实辛-元辛群的傅里叶–雅可比模型：基本情形

CHENG CHEN、RUI CHEN 和 JIALIANG ZOU

Abstract. 本文将 [GI16] [Ato18] 中的方法推广到实数域，并基于 [CL22]证明的贝塞尔模型猜想的温和情形，证明辛-元辛群傅里叶-雅可比模型的局部 Gan-Gross-Prasad 猜想的基本温和情形。

arXiv:2601.09062v1 [math.NT] 14 Jan 2026

Contents

1. 引言 1 记号 4 致谢 5 2. 局部朗兰兹对应 5 2.1. 魏尔群与 L 参数 5 2.2. 经典群的局部朗兰兹对应 6 2.3. 元辛群的局部朗兰兹对应 9 3. 局部 Gan-Gross-Prasad 猜想 9 3.1. 辛-元辛情形 9 3.2. 特殊正交情形 10 4. 预备知识与工具 11 4.1. Schwartz 诱导与博雷尔引理 11 4.2. 雅可比群的表示论 12 4.3. MVW 对合 17 4.4. 局部 theta 提升 17 4.5. Hom 空间的一个消失结果 20 5. 傅里叶-雅可比模型的唯一性与 epsilon 二分性 20 5.1. 目标 I：唯一性与 epsilon 二分性 20 5.2. 稳定范围跷跷板 I：一些非温和贝塞尔模型 22 5.3. 剥离非温和部分 I：贝塞尔模型 22 6. 傅里叶-雅可比模型的存在性 25 6.1. 目标 II：存在性 25 6.2. 稳定范围跷跷板 II：一些非温和傅里叶-雅可比模型 26 6.3. 剥离非温和部分 II：傅里叶–雅可比模型 26 参考文献 30

1. Introduction

本文旨在证明域 $\mathbb{R}$上辛–拟辛傅里叶–雅可比模型的局部 Gan–Gross–Prasad 猜想[GGP12] 的基本温和情形。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：22E50、22E45；次要分类号：20G20。*Key words and phrases.* Gan–Gross–Prasad 猜想，Schwartz 同调。

设 W 是域 $\mathbb{R}$上的一个辛向量空间。令 Sp(W) 为其对应的辛群，令$\widetilde{\text{Sp}}$(W) 为元辛群，即 Sp(W) 唯一的非分裂二重覆盖。对于 F上的非平凡$\widetilde{\text{}}$加法特征 ψ，令ω_ψ 表示与 ψ 相关的 Sp(W) 的 Weil 表示（见第 4.2 节）。我们定义

$$G = \mathrm{Sp}(W) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \quad \text{and} \quad H = \Delta\widetilde{\mathrm{Sp}}(W),$$

$\widetilde{\text{}}$其中 ΔSp(W) 表示 Sp(W) 到 G 的对角嵌入$\widetilde{\text{。}}$我们用 Irr(Sp(W)) 表示 Sp(W) 的不可约容许 Casselman–Wallach 表示集合$\widetilde{\text{}}$，用 Irr^{gen}(Sp(W)) 表示 Sp(W) 的真正的不可约容许 Casselman–Wallach 表示集合$\widetilde{\text{}}$。对于 $\pi \in$ Irr(Sp(W))$\widetilde{\text{}}$ 和 $\widetilde{\pi} \in$ Irr^{gen}(Sp(W))，我们定义重数

$$m(\pi \boxtimes \widetilde{\pi}) = \dim \mathrm{Hom}_H(\pi \boxtimes \widetilde{\pi}, \omega_\psi)\,. \tag{1.0.1}$$

众所周知的重数一定理断言

$$m(\pi \boxtimes \widetilde{\pi}) \leqslant 1.$$

该定理由 [SZ12、LS13] 证明。局部 Gan–Gross–Prasad 猜想对这一重数一定理作出了细化，精确描述了属于一般 L-参数包的 $m(\pi \boxtimes \widetilde{\pi})$ 在 π，$\widetilde{\pi}$ 时的行为。

为陈述精确的猜想，我们先回顾局部朗兰兹对应（简称“LLC”）。我们用 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 表示 $\mathbb{R}$的魏尔群。对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的连通约化群 G 以及一个局部 L-参数

$$\phi : \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L G,$$

存在 Irr($G(\mathbb{R})$) 的一个有限子集 $\Pi_\phi(G)$，称为与 ϕ对应的 L-包 G。遵循 Vogan 的工作 [Vog93], ，附属于 ϕ的 Vogan L-包定义为

$$\Pi_\phi = \bigsqcup_{G'} \Pi_\phi(G'),$$

其中 G' 遍历 G的所有纯内形式。使用 Π_ϕ 的优点在于，固定 G的一个拟分裂纯内形式 G^* 上的 Whittaker 数据 $\mathfrak{w}$ 后，存在一个双射

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{w}} : \Pi_\phi \longleftrightarrow \widehat{\mathcal{S}_\phi}, \qquad \pi \longleftrightarrow \eta_\pi,$$

$\widehat{\text{}}$其中 $\mathcal{S}_\phi$ 表示连通分支群的特征标集合

$$\mathcal{S}_\phi := \pi_0\left(\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}(\phi))\right).$$

$\widetilde{\text{}}$在 [AB98], 中，Adams 和 Barbasch 还利用局部 Shimura–Waldspurger 对应，将局部朗兰兹对应推广到元辛群 Sp(W)。我们简要回顾他们的构造。假设 dim $W = 2n$，并令 V^+为 $\mathbb{R}$上的一个分裂二次空间，其维数为$V^+ = 2n+1$，且 disc(V^+) $= 1$。Shimura–Waldspurger 对应给出一个双射

$$\theta_{V,W,\psi} : \mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)) \longleftrightarrow \coprod_{\substack{\dim V = 2n+1 \\ \mathrm{disc}(V)=1}} \mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(V)).$$

注意，这些维数为$V = 2n+1$ 且判别式为V的二次空间 $V = 1$ 恰好参数化了 SO(V^+) 的所有$\widetilde{\text{}}$纯内形式。因此，可以将 Sp(W) 的 L 群定义为与 SO(V^+) 的 L 群$\widetilde{\text{}}$相同。给定 Sp(W) 的一个 L 参数 ϕ，也可以将 ϕ 视为 SO(V^+) 的一个 L 参数。于是，我们将（Vogan）L-包定义为

$$\Pi_\phi(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)) = \left\{\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)) \,\middle|\, \theta_{V,W,\psi}(\pi) \in \Pi_\phi\right\}.$$

对于 $\pi \in \Pi_\phi$(Sp(W))，我们定义

$$\eta_\pi := \mathcal{J}_{\mathfrak{w}}\left(\theta_{V,W,\psi}(\pi)\right) \in \widehat{\mathcal{S}_\phi}.$$

这给出了一个自然的双射

$$\pi \in \Pi_\phi(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)) \quad \longleftrightarrow \quad \eta_\pi \in \widehat{\mathcal{S}_\phi}.$$

本文的主要结果是辛–拟辛傅里叶–雅可比模型的局部 Gan–Gross–Prasad 猜想 [GGP12，猜想 17.1, 17.3] 中所谓的“基本温和情形”。

定理 1.0.1。 以下陈述成立：

(1) 重数一： 对于 $\mathrm{Sp}(W)$ 的每个温和 L 参数 ϕ 以及 $\mathrm{Sp}(W)$的每个温和 L-$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$参数 $\widetilde{\phi}$，我们有

$$\sum_{\pi\in\Pi_\phi}\sum_{\widetilde{\pi}\in\Pi_{\widetilde{\phi}}} m(\pi\boxtimes\widetilde{\pi}) = 1.$$

(2) ***ε*-二分性**： 满足以下条件的唯一一对 $(\pi,\widetilde{\pi}) \in \Pi_\phi \times \Pi_{\widetilde{\phi}}$ 为

$$m(\pi\boxtimes\widetilde{\pi}) = 1$$

对应于连通分支群的区分特征标

$$\eta_\pi \times \eta_{\widetilde{\pi}} = \eta_{\widetilde{\phi}} \times \eta_\phi,$$

其中，$\eta_{\widetilde{\phi}} \times \eta_\phi$ 按照（*3.1.1*）中的方式由局部根数定义。

我们应当指出，局部 Gan–Gross–Prasad 猜想最初是在更一般的背景下提出的。其设置有几种，大体上可分为贝塞尔模型 和傅里叶–雅可比模型。

- **贝塞尔模型** 涉及特殊正交群和酉群。对于特殊正交群，这些模型通常称为局部 *Gross–Prasad* 猜想，最初由 [GP92,GP94] 引入。

- **傅里叶–雅可比模型** 涉及辛–元辛群和酉群。$\widetilde{\ }$在辛-元辛情形中，可以考虑形如 Sp(W) × Sp(W') 的群，其中 W 和 W' 的维数不一定相同；此外，也可以考虑一般 L-参数，而非温和 L-参数。本文所研究的情形，即 $W = W'$ 和 L-参数均为温和的情形，称为（傅里叶-雅可比模型的）基本 tempered 情形。

该猜想的一般形式可以归结为基本温和情形：当基域为非阿基米德时，这一归结见于 [GGP12, 定理 15.1，16.1]；当基域为阿基米德时，则见于第一作者的工作 [Che23]。

在非阿基米德局部域上，局部 Gan-Gross-Prasad 猜想在所有情形下均已得到证明，相关工作包括 Waldspurger [Wal10, Wal12a,Wal12b, Wal12c,Wal12d], Mœglin–Waldspurger[MW12], Beuzart–Plessis [BP14, BP16], Gan–Ichino [GI16] 以及 Atobe [Ato18]。

在复数域 $\mathbb{C}$上，由于（Vogan）L-包只含一个元素， [Che23，定理 A] 中的重数公式蕴含了局部 Gan-Gross-Prasad 猜想。

在实数域 $\mathbb{R}$ 上，该猜想目前的情况如下：

- 对于酉群的贝塞尔模型，Beuzart–Plessis 在 [BP14, BP16] 中证明了温和 L 参数情形下猜想的重数一部分。H. He 在 [He17] 中证明了离散 L-参数情形下的完整猜想，而 Xue 在 [Xue23] 中证明了温和 L-参数情形下的完整猜想。 [He17] 和 [Xue23] 都以 theta 对应作为主要工具。Xue 在 [Xue20] 中利用 Schwartz 同调将这些结果推广到一般 L-参数。

- 按照 Waldspurger 的方法，温和 L 参数情形下的局部 Gross–Prasad 猜想已在 [Luo20,CL22], 中得到证明。第一作者在 [Che23] 中将这些结果推广到一般 L-参数。

- 对于酉群的傅里叶–雅可比模型，Xue 在 [Xue24] 中证明了该猜想。他首先利用（几乎）等秩 theta 对应，将基本温和情形归约为酉群的贝塞尔模型，随后采用与 [Xue20] 类似的策略，将结果推广到一般 L-参数。

目前唯一尚未解决的情形是辛–元辛群的傅里叶–雅可比模型。本文证明了基本温和情形下的猜想。结合 [Che23], 的归约结果，这解决了局部 Gan–Gross–Prasad 猜想最后一个尚未解决的情形，从而为这一长期研究计划画上句号。

接下来，我们概述证明定理 1.0.1 的策略。 [GI16, Ato18] 的方法（适用于非阿基米德局部域）可借助（几乎）等秩 theta 对应，将傅里叶–雅可比模型归约为贝塞尔模型。该方法需要两个关键要素：

- 温和表示的“大 theta 提升”的不可约性；以及
- 用 L 参数描述 theta 提升（即所谓的 Prasad 猜想 ure).

然而，在实数域上，（几乎）等秩情形中“大 theta 提升”的不可约性一般尚不清楚。为绕过这一困难，我们转而采用稳定范围 theta 提升，其“大 theta 提升”的不可约性已在 [LM15]中得到确立。采用稳定范围 theta 提升，自然引出了某些非温和 Gan–Gross–Prasad 问题（参见 [GGP20]），包括 Bessel 情形和 Fourier–Jacobi 情形。随后，我们通过非温和约化将这些非温和情形与温和情形联系起来，这推广了 [MW12, §1.4]中的论证，将其从非阿基米德情形推广到实数域 $\mathbb{R}$。我们希望本文的方法能为非温和 Gan–Gross–Prasad 问题提供一些启发。还需指出，李哲和王善文也在研究 Fourier–Jacobi 模型的基本 tempered 情形，但采用了不同的方法。

本文结构安排如下。第 2 节回顾本文涉及各群的局部 Langlands 对应。第 3 节回顾局部 Gross–Prasad 猜想以及关于辛–拟辛傅里叶–雅可比模型的局部 Gan–Gross–Prasad 猜想的表述。第 4 节介绍一些施瓦茨分析的基本概念，以及本文将用到的 theta 对应的性质。第 5 节证明猜想的唯一性部分，即：若 Vogan L-包中存在一对表示 $(\pi,\ \widetilde{\pi})$，它们具有非零的傅里叶–雅可比模型，则这对表示必定是由 (3.1.1) 中定义的区分特征标所确定的表示。最后，在第 6 节中，我们证明傅里叶–雅可比模型的存在性，即每个 Vogan L-包中确实存在一对 $(\pi,\ \widetilde{\pi})$，具有非零的傅里叶–雅可比模型。结合第 5 节和第 6 节的结果，我们完成定理 1.0.1 的证明。

记号。我们在引言末尾规定一些记号和约定。本文始终固定一个非平凡的加法特征 ψ of $\mathbb{R}$。对于任意 $a \in \mathbb{R}^{\times}$，我们定义 $\psi_a(x) = \psi(ax)$ for$x \in \mathbb{R}$。对于 Nash 群 G、其闭 Nash 子群 H以及表示 σ of H，我们分别用 $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ 和 $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ 表示从 H 到 G的通常归一化光滑诱导和归一化 Schwartz 诱导。在主定理的证明中，我们还将使用非归一化诱导，分别记为 $\mathfrak{Ind}$ 和 $\mathfrak{ind}$ 。由于我们将研究经典群，因此采用标准记号

$\pi_1 \times \pi_2$ 和 $\tau \rtimes \pi$

表示一般线性群和经典群的归一化抛物诱导。本文中的所有张量积均应理解为完备张量积。

致谢。第一作者获得欧盟“地平线2020”研究与创新计划玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号：101034255）的资助。第三作者获得西蒙斯基金会的资助。作者感谢耿志斌、李哲、王善文、Hang Xue 和应浩的有益讨论。

2. Local Langlands correspondence

本节将遵循 [GGP12] 和 [Vog93]，回顾 $\mathbb{R}$ 上特殊正交群、辛群和元辛群的 Vogan L-包概念。

2.1. 韦伊表示 群与 L 参数。

回忆一下，魏尔群 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ of $\mathbb{R}$ 定义为

$$\mathrm{W}_{\mathbb{R}} := \mathbb{C}^{\times} \sqcup \mathbb{C}^{\times} j,$$

其中 $j^2 = -1$ 和 $j \cdot z \cdot j^{-1} = \bar{z}$ 对应于 $z \in \mathbb{C}^{\times}$。存在一个同构 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{R}^{\times}$，其中上标“ab”表示阿贝尔化。记 $\mathbb{1}$ 和 sgn 分别为 $\mathbb{R}^{\times}$ 上的平凡特征和符号特征，并通过上述同构将它们视为 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 上的特征。对于 $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，我们定义一个二维诱导表示

$$D_x = \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^{\times}}^{\mathrm{W}_{\mathbb{R}}} \left(\frac{z^{2x}}{|z|^x} \right).$$

那么 $D_x \cong D_{-x}$，且除非 $x = 0$，否则它们不可约；此时 $D_0 \cong \mathbb{1} \oplus \mathrm{sgn}$。此外，$D_x$ 是正交的当且仅当 $x \in \mathbb{Z}$，而 D_x 是辛的当且仅当 $x \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$。$\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的任何不可约自对偶表示要么是

- 1 维的，它通过 $\mathrm{W}_{\mathrm{ab}_{\mathbb{R}}} \cong \mathbb{R}^*$ 因子化，因此等于平凡特征 $\mathbb{1}$ 或符号特征 sgn；要么
- 2维，且同构于某个 $D_x x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$。

对于 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的有限维表示 M，我们将 $\epsilon(M, \psi)$ 定义为 [Jac09, §16] 中定义的局部根数。这些局部根数由以下规则确定：

(1) 对于 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的两个表示 M_1 和 M_2，有

$$\epsilon(M_1 \oplus M_2, \psi) = \epsilon(M_1, \psi) \cdot \epsilon(M_2, \psi); \tag{2.1.1}$$

