\boldsymbol{v},\theta)=-\frac{e}{m}\,i\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}f_0\,\tilde{\Phi}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda)\,J_m(\lambda)\,e^{i(n-m)(\theta-\alpha)}\int_0^{\infty}ds\,e^{\,i(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_d-k_\parallel v_\parallel-n\Omega)s}. \tag{29}$$

## 2.4 时间积分与朗道处方

定义

$$\Delta_n\equiv\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_d-k_\parallel v_\parallel-n\Omega. \tag{30}$$

根据推迟边界条件，我们通过一个趋于零的微小阻尼因子 $e^{-\eta s}$ $(\eta\to0^+)$ 对振荡积分进行正则化：

$$\int_0^{\infty}ds\,e^{i\Delta_n s}=\lim_{\eta\to0^+}\int_0^{\infty}ds\,e^{i\Delta_n s-\eta s}=\lim_{\eta\to0^+}\frac{1}{\eta-i\Delta_n}=\frac{i}{\Delta_n+i0^+}, \tag{31}$$

更多详情见附录B。将式（31）代入式 29 可得

$$f_1(v,\theta)=-\frac{e}{m}\,i\,\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}f_0\,\tilde{\Phi}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda)J_m(\lambda)\,e^{i(n-m)(\theta-\alpha)}\frac{i}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_d-k_\parallel v_\parallel-n\Omega+i0^+}. \tag{32}$$

## 2.5 速度空间矩及密度扰动的求解

对 $f_1$ 求速度矩，可得到扰动电子密度，

$$n_{e1}=\int f_1\,d^3v=\int_{-\infty}^{\infty}dv_\parallel\int_0^{\infty}dv_\perp\,v_\perp\int_0^{2\pi}d\theta\,f_1(v_\perp,v_\parallel,\theta). \tag{33}$$

从贝塞尔展开形式出发 $f_1$ （方程（32））,

$$f_1=\frac{e}{m}\tilde{\Phi}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda)J_m(\lambda)\,e^{i(n-m)(\theta-\alpha)}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}f_0}{\omega-k_yV_d-k_zv_\parallel-n\Omega+i0^+}. \tag{34}$$

对于（漂移参考系中的）麦克斯韦平衡态 $f_0 = f_0(v_\perp,\ v_\parallel)$，有

$$\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f_0 = \left(k_z\frac{\partial}{\partial v_\parallel} + k_\perp\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial v_\perp}\right) f_0 = -\frac{f_0}{V_{\rm th}^2}\Big(k_z v_\parallel + k_\perp v_\perp\cos(\theta-\alpha)\Big). \tag{35}$$

详见附录C 以了解更多细节。

将（35）代入（34），再代入（33），其中 $\theta$ 积分涉及以下恒等式（附录D）

$$\int_0^{2\pi} d\theta\ e^{i(n-m)(\theta-\alpha)} = 2\pi\,\delta_{nm}, \tag{36}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta\ \cos(\theta-\alpha)\, e^{i(n-m)(\theta-\alpha)} = \pi\left(\delta_{n,m+1} + \delta_{n,m-1}\right). \tag{37}$$

计算完 $\theta$ 积分后，得到

$$n_{e1} = -\frac{e}{m}\frac{\tilde{\Phi}}{V_{\rm th}^2}\int dv_\parallel \int dv_\perp\, v_\perp\, f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega + i0^+} \times\left[2\pi k_z v_\parallel J_n^2(\lambda) + \pi k_\perp v_\perp J_n(\lambda)\Big(J_{n-1}(\lambda) + J_{n+1}(\lambda)\Big)\right]. \tag{38}$$

利用贝塞尔递推关系

$$J_{n-1}(\lambda) + J_{n+1}(\lambda) = \frac{2n}{\lambda}J_n(\lambda), \tag{39}$$

括号中的表达式变为

$$2\pi\left(k_z v_\parallel + n\Omega\right) J_n^2(\lambda),$$

因此

$$n_{e1} = -\frac{e}{m}\frac{\tilde{\Phi}}{V_{\rm th}^2}\,2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int dv_\parallel\int dv_\perp\, v_\perp\, f_0\,\frac{\left(k_z v_\parallel + n\Omega\right) J_n^2(\lambda)}{\omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega + i0^+}. \tag{40}$$

引入

$$\zeta_n \equiv \frac{\omega - k_y V_d - n\Omega}{k_z V_{\rm th}\sqrt{2}}, \qquad t \equiv \frac{v_\parallel}{V_{\rm th}\sqrt{2}}, \tag{41}$$

因此

$$\omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega = k_z V_{\rm th}\sqrt{2}(\zeta_n - t).$$

等离子体色散函数（Fried–Conte）为

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-t^2}}{t-\zeta}\,dt, \tag{42}$$

该 $v_\parallel$ （40）中的积分给出（附录E）

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel\, f_0\,\frac{k_z v_\parallel + n\Omega}{\omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega + i0^+} = -n_0\frac{e^{-v_\perp^2/(2V_{\rm th}^2)}}{2\pi V_{\rm th}^2}\left[1 + \zeta_0 Z(\zeta_n)\right], \tag{43}$$

