arXiv:2601.09060v1 [math.CT] 14 Jan 2026

维特群的结构与最小扩张猜想

Theo Johnson-Freyd、Victor Ostrik 和 Zhiqiang Yu

摘要

设 $\mathcal{E}=\mathrm{Rep}(G)$ 是一个 Tannakian 融合范畴。对于一个 $\mathcal{C}$ 上的辫融合范畴 $\mathcal{E}$，我们给出了刻画维特关系 $[\mathcal{C}]=[\mathcal{E}]$ 的充要条件。然后我们证明，维特群 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ 自然地同构于维特群 $\mathcal{W}:=\mathcal{W}(\mathrm{Vec})$ 与群 $\mathrm{H}^4(G,\mathrm{k}^\times)$ 的直和。因此，对于任意一个 $\mathcal{C}$ 上的非退化融合范畴 $\mathcal{E}$，存在正整数 n（例如 $n=|G|$），使得 $\mathcal{C}^{\boxtimes n}_{\mathcal{E}}$ 存在一个极小扩张。

关键词： 极小扩张；Tannakian 融合范畴；维特群

1 引言

设 k 是一个零特征代数闭域。本文研究 k 上的编织融合范畴，参见例如 [11]。目前尚无法对这类范畴进行完整分类，因此可以在某种适当的等价关系下研究它们。一种这样的等价关系（定义在非退化 编织融合范畴的一个子集上）是 [5]引入并研究的*Witt* 等价 。这些等价类构成了 $\mathcal{W}$*Witt* 群 。

回顾一下，编织融合范畴是非退化的，当且仅当其*M¨uger* 中心 $\mathcal{C}'$ 是平凡的，即 $\mathcal{C}'=\mathrm{Vec}$。一般而言， $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$的一个对称融合子范畴 。因此，对于给定的对称融合范畴 $\mathcal{E}$，可以研究关于 $\mathcal{E}$ 的非退化编织融合范畴，也就是说，研究配备了一个等价（对称融合范畴之间的等价） $\mathcal{E}\simeq\mathcal{C}'$的编织融合范畴。特别地， [6] 引入了相对 *Witt* 群 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$。一个重要的特殊情形是$\mathcal{E}=\mathrm{sVec}$；在这种情形下，群 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$称为超维特群，记作$s\mathcal{W}$。 [6] 证明了群$s\mathcal{W}$ 的结构比 $\mathcal{W}$ 更简单，这有助于借助典范同态 $\mathcal{W}\to s\mathcal{W}$研究群 $\mathcal{W}$。

本文的主要目标是更好地理解一般 $\mathcal{E}$的群 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$。Deligne 的一个著名定理 [8] 表明，对称编织融合范畴分为两类：*Tannakian* 和超坦纳。假设 $\mathcal{E}$ 是 Tannakian 的，即存在一个有限群 G 以及对称融合范畴的一个等价 $\mathcal{E}\simeq\mathrm{Rep}(G)$。回顾一下，根据这一假设，有限群 G 在内自同构意义下是唯一确定的；特别地，上同调群 $\mathrm{H}^i(G,\mathrm{k}^\times)$ 由范畴 $\mathcal{E}$ 规范地确定，因为G 的内自同构在上同调上作用平凡。下面是我们的主要结果（见定理 5.11）：

定理 1.1. 令 $\mathcal{E} \simeq \mathrm{Rep}(G)$。存在阿贝尔群的典范同构 $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{W} \oplus \mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times)$。

注 1.2。这尤其证明了 [18], 的猜想 4.3，该猜想简要概述了一个证明，但该证明依赖于关于尚未发展完善的高阶 Morita 理论的若干假设。此外，T.D´ecoppet 在 [7, 命题 5.3.9] 中利用融合 2-范畴理论构造了一个集合双射 $\mathcal{W}(\mathcal{E}) = \mathcal{W} \times H^4(G, \mathrm{k}^\times)$，它极有可能与我们的同构一致。

定理 1.1 的证明如下：首先，我们定义典范同态 $\phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{W}(\mathcal{E}) \to \mathcal{W}$ 及其典范分裂，见第 3 节。然后，我们利用融合范畴 [13] 的分次扩张理论来构造同构 $\mathrm{Ker}(\phi_{\mathcal{E}}) = \mathrm{H}^4(G, \mathrm{k}^\times)$。

注 1.3. 定理 1.1 给出了群 $\mathrm{H}^4(G, \mathrm{k}^\times)$ 关于范畴$\mathcal{E}$的一种解释。对于 $i \leq 3$，群 $\mathrm{H}^i(G, \mathrm{k}^\times)$ 也有类似的解释，即：

$\mathrm{H}^1(G, \mathrm{k}^\times) =$ $\mathcal{E}$ 中可逆对象的同构类所成的群（因为 $\mathcal{E}$ 的可逆对象是 G 的一维表示，而这些表示与 $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{k}^\times) = H^1(G, \mathrm{k}^\times) =$ 之间存在双射）；

$\mathrm{H}^2(G, \mathrm{k}^\times) =$ 个关于 $\mathcal{E}$ 上可逆模范畴等价类的群，见 [2, 4];

$\mathrm{H}^3(G, \mathrm{k}^\times) =$ 个关于 $\mathcal{E}$ 的最小模扩张等价类的群，见 [19]。

注意，上述解释对于 $\mathcal{E}$（不一定是 Tannakian）也是有意义的，并且给出了超坦纳范畴 $\mathcal{E}$ 的有趣不变量（目前还不太清楚，与 H^4 对应的超坦纳范畴 $\mathcal{E}$ 的不变量应当是什么；暂时可以取自然同态 $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \to s\mathcal{W}$ 的核，见第 6 节）。如果能为 $\mathrm{H}^i(G, \mathrm{k}^\times)$（其中 $i \geq 5$）找到类似的解释，将会很有意义。

设 $\mathcal{C}$ 是一个在 $\mathcal{E}$ 上的非退化带编织融合范畴。在 [21, 猜想 5.2] 中，M. M¨uger 猜想存在一个非退化融合范畴 $\mathcal{D}$，使得 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ 且 $\mathcal{C}'_{\mathcal{D}} = \mathcal{E}$，其中 $\mathcal{C}'_{\mathcal{D}}$ 是 $\mathcal{D}$ 中 $\mathcal{C}$ 的中心化子 。这被称为最小扩张猜想。Drinfeld 在一项未发表的工作中，为某些 Tannakian 范畴 $\mathcal{E}$ 构造了该猜想的反例。另一方面，已知最小扩张猜想在某些情形下成立：情形 $\mathcal{E} = \mathrm{Rep}(G)$，其中 $\mathrm{H}^4(G, \mathrm{k}^\times) = 0$ 是 [13] 的推论；以及情形$\mathcal{E} = s\mathrm{Vec}$，这是 [18] 的主要结果。

在 [23]和 [18], 中，关于对称融合范畴 $\mathcal{E}$ 的最小扩张猜想 $\mathcal{W}$ 与某些维特群之间群同态的满射性 $\mathcal{W}$联系起来（$\mathcal{E}$）。具体而言， [23] 证明了：对于 $\mathcal{E}$ 上的辫融合范畴 $\mathcal{C}$，最小扩张猜想成立，当且仅当类 $[\mathcal{C}] \in \mathcal{W}(\mathcal{E})$ 属于自然同态$S_{\mathcal{E}} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}(\mathcal{E})$ 的像，其中 $S_{\mathcal{E}} : [\mathcal{D}] \mapsto [\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{D}]$ 对任意 $[\mathcal{D}] \in \mathcal{W}$均成立。在 [23] 中，这一结果被用于证明，极小扩张猜想对轻微退化弱群论辫融合范畴成立。随后， [18] 的结果取代了这一结论，其中证明了极小扩张猜想对所有轻微退化辫融合范畴均成立。关于超 Tannakian 情形下极小扩张猜想的更多结果，读者可参见 [17] 。

作为定理 1.1 的推论，我们得到以下结果（见推论 5.10 和 5.13）：

推论 1.4. *(i)* 当且仅当 $\mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times) = 0$. 对于 *Tannakian* 范畴 $\mathcal{E} = \mathrm{Rep}(G)$ 上的所有编织融合范畴，最小扩张猜想成立。

(ii) 对于任意建立在 *Tannakian* 范畴 $\mathcal{E}$ 之上的辫融合范畴 $\mathcal{C}$，都存在一个正整数 n，使得 $\mathcal{C}^{\boxtimes_{\mathcal{E}}^n}$ 存在极小扩张。事实上，我们可以取 $n = |G|$。