(2) 设 $\psi_a(x) = \psi(ax)$，则有

$$\epsilon(M, \psi_a) = \det M(a) \cdot \epsilon(M, \psi); \tag{2.1.2}$$

(3) 令 $\psi_0(x) = e^{2\pi i x}$，则与 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的不可约表示相关联的局部根数为

$$\epsilon(M, \psi_0) = \begin{cases} (-i)^{\varepsilon} & \text{if } M = \mathrm{sgn}^{\varepsilon} |\cdot|^s, \\ (-i)^{2|x|+1} & \text{if } M = D_x |\cdot|^s, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

其中 $\varepsilon \in \{0, 1\}$、$x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 和 $s \in \mathbb{C}$。

设 G 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连通约化代数群。我们用 $\widehat{G}$ 表示 G 的朗兰兹对偶群，用 ${}^L G := \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 表示 G 的 L 群。我们称连续同态

$$\phi : \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L G$$

是 G 的 L 参数，当且仅当：

- 像 $\mathrm{Im}(\phi)$ 中的元素 $\subset {}^L G$ 是半单的；

- ϕ 与投影映射 ${}^LG \to$Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$) 的复合是自然投影映射 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to$Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$)。

令 $\widehat{\ }$ $\Phi(G)$ 表示 G-共轭类的集合，其中包含关于 G的 L 参数。若 Im(ϕ) 有界，则称 L 参数 ϕ 为**温和**。我们用 $\Phi_{\mathrm{temp}}(G)$ 表示 G 的温和 L-参数共轭类的子集。对于 L 参数 ϕ，我们用 $S_\phi = \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}(\phi))$ 表示 ϕ 在 G 中的像的$\widehat{\ }$中心化子，并令 $\mathcal{S}_\phi := \pi_0(S_\phi)$。

2.2. **经典群的局部朗兰兹对应**。令 G为定义在 $\mathbb{R}$上的连通约化群。由 R. Langlands 在 [Lan73]以及 Shelstad 在 [She08a,She08b,She10], 建立的著名局部朗兰兹对应断言:

(1) 存在一个有限多对一的满射映射

$$\mathcal{L} : \bigsqcup_{G'} \mathrm{Irr}(G') \longrightarrow \Phi(G),$$

其中 G' 遍历 G的纯内形式的同构类，而 Irr(G') 是 $G'(\mathbb{R})$ 的不可约 Casselman–Wallach 表示的集合（见 [Cas89], [Wal94]）。对于每个$\phi \in \Phi(G)$，我们将与 ϕ 和 $\Pi_\phi(G')$ 相关联的 Vogan L-包记为 $\Pi_\phi = \mathcal{L}^{-1}(\phi)$，并将$\Pi_\phi \cap$Irr($G'$) 中与 ϕ相关联的局部 L-包记为 $= G'$。映射 $\mathcal{L}$ 保持温和性，即当且仅当 $\mathcal{L}(\pi)$ 是温和 L-参数时，$\pi \in$Irr(G') 才是温和的。

(2) 设 G^* 是 G的一个拟分裂纯内形式。G^* 的一个 **Whittaker 数据** 是由以下配对构成的共轭类：$\mathfrak{w} = (B, \mu)$，其中 B 是 G^* 的一个 $\mathbb{R}$-有理 Borel 子群，其幺幂根为 U，而 μ是 $U(\mathbb{R})$ 的一个泛型特征。固定 G^*的一个 Whittaker 数据 $\mathfrak{w}$，则存在一个双射

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{w}} : \Pi_\phi \longrightarrow \mathrm{Irr}\left(\mathcal{S}_\phi\right),$$

使得 Π_ϕ 中唯一的 $\mathfrak{w}$-泛型表示对应于 $\mathcal{S}_\phi$ 的平凡特征。

当 G 是经典群时，给定一个 $\phi \in \Phi(G)$ 的 L 参数，通过将 ϕ 与 ${}^LG$ 的标准表示复合，我们通常可以将 ϕ 视为 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的一个满足某些额外自对偶条件的半单表示。现在，我们遵循 [GGP12, §10, 11]，更具体地描述特殊正交群和辛群的 L 参数、分支群、纯内形式及惠特克数据。

辛群。设 $(W, \langle , \rangle)$ 是一个 $2n$ 维辛空间，且 $G =$Sp(W)。那么 $\widehat{G} =$ SO$_{2n+1}(\mathbb{C})$ 和 ${}^LG =$ SO$_{2n+1}(\mathbb{C}) \times$Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$)。

- 一个 G 的 L 参数 ϕ 给出 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的一个正交表示 M，其维数 $\dim M = 2n+1$，且行列式 $\det(M) = 1$。令 $\Phi(G)$ 表示 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的 $(2n+1)$ 维正交表示（行列式为 1）的同构类集合。那么映射 $\phi \mapsto M$ 给出了 $\Phi(G)$ 与 $\Phi(G)$ 之间的双射。在后续章节中，我们常通过上述双射将 M 称为 G 的 L 参数，并令 $\overline{\Pi}_M(G') = \Pi_\phi(G')$。
- 我们用 C_M 表示表示 M 的中心化子，并令 $A_M = \pi_0(C_M)$ 表示 C_M 的分支群。我们还令

$$C_M^+ = \{a \in C_M | \det(a) = 1\}$$

并且 A_M^+ 是 A_M中 C_M^+ 的像。由于 M 是正交的，它可分解为

$$M = P + \sum_i m_i M_i + P^\vee,$$

其中 M_i 是 M的两两不同的不可约正交子表示， m_i 是 M中 M_i 的重数，并且 P 的任意子表示都不是正交的。于是

$$A_M \cong \prod_i (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\, a_i$$

具有一个典范基 $\{a_i\}$ ，对应于正交子表示 $\{M_i\}$，而 A_M^+是映射的核

$$A_M \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad a_i \mapsto (-1)^{\dim M_i}.$$

特别地，A_M^+是 A_M的指数为 2 的子群，因为存在某个 M_i是一维的。根据 [GGP12 定理 8.1], ，我们有 $\mathcal{S}_\phi \cong A_M^+$。对于每个 $c \in \mathbb{R}^\times$，我们定义一个特征 $\delta_{M,\,c}$ ，其定义在C_M^+ 上，令

$$\delta_{M,c}(a) = \det\left(M^a\right)(c), \tag{2.2.1}$$

其中$a \in C_M^+$，且 M^a是 M中 a的（-1）-特征子空间。这个特征 $\delta_{M,\,c}$通过A_M^+分解，因此我们将其视为A_M^+上的特征。

- G 唯一的纯内形式就是其本身，因此我们有

$$\Pi_\phi = \Pi_\phi(G).$$

- 根据 [GGP12, §12], ， $G = \mathsf{Sp}(W)$ 的惠特克数据集与 $\mathbb{R}$ 的非平凡特征 ψ 的 $\mathbb{R}^{\times 2}$-轨道集之间存在双射。本文固定一个非平凡特征 ψ，并将与之对应的 $G = \mathsf{Sp}(W)$ 的惠特克数据记为 $\mathfrak{w}$ 。

- 设 $\pi \in \Pi_M$。由 [Kal13, Theorem 4.9]) 可得 $\pi^\vee \in \Pi_M$，并且

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{w}}(\pi^\vee) = \mathcal{J}_{\mathfrak{w}}(\pi) \otimes \delta_{M,-1}. \tag{2.2.2}$$

奇数维特殊正交群。 设 (V, q) 是一个 $(2n+1)$ 维二次空间，且$G = \mathsf{SO}(V)$。回顾一下， V 的判别式定义为

$$\mathrm{disc}(V) = (-1)^n \det\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)_{i,j} \in \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times 2}, \tag{2.2.3}$$

其中 $\{e_i\}$ 是 V 的一组正交基，并且

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right), \quad \text{for } x, y \in V \tag{2.2.4}$$

是与 q 相关联的对称双线性形式。在这种情况下，我们有 $\widehat{G} = \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 和 ${}^L G = \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \times \mathsf{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$。

- 一个 L 参数 ϕ 的 G 导出 $\mathsf{W}_\mathbb{R}$ 的一个辛表示 M，其维数为 $\dim M = 2n$。令 $\Phi(G)$ 为 $\mathsf{W}_\mathbb{R}$的$2n$维辛表示的同构类集合。那么映射 $\phi \mapsto M$ 给出 $\Phi(G)$ 与 $\Phi(G)$ 之间的一个双射。在后续章节中，我们常通过上述双射将 M 视为 G 的一个 L 参数，并令 $\Pi_M(G) = \Pi_\phi(G)$。

- 我们按照辛群情形（第2.2节）中的相同方式定义群 C_M， C_M^+， A_M， A_M^+。由于 M 是辛的，它可以分解为

$$M = P + \sum_i m_i M_i + P^\vee,$$

其中， M_i 是 M中两两不同的不可约辛子表示， m_i 是 M中 M_i 的重数，且 P 的任何子表示都不是辛的。于是

$$A_M \cong \prod_i (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\, a_i,$$

其典范基为 $\{a_i\}$，对应于辛子表示 $\{M_i\}$；在此情形下，$A_M^+ = A_M$，因为每个 M_i 都是二维的。根据 [GGP12，定理 8.1]，我们有$\mathcal{S}_\phi \cong A_M^+$。

- G 的纯内形式具有如下形式：$G' = \mathrm{SO}(V')$，其中 V' 是一个维数和判别式均与 V相同的二次空间。若 $G = \mathrm{SO}(p,\ q)$且 $p+q = 2n+1$，则这些V' 由满足下列条件的指标（p'，q'）参数化：

$$p' + q' = 2n+1, \quad \text{and} \quad p' \equiv p \mod 2.$$

我们有

$$\Pi_\phi = \bigsqcup_{V'} \Pi_\phi(\mathrm{SO}(V')).$$

- 根据 [GGP12，第12],节，Whittaker 数据有唯一的选择，我们将其记为 $\mathfrak{w}'$。

偶数维特殊正交群。设（V，q）是一个 $2n$维二次空间，且 $G = \mathrm{SO}(V)$。判别式 $\mathrm{disc}(V)$ 定义为

$$\mathrm{disc}(V) = (-1)^n \det\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)_{i,j} \in \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times 2}, \tag{2.2.5}$$

其中 $\{e_i\}$ 是 V的一个正交基，且 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是与方程（2.2.4）中定义的 q 相关联的对称双线性形式。V 的判别式特征为

$$\chi_V = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{if } \mathrm{disc}(V) \in \mathbb{R}^{\times 2}, \\ \mathrm{sgn} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，$\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ 和 ${}^L G = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$。$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 在 $\mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ 上的作用在 $\mathrm{disc}(V) \in \mathbb{R}^{\times 2}$ 时是平凡的，否则则非平凡。

- 一个 ϕ 的 L 参数 G 给出 $\mathrm{W}_\mathbb{R}$ 的一个正交表示 M，其维数为 $\dim M = 2n$，且行列式 $\det(M) = \chi_V$。令 $\Phi(G)$ 表示 $\mathrm{W}_\mathbb{R}$ 上 $2n$ 维正交表示的同构类集合，其中行列式为 χ_V；令 $\Phi^e(G)$ 表示 $\Phi(G)$ 的子集，由包含一个一维正交子表示的那些 M 组成。映射 $\phi \mapsto M$ 从 $\Phi(G)$ 到 $\Phi(G)$ 是满射。一个正交表示 $M \in \Phi(G)$ 的纤维在 $M \in \Phi^e(G)$ 时包含一个元素，否则包含两个元素。本文只需考虑其对应表示 $M \in \Phi^e(G)$ 的 L 参数 ϕ，因此在后续章节中，我们仍可通过上述映射将 M 称为 G 的 L 参数，并记 $\Pi_M(G) = \Pi_\phi(G)$，而不会引起混淆。

- 我们按照辛群情形下第2.2节的相同方式定义群 C_M, C_M^+, A_M, A_M^+。由于 M 是正交的，它可以分解为

$$M = P + \sum_i m_i M_i + P^\vee,$$

其中 M_i 是 M的两两不同的不可约正交子表示，m_i 是 M中 M_i 的重数，并且 P 的任何子表示都不是正交的。于是

$$A_M \cong \prod_i (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\, a_i,$$

具有一个典范基 $\{a_i\}$，其对应于正交子表示 $\{M_i\}$。根据 $M \in \Phi^e(G)$ 是否成立，A_M^+ 要么是 A_M 的指数为 2 的子群，要么就是其本身。根据 [GGP12，定理 8.1]，我们有 $\mathcal{S}_\phi \cong A_M^+$。对于每个 $c \in \mathbb{R}^\times$，我们按照（2.2.1）中的相同方式定义$\delta_{M:\ c}$ 的一个特征A_M^+。

• G 的纯内形式为 $G' = \mathrm{SO}(V')$，其中 V' 是一个与 V 具有相同维数和判别式的二次空间。如果 $G = \mathrm{SO}(p,\ q)$ 且 $p+q = 2n$，那么这些 V' 由指标 $(p',\ q')$ 参数化，使得

$$p' + q' = 2n, \quad \text{and} \quad p' \equiv p \mod 2.$$

我们有

$$\Pi_\phi = \bigsqcup_{V'} \Pi_\phi(\mathrm{SO}(V')).$$

• 设 $G^* = \mathrm{SO}(V^+)$ 是 G 的拟分裂纯内形式。根据 [GGP12，第 §12]，节，G^* 的惠特克数据集合与满足 $L^\perp$ 分裂的非各向同性直线$L \subset V^+$ 的 $\mathrm{SO}(V^+)$-轨道集合之间存在双射。可以验证，两个这样的非各向同性直线 L 和 L' 属于同一轨道，当且仅当 $\mathrm{disc}(L) = \mathrm{disc}(L')$。若 $\mathrm{disc}(L) = c$，我们将对应于 L 的惠特克数据记为 $\mathfrak{w}_c$。注意，$\mathfrak{w}_c$ 不依赖于加法特征 ψ 的选择。

• 对于两个惠特克数据 $\mathfrak{w}_c$ 和 $\mathfrak{w}_{c'}$，其中 $c,\ c' \in \mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)_2$，惠特克数据选择的差异由以下公式决定（见 [Kal13，定理 3.3]）：

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{w}_{c'}}(\pi) = \mathcal{J}_{\mathfrak{w}_c}(\pi) \otimes \delta_{M,c'/c}, \quad \text{for } \pi \in \Pi_\phi. \tag{2.2.6}$$

2.3. 元辛群的局部朗兰兹对应。 设 W 为一个 $2n$维辛空间，且 $G = \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$。按照 [GGP12, §11], ，我们定义 $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 和 ${}^L G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$。元辛群的 L 参数和连通分支群的具体描述与特殊奇正交群的描述一致。为加以区分，我们通常$\widetilde{}$用符号 $\widetilde{\phi}$ 表示 $G = \mathrm{Sp}(W)$ 的一个 L 参数。按照 [GGP12, §11], ，我们$\widetilde{}$利用志村–瓦尔德斯普格对应来定义 $G = \mathrm{Sp}(W)$ 的局部 Langlands 对应。回顾一下，志村–瓦尔德斯普格对应 [AB98]给出一个双射

$$\theta_{V,W,\psi} : \mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)) \longrightarrow \coprod_{\substack{\dim V = 2n+1 \\ \mathrm{disc}(V)=1}} \mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(V)). \tag{2.3.1}$$

将这个双射与特殊奇正交群的局部朗兰兹对应结合起来，我们得到一个有限对一的满射

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi : \mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)) &\longrightarrow \Phi(G) \\ \pi &\longmapsto \mathcal{L}(\theta_{V,W,\psi}(\pi)). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

$\widetilde{}$此外，由于群 $G = \mathrm{Sp}(W)$ 唯一的“纯内形式”就是其自身，我们设 $\Pi_{\widetilde{\phi}} = \Pi_{\widetilde{\phi}}(G) = \mathcal{L}_\psi^{-1}(\widetilde{\phi})$。通过设定以下内容，我们还获得了每个参数包的参数化

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\psi : \Pi_{\widetilde{\phi}} &\longrightarrow \widehat{\mathcal{S}_{\widetilde{\phi}}} \\ \pi &\longmapsto \mathcal{J}_{\mathfrak{w}}(\theta_{V,W,\psi}(\pi)). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

3. Local Gan-Gross-Prasad Conjecture

本节根据 [GGP12] 回顾辛–元辛傅里叶-雅可比模型和特殊正交贝塞尔模型的局部 Gan-Gross-Prasad 猜想的表述。在本节中，我们沿用第 2 节的记号。