因此

$$n_{e1} = \frac{e}{m}\frac{n_0\tilde{\Phi}}{V_{\rm th}^4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dv_\perp\, v_\perp\, e^{-v_\perp^2/(2V_{\rm th}^2)}\, J_n^2(\lambda)\Big[1+\zeta_0\, Z(\zeta_n)\Big], \tag{44}$$

其中我们引入了

$$\zeta_0 \equiv \frac{\omega - k_y V_d}{k_z V_{\rm th}\sqrt{2}}, \qquad \zeta_n \equiv \frac{\omega - k_y V_d - n\Omega}{k_z V_{\rm th}\sqrt{2}}, \tag{45}$$

这样，经过 $v_\parallel$ 积分后，只剩下等离子体色散函数 $Z(\zeta_n)$。

接下来，定义磁化参数

$$b \equiv \frac{k_\perp^2 V_{\rm th}^2}{\Omega^2}, \qquad k_\perp \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \tag{46}$$

并使用标准积分（其中 $\lambda = k_\perp v_\perp/\Omega$）

$$\int_0^{\infty} dv_\perp\, v_\perp\, e^{-v_\perp^2/(2V_{\rm th}^2)}\, J_n^2\!\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right) = V_{\rm th}^2\, e^{-b}\, I_n(b), \tag{47}$$

其中 $I_n$ 是第一类修正贝塞尔函数，参见附录 F。引入常用记号

$$\Gamma_n(b) \equiv e^{-b} I_n(b), \qquad \Gamma_{-n}(b) = \Gamma_n(b), \tag{48}$$

式（44）变为

$$n_{e1} = \frac{e n_0 \tilde{\Phi}}{m V_{\rm th}^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma_n(b)\Big[1+\zeta_0\, Z(\zeta_n)\Big]. \tag{49}$$

利用恒等式 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma_n(b) = 1$，可将其写为

$$n_{e1} = \frac{e n_0 \tilde{\Phi}}{m V_{\rm th}^2}\left\{1+\zeta_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma_n(b)\, Z(\zeta_n)\right\}. \tag{50}$$

对于 $n \geq 1$，将 $+n$ 和 $-n$ 谐波配对较为方便。定义

$$\xi_n^{\pm} \equiv \frac{\omega - k_y V_d \pm n\Omega}{k_z V_{\rm th}\sqrt{2}}, \qquad \Rightarrow \qquad \zeta_{-n} = \xi_n^+,\ \ \zeta_n = \xi_n^-, \qquad \zeta_0 = \xi_0 = \frac{\xi_n^+ + \xi_n^-}{2}. \tag{51}$$

Then

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma_n(b)\, Z(\zeta_n) = \Gamma_0(b)\, Z(\xi_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n(b)\Big[Z(\xi_n^+) + Z(\xi_n^-)\Big]. \tag{52}$$

将 (52) 代入 (50) 得

$$n_{e1} = \frac{e n_0 \tilde{\Phi}}{m V_{\rm th}^2}\left\{1+\xi_0\left[\Gamma_0(b)\, Z(\xi_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n(b)\Big(Z(\xi_n^+) + Z(\xi_n^-)\Big)\right]\right\}, \tag{53}$$

即 Ducrocq 等人的式 (9)，其中 $\Gamma_n(b) = e^{-b} I_n(b)$ 和 $b = k_\perp^2 V_{\rm th}^2/\Omega^2$。

# 3 Ducrocq 与 Lafleur形式之间的联系

在 Ducrocq 等人 [3], 的文献中，“完整三维”色散关系采用 泊松形式表示：先计算$n_{e1}$ (其式 (9))，再将其与泊松方程中的冷离子响应结合，得到其色散关系（式 (11)）。在 Lafleur 等人 [1], 的文献中，相同的物理过程采用介电形式$\hat{\epsilon}(\boldsymbol{k},\ \omega)\ = 0$表示，离子项也可选择采用动理学处理。下文将说明，在当前记号和坐标系下，两种形式在代数上等价（其中 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{}\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{V}_d = V_d\hat{}\boldsymbol{y}$，$k_\parallel \equiv k_z$）。

## 3.1 从泊松方程到介电函数

对于静电扰动，泊松方程 $\nabla^2\Phi_1 = -\rho_1/\varepsilon_0$ 在傅里叶空间中给出 e

$$k^2\,\tilde{\Phi} = \frac{e}{\varepsilon_0}\,(n_{i1} - n_{e1})\,, \qquad k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \tag{54}$$

定义物种极化率较为方便:

$$\chi_s \ \equiv\ -\,\frac{q_s\,n_{s1}}{\varepsilon_0\,k^2\,\tilde{\Phi}}, \qquad (q_i = +e,\ q_e = -e), \tag{55}$$

因此，式（54）变为标准的纵向介电条件

$$\hat{\epsilon}(\boldsymbol{k},\omega)\ \equiv\ 1 + \chi_i(\boldsymbol{k},\omega) + \chi_e(\boldsymbol{k},\omega) = 0. \tag{56}$$