满足 $H^4(G,k^\times)=0$ 的有限群包括所有西罗子群均为循环群的有限群，以及 Mathieu 群 M_{23} [20]。

本文结构安排如下。第 2 节回顾关于编织融合范畴和维特群的一些常用结果。第 3 节给出维特等价类 $[\mathcal{E}]\in\mathcal{W}(\mathcal{E})$ 中元素的刻画。第 4 节介绍 G-准幺半范畴这一实用的技术概念，并在第 5 节运用它证明我们的主要结果。最后，第 6 节讨论超坦纳克情形的若干方面。

致谢： </style}本项目的部分工作是在我们中的一位（VO）访问扬州大学期间完成的；我们感谢扬州大学的热情款待。我们也感谢 Thibault D´ecoppet、Vladimir Drinfeld 和 Dmitri Nikshych 与我们进行了非常有益的交流。ZY 受到国家自然科学基金委员会（项目编号：12571041）和扬州大学青蓝工程的资助。TJF 受到加拿大自然科学与工程研究委员会（项目编号：RGPIN-2021-02424）以及全球范畴对称性 Simons 合作项目（项目编号：SFI-MPS-GCS-00008528-16）的资助。

2 预备知识

本文假设读者熟悉融合范畴理论的基本概念（例如融合范畴和辫融合范畴的概念），参见例如 [12]。注意，辫融合范畴的任何融合子范畴都自动带有辫结构。我们特别会用到 M¨uger 的中心化子理论 [21], [12, 8.20]。因此，对于辫融合范畴 $\mathcal{C}$ 的融合子范畴 $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{D}'_{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的全子范畴，该子范畴由满足 $c_{X,Y}\circ c_{Y,X}=\mathrm{Id}_{Y\otimes X}$ 的对象 $Y\in\mathcal{C}$ 组成，其中对所有 $X\in\mathcal{D}$ 都成立（这里 $c_{X,Y}\colon X\otimes Y\to Y\otimes X$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的辫结构）。当范畴 $\mathcal{C}$ 的语境明确时，我们也将 $\mathcal{D}'$ 用作 $\mathcal{D}'_{\mathcal{C}}$ 的记号。子范畴 $\mathcal{D}'$ 也是 $\mathcal{C}$ 的融合子范畴。特别地，我们有子范畴 $\mathcal{C}'=\mathcal{C}'_{\mathcal{C}}$，称为 $\mathcal{C}$ 的 M¨uger 中心；它总是一个对称融合范畴。非退化融合范畴是指满足 $\mathcal{C}'$ 平凡（即仅由单位对象的直和构成）的辫融合范畴 $\mathcal{C}$。例如，融合范畴 $\mathcal{A}$ 的 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 是非退化的。若 $\mathcal{C}$ 非退化，则具有双重中心化子性质：对于任意融合子范畴 $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}$，都有 $(\mathcal{D}')'=\mathcal{D}$。

设 $\mathcal{E}$ 是一个对称融合范畴。沿用 [6] 的说法，如果一个辫融合范畴 $\mathcal{C}$ 配备了一个等价 $\mathcal{C}'\cong\mathcal{E}$，则称其为**关于 $\mathcal{E}$ 非退化**。一个重要的例子是融合范畴 $\mathcal{A}$ 关于 $\mathcal{E}$ 的相对 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{A},\mathcal{E})$（这意味着 $\mathcal{E}$ 等价于 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 的一个融合子范畴，且该子范畴在遗忘函子 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})\to\mathcal{A}$ 下忠实地满射到 $\mathcal{A}$，并且 $\mathcal{Z}(\mathcal{A},\mathcal{E}):=\mathcal{E}'_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}$）。对于关于 $\mathcal{E}$ 非退化的融合范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，有一个重要概念，即关于 $\mathcal{E}$ 的 ***Deligne*** 张量积 $\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{D}$；它也是关于 $\mathcal{E}$ 的非退化融合范畴，见 [6, 2.5]。具体而言，$\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{D}:=(\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D})_A$ 是右 A-模的范畴，其中

$$A=\oplus_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{E})}X\boxtimes X^*$$

是 $\mathcal{E}\boxtimes\mathcal{E}$ 中的典范连通 ´etale 代数，使得 $(\mathcal{E}\boxtimes\mathcal{E})_A\cong\mathcal{E}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{E}\cong\mathcal{E}$，见 [6, 注 2.8]。

回顾一下，两个 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 上的非退化融合范畴 $\mathcal{E}$，若对某个 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ 上的融合范畴，存在等价关系 $\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{Z}(\mathcal{A}_1,\mathcal{E})\cong\mathcal{D}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{Z}(\mathcal{A}_2,\mathcal{E})$，则称它们 Witt 等价

$\mathcal{E}$，参见定义 5.1]。这是一个等价关系，融合范畴 $\mathcal{C}$ 的等价类记为 $[\mathcal{C}]$。运算 $[\mathcal{C}][\mathcal{D}] := [\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{D}]$ 定义良好，并使等价类的集合 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ 构成一个阿贝尔群，称为相对 *Witt* 群；这是本文的主要研究对象。

设G是作用于融合范畴$\mathcal{A}$上的有限群（这意味着存在一个 2-群同态$G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$）。于是定义等变化 $\mathcal{A}^G$ 为范畴不动点所成的范畴。它是一个以 $\mathcal{E}=\mathrm{Rep}(G)$为底的融合范畴，见 [11, 4.2.2]。反过来，给定一个以 $\mathcal{E}=\mathrm{Rep}(G)$为底的融合范畴 $\mathcal{B}$，可以通过一种构造得到去等变化，从而得到一个带有G作用的融合范畴 $\mathcal{B}_G$，见 [11, 第 4.2 节4]。这两种构造互为逆，见 [11, 定理 4.18]。我们还将使用这些构造的辫化版本，见 [11, 第 4 节2]。

3 群同态 $\phi_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{W}(\mathcal{E}) \to \mathcal{W}$

正如 [6, 备注 5.8], 中已经指出的，映射 $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{W}(\mathcal{E})$是函子性的：对称融合范畴之间的任意函子$\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 都通过基变换确定一个阿贝尔群同态 $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \to \mathcal{W}(\mathcal{F})$。这个函子的定义域最自然地是由对称融合范畴、对称线性函子和对称自然变换组成的 2-范畴（由于对偶的存在，对称自然变换自动是自然同构）；但由于陪域只是阿贝尔群构成的 1-范畴，因此也可以将定义域视为由对称融合范畴以及它们之间对称线性函子的同构类构成的 1-范畴。

例如，唯一的对称函子 $\mathrm{Vec} \to \mathcal{E}$ selects 对任意 $\mathcal{E}$ 都选出一个典范同态 $S_{\mathcal{E}} = \mathcal{W}(\mathrm{Vec} \to \mathcal{E})\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}(\mathcal{E})$。假设 $\mathcal{E} = \mathrm{Rep}(G)$ 是 Tannakian。选取一个纤维函子 $\mathcal{E} \to \mathrm{Vec}$ 会选出一个截面-收缩对 $\mathrm{Vec} \to \mathcal{E} \to \mathrm{Vec}$（意即复合 $\mathrm{Vec} \to \mathrm{Vec}$ 是恒等映射），因此诱导映射 $\phi_{\mathcal{E}} = \mathcal{W}(\mathcal{E} \to \mathrm{Vec}) : \mathcal{W}(\mathcal{E}) \to \mathcal{W}$ 与S_ϕ 构成阿贝尔群的截面-收缩对。阿贝尔群的截面-收缩对恰好等同于直和分解，因此：

定理 3.1([23])**.** 我们有阿贝尔群的一个分裂正合列

$$1 \to Ker(\phi_{\mathcal{E}}) \xrightarrow{i} \mathcal{W}(\mathcal{E}) \underset{S_{\mathcal{E}}}{\overset{\phi_{\mathcal{E}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{W} \to 1.$$

特别地，$\mathcal{W}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{W} \oplus$ 核$(\phi_{\mathcal{E}})$。 □

注 3.2. 具体而言，同态 $\phi_{\mathcal{E}}$ 和 $S_{\mathcal{E}}$ 由下式给出

$$\phi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}]) = [\mathcal{C}_G], \qquad S_{\mathcal{E}}([\mathcal{D}]) = [\mathcal{E}\boxtimes\mathcal{D}],$$

其中 $[\mathcal{C}] \in \mathcal{W}(\mathcal{E})$ 和 $[\mathcal{D}] \in \mathcal{W}$，且 $\mathcal{E} = \mathrm{Rep}(G)$。