3.1. 辛-元辛情形。 在本小节中，我们陈述辛-元辛情形下的猜想。设 W 是定义在 $\mathbb{R}$上的辛空间。

区分特征标。 我们首先回顾 [GGP12，第 §17] 节中定义的区分特征标。

设 $\widetilde{\phi}\colon \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(M)$（分别地，$\phi\colon \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{SO}(N)$）是 $\mathrm{Sp}(W)$（分别地，$\mathrm{Sp}(W)$）的温和 L-参数，其中 M（分别地，N）是与 $\widetilde{\phi}$（分别地，ϕ）相关联的 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的辛（分别地，正交）表示。置 $N_1 = N \oplus \mathbb{1}$。我们如下定义 C_M 的一个特征标 η_{N_1} 以及 $C_{N_1}^+$ 的一个特征标 η_M：对于 $a \in C_M$ 和 $b \in C_{N_1}^+$，置

$$\begin{cases} \eta_{N_1}(a) = \epsilon\left(M^a \otimes N_1, \psi\right) \cdot \det\left(M^a\right) (-1)^{\frac{\dim N_1}{2}} \cdot \det\left(N_1\right) (-1)^{\frac{\dim M^a}{2}}; \\ \eta_M(b) = \epsilon\left(M \otimes N_1^b, \psi\right) \cdot \det\left(M\right) (-1)^{\frac{\dim N_1^b}{2}} \cdot \det\left(N_1^b\right) (-1)^{\frac{\dim M}{2}}, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

其中，M^a 和 N_1^b 分别是 M 中对应于 a 的 (-1)-特征子空间，以及 N_1 中对应于 b 的 (-1)-特征子空间；$\epsilon(\cdots)$ 是由 (2.1.1) 和 (2.1.3) 定义的局部根数。特征标 η_{N_1} 和 η_M 通过 A_M 和 $A_{N_1}^+$ 分解。注意，$\mathcal{S}_{\widetilde{\phi}} \cong A_M$，且 $\mathcal{S}_\phi \cong A_N^+$ 是 $A_{N_1}^+$ 的子群。我们将 η_M 通过限制视为 $\mathcal{S}_\phi \cong A_N^+$ 上的特征标。

猜想的陈述。 投影映射和恒等映射定义了一个对角嵌入

$$\Delta : \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \longrightarrow \mathrm{Sp}(W) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W).$$

回顾一下，我们固定了一个非平凡的加法特征 ψ。它确定了 $\mathrm{Sp}(W)$ 的一个 Weil 表示 ω_ψ、$\mathrm{Sp}(W)$ 的一个 Whittaker 数据 $\mathfrak{w}$（见第 2.2 节），以及元辛群 $\mathrm{Sp}(W)$ 的局部 Langlands 对应 $\widetilde{\ }$ 中的映射 $\mathcal{J}_\psi$（见 (2.3.3)）。以下定理称为局部 Gan-Gross-Prasad 猜想的辛–元辛情形，是本文的主要结果。

定理 3.1.1。 设 $\phi : \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Sp}(M)$ 是 $\mathrm{Sp}(W)$ 的一个温和 L 参数，且 $\phi : \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{SO}(N)$ 是 $\mathrm{Sp}(W)$ 的一个温和 L 参数。设 $\widetilde{\pi} \in \Pi_{\widetilde{\phi}}$ 和 $\pi \in \Pi_\phi$。则

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)}\left(\pi \boxtimes \widetilde{\pi}, \omega_\psi\right) \neq 0 \iff \mathcal{J}_\psi\left(\widetilde{\pi}\right) \times \mathcal{J}_{\mathfrak{w}}\left(\pi\right) = \eta_{N_1} \times \eta_M,$$

其中 η_{N_1} 和 η_M 是式 (3.1.1) 中定义的特征标。

3.2. **特殊正交情形**。 本小节回顾 实数域上的局部 Gross-Prasad 猜想（即针对特殊正交群的局部 Gan-Gross-Prasad 猜想），该猜想已在 [CL22, Theorem 2.3.2] 中证明。设 V 是 实数域上的一个二次空间，V' 是 V 的一个余维为 1 的非退化子空间。假设 $\mathrm{SO}(V)$ 和 $\mathrm{SO}(V')$ 均为拟分裂群。令 $V^{\text{偶}}$（分别地，$V^{\text{奇}}$）表示 $\{V, V'\}$ 中唯一的偶（分别地，奇）维空间。

区分特征。 我们首先回顾 [GGP12 第 §17] 节中定义的区分特征标。设 $\phi\colon \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{O}(M)$（分别地，$\phi'\colon \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Sp}(N)$）为 $\mathrm{SO}(V^{\text{偶}})$（分别地，$\mathrm{SO}(V^{\text{奇}})$ 的温和 L 参数，其中 M（分别地，N）是与 ϕ（分别地，ϕ'）相关联的 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的正交（分别地，辛）表示。我们定义 C_M^+ 的一个特征 η_N 和 C_N 的一个特征 η_M 如下：对每个 $a \in C_M^+$ 和 $b \in C_N$，令

$$\begin{cases} \eta_N(a) = \epsilon\left(M^a \otimes N, \psi\right) \cdot \det\left(M^a\right) (-1)^{\frac{\dim N}{2}} \cdot \det\left(N\right) (-1)^{\frac{\dim M^a}{2}}; \\ \eta_M(b) = \epsilon\left(M \otimes N^b, \psi\right) \cdot \det\left(M\right) (-1)^{\frac{\dim N^b}{2}} \cdot \det\left(N^b\right) (-1)^{\frac{\dim M}{2}}, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中，M^a 和 N^b 分别是 M 中 a 和 N 中 b 对应的 (-1) 特征子空间，而 $\varepsilon(\cdots)$ 是公式 (2.1.1) 和公式 (2.1.3) 中定义的局部根数。特征标 η_N 和 η_M 通过 $A_M^+ \cong \mathcal{S}_\phi$ 和 $A_N \cong \mathcal{S}_{\phi'}$ 分解。

猜想陈述。 若 $G = \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{SO}(V')$的一个纯内形式 $G_\alpha = \mathrm{SO}(V_\alpha) \times \mathrm{SO}(V'_\alpha)$满足存在二次空间的嵌入 $V'_\alpha \hookrightarrow V_\alpha$，使得 $V_\alpha / V'_\alpha \cong V/V'$作为二次空间成立，则称其为相关的。若此条件成立，则存在一个自然嵌入 $\mathrm{SO}(V'_\alpha) \hookrightarrow \mathrm{SO}(V_\alpha)$。因此，我们有一个对角嵌入

$$\Delta : \mathrm{SO}(V'_\alpha) \longrightarrow \mathrm{SO}(V_\alpha) \times \mathrm{SO}(V'_\alpha).$$

回想一下，$\mathrm{SO}(V^{\mathrm{odd}})$ 存在唯一的 Whittaker 数据选择，记作 $\mathfrak{w}'$。令$c = \mathrm{disc}(V_{奇})$。遵循 [GGP12，第17], 节中我们将使用 $\mathrm{SO}(V^{\mathrm{even}})$ 的 Whittaker 数据 $\mathfrak{w}_c$（见第2.2节），以确定局部 Langlands 对应中 L-包的内部参数化。以下定理称为特殊正交群的局部 Gan-Gross-Prasad 猜想，已由 [CL22，定理 2.3.2]证明。

定理 3.2.1。 设 $\phi : \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{O}(M)$ 是 $\mathrm{SO}(V_{偶})$ 的一个温和 L-参数，且 $\phi' : \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Sp}(N)$ 是 $\mathrm{SO}(V_{奇})$ 的一个温和 L- 参数。设 $\sigma^{\mathrm{even}} \boxtimes \sigma^{\mathrm{odd}}$ 是相关纯内形式 $G_\alpha = \mathrm{SO}(V_\alpha^{\mathrm{even}}) \times \mathrm{SO}(V_{奇\,\alpha})$ 的一个不可约温和表示，满足 $\sigma \in \Pi_\phi$ 且 $\sigma' \in \Pi_{\phi'}$。则有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(V'_\alpha)}\left(\sigma^{\mathrm{even}} \boxtimes \sigma^{\mathrm{odd}}, \mathbb{C}\right) \neq 0 \iff \mathcal{J}_{\mathfrak{w}_c}\left(\sigma^{\mathrm{even}}\right) \times \mathcal{J}_{\mathfrak{w}'}\left(\sigma^{\mathrm{odd}}\right) = \eta_N \times \eta_M, \tag{3.2.2}$$

其中，η_N 和 η_M 是（3.2.1）中定义的特征标，且 $c =$ 判别式（V^{odd}）。

4. Preliminaries and Toolkits

本节回顾后续证明所需的一些预备知识和工具。

4.1. Schwartz 诱导与博雷尔引理。 本小节回顾施瓦茨分析的一些基本概念。我们将在所谓的几乎线性 Nash 群的框架下进行讨论，即允许到某个一般线性群的同态且核为有限群的 Nash 群。本文中所涉及的所有群（正交群、辛群、拟辛群和雅可比群，以及它们的闭子群）都属于这一类群。设 G 为一个几乎线性 Nash 群，我们用 $\mathcal{S}\mathrm{mod}(G)$表示 G的具有中等增长的 Fr´echet 表示范畴。

设 H 是一个 G的纳什子群，且（π_H， V） $\in \mathcal{S}\mathrm{mod}(H)$。那么存在一个连续的映 p

$$I : \mathcal{S}(G, V) \longrightarrow C^\infty(G, V), \quad f \longmapsto \left(g \mapsto \int_H \pi_H(h) f\left(h^{-1} g\right)\, dh\right)$$

从 Schwartz 函数空间 $\mathcal{S}(G,\ V)$ 到光滑函数空间 $C^\infty(G,\ V)$，其像落在通常的非归一化诱导表示 $\mathfrak{Ind}_H^G V$ 中。赋予 I 以 $\mathcal{S}(G,\ V)$ 的商拓扑后，所得空间称为 π_H 的 Schwartz 诱导，记作 $\mathfrak{ind}_H^G V$。我们还将 V 从 H 到 G 的归一化 *Schwartz* 诱导定义为

$$\mathrm{ind}_H^G V \ := \ \left(\mathfrak{ind}_H^G\left(V \cdot \delta_H^{1/2}\right)\right) \cdot \delta_G^{-1/2}. \tag{4.1.1}$$

这里， δ_H 和 δ_G 分别是 H 和 G 的模特征。特别地，若 G 是约化群且 P 是 G 的抛物子群，则 $\mathrm{ind}_P^G V = \mathfrak{ind}_P^G\left(V \cdot \delta_P^{1/2}\right)$ 与通常的（归一化）抛物诱导表示一致。

对于表示 $(\pi,\ V) \in \mathcal{S}\,\mathrm{mod}\,(G)$，记

$$V_G = V \big/ \left\langle \pi(g)\, v - v \;\middle|\; g \in G,\ v \in V \right\rangle,$$

赋予 带有商拓扑。它可能不是豪斯多夫的。根据定义，我们有 e

$$V_G^* \cong \mathrm{Hom}_G\left(V, \mathbb{1}_G\right),$$

其中，V_G^* 是 V_G的连续线性对偶，而 $\mathbb{1}_G$ 是 G的平凡表示。下一个命题是施瓦茨分析背景下弗罗贝尼乌斯互反律的一个版本。读者可参阅 [CS21，第6.6命题、第6.8] 定理，以了解更多细节。

Pr命题 4.1.1. 设 H 是 G 的纳什子群，且 $(\pi, V) \in \mathcal{S}\mathrm{mod}(H)$。 n

$$\left(\left(\mathfrak{ind}_H^G (V \otimes \delta_H)\right) \otimes \delta_G^{-1}\right)_G \simeq V_H.$$

推论 4.1.2. 设 G 是约化纳什群， H 是 G 的约化纳什子群。设 (π, V) 是 H 的卡塞尔曼-沃拉赫表示，且 (σ, W) 是 G 的卡塞尔曼-沃拉赫表示。则有

$$\mathrm{Hom}_G\left(\mathfrak{ind}_H^G(V \otimes \delta_H), W \otimes \delta_G\right) \cong \mathrm{Hom}_H\left(W^\vee\big|_H, V^\vee\right),$$

其中 $V^\vee$ 表示 V 的对偶表示， $W^\vee$ 同理。

证明。 由于 (π, V) 和 (σ, W) 是卡塞尔曼-沃拉赫表示，由 [Che23, 引理 2.2.22] 可知

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G\left(\mathfrak{ind}_H^G(V \otimes \delta_H), W \otimes \delta_G\right) &\cong \mathrm{Hom}_G\left(\mathfrak{ind}_H^G(V \otimes \delta_H) \otimes W^\vee \otimes \delta_G^{-1}, \mathbb{1}_G\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_G\left(\mathfrak{ind}_H^G\left(\left(V \otimes W^\vee\big|_H\right) \otimes \delta_H\right) \otimes \delta_G^{-1}, \mathbb{1}_G\right)\end{aligned}$$

于是由定理 4.1.1 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G\left(\mathfrak{ind}_H^G\left(\left(V \otimes W^\vee\big|_H\right) \otimes \delta_H\right) \otimes \delta_G^{-1}, \mathbb{1}_G\right) &\cong \mathrm{Hom}_H\left(V \otimes W^\vee\big|_H, \mathbb{1}_H\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_H\left(W^\vee\big|_H, V^\vee\right).\end{aligned}$$

□

在后续证明中，我们还需要进行一些轨道分析。现在我们引入一个版本的博雷尔引理，参照 [CS21，命题 8.2，8.3] 和 [Xue20，命题 2.5]。令 $\mathcal{X}$ 为纳什流形， $\mathcal{Z}$ 为闭纳什子流形。记 $\mathcal{U} = \mathcal{X} \backslash \mathcal{Z}$。令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{X}$上的温和向量丛，则 $\mathcal{U}$ 上施瓦茨截面的“零延拓”给出以下正合列:

$$0 \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \longrightarrow 0,$$

其中符号 $\Gamma^{\mathcal{S}}$ 表示取施瓦茨截面，并且

$$\Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) := \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) / \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathcal{E}).$$

令 $N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}^*$为 $\mathcal{Z}$的余法丛， $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}^*$为 $N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}^*$的复化。

命题 4.1.3。 在 $\Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ 上存在一个以 $k \in \mathbb{N}$为指标集的下降滤过

$$\Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) = \Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E})_0 \supset \Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E})_1 \supset \Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E})_2 \supset \cdots,$$

使得

$$\Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) = \varprojlim \Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) / \Gamma_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E})_k,$$

其分次块均同构于

$$\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{Z}, \mathrm{Sym}^k \mathcal{N}_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}^* \otimes \mathcal{E}\big|_{\mathcal{Z}}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

此外，若 $\mathcal{X}$ 是一个 G-纳什流形， $\mathcal{Z}$ 在 G-作用下保持稳定，且 $\mathcal{E}$ 是一个温和的 G-丛，那么该滤过在 G-作用下保持稳定。

4.2. **雅可比群的表示论**。在本小节中，我们回顾韦伊表示和雅可比群表示论的一些预备知识。

韦　　韦伊表示。设 W 是定义在 $\mathbb{R}$上的辛向量空间。我们记 b　　y

$$\mathrm{Hei}(W) := \mathbb{G}_a \oplus W$$

与 W 关联的海森堡群，其乘法律为

$$(z_1, w_1) + (z_2, w_2) = \left(z_1 + z_2 + \frac{1}{2} \langle w_1, w_2 \rangle , w_1 + w_2 \right).$$

辛群 Sp(W) 通过以下方式自然作用于 Hei(W)：

$$g \cdot (z, w) = (z, g \cdot w), \quad \text{for } z \in \mathbb{G}_a,\ w \in W,\ g \in \mathrm{Sp}(W). \tag{4.2.1}$$

我们将元辛雅可比群定义为

$$\widetilde{\mathrm{J}}(W) := \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \ltimes \mathrm{Hei}(W),$$

~~其中，Sp(W) 在 Hei(W) 上的作用通过 Sp(W) 在 Hei(W) 上的自然作用分解，该自然作用由公式 (4.2.1) 给出。对于 $\mathbb{R}$ 的非平凡加法特征 ψ，根据众所周知的斯通-冯诺伊曼定理，存在唯一的、具有中心特征~~ψ的 Hei(W) 不可约表示 ω_ψ，称为 ***Weil*** 表示。该表示 ω_ψ 唯一延拓到 J(W)。稍微~~滥用记号，我们用同一符号表示其到 Sp(W) 的限制，这正是主定理中出现的表示。

傅里叶-雅可比函子。本节回顾雅可比群的表示论，并将 (1.0.1) 中的 Hom 空间重新诠释为与之相关的对象。要点在于，就雅可比群而言，该 Hom 空间与第 3.2 节回顾的贝塞尔情形完全平行。