引入电子德拜长度（与全文所使用的 $V_{\rm th} = \sqrt{T/m}$ 一致）

$$\lambda_{De}^2 \equiv \frac{\varepsilon_0\,T}{n_0 e^2} = \frac{\varepsilon_0\,m V_{\rm th}^2}{n_0 e^2}. \tag{57}$$

在本推导中，完全动理学磁化电子密度响应已由式（50）（或等价地，由对称化的Ducrocq形式式（53））给出。利用含 $q_e = -e$ 的磁化率定义式（55）以及德拜长度（57），可直接得到

$$\chi_e(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\left[1 + \zeta_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n(b)\,Z(\zeta_n)\right], \tag{58}$$

其中 $\zeta_0$、$\zeta_n$ 在式（45）中定义， $b$ 在式（46）中定义，而 $\Gamma_n$ 在式（48）中定义。如果倾向于采用Ducrocq使用的成对谐波表达形式，则可利用式（58）和式（52）改写其中的求和项。

Lafleur 的附录采用相同的介电结构，但使用了不同的热速度约定，通常记为 $v_{Te} \equiv \sqrt{2}\,V_{\rm th}$。作此对应后，式（45）等价地写为

$$\zeta_n = \frac{\omega - k_y V_d - n\Omega}{k_z v_{Te}}, \qquad \zeta_0 = \frac{\omega - k_y V_d}{k_z v_{Te}}, \tag{59}$$

因此，方程 $\zeta_0$ 中的前因子（58）变为常见的 Lafleur式因子（$\omega - k_y V_d$）/（$k_\parallel v_{Te}$），其中 $k_\parallel \equiv k_z$ 采用我们的坐标表示。因此，Lafleur 介电函数中的 电子部分与 Ducrocq 的电子响应完全相同；差异纯粹是记号上的（ $v_{Te}$ 以及谐波求和是成对还是作为整数求和）。

### 3.2 离子项：冷流体（Ducrocq）与动理学（Lafleur）

Ducrocq 等人 [3] 考虑冷的非磁化离子。由此得到的冷离子磁化率为

$$\chi_i^{(\mathrm{cold})}(\omega) = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \qquad \omega_{pi}^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 M}, \tag{60}$$

其中 $M$ 表示离子质量。将式（58）和（60）代入式（56），可得采用当前符号表示的 Ducrocq 泊松形式色散关系：

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\left[1 + \zeta_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n(b)\, Z(\zeta_n)\right] = 0, \tag{61}$$

或者，两边乘以 $k^2\lambda_{De}^2$后，

$$k^2\lambda_{De}^2\left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\right) + \left[1 + \zeta_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n(b)\, Z(\zeta_n)\right] = 0, \tag{62}$$

其结构 与 Ducrocq 的完整三维关系（其式（11））相同，只要采用相同的（$V_{\mathrm{th}}$、$\zeta_n$、$b$）约定（已由式（45）、（46）固定）。

相比之下，Lafleur 等人 [1] 采用动理学（非磁化）漂移麦克斯韦离子响应，将式（60）替换为标准的离子兰道易感率 [4]

$$\chi_i^{(\mathrm{kin})}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\left[1 + \zeta_i Z(\zeta_i)\right], \qquad \zeta_i \equiv \frac{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_{di}}{k\, v_{Ti}}, \qquad \lambda_{Di}^2 \equiv \frac{\varepsilon_0 T_i}{n_0 e^2}, \tag{63}$$

（其中 $v_{Ti} \equiv \sqrt{2T_i/M}$ 和 $\boldsymbol{V}_{di}$ 为离子漂移）。

等离子体色散函数满足标准导数恒等式

$$Z'(\zeta) \equiv \frac{dZ}{d\zeta} = -2\Big[1 + \zeta Z(\zeta)\Big], \tag{64}$$

因此，引入下式很方便

$$Z_0(\zeta) \equiv 1 + \zeta Z(\zeta) = -\frac{1}{2}Z'(\zeta), \tag{65}$$

并将方程（63）改写为

$$\chi_i^{(\mathrm{kin})}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\, Z_0(\zeta_i) = -\frac{1}{2k^2\lambda_{Di}^2}\, Z'(\zeta_i). \tag{66}$$

利用 $\omega_{pi}^2 = n_0 e^2/(\varepsilon_0 M)$ 和 $v_{Ti}^2 = 2T_i/M$，离子德拜长度变为

$$\lambda_{Di}^2 = \frac{\varepsilon_0 T_i}{n_0 e^2} = \frac{T_i/M}{\omega_{pi}^2} = \frac{v_{Ti}^2}{2\omega_{pi}^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2} = \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2}. \tag{67}$$

因此，Lafleur 型前因子形式为

$$\chi_i^{(\mathrm{kin})}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2}\, Z_0(\zeta_i) = -\frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2}\, Z'(\zeta_i). \tag{68}$$