对于任意对称融合 $\mathcal{E}$，文献 [23, 定理 3.1.3、注 3.1.4] 证明了，群同态$S_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}(\mathcal{E})$ 是满射，当且仅当关于 $\mathcal{E}$上的非退化融合范畴的最小扩张猜想成立。此外，若 $\mathcal{C}$ 存在一个极小扩张 $\mathcal{D}$，则 $[\mathcal{C}] = [\mathcal{E}\boxtimes\mathcal{D}]$。然而，Drinfeld 的反例 [10] 表明，对于一般的 Tannakian $\mathcal{E}$，$S_{\mathcal{E}}$ 并非满射。

推论 3.3. 映射 $S_{\mathcal{E}}$ 是满射（等价地，关于 $\mathcal{E}$上的所有非退化 *braided* 融合范畴的最小扩张猜想成立），当且仅当 $Ker(\phi_{\mathcal{E}}) = 0$。

一般而言，Ker($\phi_{\mathcal{E}}$) 并非平凡的 [10], ，因此了解 Ker($\phi_{\mathcal{E}}$) 的结构至关重要。我们从以下引理开始，它将用于刻画 Ker($\phi_{\mathcal{E}}$) 的元素。

引理 3.4. 设 G 是一个有限群，$\mathcal{C}$ 是一个带有 G-作用的辫融合范畴。若 $A \in \mathcal{C}$ 是一个 G-等变交换代数，则存在一个良定义的 G 在 $\mathcal{C}_A$ 上的作用（作为幺半范畴）。

证明。只需证明 $(g(X),\ m^{g(X)}) \in \mathcal{C}_A$，其中 $m_X : X \otimes A \to X$ 是 X 的右 A-模结构，而态射 $m^{g(X)}$ 定义如下：

$$m_{g(X)} := g(m_X) \circ g(\mathrm{id}_X \otimes \eta_{g^{-1}}) \circ \mu_g(X, g^{-1}(A)) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes (\nu^A_{g,g^{-1}})^{-1}.$$

下文中，我们用 g 表示由同态 ρ: G $\to$ Aut$^{\mathrm{br}}_{\otimes}(\mathcal{Z}(\mathcal{B}))$ 确定的张量函子；记 $\nu_{g,h}$: g $\circ$h $\xrightarrow{\sim}$ gh 为使 ρ 成为 2-群态射的同构，并记 μ_g(X,Y) : g(X) $\otimes$g(Y) $\xrightarrow{\sim}$g(X $\otimes$Y) 为函子 g 的幺半群性。此外，我们用 η_g : g(A) $\xrightarrow{\sim}$A 表示 A 的 G-等变性。最后，我们将 (A,m$_A$,u) 记作 A 的代数结构，即

$$m_A \circ \mathrm{id}_A \otimes m_A = m_A \circ m_A \otimes \mathrm{id}_A, m_A \circ \mathrm{id}_A \otimes u = \mathrm{id}_A = m_A \circ u \otimes \mathrm{id}_A,$$

并且我们省略融合范畴 $\mathcal{C}$ 的结合子和单位约束。

因此，我们需要证明以下等式：

$$m_{g(X)} \circ \mathrm{id}_X \otimes u = \mathrm{id}_{g(X)}, \qquad m_{g(X)} \circ m_{g(X)} \otimes \mathrm{id}_A = m_{g(X)} \circ m_A. \tag{1}$$

对于上述等式中的第一个，根据$m^{g(X)}$的定义，

$$\begin{aligned}
&m_{g(X)} \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes u \\
&= g(m_X) \circ g(\mathrm{id}_X \otimes \eta_{g^{-1}}(A)) \circ \mu(X, g^{-1}(A)) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes (\nu^A_{g,g^{-1}})^{-1} \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes u \\
&= g(m_X) \circ g(\mathrm{id}_X \otimes \eta_{g^{-1}}(A)) \circ \mu(X, g^{-1}(A)) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes g(g^{-1}(u)) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes (\nu^{\mathbf{1}}_{g,g^{-1}})^{-1} \\
&= g(m_X) \circ g(\mathrm{id}_X \otimes \eta_{g^{-1}}(A)) \circ g(\mathrm{id}_X \otimes g^{-1}(u)) \mu(X, g^{-1}(\mathbf{1})) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes (\nu^{\mathbf{1}}_{g,g^{-1}})^{-1} \\
&= g(m_X \circ \mathrm{id}_X \otimes u \circ \mathrm{id}_X \otimes \eta_{g^{-1}}(\mathbf{1})) \mu(X, g^{-1}(\mathbf{1})) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes (\nu^{\mathbf{1}}_{g,g^{-1}})^{-1} \\
&= g(\mathrm{id}_X \otimes \eta_{g^{-1}}(\mathbf{1})) \mu(X, g^{-1}(\mathbf{1})) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes (\nu^{\mathbf{1}}_{g,g^{-1}})^{-1} \\
&= \mu_g(X, \mathbf{1}) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes g(\eta_{g^{-1}}(\mathbf{1})) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes (\nu^{\mathbf{1}}_{g,g^{-1}})^{-1} \\
&= \mu_g(X, \mathbf{1}) \circ \mathrm{id}_{g(X)} \otimes \eta_g^{-1} = \mathrm{id}_{g(X)}.
\end{aligned}$$

这里，第二个等式由$\nu_{g,g^{-1}}$的自然性得出，第三个和第六个等式由 μ_g的自然性得出，第四个等式由$\eta_{g^{-1}}$的自然性得出，而第七个等式则是因为简单对象$\mathbf{1}$ 是一个G-等变对象。第二个等式的证明类似。 □

定理 3.5. 设 $\mathcal{C}$ 是 *Tannakian* 融合范畴 $\mathcal{E}$ =Rep(G)上的非退化融合范畴。则以下条件等价：

(1). $[\mathcal{C}] = [\mathcal{E}]$.

(2). $\mathcal{C} \cong \mathcal{Z}(\mathcal{A},\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{E}$上的融合范畴。*(3).* $\mathcal{C}$ 包含一个连通 *étale* 代数 A，使得 FP 维数$(\mathcal{C})$ =FP 维数$(\mathcal{E})$FP 维数$(A)^2$，且 $A \cap \mathcal{E} = \mathbf{1}$。*(4).* $\mathcal{C}_G \cong \mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 包含一个 G-等变拉格朗日代数 A。

证明。 根据 Witt 等价的定义，前两个条件等价。我们只需证明它们分别与第三个和第四个条件等价。

(3) $\Rightarrow$ (1)。假设 $\mathcal{C}$ 包含这样一个连通的 ´étale 代数 A。那么， [6, 推论 4.6] 表明，作为辫融合范畴， $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{E}} (\mathcal{C}_A^0)^{\mathrm{rev}} \cong \mathcal{Z}(\mathcal{C}_A,\mathcal{E})$。注意， $\mathcal{C}_A^0$ 也是 $\mathcal{E}$ 上的非退化融合范畴，且 $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_A^0) = \mathrm{FPdim}_{(\mathcal{C})}\,\mathrm{FPdim}_{(A)^2}$ =FPdim$(\mathcal{E})$。因此，

$$(\mathcal{C}_A^0)^{\mathrm{rev}} \cong \mathcal{C}_A^0 \cong \mathcal{E}$$

作为对称融合范畴。因此，我们得到以下融合范畴之间的辫子张量等价

$$\mathcal{Z}(\mathcal{C}_A,\mathcal{E}) \cong \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{E}} (\mathcal{C}_A^0)^{\mathrm{rev}} \cong \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}^{\mathrm{rev}} \cong \mathcal{C},$$

根据定义，这进而推出 $[\mathcal{C}] = [\mathcal{E}]$。

(1) $\Rightarrow$ (3)。若 $\mathcal{C} \cong \mathcal{Z}(\mathcal{A},\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{E}$上的融合范畴；特别地，FPdim$(\mathcal{A})^2$ = FPdim$(\mathcal{E})$ = FPdim$(\mathcal{C})$。令 F_1 为遗忘函子 $\mathrm{F}: \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 在 $\mathcal{Z}(\mathcal{A},\mathcal{E})$上的限制，并令 $\mathcal{I}_1$ 为它的右伴随函子。由于 $\mathcal{E}$ 通过遗忘函子 F 全忠实地映入 $\mathcal{A}$，F_1 由 [6, 定理 3.12]可知是满射。注意，F_1 显然具有中心张量函子结构，因此 $\mathrm{A} := \mathcal{I}_1(\mathbf{1})$是一个连通的 ´étale 代数，使得根据 [5, 引理 3.5]有 $\mathcal{C}_A \cong \mathcal{A}$。此外，$\mathcal{E} \cap \mathrm{A} = \mathbf{1}$，因为对于任意简单对象 $\mathrm{X} \in \mathcal{E}$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{I}_1(\mathbf{1})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F_1(X), \mathbf{1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F_1(X), F_1(\mathbf{1})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \mathbf{1}) \cong \delta_{X,\mathbf{1}}\Bbbk.$$