我们沿用第 4.2 节中的记号。与 W 相关的雅可比群 定义为

$$\mathrm{J}(W) := \mathrm{Sp}(W) \ltimes \mathrm{Hei}(W),$$

其中，Sp(W) 在 Hei(W) 上的作用由公式 (4.2.1) 给出。我们将具有中心特征~~ψ的 J(W) 的中等增长光滑 Fr´echet 表示范畴记为 $\mathcal{S}\mathrm{mod}_\psi(\mathrm{J}(W))$，将 Sp($W$) 的真正光滑 Fr´echet 中等增长表示范畴记为 $\mathcal{S}\mathrm{mod}_{\mathrm{gen}}(\mathrm{Sp}(W))$。存在两个函子：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\psi : \mathcal{S}\mathrm{mod}_{\mathrm{gen}}(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)) &\longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{mod}_\psi(\mathrm{J}(W)) \\ \pi &\longmapsto \pi \otimes \omega_\psi \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\psi : \mathcal{S}\mathrm{mod}_\psi(\mathrm{J}(W)) &\longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{mod}_{\mathrm{gen}}(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)) \\ \sigma &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hei}(W)}(\omega_\psi, \sigma). \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

这些函　子称为傅里叶-雅可比函子。根据 [Sun12，命题 4.2]，我们有　　：

命题 4.2.1。这两个函子 $\mathcal{F}_\psi$ 与 $\mathcal{G}_\psi$ 互为逆范畴等价~~，分别作用于 $\mathcal{S}\mathrm{mod}_{\mathrm{gen}}(\mathrm{Sp}(W))$ 和 $\mathcal{S}\mathrm{mod}_\psi(\mathrm{J}(W))$。

回顾一下，在傅里叶-雅可比模型中（见 (1.0.1)），我们研究 Hom 空间

$$\mathrm{Hom}_H(\pi \boxtimes \widetilde{\pi}, \omega_\psi) \cong \mathrm{Hom}_H(\pi \boxtimes (\widetilde{\pi} \otimes \overline{\omega}_\psi), \mathbb{1}_H), \tag{4.2.4}$$

~~其中，$H = \Delta\mathrm{Sp}(W)$ 是将 Sp(W) 对角嵌入到 $G = \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{Sp}(W)$ 中的嵌入，$\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(W))$~~ 和 $\widetilde{\pi} \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(\mathrm{Sp}(W))$。注意，根据定理 4.2.1，张量积 $\widetilde{\pi} \otimes \omega_\psi \cong \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi})$ 可以视为 J(W) 的不可约表示。因此，若令

$$G' = \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{J}(W) \quad \text{and} \quad H' = \Delta\mathrm{Sp}(W),$$

其中， $\Delta\mathrm{Sp}(W)$ 表示将 $\mathrm{Sp}(W)$ 对角嵌入到 G' 中，那么公式（4.2.4）的右端可以改写为

$$\mathrm{Hom}_{H'}\left(\pi \boxtimes \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}),\, \mathbb{1}_H\right). \tag{4.2.5}$$

将公式（4.2.5）中的 Hom 空间与贝塞尔模型（3.2.2）进行比较，可以从启发式角度将傅里叶-雅可比模型中的雅可比群 $\mathrm{J}(W)$ 视为 $\mathrm{SO}(V)$ 的替代。另一种方法是考虑如下余秩二傅里叶-雅可比模型。令 $W^+ = W \oplus \mathcal{H}'$，其中 $\mathcal{H}'$ 是一个具有标准基 $\{e, f\}$ 的（辛）双曲平面。我们使用分解 $W^+ = \langle e\rangle \oplus W \oplus \langle f\rangle$ 将 $\mathrm{Sp}(W^+)$ 中的元素写成分块矩阵。于是，可以通过如下设定将 $\mathrm{J}(W)$ 嵌入 $\mathrm{Sp}(W^+)$:

$$g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & g & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad (z,w) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & w_e^* & z \\ & 1 & w \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{for } g \in \mathrm{Sp}(W) \text{ and } (z,w) \in \mathrm{Hei}(W).$$

这里， $w_e^* \in \mathrm{Hom}(W, \langle e\rangle)$ 定义为 $w_e^*(v) = \langle w, v\rangle \cdot e$ 其中 $v \in W$。容易验证，

$$\mathrm{J}(W) \cong \mathrm{Stab}_{\mathrm{Sp}(W^+)}(e) \tag{4.2.6}$$

通过这个嵌入。令

$$G'' = \mathrm{J}(W) \times \mathrm{Sp}\left(W^+\right) \quad \text{and} \quad H'' = \Delta\mathrm{J}(W),$$

其中 $\Delta\mathrm{J}(W)$ 表示将 $\mathrm{J}(W)$ 对角嵌入到 G'' 中。令 $\widetilde{\pi} \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}\left(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)\right)$ 和 $\pi^+ \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(W^+))$。那么， [GGP12, §12] 中定义的余秩二傅里叶-雅可比模型可以写为

$$\mathrm{Hom}_{H''}\left(\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}) \boxtimes \pi^+,\, \mathbb{1}_{H''}\right). \tag{4.2.7}$$

这同样类比于贝塞尔模型；在此情形下，雅可比群 $\mathrm{J}(W)$ 扮演 $\mathrm{SO}(V')$ 的角色。我们指出，上述 Hom 空间对应的定理 1.0.1 可归结为 (4.2.5) 的情形。关于这一步归约，请读者参见 [Che23] 。

接下来，我们定义雅可比群的“抛物诱导”概念，并证明 (4.2.2) 和 (4.2.3) 中定义的函子与两侧的“抛物诱导”相容。这里需要指出，下文定义的雅可比群的“抛物子群”并非通常意义上的抛物子群。

我们首先定义“抛物子群”的概念。考虑“极大抛物子群”的情形。回顾一下，对于经典群，极大抛物子群是格拉斯曼流形中点的稳定子；因此，我们需要为格拉斯曼流形寻找合适的替代物。对于每个 $0 \le k \le \frac{1}{2}$维 W，令 $\mathcal{F}_{W,\,k}$表示 $\mathrm{Sp}(W)$ 的旗簇，它由 W 中的 k 维各向同性子空间组成。考虑对偶典范丛

$$\mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,k} \coloneqq \left\{(X, v^*) \;\middle|\; X \in \mathcal{F}_{W,k}, v^* \in X^*\right\} \tag{4.2.8}$$

上的 $\mathcal{F}_{W,\,k}$。$\mathrm{J}(W)$ 在 $\mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,\,k}$上有一个自然的传递作用，定义如下:

$$g \cdot (X, v^*) = (g \cdot X, g \cdot v^*), \qquad \text{for } g \in \mathrm{Sp}(W);$$

$$(z,w) \cdot (X, v^*) = (X, v^* + \iota_X(w)), \qquad \text{for } (z,w) \in \mathrm{Hei}(W).$$

这里， X^* 是 X的线性对偶； $g \cdot v^*$ 是定义在 $g \cdot X$ 上的线性泛函，由公式（$g \cdot v^*$）（v）$= v^*\left(g^{-1} \cdot v\right)$ 给出，其中 $v \in g \cdot X$；而 $\iota_X \colon W \to W/X^\perp \cong X^*$ 是自然的投影映射。对于每个点（X， v^*）$\in \mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,\,k}$，我们定义相应的“极大抛物子群”

$$P_{X,v^*} \coloneqq \mathrm{Stab}_{\mathrm{J}(W)}(X, v^*).$$

当（X，v^*）在$\mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,\,k}$中变化时，所有这类子群$P_{X,\,v^*}$彼此共轭。为了明确描述它们，我们选取一个点（$X$，$0$）$\in \mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,\,k}$。令 $W_0 = X^{\perp}/X$，并赋予它从W诱导的辛形式。于是

$$P_{X,0} \cong Q_X \rtimes \mathrm{Hei}\left(X^{\perp}\right),$$

其中 Q_X 是 Sp (W) 的极大抛物子群，它稳定全各向同性子空间 X；对于每个子空间 $Y \subset W$（可能是退化的），我们定义 Hei $(Y) = \mathbb{G}_a \oplus Y$，并将其视为 Hei (W) 的子群。存在一个自然投影

$$P_{X,0} \twoheadrightarrow M_{X,0} \coloneqq \mathrm{GL}\,(X) \times \mathrm{J}\,(W_0),$$

我们将 $M_{X,\,0}$ 称为 $P_{X,\,0}$ 的“Levi 商”。为简化记号，在不致混淆时，我们将在下标中省略“0”，并写作

$$P_{X,0} = P_X \quad \text{and} \quad M_{X,0} = M_X.$$

对于每个 $(X,\ v^*) \in \mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,\,k}$，令

$$X_{v^*} \coloneqq \left\{x + v^*(x)e \,\middle|\, x \in X\right\} \subseteq W^+.$$

容易验证，X_{v^*} 是 W^+ 的全各向同性子空间，且维数为 $X_{v^*} = k$。这给出一个 J(W)- 等变嵌入

$$\begin{aligned} i_k : \mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,k} &\longrightarrow \mathcal{F}_{W^+,k}, \\ (X, v^*) &\longmapsto X_{v^*}, \end{aligned}$$

其中，J(W)通过同构 (4.2.6) 作用于 $\mathcal{F}_{W^+,\,k}$。i_k的像可描述为

$$i_k\left(\mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,k}\right) = \left\{Y \in \mathcal{F}_{W^+,k} \,\middle|\, Y \subseteq \langle e\rangle^{\perp} \text{ and } \langle e\rangle \nsubseteq Y\right\}.$$

此外，还存在一个自然的 J(W)-等变满射

$$\begin{aligned} p_k : \mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,k} &\longrightarrow \mathcal{F}_{W,k}, \\ (X, v^*) &\longmapsto X, \end{aligned}$$

其中，J(W) 在 $\mathcal{F}_{W,\,k}$上的作用可通过商映射 p: J(W) $\twoheadrightarrow$ Sp(W) 因子化。点 $(X,\ v^*) \in \mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,\,k}$确定了 Sp (W^+) 和 Sp (W) 的极大抛物子群 $Q_{X_{v^*}}$和 Q_X，它们分别稳定各向同性子空间 X_{v^*} 和 X。利用上文定义的映射 i_k 和 p_k，可推得

$$P_{X,v^*} = Q_{X_{v^*}} \cap \mathrm{Sp}\left(W^+\right) \quad \text{and} \quad p\left(P_{X,v^*}\right) = Q_X. \tag{4.2.9}$$

这些讨论描述了雅可比群的“极大抛物子群”。我们也将“余秩”1的“极大抛物子群”称为“抛物子群”。

雅可比群的一般“抛物子群”可以类似地定义：考虑一个由各向同性子空间组成的旗 X

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_r \subseteq W,$$

以及一个向量 $v^* \in X_r^*$。令 $P_{X,\,v^*}$为 J(W) 中稳定该旗 X和v^*的“抛物子群”。群 J(W) 在此类旗与对偶向量对上具有传递作用，因此所有稳定子群均共轭且同构。我们固定一个代表元 $(X,\ 0)$，并令 $P_X = P_{X,\,0}$ 以简化记号。于是有

$$P_{\underline{X}} \cong Q_{\underline{X}} \rtimes \mathrm{Hei}\left(X_r^{\perp}\right),$$

其中，$Q_{\underline{X}}$ 是稳定上述旗 X 的 Sp(W) 抛物子群，而 P_X 的“Levi 商”定义为

$$M_{\underline{X}} \cong \mathrm{GL}\,(X_1) \times \mathrm{GL}\,(X_2/X_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}\,(X_r/X_{r-1}) \times \mathrm{J}\,(W_0),$$

与 $W_0 \cong X_r^{\perp}/X_r$。

接下来，我们为雅可比群定义“抛物诱导”的概念。对于“极大抛物子群”，设 $X \in \mathcal{F}_{W,k}$ 是 W 的全各向同性子空间，且 $P_X = P_{X,0}$ 是与 $(X, 0) \in \mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W,k}$ 相关联的 $\mathrm{J}(W)$ 的“极大抛物子群”。对于任意 $\tau \in \mathcal{S}\mathrm{mod}(\mathrm{GL}(X))$ 和 $\pi_0^{\mathrm{J}} \in \mathcal{S}\mathrm{mod}_{\psi}(\mathrm{J}(W_0))$，其中 $W_0 = X^{\perp}/X$，我们定义“归一化抛物诱导”

$$\begin{aligned} \tau \rtimes \pi_0^{\mathrm{J}} &:= \mathrm{ind}_{P_X}^{\mathrm{J}(W)} \left(\tau \boxtimes \pi_0^{\mathrm{J}}\right) \\ &= \mathfrak{ind}_{P_X}^{\mathrm{J}(W)} \left(\left(\tau \boxtimes \pi_0^{\mathrm{J}}\right) \otimes \delta_{P_X}^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

这里 $\tau \boxtimes \pi_0^{\mathrm{J}}$ 是“Levi 商” $M_X = \mathrm{GL}(X) \times \mathrm{J}(W_0)$ 的一个表示，我们也通过膨胀将其视为 P_X 的表示。模特征 δ_{P_X} 通过投影到 $\mathrm{GL}(X)$ 分解，并且给出为

$$\delta_{P_X}(a) = |\det a|^{\dim W_0 + k + 2}, \quad \text{for } a \in \mathrm{GL}(X). \tag{4.2.11}$$

类似地，对于 $\mathrm{J}(W)$ 的一般“抛物子群” P_X，其中 $\underline{X}$ 如前所述是 $\underline{W}$ 的一个全各向同性子空间旗；对于任意 $\tau_i \in \mathcal{S}\mathrm{mod}(\mathrm{GL}(X_i/X_{i-1}))$ 和 $\pi_0^{\mathrm{J}} \in \mathcal{S}\mathrm{mod}_{\psi}(\mathrm{J}(W_0))$，我们将归一化抛物诱导定义为

$$\tau_1 \times \cdots \times \tau_r \rtimes \pi_0^{\mathrm{J}} := \mathrm{ind}_{P_{\underline{X}}}^{\mathrm{J}(W)} \left(\tau_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \tau_r \boxtimes \pi_0^{\mathrm{J}}\right).$$

另一方面，对于元辛群，我们已经有了抛物子群 $\widetilde{\ }$ 和诱导的概念。$\mathrm{Sp}(W)$ 的抛物子群恰好是 $\mathrm{Sp}(W)$ 中抛物子群的原像。设 X 是 W 的一个全各向同性子空间，Q_X 是 $\mathrm{Sp}(W)$ 中稳定 X 的抛物子群，而 Q_X 是 $\mathrm{Sp}(W)$ 中 Q_X 的 $\widetilde{\ }$ 原像。令 U_X 为 Q_X 的幺幂根，M_X 为 Levi 商。于是有

$$\widetilde{M}_X \cong \widetilde{\mathrm{GL}}(X) \times_{\mu_2} \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_0),$$

$\widetilde{\ }$ 其中 $\mathrm{GL}(X)$ 是 $\mathrm{GL}(X)$ 的二重覆盖，其底层集合为

$$\widetilde{\mathrm{GL}}(X) = \mathrm{GL}(X) \times \{\pm 1\}$$

乘法律为

$$(g_1, \epsilon_1) \cdot (g_2, \epsilon_2) = (g_1 g_2, \epsilon_1 \epsilon_2 \cdot (\det g_1, \det g_2)_{\mathbb{R}}).$$

这里 $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}}$ 表示希尔伯特符号。根据 [AB98, §1], ，存在 $\mathrm{GL}(X)$ 的一个真特征 $\chi_{\psi}\widetilde{\ }$。将此真特征 χ_{ψ} 张量相乘，可得到 $\mathrm{GL}(X)$ 的表示等价类集合与 $\widetilde{\ }\mathrm{GL}(X)$ 的真表示等价类集合之间的双射。令 $\tau \in \mathcal{S}\mathrm{mod}(\mathrm{GL}(X))$ 和 $\widetilde{\pi}_0 \in \mathcal{S}\mathrm{mod}_{\mathrm{gen}}\left(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_0)\right)$。我们可以构造归一化抛物诱导

$$\begin{aligned} \tau \rtimes \widetilde{\pi}_0 &:= \mathrm{ind}_{\widetilde{Q}_X}^{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)} \left(\tau \chi_{\psi} \boxtimes \widetilde{\pi}_0\right) \\ &= \mathfrak{ind}_{\widetilde{Q}_X}^{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)} \left(\left(\tau \chi_{\psi} \boxtimes \widetilde{\pi}_0\right) \otimes \delta_{\widetilde{Q}_X}^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