经过此替换，方程（56）变为 Lafleur 附录中的介电方程。此外，在冷离子极限 $k v_{Ti} \ll |\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_{di}|$（即 $|\zeta_i| \gg 1$）下，$Z_0(\zeta_i) \simeq -1/(2\zeta_i^2)$ 和方程（68）可化简为 $\chi_i^{(\mathrm{kin})} \simeq -\omega_{pi}^2/(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_{di})^2$,；当 $\boldsymbol{V}_{di} = 0$时，该式恢复方程（60）。

# 4 讨论与展望

## 4.1 为什么沿未扰动轨道积分?

沿未扰动粒子轨道进行推迟积分（特征线法），是因为线性化 Vlasov 方程是一阶双曲型方程，其自然解可通过跟踪由零阶洛伦兹力产生的相空间轨迹获得。换言之，方程（7）左侧的线性算子正是与平衡态动力学相关联的流动算子，而扰动 $f_1$ 在时间 $t$ 时，表示沿过去的（推迟）轨道累积的、对所经历波驱动的响应。这一构造明确体现了因果性：边界条件 $f_1(t' \to -\infty) = 0$（或者等价地，$g(s \to \infty) = 0$ 在回溯时间中的条件）直接导出时间积分中的朗道处方 $\Delta \to \Delta + i0^+$，如附录 B所述。

重要的是，沿未扰动轨道积分并非线性化之外的额外近似；它是求解线性问题的精确策略。不过，未扰动轨道表述依赖于两个常被默认的实际条件：(i) 平衡场足够稳定、平滑，使零阶轨迹在响应的记忆时间内有明确定义；(ii) 扰动产生的驱动足够小，因此轨道偏离属于高阶项，即 $\mathcal{O}(\Phi_1)$ 对轨迹的修正不会以相同阶数反馈到 $f_1$ 中。当这些条件不成立时（例如在强湍流平衡态、快速变化的时变背景或大振幅波中），基于未扰动特征线构建的线性响应可能无法再捕捉主导输运机制。

## 4.2 Ducrocq/Lafleur 假设在真实装置中的局限性

Ducrocq 和 Lafleur 的推导采用了共同的理想化框架：均匀交叉场、空间均匀的平衡参数、静电扰动，以及保留 FLR 和回旋谐波效应的无碰撞动理学电子。这些假设对于获得封闭的三维色散关系至关重要，但对于现实中的 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ 装置（如霍尔推力器和潘宁放电）而言可能过于严格。

**非均匀性与几何结构**。实际装置中，密度、温度和电场通常存在很强的梯度，同时还具有磁场曲率和有限通道几何。局部（WKB）近似隐含地假设模态波长相对于平衡尺度长度较短，即 $kL \gg 1$（或 $\lambda \ll L$）。当梯度尺度与波长相当时，额外的漂移项（例如抗磁效应）和剖面变化可能会改变共振结构和不稳定谱。

**电磁效应与边界效应**。当前处理采用静电近似，并假设介质是无限延伸的或实际上具有周期性。在实验中，导电壁、介电边界和鞘层物理可能会显著影响波反射、模态结构和能量平衡。在足够高的频率下，或对于有限-$\beta$ 状态，电磁修正也可能变得不可忽略。此处的“有限-$\beta$”是指等离子体β $\beta \equiv p/(B_0^2/2\mu_0)$ 并非渐近地趋于零，其中 $p$表示等离子体（热）压力，因此磁场扰动和感应效应可能会发挥作用。

**碰撞与源项**。霍尔推力器等离子体存在部分碰撞（电子–中性粒子、电子–离子碰撞），并包含源项和汇项（电离、损失）。碰撞会使共振展宽，改变场与电流之间的有效相位关系，

并与动理学阻尼/驱动机制相互竞争。因此，在某些运行状态下，严格无碰撞的易感率可能会误判增长率和阈值。

**离子闭合与磁化。** Ducrocq 假设离子为冷的非磁化离子，而 Lafleur 通常采用动理学非磁化离子。实际上，离子可能是温热的，并且根据参数不同，可能处于弱磁化状态，或受到有限拉莫尔半径和有限渡越时间效应的影响。此外，离子流通常并不均匀，并且由于加速、电离和边界损失，其分布可能偏离简单的漂移麦克斯韦分布。这些因素会改变离子共振函数，进而影响耦合的电子-离子不稳定性。

**非线性饱和与反常输运。** 最后，色散关系是一种线性理论：它能够预测模频率和增长率，但无法预测最终决定反常输运的非线性饱和水平。在许多装置中，湍流态涉及模耦合、间歇性和相干结构，因此，定量输运预测需要在线性谱之外进行非线性建模。


## 致谢

作者感谢国家自然科学基金委员会的支持（项目批准号：5247120164）。


## 数据可用性

本研究未创建或分析任何新数据。

## 利益冲突

代表所有作者，通讯作者声明不存在利益冲突 st.