并且 [5, 引理 3.11] 指出，FP 维数(A) = FP 维数$(\mathcal{C})$ FP 维数$(\mathcal{A})$，于是

$$\mathrm{FPdim}(\mathcal{E})\,\mathrm{FPdim}(A)^2 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{E})\frac{\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})^2}{\mathrm{FPdim}(\mathcal{A})^2} = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}).$$

因此，代数A 是所需的连通 étale 代数。

(4) $\Rightarrow$ (1)。若 $\mathcal{C}_G \cong \mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 含有一个G-等变拉格朗日代数A，则融合范畴 $\mathcal{Z}(\mathcal{B})_A$ 根据引理 3.4 具有G-等变结构。令 $\mathcal{A} := (\mathcal{Z}(\mathcal{B})_A)^G$，则融合范畴 $\mathcal{A}$ 是一个关于 $\mathcal{E}$的融合范畴。因此，由 [13, 命题 2.10] 和 [5,推论 3.20]可推出存在以下编织融合范畴之间的等价

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A})_G^0 \cong \mathcal{Z}(\mathcal{Z}(\mathcal{B})_A) \cong \mathcal{Z}(\mathcal{B}) \boxtimes (\mathcal{Z}(\mathcal{B})_A^0)^{\mathrm{rev}} \cong \mathcal{Z}(\mathcal{B}).$$

最后一个等价是因为A 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 的一个拉格朗日代数。因此，Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{C} \cong \mathcal{E}'_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}$ 的一个极小扩张，进而 $[\mathcal{C}] = [\mathcal{E}]$ 正如所需。

(2) $\Rightarrow$ (4)。由于 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{E} = \mathrm{Rep}(G)$ 上的融合范畴，$\mathcal{B} = \mathcal{A}_G$ 是融合范畴。因此我们有一个辫子张量等价 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})_G^0 \cong \mathcal{Z}(\mathcal{B})$。此外，我们还有张量等价 $(\mathcal{C}_G)_B \cong \mathcal{B} \cong (\mathcal{C}_A)_G$，其中 B 是与遗忘函子相对应的拉格朗日代数

函子 $\mathcal{Z}(\mathcal{B})\to\mathcal{B}$。注意， $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 M¨uger 中心，因此 $\mathcal{E}$ 中心化了 A。我们声称 B 是一个G-等变代数。事实上，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{1},F_1(A))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{I}_1(\mathbf{1}),A)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A),$$

因此， $F_1(A)$ 可能不是连通代数，其中 $F_1\colon\ \mathcal{Z}(\mathcal{A},\mathcal{E})\to\mathcal{A}$ 是遗忘函子 $F\colon\ \mathcal{Z}(\mathcal{A})\ \to\mathcal{A}$的限制。不过，设 $F_2\colon\mathcal{C}\to\mathcal{Z}(\mathcal{B})=\mathcal{C}_G$ 为自然满射编织张量函子。由于 $\mathcal{E}\cap A\ =\mathbf{1}$， A 通过张量函子 F_2忠实地映入 $\mathcal{C}_G$。同时，容易看出

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{1},F_2(A))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{I}_2(\mathbf{1}),A)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Fun}(G),A)=\Bbbk,$$

其中 $\mathcal{I}_2$ 是 F_2的右伴随函子。因此， $A\ \cong F_2(A)\cong B$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$中的连通拉格朗日代数。

注意， $A\in\mathcal{C}\cong\mathcal{Z}(\mathcal{B})^G$ 是一个连通 ´étale 代数，因此 A 具有一个G-等变结构（$A\ \zeta$），其中 $\zeta=\{\zeta_g|\zeta_g\colon g(A)\ \xrightarrow{\sim}A\}_{g\in G}$ 是一个自然同构。这里我们将 A 视为 $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$中的对象。设 τ 为同构的复合 $B\ \xrightarrow{\sim}F_2(A)\ \xrightarrow{\sim}A$。设 $\xi_g:=\tau^{-1}\circ\zeta_g\circ g(\tau)$，则容易看出 $\xi=\{\xi_g|\xi_g\colon g(B)\ \xrightarrow{\sim}B\}_{g\in G}$ 定义了 B上的G-等变结构，由此完成定理的证明。

□

注 3.6. 事实上，很容易看出，定理 3.5 的 (1)–(3) 项对所有对称融合范畴 $\mathcal{E}$都成立。此外， $\mathcal{Z}(\mathcal{A})_A^0\cong\mathcal{Z}(\mathcal{E})$作为辫融合范畴，其中 A 是定理 3.5 中的拉格朗日代数。特别地，定理 3.5 推广了 [5,命题 5.8], 的结论；该命题刻画了非退化融合范畴 $\mathcal{C}$ 何时与某个融合范畴的 Drinfeld 中心编织张量等价。

4 G-拟幺半范畴

4.1 定义

设 $\mathcal{C}$ 是一个半单 k-线性范畴，配备了 k-双线性二元张量积 $\otimes$；我们假定给定结合子同构 $(-\otimes-)\otimes-\cong-\otimes(-\otimes-)$，但允许五边形公理不成立。我们确实假定存在如 [12, 2.1] 中所定义的单位对象——也就是说，这是一个对象 $\mathbf{1}\in\mathcal{C}$，配有同构 $\iota\colon\ \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\simeq\mathbf{1}$，并且函子$X\ \mapsto X\ \otimes\mathbf{1}$和 $X\ \mapsto\mathbf{1}\otimes X$是等价；为方便起见，我们还假定 $\mathbf{1}$ 是简单对象。

进一步假设范畴 $\mathcal{C}$ 按群 G 忠实分次， $\mathcal{C}=\oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$ 且与张量积相容。因此，对于任意简单对象 $X\ \in\mathcal{C}$，都有定义良好的元素 $\deg(X)\ \in G$；对于 $X\otimes Y$ 的任意简单直和项 Z，都有 $\deg(Z)\ =\deg(X)\deg(Y)$。忠实性意味着，对于任意 $g\ \in G$，至少存在一个简单对象 X，使得 $\deg(X)\ =g$。

定义 4.1。上述范畴 $\mathcal{C}$ 称为G-拟幺半范畴，如果对于所有简单对象X，Y，Z，$T\ \in\mathcal{C}$，五边形图在相差一个标量的意义下交换，且该标量仅取决于 $\deg(X)$，$\deg(Y)$，$\deg(Z)$，$\deg(T)\ \in G$。

注记 4.2. 这一术语的灵感来自（$G\ \phi$）-拟结合代数的概念，见 [1]。

问题 4.3. 假设一个半单范畴 $\mathcal{C}$ 配备了张量积和结合同构，使得对任意四个简单对象，五边形图在相差一个标量的意义下交换。这样的范畴是否是某个群 G 上的 G-拟幺半范畴?

显然，G-拟幺半范畴之间存在等价的概念：若存在一个等价$F:\ \mathcal{C}\simeq\mathcal{C}'$，保持分次并配备拟张量结构（即同构$F(X\otimes Y)\simeq F(X)\otimes F(Y)$），且该结构与两个范畴中的结合子同构相容，则称这两个G-拟幺半范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 等价。

设 $\nu=\nu(\mathcal{C}):G^4\to \mathrm{k}^\times$ 是定义 4.1 中出现的标量（因此这是一个以G为值的四元函数）。注意，由于我们假设G-分次是忠实的，$\nu(\mathcal{C})$由 $\mathcal{C}$ 中的结合子同构唯一确定。根据定义，$\nu(\mathcal{C})$是取值于 $\mathrm{k}^\times$ 的群G 上的一个 4-上链。考虑结合多面体图（例如参见 [3,附录 B]），可得

命题 4.4。 上链 ν（$\mathcal{C}$）是一个 *4*-上闭链。

证明思路： 结合多面体 K_5 的顶点可标记为五重张量积，而边则由各种结合性映射给出，例如：

$$X\otimes((Y\otimes Z)\otimes(T\otimes U))\to X\otimes(Y\otimes(Z\otimes(T\otimes U))).$$

我们考虑这样的图，其中X、Y、Z、T、U 是一个G-拟幺半范畴中的简单对象。面要么是因结合性态射的自然性而交换的四边形，要么是根据定义 4.1 在相差一个标量的意义下交换的五边形。因此，我们得到定义 4.1 中出现的标量之间的一个关系；可以验证，该关系表明 $\nu(\mathcal{C})$ 的余边界是平凡的。 □