这里，模 数特征 $\delta_{\widetilde{Q}_X}$ 经由到 $\mathrm{GL}(X)$ 的投影分解，并由下式给出

$$\delta_{\widetilde{Q}_X}(a) = |\det a|^{\dim W_0 + k + 1}, \quad \text{for } a \in \mathrm{GL}(X). \tag{4.2.12}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 类似地，对于 $\mathrm{Sp}(W)$ 的一般抛物子群 Q_X，其中 X 与前文一样是 W 的一个各向同性子空间旗；对于任意 $\tau_i \in \mathcal{S}\mathrm{mod}(\mathrm{GL}(X_i/X_{i-1}))$ 和 $\widetilde{\pi}_0 \in \mathcal{S}\mathrm{mod}_{\mathrm{gen}}\left(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_0)\right)$，我们将归一化抛物诱导定义为

$$\tau_1 \times \cdots \times \tau_r \rtimes \widetilde{\pi}_0 := \mathrm{ind}_{Q_{\underline{X}}}^{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)} \left(\tau_1 \chi_{\psi} \boxtimes \cdots \boxtimes \tau_r \chi_{\psi} \boxtimes \widetilde{\pi}_0\right).$$

命题 4.2.2。 等式 (4.2.2) 和等式 (4.2.3) 中定义的函子 $\mathcal{F}_\psi$ 和 $\mathcal{G}_\psi$ 与两侧的“抛物诱导函子”相容。也就是说，我们有

$$\mathcal{F}_\psi\left(\tau_1 \times \cdots \times \tau_r \rtimes \widetilde{\pi}_0\right) \cong \tau_1 \times \cdots \times \tau_r \rtimes \mathcal{F}_\psi\left(\widetilde{\pi}_0\right) \tag{4.2.13}$$

同理

$$\mathcal{G}_\psi\left(\tau_1 \times \cdots \times \tau_r \rtimes \pi_0^{\mathrm{J}}\right) \cong \tau_1 \times \cdots \times \tau_r \rtimes \mathcal{G}_\psi\left(\pi_0^{\mathrm{J}}\right). \tag{4.2.14}$$

证明。 对于“极大抛物子群”的情形，所需结论已在证明 [LS13, 命题 4.3]的过程中得到。对于一般的“抛物子群”，所需结论可由分阶段诱导推出。

□

作为定理 4.2.1 和定理 4.2.2 的直接推论，我们得到雅可比群不可约表示的兰兰兹分类。设 $\pi^{\mathrm{J}} \in \mathcal{S}\mathrm{mod}_\psi(\mathrm{J}(W))$ 是一个不可约表示。那么存在一个“抛物诱导表示”

$$\tau_1|\det|^{a_1} \times \cdots \times \tau_r|\det|^{a_r} \rtimes \pi_0^{\mathrm{J}},$$

使得 π^{J} 是它的唯一不可约商。这里，对于每个 $1 \le i \le r$， τ_i 要么是 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ 的酉特征，要么是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 的离散系列； a_i 是一个实数，满足 $a_1 \ge \cdots \ge a_r > 0$； π_0^{J} 是某个适当雅可比群的不可约表示，且 $\mathcal{G}_\psi\left(\pi_0^{\mathrm{J}}\right)$ 是温和的。我们记

$$\pi = LQ\left(\tau_1|\det|^{a_1} \times \cdots \times \tau_r|\det|^{a_r} \rtimes \pi_0^{\mathrm{J}}\right),$$

并将 π $\tau_1|\det|^{a_1} \times \cdots \times \tau_r|\det|^{a_r} \rtimes \pi_0^{\mathrm{J}}$称为“朗兰兹商”。当 $\mathcal{F}_\psi(\pi^{\mathrm{J}})$ 是温和表示时，我们称 π^{J} 是温和的。

4.3. **MVW 对合**。 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的非退化二次空间或辛空间，并设 $G = G(V)$ 是与 V 相关联的等距群（如果 V 是辛空间，则为元辛群）。在 $\mathcal{S}\mathrm{mod}(G)$ 上（或在 $\mathcal{S}\mathrm{mod}^{\mathrm{gen}}(G)$ 上，如果 G 是元辛群）存在一个重要的协变正合函子，称为 *MVW* 对合：

定理 4.3.1。 存在一个协变正合函子

$$\mathrm{MVW} : \mathcal{S}\mathrm{mod}(G) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{mod}(G) \quad (or\ \mathcal{S}\mathrm{mod}_{\mathrm{gen}}(G) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{mod}_{\mathrm{gen}}(G)\ if\ G\ is\ metaplectic),$$

将每个 （真）表示 π 映射到另一个 π^{MVW}，并满足以下性质：

(1) MVW 是对合的，即对于所有 $\pi \in \mathcal{S}\mathrm{mod}(G)$ （或者如果 G 是元辛群，则对于所有 $\mathcal{S}\mathrm{mod}^{\mathrm{gen}}(G)$ ）， $\left(\pi^{\mathrm{MVW}}\right)^{\mathrm{MVW}} \cong \pi$； (2) 如果 $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ （或者如果 G 是元辛群，则 $\mathrm{gen}(G)$ 属于 Irr ），则 $\pi^{\mathrm{MVW}} \cong \pi^\vee$； (3) 对于抛物诱导表示 $\tau \rtimes \pi_0$，有

$$(\tau \rtimes \pi_0)^{\mathrm{MVW}} \cong \tau \rtimes \pi_0^{\mathrm{MVW}}.$$

证明。 参见 [MVW87，第 4.II 章1]。

□

注 4.3.2。 根据定理 *4.2.1*，我们可以通过与 $\mathcal{S}$模$^{\mathrm{gen}}(\mathrm{Sp}(W))$的$\widetilde{\ }$范畴等价，将 *MVW*函子传递到 $\mathcal{S}$模$_\psi(\mathrm{J}(W))$ 上。特别地，所得的作用于 $\mathcal{S}$模$_\psi(\mathrm{J}(W))$的函子满足定理 *4.3.1* 中的相同性质。

4.4. **局部 theta 提升**。 本小节回顾辛－正交约化对偶对的 theta 提升的一些事实。

Theta 提升与 Howe对偶。我们固定一个非平凡的加法特征 ψ，其定义在 $\mathbb{R}$ 上。设 V 和 W 分别是 $\mathbb{R}$ 上的一个二次空间和一个辛空间。那么，正如 [Kud94]，所阐述的，可以为群赋予一个 Weil 表示 $\omega = \omega_{V,W,\psi}$

$$\begin{cases} \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \times \mathrm{O}(V), & \text{if } \dim V \text{ is odd;} \\ \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{O}(V), & \text{if } \dim V \text{ is even.} \end{cases}$$

给定 $\pi \in \mathrm{Irr}^{\mathrm{gen}}$ $\widetilde{\ }$(Sp(W)) 或 $\pi \in$ Irr(Sp(W))，可以考虑其最大的 π-等型商

$$\pi \boxtimes \Theta_{V,W,\psi}(\pi)$$

的 ω。这里 $\Theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi)$ 是重数空间，它确实是 O(V) 的有限长度表示。著名的 Howe 对偶猜想由 Waldspurger [Wal90] 和 Gan-Takeda [GT16]，证明，断言：

- $\theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi)$ 的最大半单商要么为零，要么不可约；
- 如果 $\pi_1 \not\simeq \pi_2$ 是两个非同构的不可约光滑表示，且二者都 h $\theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi_1)$ 和 $\theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi_2)$ 均非零，则 $\theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi_1) \not\simeq \theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi_2)$。

同样，给定 $\sigma \in$ Irr(O(V))，我们得到 Sp(W) 或 Sp(W) 的光滑有限长度表示 $\Theta_{W,\,V,\,\psi}(\sigma)$ 和 $\theta_{W,\,V,\,\psi}(\sigma)$。

(几乎)等秩 theta 提升与 Prasad猜想。为了通过摆动图论证证明我们的主要结果，我们需要用局部 Langlands 对应来描述偶数正交-辛对偶对的局部Theta提升。在.....的情形下

$$|\dim V - \dim W| \leq 2,$$

这类描述由所谓的 Prasad猜想（现已由[AB98] [Ada95] [Pau05]证明成为定理）给出。

定理 4.4.1。设

$$\dim V = \dim W + 2$$

为偶数。设 $\phi : \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{SO}(M)$ 是 $\mathrm{Sp}(W)$ 的一个温和 L-参数，其中 M 是与 ϕ 相关联的 $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的正交表示。设 $\pi \in \Pi_{\phi}(\mathrm{Sp}(W))$。如果其小 θ 提升 $\sigma := \theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi)$ 非零，则：

(1) σ 在$\mathrm{SO}(V)$ 上的限制不可约，我们仍将其记为 σ；

(2) 作为$\mathrm{SO}(V)$的一个表示，我们有 $\sigma \in \Pi_{\theta(\phi)}(\mathrm{SO}(V))$，其中 $\theta(\phi)$ 是与该正交表示对应的$\mathrm{SO}(V)$的一个温和 L-参数

$$\theta(M) = M \oplus \mathbb{1}$$

属于$\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$；此外，若令 $c = \mathrm{disc}(V)$，则在自然嵌入$A_M^+ \hookrightarrow A_{\theta}^{+}{}_{(M)}$下，我们有

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{w}_{-c}}(\sigma)\big|_{A_M^+} = \mathcal{J}_{\mathfrak{w}}(\pi).$$

此外，对于每个 $\sigma \in \Pi_{\theta(\phi)}(\mathrm{SO}(V))$，都存在一个 $\pi \in \Pi_{\phi}(\mathrm{Sp}(W))$，使得$\sigma \cong \theta_{V,W,\psi}(\pi)\big|_{\mathrm{SO}(V)}$。

注 4.4.2. 这个定理实质上已由 *A. Paul* 在 *[Pau05]*中证明。不过，我们应提醒读者，*Paul* 的论文并非按照我们所述的局部 *Langlands* 对应的表述方式撰写。关于 *Paul* 结果的转述，读者可参阅 *[CZ24, Theorem 6.11]* 和 *[Kak24, Theorem 8.1]*。

稳定范围 theta 提升。除了（几乎）等秩情形外，还有另一种极端情形，即稳定范围情形。本节将回顾关于稳定范围 theta 提升的一些结果。设 r_V为 V的维特指数，类似地，设 r_W为 W的维特指数。Loke-Ma 的以下结果 [LM15, Theorem A]是证明我们主要结果的关键要素。

定理 4.4.3。

(1) 假设 $r_V \geq$维数 W。设 π是$\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$或$\mathrm{Sp}(W)$的不可约酉（真）表示，具体取决于维数 V。则其大 ***theta*** 提升 $\Theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi)$ 是不可约的。(2) 类似地，假设 $r_W \geq$维数V。设 σ 是 $\mathrm{O}(V)$的不可约酉表示。则其大 ***theta*** 提升 $\Theta_{W,\,V,\,\psi}(\sigma)$ 是不可约的。

将这一不可约性结果与诱导原理结合起来，我们可以在一些技术条件下描述稳定范围 theta 提升。

推论 4.4.4。

(1) 设 V是 F上的正交空间，且 $\mathrm{disc}(V) = 1$。令 π 为 $\mathrm{Sp}(W)$ 或 $\mathrm{Sp}(W)$ 的不可约酉（真）$\widetilde{\ }$表示，具体取决于 维数 V的奇偶性。假设

$$s = \frac{\dim V - \dim W - 1}{2} \geq 0,$$

且 $\theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi)$ 非零。对任意 $k \in \mathbb{N}$，令 $V_k = V \oplus \mathcal{H}^k$，其中 $\mathcal{H}$ 是（正交）双曲平面。那么对任意 $k \geq$维数W，存在一个满射

$$|\cdot|^{k+s-\frac{1}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{s+\frac{1}{2}} \rtimes \theta_{V,W,\psi}(\pi) \twoheadrightarrow \Theta_{V_k,W,\psi}(\pi).$$

(2) 类似地，设 σ 是 $\mathrm{O}(V)$ 的不可约酉表示，且 $\mathrm{disc}(V) = 1$。假设

$$s' = \frac{\dim W - \dim V + 1}{2} \geq 0,$$

且 $\theta_{W,\,V,\,\psi}(\sigma)$ 非零。对任意 $k \in \mathbb{N}$，令 $W_k = W \oplus \mathcal{H}'^k$，其中 $\mathcal{H}'$ 是（辛）双曲平面。那么对任意 $k \geq$维数V，存在一个满射

$$|\cdot|^{k+s'-\frac{1}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{s'+\frac{1}{2}} \rtimes \theta_{W,V,\psi}(\sigma) \twoheadrightarrow \Theta_{W_k,V,\psi}(\sigma).$$

证明。这里只证明（1），（2）的证明类似。根据诱导原理 [Pau05, §5.2],我们知道存在一个非零映射

$$\Theta_{V_k,W,\psi}(\pi) \longrightarrow \mathrm{ind}_{Q_k}^{\mathrm{O}(V_k)}\left(|\det|^{-s-\frac{k}{2}} \boxtimes \theta_{V,W,\psi}(\pi)\right),$$

其中，Q_k 是 O(V_k) 的标准抛物子群，其 Levi 分量为 $\mathrm{GL}_k \times$ O(V)。由于$\backsim k \geq$dim W，对偶对 Sp(W) $\times$O(V_k)（或 Sp(W) $\times$O(V_k）处于稳定范围内。由定理 4.4.3 可知，$\Theta_{V_k,W,\psi}$(π) 是不可约的。因此，上述映射是单射。对上述映射同时应用 MVW 对合函子（见定理 4.3.1）和对偶函子，我们推出 $\Theta_{V_k,W,\psi}$(π) 是 $\mathrm{Ind}_{Q_k}^{\mathrm{O}(V_k}\left(|\,)\det\,|^{s+\frac{k}{2}} \boxtimes \theta_{W,V,\psi}(\sigma)\right)$ 的一个商，而后者也是

$$|\cdot|^{k+s-\frac{1}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{s+\frac{1}{2}} \rtimes \theta_{V,W,\psi}(\pi)$$

如所期望的。

□

4.5. **Hom 空间的消失结果**。本小节记录某些抛物诱导表示与标准模的朗兰兹商之间 Hom 空间的一个消失结果；该结果将在第 5.3 节和第 6.3 节中使用。

命题 4.5.1. 设 V 为正交空间或辛空间， $G = G(V)$ 为其等距群（当 V 为辛空间时，则为其元辛群/雅可比群），并且

$$\pi = LQ\left(\tau_1|\det|^{a_1} \times \cdots \times \tau_r|\det|^{a_r} \rtimes \pi_0\right)$$

是 G的一个不可约表示。这里

$$a_1 \geq \cdots \geq a_r > 0$$

为实数， τ_i's 为$\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ 的酉特征或$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$的离散系列，而 π_0是 $G_0 = G(V_0)$ 在某个维数适当的非退化子空间 $V_0 \subset V$上的温和表示。于是，对于任意：

- τ GL_1 的酉特征或GL_2的离散系列；
- 实数 $a > a_1$；
- σ 一个 $G_1 = G(V_1)$ 的表示（不一定有限长度），其中 $V_1 \subset V$ 是维数适当的非退化子空间，

我们有

$$\mathrm{Hom}_G\left(\tau|\det|^a \rtimes \sigma, \pi\right) = 0.$$

证明。 当 G 是经典群或元辛群时，这已由 [Che23，引理 4.14] 和 [Che23，定理 A.01]证明。当 G 是雅可比群时，该结论由元辛群的情形结合定理 4.2.1 和定理 4.2.2 得出。

□

5. Uniqueness and epsilon dichotomy of the Fourier-Jacobi model

本节将证明 Vogan L-包中傅里叶-雅可比模型的唯一性和 epsilon 二分性，并将存在性的证明留到下一节。

5.1. **目标 I：唯一性和 epsilon 二分性**。 我们沿用第 3.1 节中的记号。本节的目标如下。

定理 5.1.1. 设 $\phi: \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Sp}(M)$是 $\mathrm{Sp}(W)$的一个温和 L 参数，且 $\phi: \mathrm{W}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{SO}(N)$是 $\mathrm{Sp}(W)$的一个温和 L 参数，其中 M 是与 ϕ相关联的$\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ 的辛表示，而 N 是与 ϕ相关联的正交表示。若存在某个 $\widetilde{\pi} \in \Pi_{\widetilde{\phi}}(\mathrm{Sp}(W))$ 和$\pi \in \Pi_{\phi}(\mathrm{Sp}(W))$ 使得

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}}\left(\widetilde{\pi} \boxtimes \pi, \omega_\psi\right) \neq 0, \tag{5.1.1}$$

那么必有

$$\mathcal{J}_\psi(\widetilde{\pi}) \times \mathcal{J}_{\mathfrak{w}}(\pi) = \eta_{N_1} \times \eta_M$$