# A 线性化

### A.1 零阶：平衡方程

将方程（2）和（6）代入方程（1），并收集与波因子无关的项$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$，得到定常平衡维拉索夫方程：

$$-\frac{e}{m}\Big[-\nabla\Phi_0+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0\Big]\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}f_0=0, \tag{69}$$

或者，等价地，

$$\Big[\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0\Big]\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}f_0=0,\qquad \boldsymbol{E}_0\equiv-\nabla\Phi_0. \tag{70}$$

正是这个方程消除了线性响应中的所有零阶贡献，包括（$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0$）$\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}f_0$：线性方程是在减去平衡关系后得到的。

对于漂移麦克斯韦分布，

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f_0 = -\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}_d}{V_{\mathrm{th}}^2} f_0, \tag{71}$$

因此，方程（70）可写为

$$\Big[\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0\Big]\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}_d) = 0. \tag{72}$$

展开点积后，

$$\boldsymbol{E}_0\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}_d) + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\boldsymbol{V}_d = 0.$$

Us利用 $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\boldsymbol{v}=0$ 和标量三重积恒等式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$，可得 in

$$\boldsymbol{E}_0\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}_d) - (\boldsymbol{V}_d\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{73}$$

在均匀交叉场平衡态中，漂移速度选为 $\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0$ 漂移，

$$\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{V}_d\times\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{0} \qquad (\text{equivalently } \boldsymbol{V}_d = \boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0/B_0^2), \tag{74}$$

因此，对于任意 $\boldsymbol{V}_d\times\boldsymbol{B}_0$，$\cdot\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}$方程（73）恒等成立（此外 $\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{V}_d=0$）。因此，$f_0$ 是在均匀交叉场中的稳态解，而作用于 $f_0$ 的磁项属于零阶平衡，而非线性响应。

## A.2 一阶：线性方程

W现在我们仅保留 $f_1$ 和 $\Phi_1$ 中的一阶项。令 $\psi\equiv\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$。由方程（5）和（6） ，

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\big[f_0 + f_1 e^{i\psi}\big] = -i\omega\, f_1 e^{i\psi}, \tag{75}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} f_e = \nabla_{\boldsymbol{r}}\big[f_1 e^{i\psi}\big] = i\boldsymbol{k}\, f_1 e^{i\psi}, \tag{76}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f_e = \nabla_{\boldsymbol{v}} f_0 + (\nabla_{\boldsymbol{v}} f_1)\, e^{i\psi}, \tag{77}$$

$$-\nabla\Phi = -\nabla(\Phi_0+\Phi_1) = \boldsymbol{E}_0 - i\boldsymbol{k}\,\tilde{\Phi}\, e^{i\psi}. \tag{78}$$

代入方程（1）并舍去二阶项 $\mathcal{O}(\tilde{\Phi} f_1)$（与 $e^{2i\psi}$ 成正比），我们收集所有剩余的一阶项（与 $e^{i\psi}$ 成正比），并除以 $e^{i\psi}$。得到

$$\Big[-i\omega + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} - \frac{e}{m}\Big(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0\Big)\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\Big] f_1 = -\frac{e}{m}\, i\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} f_0\,\tilde{\Phi}. \tag{79}$$

最后，对于 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$，使用标准恒等式

$$-\frac{e}{m}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}} = \Omega\,\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \Omega = \frac{eB_0}{m}, \tag{80}$$

其推导见附录 A.3。利用方程（80），方程（79）变为

$$\left[-i\omega + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \Omega\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\right] f_1 = -\frac{e}{m}\, i\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{v}}\,\tilde{\Phi}. \tag{81}$$

在漂移系中（等效于将均匀 $\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0$ 漂移吸收到多普勒频移中$\omega\to\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_d$），项 $-(e/m)\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}$ 可被消去，从而得到式（7）。

更具体地说，均匀交叉场 $\boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{B}_0$ 使导引中心产生恒定的 $\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{B}_0$ 漂移。转换到漂移系

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}_d t, \qquad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}_d, \tag{82}$$

可得

$$\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{E}_0 + (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}_d) \times \boldsymbol{B}_0 = \underbrace{\left(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{V}_d \times \boldsymbol{B}_0\right)}_{=\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}_0. \tag{83}$$

由于 $\nabla_{\boldsymbol{v}} = \nabla_{\boldsymbol{v}'}$ 在恒定速度平移下，因此算子 $-(e/m)\boldsymbol{E}_0 \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}}$ 可并入漂移系中洛伦兹算子的磁性部分。等价地，平面波相位变换为

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} = e^{i[\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}_d t) - \omega t]} = e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}' - (\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_d)t)},$$

这表明漂移系频率发生多普勒频移，满足

$$\omega \;\to\; \omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{V}_d. \tag{84}$$

## A.3 回旋角恒等式

对于均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0 = B_0 \hat{\boldsymbol{z}}$，在速度空间中引入柱坐标 ，

$$v_x = v_\perp \cos\theta, \qquad v_y = v_\perp \sin\theta, \qquad v_z = v_\parallel, \tag{85}$$

使得 $\theta$ 是垂直（$x$，$y$）平面内的回旋相位角。与磁力相关的洛伦兹算子为

$$\mathcal{L}_B \equiv -\frac{e}{m}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}}. \tag{86}$$

由于 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0 = (v_y B_0,\ -v_x B_0,\ 0)$，因此有

$$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}} = B_0 \left( v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right). \tag{87}$$