因此，我们将 ν（$\mathcal{C}$）称为 $\mathcal{C}$ 的五边形性缺陷余循环。

例 4.5。 假设G 是平凡群，并设 $\mathcal{C}$ 是一个G-拟幺半范畴。那么，对于简单对象X、Y、Z、T 构成的每个五边形图，其交换都相差一个标量 ν，且该标量对所有X、Y、Z、T都相同。因此，只需将新的结合性约束定义为旧约束乘以 ν^{-1}，就可以轻易地将 $\mathcal{C}$ 变成幺半范畴。

类似地，我们可以用任意的 3-上链 $\lambda:\mathrm{G}^3\to\mathrm{k}^\times$ 扭曲 $\mathcal{C}$ 中的结合性同构。因此，G-拟幺半范畴 $\mathcal{C}^\lambda$ 与 $\mathcal{C}$ 的区别仅在于结合性同构；对于简单对象 X、Y、Z，$\in\mathcal{C}$ 中的结合子同构 $(\mathrm{X}\otimes\mathrm{Y})\otimes\mathrm{Z}\to\mathrm{X}\otimes(\mathrm{Y}\otimes\mathrm{Z})$ 等于 $\mathcal{C}^\lambda$ 中的结合子同构 $(\mathrm{X}\otimes\mathrm{Y})\otimes\mathrm{Z}\to\mathrm{X}\otimes(\mathrm{Y}\otimes\mathrm{Z})$ 乘以 $\lambda(\deg(\mathrm{X}),\deg(\mathrm{Y}),\deg(\mathrm{Z}))$。

命题 4.6. 五边形性缺陷余循环 $\nu(\mathcal{C}^\lambda)$ 等于 $\nu(\mathcal{C})\partial\lambda$，其中 $\partial\lambda$ 是 λ 的微分。

证明。 论证与 [13, (60)] 完全相同。 □

我们称 X 是 G-拟幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个简单对象，若存在简单对象$Y\in\mathcal{C}$，使得存在态射 $\mathbf{1}\to X\otimes Y$和 $Y\otimes X\to\mathbf{1}$，且复合$X\to(X\otimes Y)\otimes X\to X$以及 $Y\to Y\otimes(X\otimes Y)\to Y$均非零，则称其为（左）刚性的。右刚性对象在 $\mathcal{C}$ 中的定义留给读者。

注记 4.7. 考虑由 $\deg(X)$ 生成的循环子群 $H \subset G$ 以及 H-拟幺半子范畴 $\mathcal{C}(H) = \oplus_{g\in H}\mathcal{C}_g$。由于对于任意循环群 H，都有 $\mathrm{H}^4(H,\mathrm{k}^\times) = 0$，我们可以找到扭曲范畴 $\mathcal{C}(H)^\lambda$，使其五边形性缺陷余循环为平凡的，即 $\mathcal{C}(H)^\lambda$ 是幺半范畴。显然，对象 $X \in \mathcal{C}$ 是刚性的，当且仅当它在 $\mathcal{C}(H)^\lambda$ 中是刚性的。这表明，G-拟幺半范畴中刚性对象的性质与幺半范畴中刚性对象的性质相似。

我们称一个G-拟幺半范畴是刚性的，如果 $\mathcal{C}$ 的任意简单对象都同时是左刚性和右刚性的。类似地，我们称一个 G-拟幺半范畴是弱刚性的，如果对于任意简单对象 X，都存在唯一的简单对象 Y，使得 $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, X\otimes Y)$ 非零，且此时 $\dim\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, X\otimes Y) = 1$（等价地，该范畴 $\mathcal{C}$ 的格罗滕迪克环是 [12,定义 3.1.3]意义下的基环）。

显然，任何刚性G-拟幺半范畴都是弱刚性的。反过来，利用注记 4.7 以及 T. Deshpande 和 S. Mukhopadhyay 的结果 [9, 推论 2.11]，我们得到以下结果:

命题 4.8。 G-拟幺半范畴 $\mathcal{C}$ 是刚性的，当且仅当它是弱刚性的且单位分量 $\mathcal{C}_e \subset \mathcal{C}$ 是刚性的。 □

4.2 分次扩张

本节用G-准幺半范畴的语言重述 [13] 的一些结果。

设 $\mathcal{C}$ 是一个G-准幺半范畴。假设五边形恒等式缺陷余循环 $\nu(\mathcal{C})$是归一化的（由于任意余循环都与某个归一化余循环上同调等价，若将 $\mathcal{C}$ 替换为一个合适的扭曲范畴 $\mathcal{C}^\lambda$，总能满足这一条件）。那么，单位分量 $\mathcal{C}_e$ 是一个幺半范畴，且每个直和项 $\mathcal{C}_g$ 都是 $\mathcal{C}_e$-双模范畴。

命题 4.9. 另外，假设 $\mathcal{C}$ 是刚性的。那么

(i) 对任意 $g \in G$，双模范畴 $\mathcal{C}_e$ 是可逆的。*(ii)* 对任意 $g,h \in G$，$\mathcal{C}$ 中的张量积诱导出双模范畴 $\mathcal{C}_e$之间的一个等价$\mathcal{C}_g \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{C}_h \simeq \mathcal{C}_{gh}$。

证明。 证明与 [13, 定理 6.1] 的证明完全相同。 □

因此，任意 G-拟幺半范畴都确定一个群同态 $G \to \mathrm{BrPic}(\mathcal{C}_e)$。此外， [13, 8.3] 中的论证表明，该同态可提升为 2-群同态 $G \to \mathrm{BrPic}(\mathcal{C}_e)$（等价地，我们有一个 $\mathcal{C}_e$-双模函子之间的同构，如[13, (49)]所示）。

反过来，给定一个 2-群同态$G \to \mathrm{BrPic}(\mathcal{C}_e)$，我们可以按照 [13, 定理 8.4]构造一个带拟张量积的分次扩张。此外，对于这个拟张量积，我们可以选取一些结合子同构，见 [13, (54)]。由此得到一个G-拟幺半范畴。根据定义可知，该范畴是弱刚性的；因此由命题 4.8 可知它是刚性的。因此，对于任意融合范畴 $\mathcal{D}$，上述构造给出一个

双射

$$\{\text{2-群同态 } G\to \mathrm{BrPic}(\mathcal{D})\} \quad \underline{\qquad} \quad \leftrightarrow \quad \{\text{刚性 } G\text{-拟幺半范畴，}\ \mathcal{C}_e\simeq\mathcal{D}\ \text{模去扭曲后}\}$$

在 [13] 与同态 $G\to \mathrm{BrPic}(\mathcal{D})$ 相关联的G-拟幺半范畴的五边形性缺陷余循环的上同调类这一背景下，该类称为结合约束阻碍类 O_4, , 见 [13,定义 8.7]。

5 同构 $\eta_{\mathcal{E}}\colon \mathrm{Ker}(\phi_{\mathcal{E}})\simeq \mathrm{H}^4(G,\Bbbk^\times)$

令 $\mathcal{E}$ 为一个 Tannakian 融合范畴。选取对称融合范畴的一个等价 $\mathcal{E}\simeq \mathrm{Rep}(G)$，其中$G$ 是有限群。令$\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 表示 $\mathcal{E}$上的非退化编织融合范畴（等价类）的集合。对于任意 $\mathcal{C}\in\mathcal{M}(\mathcal{E})$，我们可以考虑其去等变化 $\mathcal{C}_G$，见 [11, 第 4.2]小节。因此， $\mathcal{C}_G$ 是一个带有G作用的非退化编织融合范畴。我们可以用等变化过程从 $\mathcal{C}_G$ 重构 $\mathcal{C}$ ，见 [11, 第 4.2]小节。也就是说， $\mathcal{C}=(\mathcal{C}_G)^G$ （ $\mathcal{E}$上的辫融合范畴之间的等价）。

˜注5.1。 令$\mathcal{M}_G$ 表示由配备有G的作用的非退化编织融合范畴的（等价类）组成的集合。去等变化和等变化构造给出一个双射$\mathcal{M}(\mathcal{E})=\ \tilde{}\mathcal{M}_G$，见 [11, 定理 4.18]。