如定理 *3.1.1* 所述。

现在假设

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}}\left(\widetilde{\pi} \boxtimes \pi, \omega_\psi\right) \cong \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}}\left((\widetilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes \overline{\omega}_\psi, \mathbb{C}\right) \neq 0.$$

此假设等价于

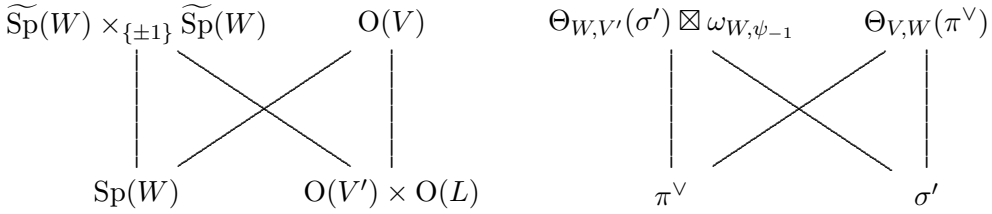
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(\widetilde{\pi} \boxtimes \overline{\omega}_\psi, \pi^\vee\right) \neq 0.$$

这里 $\mathrm{Sp}(W) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(W) \times \{\pm 1\} \mathrm{Sp}(W)$ 是对角嵌入。由 (2.3.1)，存在唯一的$2n+1$维正交空间 V'，其判别式 $\mathrm{disc}(V') = 1$，使得 $\widetilde{\pi} \cong \theta_{W,\, V',\, \psi}(\sigma')$ 对应于 $\mathrm{O}(V')$ 的一个不可约温和表示 σ'。设 L 为一个判别式 $\mathrm{disc}(L) = -1$ 的一维二次空间，$e \in L$ 为 L 的一个生成元，并且

$$V = V' \oplus L. \tag{5.1.2}$$

由 (2.2.3) 和 (2.2.5) 可知 $\mathrm{disc}(V) = 1$。考虑如下跷跷板图：

(♮.0)



于是，相应的跷跷板恒等式为：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(\Theta_{W,V',\psi}(\sigma') \boxtimes \omega_{\bar{\psi}}, \pi^\vee\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V')}\left(\Theta_{V,W,\psi}(\pi^\vee), \sigma'\right). \tag{✠.0}$$

注意，$\omega_{\bar{\psi}} \simeq \omega_{\psi}^{-}$ 且 $\widetilde{\pi} = \theta_{W,V',\psi}(\sigma')$ 是 $\Theta_{W,V',\psi}(\sigma')$ 的一个商。由我们的假设可推得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V')}\left(\Theta_{V,W,\psi}(\pi^\vee), \sigma'\right) \neq 0, \tag{5.1.3}$$

特别是，$\sigma := \theta_{V,W,\psi}(\pi^\vee)$ 非零。定理 5.1.1 证明的关键在于证明以下结论。

命题 5.1.2. 在上述背景下，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V')}\left(\sigma, \sigma'\right) \neq 0.$$

注意，若能证明 $\Theta_{V,W,\psi}(\pi^\vee)$ 不可约，那么该命题便可直接由 (5.1.3) 得出。当基域是非阿基米德域时，可以利用 Kudla 过滤证明 $\Theta_{V,W,\psi}(\pi^\vee)$ 不可约（见 [GI14，命题 C.4]）。然而，在阿基米德情形下，由于缺少 Kudla 过滤，直接证明 $\Theta_{V,W,\psi}(\pi^\vee)$ 不可约会比较困难。

假设该命题成立，我们现在以证明定理 5.1.1 结束本小节。命题 5.1.2 的证明将留待后续小节完成。

定理 5.1.1 的证明. 设 $\theta(\phi)$ 和 $\theta(\phi)$ 分别是 $\mathrm{SO}(V')$ 和 $\mathrm{SO}(V)$ 的温和 L-参数，其对应的正交表示分别为 M 和 $\theta(N) = N \oplus \mathbb{1}$ of $\mathrm{W}_{\mathbb{R}}$。利用元辛群的局部 Langlands 对应的构造（见 (2.3.2) 和 (2.3.3)），我们知道，σ' 在 $\mathrm{SO}(V')$ 上的限制不可约，且属于 L-包 $\Pi_{\theta(\widetilde{\phi})}(\mathrm{SO}(V'))$，并满足

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{w}'}\left(\sigma'\right) = \mathcal{J}_{\psi}\left(\widetilde{\pi}\right). \tag{5.1.4}$$

类似地，应用定理 4.4.1 可知，σ 在 $\mathrm{SO}(V)$ 上的限制不可约，且属于 L-包 $\Pi_{\theta(\phi)}(\mathrm{SO}(V))$，并满足

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{w}_{-1}}\left(\sigma\right)\big|_{A_N^+} = \mathcal{J}_{\mathfrak{w}}\left(\pi^\vee\right). \tag{5.1.5}$$

事实上，可以用 $\mathcal{J}_{\mathfrak{w}_1}(\sigma)$ 表示 $\mathcal{J}_{\mathfrak{w}}(\pi)$：

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\mathfrak{w}}\left(\pi\right) &= \mathcal{J}_{\mathfrak{w}}(\pi^\vee) \otimes \delta_{N,-1} && \text{by (2.2.2)} \\
&= \mathcal{J}_{\mathfrak{w}_{-1}}\left(\sigma\right)\big|_{A_N^+} \otimes \delta_{N,-1} && \text{by (5.1.5)} \\
&= \left(\mathcal{J}_{\mathfrak{w}_1}\left(\sigma\right) \otimes \delta_{N_1,-1}\right)\big|_{A_N^+} \otimes \delta_{N,-1} && \text{by (2.2.6)} \\
&= \mathcal{J}_{\mathfrak{w}_1}\left(\sigma\right)\big|_{A_N^+},
\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

其中，在最后一步我们利用了显然的等式 $\delta_{N_1,\ -1}\big|_{A_N^+} = \delta_{N,\ -1}$。另一方面，根据定理 5.1.2，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(V')}\left(\sigma, \sigma'\right) \neq 0.$$

因此，由定理 3.2.1，

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\mathfrak{w}_1}(\sigma)(a) = \epsilon\left(N_1^a \otimes M, \psi\right) \cdot \det\left(N_1^a\right)(-1)^{\frac{\dim M}{2}} \cdot \det(M)(-1)^{\frac{\dim N_1^a}{2}}, & \text{for } a \in A_{N_1}^+; \\ \mathcal{J}_{\mathfrak{w}}(\sigma')(b) = \epsilon\left(N_1 \otimes M^b, \psi\right) \cdot \det\left(M^b\right)(-1)^{\frac{\dim N_1}{2}} \cdot \det(N_1)(-1)^{\frac{\dim M^b}{2}}, & \text{for } b \in A_M. \end{cases} \tag{5.1.7}$$

结合 (5.1.4)、(5.1.6) 和 (5.1.7)，我们得到定理 5.1.1 中所需的等式。至此证明完成。

□

5.2. **稳定范围对偶塔 I：一些非温和贝塞尔模型**。为证明命题 5.1.2，我们将利用一些稳定范围对偶塔图。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，令

$$V_k^\dagger = V^\dagger + \mathcal{H}^k,$$

其中 $\mathcal{H}$ 是（正交）双曲平面，且 $\dagger \in \{\varnothing, \prime\}$。注意到 σ 和 σ' 都是温和的，我们考虑以下标准模的朗兰兹商

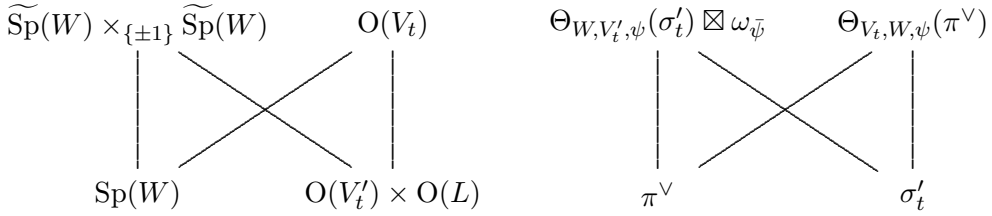
$$\sigma_k = LQ\left(|\cdot|^k \times \cdots \times |\cdot|^1 \rtimes \sigma\right), \tag{5.2.1}$$

以及

$$\sigma_k' = LQ\left(|\cdot|^{k-\frac{1}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{1}{2}} \rtimes \sigma'\right). \tag{5.2.2}$$

根据推论 4.4.4，我们知道，如果 $k \geq \dim W$，那么 $\sigma_k \cong \Theta_{V_k,\ W,\ \psi}(\pi^\vee)$ 和 $\sigma_k' \cong \Theta_{V_k',\ W,\ \psi}(\widetilde{\pi})$。因此，我们固定一个正整数 $t \geq \dim W$。考虑如下的跷跷板图：

(♮.1)



于是，相应的跷跷板恒等式为：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(\Theta_{W,V_t',\psi}\left(\sigma_t'\right) \boxtimes \omega_{\bar{\psi}}, \pi^\vee\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_t')}\left(\Theta_{V_t,W,\psi}\left(\pi^\vee\right), \sigma_t'\right). \tag{✠.1}$$

由于 $\widetilde{\pi} \cong \theta_{W,\ V_t',\ \psi}(\sigma_t')$ 是 $\Theta_{W,\ V_t',\ \psi}(\sigma_t')$ 的一个商，而 $\sigma_t \cong \Theta_{V_t,\ W,\ \psi}(\pi^\vee)$，因此，方程（✠.1）和我们的假设（5.1.1）意味着

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_t')}\left(\sigma_t, \sigma_t'\right) \neq 0. \tag{5.2.3}$$

这个 Hom 空间是一个非温和的贝塞尔模型。在下一节中，我们将“剥离”掉（5.2.3）中的非温和部分，从而推出 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V')}(\sigma,\ \sigma') \neq 0$。

5.3. **剥离非温和部分 I：贝塞尔模型**。本节旨在证明以下引理。

引理 5.3.1。在上一小节的背景下，假设

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_{k+1}')}\left(\sigma_{k+1}, \sigma_{k+1}'\right) \neq 0 \tag{5.3.1}$$

其中 k 是某个非负整数。于是

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_k')}\left(\sigma_k, \sigma_k'\right) \neq 0.$$

证明。 由 (5.2.1) 可得一个自然满射

$$|\cdot|^{k+1} \rtimes \sigma_k \twoheadrightarrow \sigma_{k+1}.$$

于是，假设 (5.3.1) 意味着

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(|\cdot|^{k+1} \rtimes \sigma_k, \sigma'_{k+1}\right) \neq 0. \tag{5.3.2}$$

我们固定两个向量 $e_{k+1}, f_{k+1} \in V'_{k+1}$，使它们构成一个（正交）双曲平面，即

$$\langle e_{k+1}, e_{k+1}\rangle = \langle f_{k+1}, f_{k+1}\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle e_{k+1}, f_{k+1}\rangle = 1,$$

并且我们有如下分解

$$V'_{k+1} = \langle e_{k+1}\rangle \oplus V'_k \oplus \langle f_{k+1}\rangle \quad \text{and} \quad V_{k+1} = \langle e_{k+1}\rangle \oplus V_k \oplus \langle f_{k+1}\rangle .$$

设 Q_X 是 $\mathrm{O}(V_{k+1})$ 中稳定各向同性直线 $X = \langle e_{k+1}\rangle$ 的抛物子群，其 Levi 分量为 $M_X \cong \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(V_k)$。设 $\mathcal{X} = \mathrm{O}(V_{k+1})/Q_X$ 是 $\mathrm{O}(V_{k+1})$ 的旗簇，由 V_{k+1} 中所有各向同性直线构成；设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的 $\mathrm{O}(V_{k+1})$-等变温和向量丛，其在 $X \in \mathcal{X}$ 处的纤维表示为

$$\left(|\cdot|^{k+1} \boxtimes \sigma_k\right) \otimes \delta_{Q_X}^{\frac{1}{2}}.$$

这里，模特征 δ_{Q_X} 可通过投影到 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$得到，且

$$\delta_{Q_X}(a) = |a|^{\dim V_k} \quad \text{for } a \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}). \tag{5.3.3}$$

于是我们得到 $\mathrm{O}(V_{k+1})$-表示的一个同构

$$\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \cong |\cdot|^{k+1} \rtimes \sigma_k. \tag{5.3.4}$$

现在我们可以运用麦基理论（更准确地说，是博雷尔引理定理 4.1.3）。在 $\mathcal{X}$ 上有两个 $\mathrm{O}(V'_{k+1})$-轨道：

- 闭轨道 $\mathcal{Z}$，由包含于 V'_{k+1} 中的 V_{k+1} 内的各向同性直线组成；
- 开轨道 $\mathcal{U}$，由不包含于 V'_{k+1} 中的 V_{k+1} 内的各向同性直线组成。

我们有 $\mathrm{O}(V'_{k+1})$-表示的一个短正合列

$$0 \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \longrightarrow 0,$$

其中 $\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X},\ \mathcal{E}) := \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X},\ \mathcal{E})/\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U},\ \mathcal{E})$。这诱导出一个 Hom 空间的正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}), \sigma'_{k+1}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}), \sigma'_{k+1}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathcal{E}), \sigma'_{k+1}\right).$$

我们断言，开轨道具有非零贡献，即

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathcal{E}), \sigma'_{k+1}\right) \neq 0.$$

注意到根据 (5.3.2)、(5.3.4) 以及上述正合列，要证明我们的断言，只需证明

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}), \sigma'_{k+1}\right) = 0.$$

我们利用定理 4.1.3 分析 $\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}, \mathcal{E})$。选取代表元 $X = \langle e_{k+1}\rangle \in \mathcal{Z}$。那么，其稳定子 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}(X) = Q'_X$ 是 $\mathrm{O}(V'_{k+1})$ 的一个抛物子群，其 Levi 分量为 $M'_X \cong \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(V'_k)$。因此，$\mathcal{E}\big|_{\mathcal{Z}}$ 同构于 $\mathrm{O}(V'_{k+1})$-等变丛，该丛定义在 $\mathcal{Z} \cong \mathrm{O}(V'_{k+1})/Q'_X$ 上，其在 $X \in \mathcal{Z}$ 处的纤维表示为

$$\left(\left(|\cdot|^{k+1} \boxtimes \sigma_k\right) \otimes \delta_{Q_X}^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{Q'_X} \cong |\cdot|^{k+1+\frac{\dim V_k}{2}} \boxtimes \left(\sigma_k\big|_{\mathrm{O}(V'_k)}\right) \qquad (\text{by (5.3.3)}).$$

注意，模特征 $\delta_{Q'_X}$ 通过到 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ 的投影分解，并且对于 $a\in\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$，我们有$\delta_{Q'_X}(a)=|a|^{\dim V'_k}$。由此可得

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{Z},\mathcal{E}\big|_{\mathcal{Z}}\right)&\cong \mathfrak{ind}_{Q'_X}^{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(|\cdot|^{k+1+\frac{\dim V_k}{2}}\boxtimes\left(\sigma_k\big|_{\mathrm{O}(V'_k)}\right)\right)\\&\cong \mathrm{ind}_{Q'_X}^{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(|\cdot|^{k+\frac{3}{2}}\boxtimes\left(\sigma_k\big|_{\mathrm{O}(V'_k)}\right)\right)\\&=|\cdot|^{k+\frac{3}{2}}\rtimes\left(\sigma_k\big|_{\mathrm{O}(V'_k)}\right)\end{aligned}$$

作为 $\mathrm{O}(V'_{k+1})$-表示。另一方面，复化余法丛 $\mathcal{N}^*_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}$是定义在 $\mathcal{Z}$上的 $\mathrm{O}(V'_{k+1})$-等变丛，其在 $X\in\mathcal{Z}$处的纤维表示为 $\mathrm{sgn}|\cdot|\boxtimes\mathbb{1}_{\mathrm{O}(V'_k)}$。根据定理 4.1.3，$\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X},\mathcal{E})$上存在一个 $\mathrm{O}(V'_{k+1})$-等变滤过，其分次部分为

$$\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{Z},\mathrm{Sym}^j\mathcal{N}^*_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}\otimes\mathcal{E}\big|_{\mathcal{Z}}\right)\cong\left(\mathrm{sgn}^j|\cdot|^{k+\frac{3}{2}+j}\right)\rtimes\left(\sigma_k\big|_{\mathrm{O}(V'_k)}\right)\quad\text{for } j\in\mathbb{N}.$$