另一方面，在固定 $(v_\perp,\ v_\parallel)$ 时，对回旋相位求导得

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial v_x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial v_x} + \frac{\partial v_y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial v_y} = (-v_\perp \sin\theta)\frac{\partial}{\partial v_x} + (v_\perp \cos\theta)\frac{\partial}{\partial v_y} = -v_y \frac{\partial}{\partial v_x} + v_x \frac{\partial}{\partial v_y}. \tag{88}$$

结合前两个关系可得

$$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}} = -B_0 \frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{89}$$

因此

$$-\frac{e}{m}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}} = \frac{eB_0}{m}\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv \Omega \frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \Omega = \frac{eB_0}{m}, \tag{90}$$

这就是方程 (80)。

Physically，方程 (80) 表明 Vlasov算子的磁性部分产生了旋转
在 p 中 垂直速度空间，即电子以回旋频率进行的回旋运动。

## B 因果性处方

对于实数 $\Delta_n$，被积函数 $e^{i\Delta_n s}$ 呈纯振荡状态，并不会随着 $s\to\infty$衰减，因此广义积分 $\int_0^\infty ds\, e^{i\Delta_n s}$ 在通常意义下并不收敛。从物理上讲，解必须满足因果性（推迟条件）：时刻 $t$ 的扰动只能依赖于沿未扰动轨道的过去驱动（$t'\le t$，即 $s=t-t'\ge 0$），这通过时间积分中的朗道处方$\Delta\to\Delta+i0^+$ 来实现。引入一个无穷小阻尼因子 $e^{-\eta s}$（其中 $\eta>0$），先计算收敛积分，最后取极限 $\eta\to 0^+$，即可实现这一推迟边界条件：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ds\, e^{i\Delta_n s} &\equiv \lim_{\eta\to 0^+}\int_0^\infty ds\, e^{i\Delta_n s-\eta s} = \lim_{\eta\to 0^+}\int_0^\infty ds\, e^{-(\eta-i\Delta_n)s}\\ &= \lim_{\eta\to 0^+}\left[\frac{-1}{\eta-i\Delta_n}\,e^{-(\eta-i\Delta_n)s}\right]_0^\infty = \lim_{\eta\to 0^+}\frac{1}{\eta-i\Delta_n} = \frac{i}{\Delta_n+i0^+}.\end{aligned}\tag{91}$$

Here

$$\Delta_n \equiv \omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_d-k_\parallel v_\parallel-n\Omega\tag{92}$$

是多普勒频移回旋共振失谐。符号 $+i0^+$（朗道处方）表示在复平面的上半平面趋近极点 $\Delta_n=0$，这是与因果性一致的解析延拓。

## C 麦克斯韦分布梯度

对于回旋对称（即与回旋相位 $\theta$ 无关）的漂移系麦克斯韦平衡 $f_0=f_0$（$v_\perp$,$v_\parallel$），速度空间梯度可用柱坐标（$v_\perp,\theta$,$v_\parallel$）表示。在这些坐标中，

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{v_\perp}\frac{\partial}{\partial v_\perp}+\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\boldsymbol{e}}_\parallel\frac{\partial}{\partial v_\parallel},\tag{93}$$

并且由于 $f_0$ 是回旋对称的，因此 $\partial f_0/\partial\theta=0$。将波矢分解为平行和垂直分量，

$$\boldsymbol{k}=k_\parallel\hat{\boldsymbol{z}}+\boldsymbol{k}_\perp,\qquad \boldsymbol{k}_\perp=k_\perp(\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}),\tag{94}$$

并注意，垂直单位矢量为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{v_\perp}=\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}.\tag{95}$$

因此，

$$\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}f_0 = k_\parallel\frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel}+\boldsymbol{k}_\perp\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_{v_\perp}\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} = \left(k_\parallel\frac{\partial}{\partial v_\parallel}+k_\perp\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial v_\perp}\right)f_0,\tag{96}$$

其中我们使用了 $\boldsymbol{k}_\perp\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_{v_\perp}=k_\perp(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)=k_\perp\cos(\theta-\alpha)$。

对于漂移系中的漂移麦克斯韦分布，

$$f_0(v_\perp,v_\parallel)=n_0\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{v_\perp^2+v_\parallel^2}{2V_{\rm th}^2}\right],\qquad V_{\rm th}=\sqrt{\frac{T}{m}},\tag{97}$$

可得到简单的导数

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel}=-\frac{v_\parallel}{V_{\rm th}^2}f_0,\qquad \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp}=-\frac{v_\perp}{V_{\rm th}^2}f_0.\tag{98}$$

代入前一个表达式可得

$$\boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}f_0=-\frac{f_0}{V_{\mathrm{th}}^2}\left(k_{\parallel}v_{\parallel}+k_{\perp}v_{\perp}\cos(\theta-\alpha)\right), \tag{99}$$