考虑子集 $\mathrm{M}(\mathcal{E})^{\mathrm{tr}}\subset\mathrm{M}(\mathcal{E})$，它由满足以下条件的范畴 $\mathcal{C}$ 组成： $\mathcal{C}_G$ 的Witt类是平凡的。等价地， $\mathcal{C}\in\mathrm{M}(\mathcal{E})^{\mathrm{tr}}$ 当且仅当存在一个融合范畴 $\mathcal{A}$ 以及编织融合范畴的等价 $\mathcal{C}_G\simeq\mathcal{Z}(\mathcal{A})$。注意， $\mathcal{A}$ 不一定唯一。利用该等价，将 G 在 $\mathcal{C}_G$ 上的作用传递为 G 在 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$上的作用。因此，我们得到一个 2-群同态 $\mathrm{G}\ \to\mathrm{Aut}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$，其中 $\mathrm{Aut}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ 是范畴 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$的编织自等价所构成的 2-群。根据 [13, 定理 1.1], 存在一个规范的 2-群同构 $\mathrm{Aut}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))\simeq \mathrm{BrPic}(\mathcal{A})$，因此通过复合得到一个 2-群同态 $\mathrm{G}\to\mathrm{BrPic}(\mathcal{A})$。于是，利用第 4.2 节的结果，我们可以构造 G-拟幺半范畴 $\tilde{\mathcal{A}}$ ，其满足 $\tilde{\mathcal{A}}_e\simeq\mathcal{A}$。令 ν 为范畴 $\tilde{\mathcal{A}}$的五边形性缺陷余循环。余循环 ν 取决于以下选择：我们选择融合范畴 $\mathcal{A}$、编织等价$\mathcal{C}_G\simeq\mathcal{Z}(\mathcal{A})$，以及范畴 $\tilde{\mathcal{A}}$中的结合子同构。对于任意 $\mathcal{C}\in\mathrm{M}(\mathcal{E})^{\mathrm{tr}}$ ，令 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 表示这类选择的集合。现在，对于 $\mathcal{C}\in\mathrm{M}(\mathcal{E})^{\mathrm{tr}}$ 以及 $\mathrm{c}\ \in\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$（注意集合 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 非空），我们定义

$$\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c)=\nu \tag{2}$$

注 5.2. 余循环 $\hat{}\eta(\mathcal{C})$ 还有一种定义方式，即将其视为从范畴 $\mathcal{C}_G$ （带有其规范的 G-作用）出发，构造以该范畴为平凡分量的G-交叉范畴时所遇到的障碍，参见 [13, 定理 7.12]（注意，该定义对任意 $\mathcal{C}\in\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 都有意义，而不仅仅适用于$\mathcal{C}\in\mathcal{M}(\mathcal{E})^{\mathrm{tr}}$）。欢迎感兴趣的读者尝试陈述并证明本节各项结果的对应版本，其中以 $\hat{}\eta$ 代替 $\tilde{\eta}$。

引理 5.3. *(i)* 对任意 $\mathcal{C}\in M(\mathcal{E})^{tr}$ 以及 $c\in Ch(\mathcal{C})$，存在 $c'\in Ch(\mathcal{C}^{rev})$，使得 $\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}^{rev},c')=\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c)^{-1}$;

(ii) 对任意 $\mathcal{C},\mathcal{D}\in M(\mathcal{E})^{tr}$，以及 $c\in Ch(\mathcal{C})$、$d\in Ch(\mathcal{D})$，存在 $e\in Ch(\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{D})$，使得$\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{D},e)=\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c)\,\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{D},d)$。

证明。(i) 考虑 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{op}}$，即 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的反范畴

˜(ii) 假设 $\mathcal{C}$ 和 c 导出 G-准幺半范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D}$，而 d 导出范畴 $\tilde{\mathcal{B}}$。外张量积 $\tilde{\mathcal{A}}\boxtimes\tilde{\mathcal{B}}$（例如参见 [12, 1.11]）带有由群 $G\times G$ 给出的显然分次，以及使其成为刚性 $G\times G$-准幺半范畴的结合子同构；其五边形性缺陷余循环是 $\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c)$ 与 $\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{D},d)$ 的（外）积。

˜ ˜ ˜现在考虑子范畴 $\oplus_{g\in G}\mathcal{A}_g\boxtimes\mathcal{B}_g\subset\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$；它是一个刚性的 G-拟幺半范畴，其五边形性缺陷余循环为 $\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c)\,\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{D},d)$。根据第 4.2 节中的双射，该范畴来自某个选择 $e\in\mathrm{Ch}(\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{D})$。 □

现在令 $M(\mathcal{E})^{G\text{-tr}}\subset M(\mathcal{E})$ 为由在 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ 中具有平凡类的范畴 $\mathcal{C}$ 组成的子集，也就是说 $[\mathcal{C}]=[\mathcal{E}]$。那么 $[\mathcal{C}_G]=\phi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}])=0$，所以 $M(\mathcal{E})^{G\text{-tr}}\subset M(\mathcal{E})^{\mathrm{tr}}$。

引理 5.4. 对于任意 $\mathcal{C}\in M(\mathcal{E})^{G\text{-}tr}$ 以及 $c\in Ch(\mathcal{C})$，我们有 $\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c)$ 是一个余边界。

证明。假设 $[\mathcal{C}]=[\mathcal{E}]$ 意味着 $\mathcal{C}\cong\mathcal{Z}(\mathcal{A},\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{E}$ 上的一个融合范畴，见定理 3.5。根据定义，这表示存在一个编织融合范畴的嵌入$\mathcal{C}\subset\mathcal{Z}(\mathcal{A})$，使得 $\mathcal{C}'_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}=\mathcal{E}\subset\mathcal{C}$，或者等价地，$\mathcal{E}'_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}=\mathcal{C}$。因此，$\mathcal{E}'_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}$ 对 $\mathcal{E}$ 的去等变化等价于 $\mathcal{C}_G$。现在，任意选择 $\mathrm{c}\in\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 都包含对某个融合范畴 $\mathcal{B}$ 的等价 $\mathcal{C}_G\simeq\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 的选择。因此，根据定理 [14, 定理 1.3]，存在一个 G-扩张 $\tilde{\mathcal{B}}$ 和一个辫等价 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})\cong\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{B}})$。我们在范畴$\mathcal{Z}(\mathcal{B})\simeq\mathcal{C}_G$上有两个 G-作用：G 在 $\mathcal{C}_G$ 上的典范作用，以及由 G-扩张 $\tilde{\mathcal{B}}$ 的存在所给出的作用 $\mathrm{G}\to\mathrm{BrPic}(\mathcal{B})=\mathrm{Aut}(\mathcal{Z}(\mathcal{B}))$。然而，由 [16, 定理 3.5]可知，这两个作用相同。因此，至少存在一个选择 $\mathrm{c}'\in\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$，以等价 $\mathcal{C}_G\simeq\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 为起点，得到作为 G-拟幺半范畴的范畴 $\tilde{\mathcal{B}}$，故 $\eta_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},\mathrm{c}')$ 是平凡的。任何其他以相同等价 $\mathcal{C}_G\simeq\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 为起点的选择 $\mathrm{c}\in\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$，都会得到一个与 $\mathcal{B}$ 仅相差一个扭曲的范畴 ˜（因为唯一需要选择的是结合子同构，见[13, 8.6]）。因此，引理由命题 4.6 得证。

□

对于一对 $(\mathcal{C},c)$，其中 $\mathcal{C}\in M(\mathcal{E})^{\mathrm{tr}}$ 且 $c\in\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$，考虑余循环 $\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c)$ 的上同调类 $\bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c)\in\mathrm{H}^4(G,\mathrm{k}^\times)$。

推论 5.5。类 $\bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c)$ 与 c 无关。

证明。设 $c_1,c_2\in Ch(\mathcal{C})$。由引理 5.3 (i)，存在 $c'\in Ch(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})$，使得 $\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}},c')=\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c_1)^{-1}$。因此，由引理 5.3 (ii)，存在 $e\in Ch(\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})$，使得

$$\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{C}^{\mathrm{rev}},e)=\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c_2)\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}},c')=\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c_2)\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c_1)^{-1}.$$

另一方面，范畴 $\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}\in M(\mathcal{E})^{G\text{-tr}}$（根据 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ 中逆元的定义）。因此，由引理 5.4 可知，$\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}\boxtimes_{\mathcal{E}}\mathcal{C}^{\mathrm{rev}},e)$ 是一个余边界。因此，$\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c_1)$ 和 $\tilde{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C},c_2)$ 的上同调类如所述相同。 □

因此，存在一个定义良好的类 $\bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}) \in \mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times)$，使得对于任意$c \in Ch(\mathcal{C})$，都有 $\bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}, c) = \bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C})$。