回忆一下，在构造 σ'_{k+1} 时（见 (5.2.2)），σ'_{k+1}的标准模中的所有“指数”都不超过 $k+\frac{1}{2}$，因此定理 4.5.1 适用。由此可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(\left(\mathrm{sgn}^j|\cdot|^{k+\frac{3}{2}+j}\right)\rtimes\left(\sigma_k\big|_{\mathrm{O}(V'_k)}\right),\sigma'_{k+1}\right)=0$$

对所有 $j\in\mathbb{N}$均成立。我们得出 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X},\mathcal{E}),\ \sigma'_{k+1}\right)=0$，从而我们的结论成立。

接下来我们计算开轨道的贡献。回忆 $V=V'\oplus\langle e\rangle$ 与 $\langle e,e\rangle_V=-1$（见 (5.1.2)）。取一个代表元

$$Y=\left\langle e+\frac{e_{k+1}+f_{k+1}}{\sqrt{2}}\right\rangle\in\mathcal{U}.$$

那么 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}(Y)\cong\mathrm{O}(V_k)$，且 $\mathcal{E}\big|_{\mathcal{U}}$同构于 $\mathcal{U}$上的一个 $\mathrm{O}(V'_{k+1})$-等变丛，其在 Y处的纤维表示为 σ_k。因此，

$$\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U},\mathcal{E})\cong\mathfrak{ind}_{\mathrm{O}(V_k)}^{\mathrm{O}(V'_{k+1})}(\sigma_k).$$

由定理 4.1.2 中的弗罗贝尼乌斯互反律，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U},\mathcal{E}),\sigma'_{k+1}\right)&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{k+1})}\left(\mathfrak{ind}_{\mathrm{O}(V_k)}^{\mathrm{O}(V'_{k+1})}(\sigma_k),\sigma'_{k+1}\right)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_k)}\left((\sigma'_{k+1})^\vee,\sigma_k^\vee\right)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_k)}\left(\sigma'_{k+1},\sigma_k\right).\end{aligned}$$

这里在最后一个同构中，我们还利用了正交群的不可约表示是自对偶这一事实。因此，前一段中的论断意味着

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V_k)}\left(\sigma'_{k+1},\sigma_k\right)\neq 0.$$

注意，根据我们的构造 (5.2.2)，还有一个自然满射

$$|\cdot|^{k+\frac{1}{2}}\rtimes\sigma'_k\twoheadrightarrow\sigma'_{k+1}.$$

利用这个满射，应用上述相同的论证，我们得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_k)}\left(\sigma_k,\sigma'_k\right)\neq 0$$

如所需。

□

反复应用定理 5.3.1，由 (5.2.3) 可得 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V')}(\sigma,\ \sigma')\neq 0$。至此，定理 5.1.2 的证明完成。

6. Existence of the Fourier-Jacobi model

我们将证明　本节中傅里叶-雅可比模型在 Vogan L-包中的存在性　.

6.1. 目标 II：存在性。 我们沿用第 5.1 节中的记号。本节的目标如下。

定理 6.1.1。 设 $\phi\colon W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Sp}(M)$ 是 $\mathrm{Sp}(W)$的一个温和 L-参数，且 $\phi\colon W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{SO}(N)$是 $\mathrm{Sp}(W)$的一个温和 L-参数，其中 M 是与 ϕ相关联的 $W_{\mathbb{R}}$ 的辛表示，而 N 是与 ϕ相关联的正交表示。则存在一个 $\widetilde{\pi} \in \Pi_{\widetilde{\phi}}(\mathrm{Sp}(W))$和 $\pi \in \Pi_{\phi}(\mathrm{Sp}(W))$，使得 *Hom* 空间

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}}\left(\widetilde{\pi} \boxtimes \pi, \omega_{\psi}\right) \neq 0.$$

与定理 5.1.1的证明类似，我们首先写出

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}}\left(\widetilde{\pi} \boxtimes \pi, \omega_{\psi}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(\widetilde{\pi} \boxtimes \overline{\omega}_{\psi}, \pi^{\vee}\right).$$

我们将使用贝塞尔模型和跷跷板恒等式论证，在上述方程右侧的 Hom 空间中构造一个非零元素。

我们固定一个 $2n+1$维的判别式为 $+1$的二次空间 V'，并设 $V := V' \oplus L$，其中L 是一个判别式为 $\mathrm{disc}(L) = -1$的一维二次空间。设 $\theta(\phi)$ 和 $\theta(\phi)$分别是 $\mathrm{SO}(V')$ 和 $\mathrm{SO}(V)$的温和 L-参数，其相关联的正交表示分别为 M和 $\theta(N) = N \oplus \mathbb{1}$ of $W_{\mathbb{R}}$。于是根据定理 3.2.1，存在 $\mathrm{SO}(V')\times\mathrm{SO}(V)$的一个相关纯内形式，对应于一对二次空间 $V'_{\alpha} \subset V_{\alpha}$，以及不可约表示$\sigma'_{\alpha} \in \Pi_{\theta(\widetilde{\phi})}(\mathrm{SO}(V'_{\alpha}))$和 $\sigma_{\alpha} \in \Pi_{\theta(\phi)}(\mathrm{SO}(V_{\alpha}))$，使得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(V'_{\alpha})}\left(\sigma_{\alpha}, \sigma'_{\alpha}\right) \neq 0.$$

根据定理 4.4.1，我们知道存在一个不可约表示 π of $\mathrm{Sp}(W)$，使得$\pi^{\vee} \in \Pi_{\phi}(\mathrm{Sp}(W))$，并且

$$\sigma_{\alpha} = \theta_{V,W,\psi}\left(\pi^{\vee}\right)\big|_{\mathrm{SO}(V_{\alpha})}.$$

由 [Kal13，定理 4.9]) 可知，同样有 $\pi \in \Pi_{\phi}(\mathrm{Sp}(W))$。设 $\sigma = \theta_{V,\,W,\,\psi}(\pi^{\vee})$ 是 $\mathrm{O}(V_{\alpha})$ 的一个不可约表示。那么我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(V'_{\alpha})}\left(\sigma_{\alpha}, \sigma'_{\alpha}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{\alpha})}\left(\sigma, \mathrm{Ind}_{\mathrm{SO}(V'_{\alpha})}^{\mathrm{O}(V'_{\alpha})}\left(\sigma'_{\alpha}\right)\right).$$

这意味着存在一个不可约直和项 σ' of $\mathrm{Ind}^{\mathrm{O}(V'_{\alpha})}{}_{\mathrm{SO}(V'_{\alpha})}(\sigma'_{\alpha})$，使得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{\alpha})}\left(\sigma, \sigma'\right) \neq 0. \tag{6.1.1}$$

现在考虑如 (♮.0) 中的跷跷板图。相应的跷跷板恒等式为

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(\Theta_{W,V'_{\alpha},\psi}(\sigma') \boxtimes \omega_{\bar{\psi}}, \pi^{\vee}\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_{\alpha})}\left(\Theta_{V_{\alpha},W,\psi}\left(\pi^{\vee}\right), \sigma'\right).$$

注意到 $\omega_{\bar{\psi}} \cong \omega_{\psi}$，且 σ 是 $\Theta_{V_{\alpha},\,W,\,\psi}(\pi^{\vee})$ 的一个商。由 (6.1.1) 和上述跷跷板恒等式可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(\Theta_{W,V'_{\alpha},\psi}(\sigma') \boxtimes \omega_{\bar{\psi}}, \pi^{\vee}\right) \neq 0.$$

特别地，我们知道 $\Theta_{W,\,V'_{\alpha},\,\psi}(\sigma') \neq 0$。设 $\widetilde{\pi} = \theta_{W,\,V'_{\alpha},\,\psi}(\sigma')$。由 (2.3.2) 可得$\widetilde{\pi} \in \Pi_{\widetilde{\phi}}(\mathrm{Sp}(W))$。同样，由于大 theta 提升的问题，我们无法得出结论

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W)}\left(\widetilde{\pi} \boxtimes \overline{\omega}_{\psi}, \pi^{\vee}\right) \neq 0$$

来自　上述跷跷板恒等式左侧 Hom 空间的非消失性　.

6.2. **稳定范围跷跷板 II：一些非温和傅里叶-雅可比模型**。 与第 5 节一样，我们通过使用一些稳定范围 theta 提升来规避大 theta 提升的问题。对于任意非负整数 k，我们定义

$$W_k = W \oplus \mathcal{H}'^k,$$

其中 $\mathcal{H}'$ 是（辛）双曲平面。注意到 $\widetilde{\pi}$ 和 π 都是温和的，我们考虑标准模的朗兰兹商

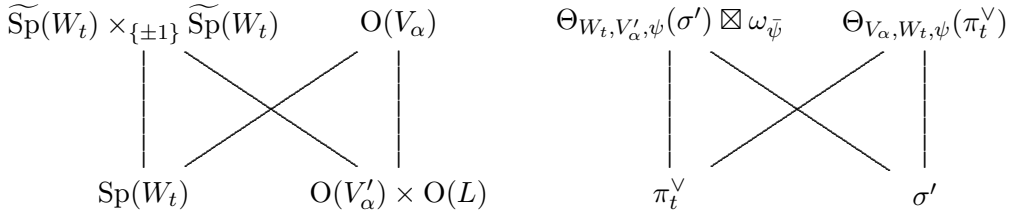
$$\widetilde{\pi}_k = LQ\left(|\cdot|^{k-\frac{1}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{1}{2}} \rtimes \widetilde{\pi}\right), \tag{6.2.1}$$

以及

$$\pi_k^\vee = LQ\left(|\cdot|^{k-1} \times \cdots \times |\cdot|^{1} \rtimes \pi_1^\vee\right), \tag{6.2.2}$$

其中 $\pi_1^\vee := \theta_{W_1,V_\alpha,\psi}(\sigma)$ 是温和的。由于 σ 到 $\mathrm{Sp}(W)$ 的 theta 提升非零，根据 [GI14，命题 C.1]，可知 $\pi_1^\vee$ 是 $|\cdot|^0 \rtimes \pi^\vee$ 的直和项。根据推论 4.4.4，我们知道若 $k \geq \dim V$，则 $\pi_k^\vee \cong \Theta_{W_k,V_\alpha,\psi}(\sigma)$ 和 $\widetilde{\pi}_k \cong \Theta_{W_k,V'_\alpha,\psi}(\sigma')$。我们固定一个正整数 $t > \dim V$。考虑以下跷跷板图：

(♮.2)



于是，相应的跷跷板恒等式为：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_t)}\left(\Theta_{W_t,V'_\alpha,\psi}(\sigma') \boxtimes \overline{\omega}_\psi, \pi_t^\vee\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V'_\alpha)}\left(\Theta_{V_\alpha,W_t,\psi}(\pi_t^\vee), \sigma'\right). \tag{✠.2}$$

注意到 $\Theta_{W_t,V'_\alpha,\psi}(\sigma') \cong \widetilde{\pi}_t$，且 σ 是 $\Theta_{V_\alpha,W_t,\psi}(\pi_t^\vee)$ 的一个商。因此，由 (6.1.1) 和 (✠.2) 可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_t)}\left(\widetilde{\pi}_t \boxtimes \overline{\omega}_\psi, \pi_t^\vee\right) \neq 0.$$

在下一小节中，我们将使用引理 5.3.1 的一个类似结果，从上述 Hom 空间中“剥离”出非温和部分。

6.3. **剥离非温和部分 II：傅里叶–雅可比模型**。本节致力于证明以下引理。

引理 6.3.1。设

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\widetilde{\pi}_{k+1} \boxtimes \overline{\omega}_\psi, \pi_{k+1}^\vee\right) \neq 0 \tag{6.3.1}$$

对某个非负整数 k 成立。那么

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_k)}\left(\widetilde{\pi}_k \boxtimes \overline{\omega}_\psi, \pi_k^\vee\right) \neq 0.$$

证明。 该引理的证明与定理 5.3.1 的证明类似，因此我们只略作说明。由定理 4.2.1 可知，限制到 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$ 时，有

$$\widetilde{\pi}_{k+1} \boxtimes \overline{\omega}_\psi \cong \mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_{k+1}\right).$$

如（4.2.5）所述，我们可以将（6.3.1）改述为：通过自然嵌入 $\mathrm{Sp}(W_{k+1}) \hookrightarrow \mathrm{J}(W_{k+1})$，从雅可比群 $\mathrm{J}(W_{k+1})$ 到辛群 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$ 的分支问题。根据定理 4.2.2 和 $\widetilde{\pi}_{k+1}$ 的构造（见（6.2.1））， 存在一个满射

$$|\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \rtimes \mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_{k+1}\right),$$

这里提醒一下，左边的 $|\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \rtimes \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}_k)$ 是 $\mathrm{J}(W_{k+1})$ 的规范化“抛物诱导”（见（4.2.10）和（4.2.11））。于是我们的假设（6.3.1）意味着

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(|\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \rtimes \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}_k), \pi_{k+1}^{\vee}\right) \neq 0. \tag{6.3.2}$$

我们固定两个向量 e_{k+1}，$f_{k+1} \in W_{k+1}$，使它们构成一个（辛）双曲平面，并且有如下分解

$$W_{k+1} = \langle e_{k+1} \rangle \oplus W_k \oplus \langle f_{k+1} \rangle .$$

令 $\mathcal{X} = \mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W_{k+1},\,1}$ 为式 (4.2.8) 中定义的 $\mathrm{J}(W_{k+1})$ 的“旗簇”；它由形如 $(X,\ v^*)$ 的有序对组成，其中 X 是 W_{k+1} 和 $v^* \in X^*$ 中的一条各向同性直线。我们固定一个基点 $(Y,\ 0) \in \mathcal{F}^{\mathrm{J}}_{W_{k+1},\,1}$，其中 $Y = \langle e_{k+1} \rangle$，并令 $P_Y = \mathrm{Stab}_{\mathrm{J}(W_{k+1})}(Y,\ 0)$ 为 $\mathrm{J}(W_{k+1})$ 的一个“抛物子群”，其“Levi 商”为 $M_Y \cong \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) \times \mathrm{J}(W_k)$。令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{X}$ 上 $\mathrm{J}(W_{k+1})$-等变的温和向量丛，其在 $(Y,\ 0) \in \mathcal{X}$ 处的纤维表示为

$$\left(|\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \boxtimes \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}_k)\right) \otimes \delta_{P_Y}^{\frac{1}{2}}.$$

于是我们得到

$$\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \cong |\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \rtimes \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}_k)$$

作为 $\mathrm{J}(W_{k+1})$-表示。在 $\mathcal{X}$ 上有两个 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$-轨道：

- 闭轨道 $\mathcal{Z}$，由形如（X，0）的有序对组成；
- 开轨道 $\mathcal{U}$，由形如（X，v^*）且满足 $v^* \neq 0$ 的有序对组成。

这给出了一个 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$-等变短正合列

$$0 \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \longrightarrow 0,$$

where $\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X},\ \mathcal{E}) :\ = \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X},\ \mathcal{E})/\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U},\ \mathcal{E})$。它诱导出一个 Hom 空间的正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}), \pi_{k+1}^{\vee}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}), \pi_{k+1}^{\vee}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathcal{E}), \pi_{k+1}^{\vee}\right).$$

我们断言，开轨道的贡献非零，即

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathcal{E}), \pi_{k+1}^{\vee}\right) \neq 0.$$

注意，由 (6.3.2) 和上面的正合列，只需证明

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}), \pi_{k+1}^{\vee}\right) = 0.$$

我们利用定理 4.1.3 分析 $\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X},\ \mathcal{E})$。取代表元 $(Y,\ 0) \in \mathcal{Z}$。于是

$$Q_Y \coloneqq \mathrm{Stab}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}(Y, 0)$$

是 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$ 中稳定 Y 的抛物子群，其 Levi 分量为 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) \times \mathrm{Sp}(W_k)$。$Q_Y$ 的模特征经由 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ 分解，而 $\delta_{Q_Y}(a) = |a|^{\dim W_k + 2}$ 对于 $a \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$。由此可得

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{Z}, \mathcal{E}\big|_{\mathcal{Z}}\right) &\cong \mathfrak{ind}_{Q_Y}^{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\left(|\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \boxtimes \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}_k)\right) \otimes \delta_{P_Y}^{\frac{1}{2}}\big|_{Q_Y}\right) \\
&\cong \mathfrak{ind}_{Q_Y}^{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(|\cdot|^{k+2+\frac{\dim W_k}{2}} \boxtimes \left(\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}_k)\big|_{\mathrm{Sp}(W_k)}\right)\right) \\
&\cong |\cdot|^{k+1} \rtimes \left(\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}_k)\big|_{\mathrm{Sp}(W_k)}\right)
\end{aligned}$$