即式（35）。

# D 回旋相位积分

在计算速度积分时，会反复遇到回旋相位因子 $e^{i(n-m)(\theta-\alpha)}$，其中 $\theta$ 是粒子回旋相位， $\alpha$ 是垂直波矢 $\boldsymbol{k}_{\perp}=k_{\perp}(\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}})$的极角。下面用到两个恒等式：

$$\int_0^{2\pi}d\theta\;e^{i(n-m)(\theta-\alpha)}=2\pi\,\delta_{nm}, \tag{100}$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\;\cos(\theta-\alpha)\,e^{i(n-m)(\theta-\alpha)}=\pi\left(\delta_{n,m+1}+\delta_{n,m-1}\right). \tag{101}$$

它们可由傅里叶正交性直接得到。

**式（(100)）的证明**。令 $\varphi\equiv\theta-\alpha$。由于 $\alpha$ 是与 $\theta$无关的常数， $d\varphi=d\theta$ 而将积分区间平移一个常数不会改变积分值：

$$\int_0^{2\pi}d\theta\;e^{i(n-m)(\theta-\alpha)}=\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha}d\varphi\;e^{i(n-m)\varphi}=\int_0^{2\pi}d\varphi\;e^{i(n-m)\varphi}. \tag{102}$$

对于整数 $n$， $m$，该积分为

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\;e^{i(n-m)\varphi}=\begin{cases}2\pi, & n=m,\\ \dfrac{e^{i(n-m)2\pi}-1}{i(n-m)}=0, & n\neq m,\end{cases} \tag{103}$$

因为 $e^{i(n-m)2\pi}=1$。这正是 $2\pi\delta_{nm}$。

**式的证明** (101)。 利用 $\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)$ 并采用相同的变量替换 $\varphi=\theta-\alpha$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}d\theta\;\cos(\theta-\alpha)\,e^{i(n-m)(\theta-\alpha)}&=\int_0^{2\pi}d\varphi\;\cos\varphi\,e^{i(n-m)\varphi}\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\;\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)e^{i(n-m)\varphi}\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\;\left(e^{i(n-m+1)\varphi}+e^{i(n-m-1)\varphi}\right).\end{aligned} \tag{104}$$

将式（100）应用于每个指数项，可得

$$\frac{1}{2}\left[2\pi\,\delta_{n,m-1}+2\pi\,\delta_{n,m+1}\right]=\pi\left(\delta_{n,m+1}+\delta_{n,m-1}\right), \tag{105}$$

由此证明式（101）。

方程（100）表示回旋相位角中傅里叶谐波的正交性：只有“对角”项 $n = m$ 在 $\theta$平均中保留。方程（101）表明，乘以 $\cos(\theta - \alpha)$ 会耦合相邻谐波，使指标移动 $\pm 1$；这就是 $n \leftrightarrow n \pm 1$ 耦合的由来，之后它会化简为贝塞尔函数递推关系。

## 平行电场积分

我们推导 $v_\parallel$ 方程（43）中所用的积分。待求的量为

$$\mathcal{I}_n(v_\perp) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \, f_0(v_\perp, v_\parallel) \, \frac{k_z v_\parallel + n\Omega}{\omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega + i0^+}. \tag{106}$$

对于漂移系麦克斯韦分布，

$$f_0(v_\perp, v_\parallel) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{v_\perp^2 + v_\parallel^2}{2V_{\rm th}^2}\right] = \frac{n_0}{(2\pi)^{3/2} V_{\rm th}^3} \, e^{-v_\perp^2/(2V_{\rm th}^2)} \, e^{-v_\parallel^2/(2V_{\rm th}^2)}. \tag{107}$$

因此，因子 $e^{-v_\perp^2/(2V^2\,次)}$ 可以移到 $v_\parallel$ 积分号外。

引入无量纲变量

$$t \equiv \frac{v_\parallel}{\sqrt{2}\, V_{\rm th}}, \qquad \zeta_n \equiv \frac{\omega - k_y V_d - n\Omega}{\sqrt{2}\, k_z V_{\rm th}}, \qquad \zeta_0 \equiv \frac{\omega - k_y V_d}{\sqrt{2}\, k_z V_{\rm th}}, \tag{108}$$

因此

$$\omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega + i0^+ = \sqrt{2}\, k_z V_{\rm th} \, (\zeta_n - t) + i0^+. \tag{109}$$

Fried–Conte 等离子体色散函数定义为

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \zeta} \, dt, \tag{110}$$

其中默认采用由 $+i0^+$ 指定的朗道处方，即取极限 $\lim_{\epsilon \to 0^+} (t - \zeta + i\epsilon)^{-1}$，这确定了如何绕过极点，并得到标准分解：柯西主值部分与 $\delta$-函数（共振）贡献。

利用 $A \equiv \omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega$，我们注意到

$$k_z v_\parallel + n\Omega = (\omega - k_y V_d) - A, \tag{111}$$

由此立即得到恒等式

$$\frac{k_z v_\parallel + n\Omega}{\omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega + i0^+} = -1 + \frac{\omega - k_y V_d}{\omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega + i0^+}. \tag{112}$$

T这将 $\mathcal{I}_n$ 分解为一个初等麦克斯韦矩和一个色散（朗道）贡献 .