推论 5.6. 映射 $\bar{\eta}_{\mathcal{E}} : M(\mathcal{E})^{tr} \to \mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times)$ 满足以下性质：

(i) 对任意 $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in M(\mathcal{E})^{tr}$，有 $\bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{E}} \mathcal{D}) = \bar{\eta}_E(\mathcal{C})\, \bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$；
(ii) 对任意 $\mathcal{C} \in M(\mathcal{E})^{G\text{-}tr}$，有 $\bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}) = 0$。

证明. (i) 由引理 5.3 的 (ii) 立即得出，而 (ii) 则由引理 5.4 得出。 □

根据 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ 的定义，存在唯一的同态 $\eta_{\mathcal{E}} : \mathrm{Ker}(\phi_{\mathcal{E}}) \to \mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times)$，使得 $\eta_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}]) = \bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C})$。

引理 5.4 的逆命题如下：

引理 5.7. 假设 $\bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}) = 0$。那么 $\mathcal{C} \in M(\mathcal{E})^{G\text{-}tr}$。等价地，同态 $\eta_{\mathcal{E}}$ 是单射。

证明。 由于 $\bar{\eta}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}) = 0$，对于某个选择 $c \in \mathrm{Ch}(\mathcal{C})$，所得的 G-拟幺半范畴 $\tilde{\mathcal{A}}$具有平凡的五边形性缺陷余循环，因此它是一个G-分次融合范畴。接着由[16, 定理 3.5] 可知，$\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}})$的编织融合子范畴，其 M¨uger 中心为 $\mathcal{E}$，故$\mathcal{C} \cong \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E})$，如所声称。

□

如 [18] 所述，下一条命题的证明的主要思路见于 [24]；涉及 $\mathrm{H}^3(G, \Bbbk^\times)$的类似论证版本见于 [15]。

命题 5.8。 映射 $\eta_E : \mathrm{Ker}(\phi_{\mathcal{E}}) \to \mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times)$ 是满射。

证明。 对于一个类 $\omega \in \mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times)$，设 $\nu \in Z^4(G, \Bbbk^\times)$ 是其代表余循环。设 $\tilde{G}$ 为一个有限群，且存在满同态 $p : \tilde{G} \to G$ 使得 $p^*\omega = 0$，见 [22]。因此，我们可以选取一个上链 $\psi \in C^3(\tilde{G}, \Bbbk^\times)$，使得 $p^*\nu = \partial\psi$。

考虑范畴 $\mathrm{Vec}_{\tilde{G}}$，其张量积取通常定义（因此，标记为 $g, h \in \tilde{G}$ 的简单对象的张量积标记为 gh）。令 ψ 作为该˜范畴的结合子同构，并令 p 定义该范畴上的 G-分次（因此，标记为 $g \in G$的简单对象的度为 $p(g) \in G$）。由此得到的范畴是一个 G-拟幺半范畴，其五边形性缺陷余循环为 ν。因此我们证明了 ω 属于 $\eta_{\mathcal{E}}$的像。

□

结合引理 5.7 和命题 5.8，我们得到

定理 5.9. 映射 $\eta_{\mathcal{E}} : \mathrm{Ker}(\phi_{\mathcal{E}}) \to \mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times)$ 是一个同构。 □

结合推论 3.3，我们得到如下结果

推论 5.10. 对于 *Tannakian* 范畴 $\mathcal{E} = \mathrm{Rep}(G)$ 上的所有编织融合范畴，最小扩张猜想成立，当且仅当 $\mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times) = 0$。 □

定理 3.1 和定理 5.9 一起推出

定理 5.11。 设 $\mathcal{E} = \mathrm{Rep}(G)$ 是 *Tannakian*。那么 $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{W} \oplus \mathrm{H}^4(G, \Bbbk^\times)$。 □

注 5.12. 可以验证，投影 $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{W} \oplus H^4(G, \Bbbk^\times) \to H^4(G, \Bbbk^\times)$ 可描述如下：类 $[\mathcal{C}] \in \mathcal{W}(\mathcal{E})$ 被映射到注 5.2 中余循环 $\hat{\eta}(\mathcal{C})$ 的上同调类。

设 $\mathcal{C}$ 是对称融合范畴 $\mathcal{E}$ 上的一个辫融合范畴。对于任意 $n \geq 1$，记

$$\mathcal{C}^{\boxtimes_{\mathcal{E}}^n} := \overbrace{\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{E}} \cdots \boxtimes_{\mathcal{E}} \mathcal{C}}^{n},$$

关于编织融合范畴的极小扩张，我们有如下结果。

推论 5.13. 设 $\mathcal{C}$ $\mathcal{E}=$ 上的任意非退化融合范畴为 (G)，则存在一个正整数 n，使得 $\mathcal{C}^{\boxtimes_{\mathcal{E}}^n}$ 存在一个极小扩张。事实上，我们可以取 $n=|G|$。

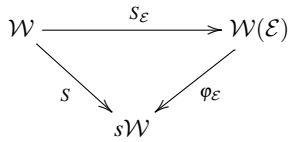
证明。 [23, 定理 3.2] 指出，范畴 $\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ 存在极小扩张，当且仅当 $[\mathcal{C}] \in \mathcal{W}_E$ 属于同态 $S_{\mathcal{E}}$ 的像。现在，定理 3.1 蕴含 $S_{\mathcal{E}}$ 的像恰为投影 $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Ker}(\phi_{\mathcal{E}}) \simeq \mathrm{H}^4(G,\mathrm{k}^*)$ 的核。众所周知，$\mathrm{H}^4(G,\mathrm{k}^\times)$ 的所有元素都是阶数整除 $|G|$ 的挠元。因此结果成立，因为

$$[\mathcal{C}^{\boxtimes_{\mathcal{E}}^n}] = [\mathcal{C}]^n.$$

□

6 群同态 $\varphi_{\mathcal{E}}$: $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \to s\mathcal{W}$

~ ~在本节中，设 $\mathcal{E} = \mathrm{Rep}(G,$ $z)$ 为一个超 Tannakian 融合范畴，其中 $z \in G$ 是一个阶为 2 的非平凡中心元，且 z 在 $\mathrm{Rep}(\widetilde{G})$ 上作用为奇偶自同构。于是， $\mathcal{E}$包含一个极大坦纳卡融合子范畴 $\mathrm{Rep}(G)$，其中 $G := \widetilde{G}/\langle z \rangle$。此外，我们有如下 Witt 群的交换图



其中 $S := S_{\mathrm{sVec}}\colon \mathcal{W} \to s\mathcal{W}$, $S([\mathcal{C}]) = [\mathcal{C} \boxtimes \mathrm{sVec}]$ 且 $\varphi_{\mathcal{E}}([\mathcal{D}]) = [\mathcal{D}_G]$ 对任意 $[\mathcal{C}] \in \mathcal{W}$, $[\mathcal{D}] \in \mathcal{W}(\mathcal{E})$ 均成立。因此，由 [18] 可知 S 是满射，故 $\varphi_{\mathcal{E}}$ 也是满射。注意，$\mathrm{Ker}(S_{\mathcal{E}})$ 是由 $\mathcal{E}$ 的极小扩张的维特等价类以及 $\mathrm{Ker}(S) = \mathcal{W}_{\mathrm{Ising}} = \mathbb{Z}_{16}$ [6] 生成的子群，其中 $\mathcal{W}_{\mathrm{Ising}} \subseteq \mathcal{W}$ 是由伊辛范畴的维特等价类 $[\mathcal{I}]$ 生成的子群。因此，$\mathrm{Ker}(S_{\mathcal{E}})$ 是 $\mathbb{Z}_{16}$ 的子群。

问题 6.1. 我们能否完整刻画任意超 Tannakian 范畴 $\mathcal{E}$ 中 $\mathrm{Ker}(S_{\mathcal{E}})$ 的阶?

注意，我们有一个群的正合列

$$1 \to \mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{E}}) \to \mathcal{W}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{E}}} s\mathcal{W} \to 1.$$

因此，子群 $\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{E}})$ 对于确定 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ 的结构至关重要。根据定义，$\varphi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}]) = [\mathrm{sVec}]$ 当且仅当 $\mathcal{C}_G \cong \mathcal{Z}(\mathcal{A},\ \mathrm{sVec})$，其中 $\mathcal{A}$ 是 sVec 上的融合范畴，而$\mathcal{Z}(\mathcal{A},\ \mathrm{sVec})$是 sVec 在 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 中的中心化子。

命题 6.2。 若 $\mathcal{E} \cong sVec \boxtimes \mathrm{Rep}(G)$，则存在群同态 $\psi_{\mathcal{E}}\colon\ s\mathcal{W} \to \mathcal{W}(\mathcal{E})$使得 $\varphi_{\mathcal{E}} \circ \psi_{\mathcal{E}} = id$。因此 $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \cong s\mathcal{W} \oplus \mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{E}})$。

证明。 记 $\mathcal{E}_2 := \mathrm{Rep}(G)$。对于任意元素 $[\mathcal{C}], [\mathcal{D}] \in s\mathcal{W}$，根据定义，令 A_1, A_2 为连通 étale 代数，使得 $(\mathrm{sVec} \boxtimes \mathrm{sVec})_{A_1} \cong \mathrm{sVec}$ 和 $(\mathcal{E}_2 \boxtimes \mathcal{E}_2)_{A_2} \cong \mathcal{E}_2$分别成立。于是，$(\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{E})_A \cong \mathcal{E}$，其中 $A := A_1 \boxtimes A_2$ 且 $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathrm{sVec}} \mathcal{D} = (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D})^{A_1}$，

$$\begin{aligned}((\mathcal{C} \boxtimes_{\mathrm{sVec}} \mathcal{D}) \boxtimes \mathcal{E}_2) \boxtimes_{\mathcal{E}_2} \mathcal{E}_2 &= (((\mathcal{C} \boxtimes_{\mathrm{sVec}} \mathcal{D}) \boxtimes \mathcal{E}_2) \boxtimes \mathcal{E}_2)_{A_2},\\ (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{E}_2) \boxtimes_{\mathcal{E}} (\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{E}_2) &= (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{E}_2 \boxtimes \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{E}_2)_A.\end{aligned}$$

我们定义 $\psi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}]) = [\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{E}_2], [\mathcal{C}] \in s\mathcal{W}$。显然， $\psi_{\mathcal{E}}$是定义良好的，并且

$$\varphi_{\mathcal{E}}(\psi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}])) = \varphi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{E}_2]) = [(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{E}_2)_G] = [\mathcal{C}].$$

注意， ´étale 代数 A_1, A_2 彼此中心化。因此，对于 $[\mathcal{C}], [\mathcal{D}] \in s\mathcal{W}$，

$$\begin{aligned}&\psi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}])\psi_{\mathcal{E}}([\mathcal{D}])\\ &= [(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{E}_2) \boxtimes_{\mathcal{E}} (\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{E}_2)]\\ &= [(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{E}_2 \boxtimes \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{E}_2)_A]\\ &= [((\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{E}_2 \boxtimes \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{E}_2)_{A_2})_{A_1}]\\ &= [(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{E}_2)_{A_1}]\\ &= [\mathcal{C} \boxtimes_{\mathrm{sVec}} (\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{E}_2)]\\ &= [(\mathcal{C} \boxtimes_{\mathrm{sVec}} \mathcal{D}) \boxtimes \mathcal{E}_2] = \psi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}][\mathcal{D}]).\end{aligned}$$

这就完成了该命题的证明。 □

然而，任意超 Tannakian 融合范畴 $\mathcal{E}$ 都不能分解为 Deligne 张量积 $\mathrm{sVec} \boxtimes \mathrm{Rep}(G)$，因此态射 $\psi_{\mathcal{E}}\colon s\mathcal{W} \to \mathcal{W}(\mathcal{E})$ 定义不良。我们以提出以下问题结束本节。

问题 6.3。 对于超 Tannakian 融合范畴 $\mathcal{E} \ncong \mathrm{sVec}$，$\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{E}})$ 是否有限？注意到$s\mathcal{W}$ 是 2-主的，并且 $s\mathcal{W}$ 中元素的最大有限阶为 4，根据 [6], , 假设 $[\mathcal{C}] \in \mathcal{W}(\mathcal{E})$ 的阶有限，则 $\varphi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}^{\boxtimes 4}_{\mathcal{E}}]) = \varphi_{\mathcal{E}}([\mathcal{C}])^4 = [\mathrm{sVec}], ,$ 因此 $[\mathcal{C}^{\boxtimes 4}_{\mathcal{E}}] \in \mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{E}})$。$\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{E}})$ （或 $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ ）的挠部分是否也是 2-主的?

参考文献

[1] H. Albuquerque、E. Barreiro 和 J. S´anchez-Delgado。$(G\ \phi)$-交叉积与 $(G\ \phi)$- 拟结合代数。*AlgebraDiscreteMath.***24** (2017)，第 1 期，46–70 页。[2] G. Carnovale。修正超群代数的 Brauer 群。*J. Algebra* **305** (2006)，第 2 期，993–1036 页。[3] E. Cheng 和 A. Lauda。高维范畴：图解指南 (2004), https://eugeniacheng.com/guidebook/。[4] A. Davydov 和 D. Nikshych。辫张量范畴的辫 Picard 群与分次扩张。*SelectaMath.* (N.S.) **27** (2021)，第 4 期，论文编号 65，共 87 页。

[5] A. Davydov、M. M¨uger、D. Nikshych 和 V. Ostrik。非退化 braided 融合范畴的 Witt 群。J. Reine. Angew. Math. 677 (2013)，135–177 页。[6] A. Davydov 、 D. Nikshych 和 V. Ostrik。关于 braided 融合范畴 Witt 群的结构。Selecta Math. (N.S.) 19 (2013)，第 1 期，237–269 页。[7] T. D´ecoppet。融合 2-范畴的 Drinfeld 中心与 Morita 等价类。Com- pos. Math. 161 (2025)，第 2 期，305–340 页。[8] P. Deligne。张量范畴。Mosc. Math. J. 2 (2002)，第 2 期，227–248 页。[9] T. Deshpande 和 S. Mukhopadhyay。交叉模范畴与扭曲共形块的 Verlinde 公式。Camb. J. Math. 11 (2023)，第 1 期，159–297 页。[10] V. Drinfeld。未发表的札记。[11] V. Drinfeld、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。关于 braided 融合范畴 I。Selecta Math. (N.S.) 16 (2010)，第 2 期，1–119 页。[12] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。张量范畴。AMS Mathematical Surveys and Monographs 205 (2015)。[13] P. Etingof、D. Nikshych 和 V. Ostrik。融合范畴与同伦理论。Quantum Topol. 1 (2010)，第 3 期，209–273 页。[14] P. Etingof、D. Nikshych、V. Ostrik。弱群论与可解融合范畴。Adv. Math. 226 (2011)，第 1 期，176–205 页。[15] D. Evans 和 T. Gannon。扭曲群双的重构与局部扩张，以及置换轨形。Tran. Amer. Math. Soc. 375 (2022)，第 4 期，2789–2826 页。[16] S. Gelaki、D.Naidu 和 D. Nikshych。分次融合范畴的中心。Algebra Number Theory 3 (2009)，第 8 期，959–990 页。[17] C. Galindo 和 C. Venegas-Ramirez。范畴化费米子作用与最小模扩张。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 21 (2025)，论文编号 085，共 35 页。[18] T. Johnson-Freyd 和 D. Reutter。最小非退化扩张。J. Amer. Math. Soc. 37 (2024)，第 1 期，81–150 页。[19] T. Lan、L. Kong 和 X.G. Wen。酉 braided 融合范畴的模扩张与具有对称性的 2+1D 拓扑/SPT 序。Comm. Math. Phys. 351 (2017)，第 2 期，709–739 页。[20] R.J. Milgram。Mathieu 群 M_{23} 的上同调。J. Group Theory 3 (2000)，7–26 页。[21] M. M¨uger。关于模范畴的结构。Proc. Lond. Math. Soc. 87 (2003)，第 3 期，291–308 页。[22] H. Opolka。群扩张与上同调群 II。J. Algebra 169 (1994)，第 1 期，328– 331 页。[23] V. Ostrik 和 Z. Yu。关于极小扩张与 braided 弱群论融合范畴的结构。Adv. Math. 419 (2023)，论文编号 108961，共 16 页。

[24] J. Wang、X.G. Wen 和 E. Witten。《SPT 态和 SET态的对称有隙界面：系统构造》。*Physical Review X* **8**（2018年），第 3 期，论文编号 031048，共 78 页。

Theo Johnson-Freyd 电子邮箱：theojf@dal.ca 达尔豪斯大学数学与统计系，加拿大新斯科舍省哈利法克斯；周界理论物理研究所，加拿大安大略省滑铁卢 Victor Ostrik 电子邮箱：vostrik@uoregon.edu 俄勒冈大学数学系，美国俄勒冈州尤金 Zhiqiang Yu 电子邮箱：zhiqyumath@yzu.edu.cn 扬州大学数学学院，中国扬州 225002