将式（112）代入式（106），并利用式（107），可得

$$\mathcal{I}_n(v_\perp) = \frac{n_0}{(2\pi)^{3/2} V_{\rm th}^3} \, e^{-v_\perp^2/(2V_{\rm th}^2)} \left[ -\int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \, e^{-v_\parallel^2/(2V_{\rm th}^2)} + (\omega - k_y V_d) \, \mathcal{J}_n \right], \tag{113}$$

其中

$$\mathcal{J}_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \, \frac{e^{-v_\parallel^2/(2V_{\rm th}^2)}}{\omega - k_y V_d - k_z v_\parallel - n\Omega + i0^+}. \tag{114}$$

第一个积分是初等积分，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \, e^{-v_\parallel^2/(2V_{\rm th}^2)} = \sqrt{2\pi}\, V_{\rm th}. \tag{115}$$

对于 $\mathcal{J}_n$，作变量代换 $v_\parallel = \sqrt{2}V_{\rm th}t$ 并利用方程（108）–（109:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_n &= \sqrt{2}V_{\rm th}\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2}\,k_z V_{\rm th}(\zeta_n - t) + i0^+} = \frac{1}{k_z}\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \frac{e^{-t^2}}{\zeta_n - t + i0^+} \\ &= -\frac{1}{k_z}\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \frac{e^{-t^2}}{t - \zeta_n - i0^+} = -\frac{\sqrt{\pi}}{k_z}\, Z(\zeta_n).\end{aligned} \tag{116}$$

将方程（115）和（116）代入方程（113），并利用 $\omega - k_y V_d = \sqrt{2}\,k_z V_{\rm th}\,\bar{\zeta}_0$，最终得到

$$\mathcal{I}_n(v_\perp) = -\frac{n_0}{2\pi V_{\rm th}^2}\, e^{-v_\perp^2/(2V_{\rm th}^2)}\Big[1 + \zeta_0 Z(\zeta_n)\Big]. \tag{117}$$

方程（117）就是方程（43）中引用的结果。

# F 垂直积分

我们对方程（47）中使用的标准积分进行论证，

$$\int_0^{\infty} dv_\perp \, v_\perp \, e^{-v_\perp^2/(2V_{\rm th}^2)} \, J_n^2\!\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right) = V_{\rm th}^2\, e^{-b}\, I_n(b), \qquad b \equiv \frac{k_\perp^2 V_{\rm th}^2}{\Omega^2}, \tag{118}$$

其中 $I_n$ 是第一类修正贝塞尔函数。

引入无量纲变量 $x \equiv v_\perp/V_{\rm th}$ 和 $a \equiv k_\perp V_{\rm th}/\Omega$，使得 $b = a^2$ 和 $dv_\perp\, v_\perp = V^2$阶 $x\, dx$。则方程（118）变为

$$\int_0^{\infty} dx \; x\, e^{-x^2/2}\, J_n^2(ax) = e^{-a^2}\, I_n(a^2). \tag{119}$$

A 标准恒等式（通常称为韦伯–索宁公式）指出，对于 $\Re(p) > 0$ ，

$$\int_0^{\infty} dx \; x\, e^{-px^2}\, J_n(\alpha x)\, J_n(\beta x) = \frac{1}{2p}\exp\!\left[-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4p}\right] I_n\!\left(\frac{\alpha\beta}{2p}\right). \tag{120}$$

令 $\alpha = \beta = a$，并令 $p = \frac{1}{2}$，得到

$$\int_0^{\infty} dx \; x\, e^{-x^2/2}\, J_n^2(ax) = \exp(-a^2)\, I_n(a^2), \tag{121}$$

这正是方程（119）。

返回 $a = k_\perp V_{\rm th}/\Omega$ 并 $b = a^2$ 得到式（118），即:

$$\int_0^{\infty} dv_\perp \, v_\perp \, e^{-v_\perp^2/(2V_{\rm th}^2)} \, J_n^2\!\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right) = V_{\rm th}^2\, e^{-b}\, I_n(b), \qquad b = \frac{k_\perp^2 V_{\rm th}^2}{\Omega^2}.$$

# 参考文献

[1]T. Lafleur、S. D. Baalrud 和 P. Chabert，《霍尔效应推力器中的反常电子输运理论：II. 动理学模型》，《等离子体物理学》 **23**，053503（2016年）。[2]G. Fubiani、Y. Camenen、F. Gaboriau、L. Garrigues、M. Papahn Zadeh、A. Smolyakov 和 M. Tyushev，《径向电场对潘宁放电中等离子体不稳定性的影响：来自三维粒子模拟模型的洞见》，《等离子体物理学》 **32**，080704（2025年）。[3]A. Ducrocq、J. C. Adam、A. H´eron 和 G. Laval，《霍尔推力器横向电场构型中的高频电子漂移不稳定性》，《等离子体物理学》 **13**，102111（2006年）。[4]N. A. Krall 和 A. W. Trivelpiece，《等离子体物理学原理》《等离子体物理学原理》（McGraw–Hill，纽约，1973年）。