作为 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$-表示。另一方面，复化余法丛 $\mathcal{N}^*_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 上的 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$-等变丛，其在 $(Y,\ 0)$ 处的纤维表示 $\in \mathcal{Z}$ 是 $\mathrm{sgn}|\cdot| \boxtimes \mathbb{1}_{\mathrm{Sp}(W_k)}$。由定理 4.1.3，$\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X},\ \mathcal{E})$ 上存在一个 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$-等变滤过，其分次部分为

$$\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{Z}, \mathrm{Sym}^j \mathcal{N}^*_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}} \otimes \mathcal{E}\big|_{\mathcal{Z}}\right) \cong \left(\mathrm{sgn}^j|\cdot|^{k+j+1}\right) \rtimes \left(\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\widetilde{\pi}_k)\big|_{\mathrm{Sp}(W_k)}\right).$$

回顾 $\pi_{k+1}^{\vee}$ 的构造（见 (6.2.2)）， $\pi_{k+1}^{\vee}$ 的标准模中的所有“指数”都不超过 k，因此我们处于定理 4.5.1 适用的情形。于是

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\left(\mathrm{sgn}^{j}|\cdot|^{k+j+1}\right)\rtimes\left(\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right)\big|_{\mathrm{Sp}(W_k)}\right),\pi_{k+1}^{\vee}\right)=0$$

对所有 $j\in\mathbb{N}$ 均成立。由此得出 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\Gamma_Z^{\mathcal{S}}(\mathcal{X},\mathcal{E}),\pi_{k+1}^{\vee}\right)=0$，我们的结论成立。

现在，为了分析开轨道的贡献，我们选取代表元 $(Y,f_{k+1})\in\mathcal{U}$，其中 f_{k+1} 通过 W_{k+1} 上的配对被视为 Y 上的线性泛函。根据 (4.2.6)，有

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}(Y,f_{k+1})\cong\mathrm{J}(W_k).$$

因此， $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$ 同构于 $\mathcal{U}$ 上的一个 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$-等变丛，其在 (Y,f_{k+1}) 处的纤维表示为

$$\left(|\cdot|^{k+\frac{1}{2}}\boxtimes\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right)\right)\otimes\delta_{P_Y}^{\frac{1}{2}}\big|_{\mathrm{J}(W_k)}\cong\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right).$$

因此

$$\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U},\mathcal{E})\cong\mathfrak{ind}_{\mathrm{J}(W_k)}^{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right).$$

根据定理 4.1.1，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U},\mathcal{E}),\pi_{k+1}^{\vee}\right)&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\mathfrak{ind}_{\mathrm{J}(W_k)}^{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right),\pi_{k+1}^{\vee}\right)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\left(\pi_{k+1}\otimes\mathfrak{ind}_{\mathrm{J}(W_k)}^{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right),\mathbb{1}_{\mathrm{Sp}(W_{k+1})}\right)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\pi_{k+1}|_{\mathrm{J}(W_k)}\otimes\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right),\mathbb{1}_{\mathrm{J}(W_k)}\right).\end{aligned}$$

注意，最后一个 Hom 空间可以改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\pi_{k+1}|_{\mathrm{J}(W_k)}\otimes\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right),\mathbb{1}_{\mathrm{J}(W_k)}\right)&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\left(\pi_{k+1}|_{\mathrm{J}(W_k)}\right)_{Z,\psi}\otimes\left(\overline{\omega}_{\psi}\otimes\widetilde{\pi}_k\right),\mathbb{1}_{\mathrm{J}(W_k)}\right)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_k)}\left(\left(\left(\pi_{k+1}|_{\mathrm{J}(W_k)}\right)_{Z,\psi}\otimes\overline{\omega}_{\psi}\right)_{\mathrm{Hei}(W_k)}\otimes\widetilde{\pi}_k,\mathbb{1}_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_k)}\right)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_k)}\left(\mathcal{G}_{\psi}\left(\left(\pi_{k+1}|_{\mathrm{J}(W_k)}\right)_{Z,\psi}\right)\otimes\left(\omega_{\psi}\otimes\overline{\omega}_{\psi}\right)_{\mathrm{Hei}(W_k)}\otimes\widetilde{\pi}_k,\mathbb{1}_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_k)}\right).\end{aligned}$$

这里，下标$_{Z,\psi}$ 表示取最大的商，使得海森堡群 $\mathrm{Hei}(W_k)$ 的中心 Z 按 ψ作用；在最后一个同构中，我们用到了 [Sun12, Proposition 4.2]。一个简单的计算表明 $(\omega_{\psi}\otimes\omega_{\psi})_{\mathrm{Hei}(W_k)}\cong\mathbb{C}$。因此，上面的最后一个 Hom 空间同构于

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_k)}\left(\mathcal{G}_{\psi}\left(\left(\pi_{k+1}|_{\mathrm{J}(W_k)}\right)_{Z,\psi}\right)\otimes\widetilde{\pi}_k,\mathbb{1}_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_k)}\right)&\cong\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_k)}\left(\mathcal{G}_{\psi}\left(\left(\pi_{k+1}|_{\mathrm{J}(W_k)}\right)_{Z,\psi}\right),\widetilde{\pi}_k^{\vee}\right)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\pi_{k+1}|_{\mathrm{J}(W_k)},\mathcal{F}_{\psi}\left(\widetilde{\pi}_k^{\vee}\right)\right).\end{aligned}$$

那么，上一段中的论断意味着

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\pi_{k+1},\mathcal{F}_{\psi}\left(\widetilde{\pi}_k^{\vee}\right)\right)\neq 0. \tag{6.3.3}$$

如 (4.2.7) 中所述，这个 Hom 空间可以改述为一个余秩二傅里叶-雅可比模型。

接下来，我们再次借助麦基理论，将上述余秩二模型化归到基本情形。将定理 4.3.1 中的 MVW 对合应用于在 (6.2.2) 中构造的 $\pi_{k+1}^{\vee}$，可得

$$\pi_{k+1}\cong LQ\left(|\cdot|^{k}\times\cdots\times|\cdot|^{1}\rtimes\pi_1\right).$$

特别地，存在一个满射

$$|\cdot|^k \rtimes \pi_k \twoheadrightarrow \pi_{k+1}.$$

将上述满射代入（6.3.3），我们推得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(|\cdot|^k \rtimes \pi_k, \mathcal{F}_\psi\left(\widetilde{\pi}_k^\vee\right)\right) \neq 0. \tag{6.3.4}$$

令 $\mathcal{X}' = \mathrm{Sp}(W_{k+1})/Q_Y$ 为 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$ 的旗簇，由 W_{k+1} 中所有各向同性直线组成；令 $\mathcal{E}'$ 为 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$-等变温和向量丛，其在 $Y \in \mathcal{X}'$ 处的纤维表示为

$$\left(|\cdot|^k \boxtimes \pi_k\right) \otimes \delta_{Q_Y}^{\frac{1}{2}}.$$

于是有

$$\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}', \mathcal{E}') \cong |\cdot|^k \rtimes \pi_k$$

作为 $\mathrm{Sp}(W_{k+1})$-表示。在 $\mathcal{X}'$ 上有三个 $\mathrm{J}(W_k)$-轨道：

- 闭轨道 $\mathcal{Z}'$，由直线 Y 组成，它是一个单点；
- 中间轨道 $\mathcal{M}'$，由 $Y^\perp \setminus Y$ 中的各向同性直线组成；
- 开轨道 $\mathcal{U}'$，由 $W_{k+1} \setminus Y^\perp$ 中的各向同性直线组成。

设 $\mathcal{V}' = \mathcal{U}' \cup \mathcal{M}'$。于是存在一个 $\mathrm{J}(W_k)$-等变短正合列

$$0 \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{V}', \mathcal{E}'\right) \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{X}', \mathcal{E}'\right) \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}'}\left(\mathcal{X}', \mathcal{E}'\right) \longrightarrow 0,$$

其中 $\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}'}(\mathcal{X}', \mathcal{E}') \cong \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{X}', \mathcal{E}')/\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{V}', \mathcal{E}')$。这诱导出一个 Hom 空间的正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}'}(\mathcal{X}', \mathcal{E}')\ \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{X}', \mathcal{E}'\right), \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{V}', \mathcal{E}')\ \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right).$$

根据定理 4.1.3，$\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}'}(\mathcal{X}', \mathcal{E}')$上存在一个滤过。容易验证，中心 $Z(\mathrm{J}(W_k))$ 在每个分次块上都平凡作用

$$\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{Z}', \mathrm{Sym}^j \mathcal{N}^*_{\mathcal{Z}'|\mathcal{X}'} \otimes \mathcal{E}'\big|_{\mathcal{Z}'}\right),$$

对所有 $j \in \mathbb{N}$ 均成立。另一方面，中心 $Z(\mathrm{J}(W_k))$ 通过非平凡特征ψ作用于 $\mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)$。通过比较中心特征，我们得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{Z}'}(\mathcal{X}', \mathcal{E}'), \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right) = 0.$$

结合 (6.3.4) 和上述 Hom 空间正合列，可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{V}', \mathcal{E}'), \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right) \neq 0. \tag{6.3.5}$$

分解 $\mathcal{V}' = \mathcal{M}' \cup \mathcal{U}'$ 还给出了一个 $\mathrm{J}(W_k)$-等变短正合列

$$0 \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{U}', \mathcal{E}'\right) \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{V}', \mathcal{E}'\right) \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}'}\left(\mathcal{V}', \mathcal{E}'\right) \longrightarrow 0,$$

其中 $\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}'}(\mathcal{V}', \mathcal{E}') \cong \Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{V}', \mathcal{E}')/\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$，从而诱导出另一个 Hom 空间正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}'}(\mathcal{V}', \mathcal{E}')\ \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{V}', \mathcal{E}')\ \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}', \mathcal{E}')\ \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right).$$

我们再次声称

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{U}', \mathcal{E}'\right), \mathcal{F}_\psi\left(\widetilde{\pi}_k^\vee\right)\right) \neq 0. \tag{6.3.6}$$

注意 由 (6.3.5) 和上述正合列可知，要证明我们的断言，只需证明

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}'}(\mathcal{V}', \mathcal{E}'), \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right) = 0.$$

现在，我们利用博雷尔引理定理 4.1.3 来分析 $\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}'}(\mathcal{V}', \mathcal{E}')$。固定两个向量 e_k，$f_k \in W_k$，使它们构成一个（辛）双曲平面，并且有如下分解

$$W_k = \langle e_k \rangle \oplus W_{k-1} \oplus \langle f_k \rangle.$$

选择代表元 $Y'=\langle e_k\rangle\in\mathcal{M}'$。根据 (4.2.9)，我们知道 $P_{Y'}:=\mathrm{Stab}_{\mathrm{J}(W_k)}(Y')$ 是 $\mathrm{J}(W_k)$ 的一个“抛物子群”，其“Levi 商”为 $M_{Y'}\cong \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})\times \mathrm{J}(W_{k-1})$。通过与前一种情形类似的计算，可得

$$\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{M}',\mathcal{E}'\big|_{\mathcal{M}'}\right)\cong|\cdot|^{k+\frac{1}{2}}\rtimes\left(\pi_k\big|_{\mathrm{J}(W_{k-1})}\right).$$

另一方面，复化余法丛 $\mathcal{N}^*_{\mathcal{M}'|\mathcal{V}'}$ 是 $\mathcal{M}'$上的 $\mathrm{J}(W_k)$-等变丛，其在 Y' 处的纤维表示为 $\mathrm{sgn}|\cdot|\boxtimes\mathbb{1}_{\mathrm{J}(W_{k-1})}$。由定理 4.1.3，存在 $\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}'}(\mathcal{V}',\mathcal{E}')$上的 $\mathrm{J}(W_k)$-等变滤过，其分次块为

$$\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{M}',\mathrm{Sym}^j\mathcal{N}^*_{\mathcal{M}'|\mathcal{V}'}\otimes\mathcal{E}'\big|_{\mathcal{M}'}\right)\cong\left(\mathrm{sgn}^j|\cdot|^{k+j+\frac{1}{2}}\right)\rtimes\left(\pi_k\big|_{\mathrm{J}(W_{k-1})}\right)\quad\text{for } j\in\mathbb{N}. \tag{6.3.7}$$

结合定理 4.5.1 和 (6.2.1)，我们推得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\left(\mathrm{sgn}^j|\cdot|^{k+j+\frac{1}{2}}\right)\rtimes\left(\pi_k\big|_{\mathrm{J}(W_{k-1})}\right),\mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right)=0\quad\text{for all } j\in\mathbb{N},$$

因此，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}'}(\mathcal{V}',\mathcal{E}')\ \mathcal{F}_\psi(\widetilde{\pi}_k^\vee)\right)=0$，正如所需。

最后，取代表元 $\langle f_{k+1}\rangle\in\mathcal{U}'$。则 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{J}(W_k)}(\langle f_{k+1}\rangle)\cong\mathrm{Sp}(W_k)$，并且

$$\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{U}',\mathcal{E}'\right)\cong\mathfrak{ind}_{\mathrm{Sp}(W_k)}^{\mathrm{J}(W_k)}\left(\left(\left(|\cdot|^k\boxtimes\pi_k\right)\otimes\delta_{Q_{Y'}}^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{\mathrm{Sp}(W_k)}\right)\cong\mathfrak{ind}_{\mathrm{Sp}(W_k)}^{\mathrm{J}(W_k)}\pi_k.$$

注意到存在一个自然的非退化 $\mathrm{J}(W_k)$-不变配对

$$\mathcal{F}_\psi\left(\widetilde{\pi}_k^\vee\right)\times\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right)\longrightarrow\mathbb{C}.$$

利用这个配对和定理 4.1.1，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\Gamma^{\mathcal{S}}\left(\mathcal{U}',\mathcal{E}'\right),\mathcal{F}_\psi\left(\widetilde{\pi}_k^\vee\right)\right)&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\mathfrak{ind}_{\mathrm{Sp}(W_k)}^{\mathrm{J}(W_k)}\pi_k,\mathcal{F}_\psi\left(\widetilde{\pi}_k^\vee\right)\right)\\&\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}(W_k)}\left(\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right)\otimes\mathfrak{ind}_{\mathrm{Sp}(W_k)}^{\mathrm{J}(W_k)}\pi_k,\mathbb{1}_{\mathrm{J}(W_k)}\right)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_k)}\left(\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\left(\widetilde{\pi}_k\right)\big|_{\mathrm{Sp}(W_k)}\otimes\pi_k,\mathbb{1}_{\mathrm{Sp}(W_k)}\right)\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

结合 (6.3.6)，可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(W_k)}\left(\widetilde{\pi}_k\otimes\overline{\omega}_\psi,\pi_k^\vee\right)\neq0,$$

这就完成了证明。 □

迭代应用定理 6.3.1，我们得出 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Sp}(W)}(\widetilde{\pi}\boxtimes\omega_\psi,\ \pi^\vee)\neq0$。这就完成了定理 6.1.1 的证明。

References

[AB98] Jeffrey Adams 和 Dan Barbasch。元辛群的真表示。 *Compositio Mathematica* 113 1 23 66, 1998 , ( ): – . [Ada95] Jeffrey Adams。元辛群的真表示与 epsilon 因子。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. 1 2 (Zürich, 1994)* 721 731 ¨ ,,, 第 – 页。Birkhauser，巴塞尔，1995。[Ato18] Hiraku Atobe。辛-元辛情形下的局部 theta 对应与局部 Gan–Gross–Prasad 猜想。 *Mathematische Annalen*, 371(1):225–295, 2018。[BP14] Rapha ¨ el Beuzart-Plessis。用积分公式表示一对的 epsilon 因子。, ( ): – . *Canadian Journal of Mathematics* 66 5 993 1049, 2014 ´ *Canadian* [BP16] Rapha¨el Beuzart-Plessis。酉群温和表示的局部 Gross-Prasad 猜想，2016。[Cas89] William Casselman。Harish-Chandra 模到 G 的典范延拓。, ( ): – . *Canadian Journal of Mathematics* 41 3 385 438, 1989

[Che23] Cheng Chen。阿基米德局部域上诱导表示的重数公式：贝塞尔模型与傅里叶-雅可比模型。 *arXiv preprint arXiv:2308.02912*, 2023。[CL22] Cheng Chen 和 Zhilin Luo。

$\mathbb{R}$ *arXiv preprint* 上的局部 Gross-Prasad 猜想: *arXiv:2204.01212* 2022
epsilon 二分性。, . [CS21] Yangyang Chen 和 Binyong Sun。几乎线性 Nash 群表示的施瓦茨同调。*J. Funct. Anal.*, 280(7):论文编号 108817，50 页，2021。[CZ24] Rui Chen 和 Jialiang Zou。偶特殊正交群与酉群的阿瑟重数公式。 *Journal of the European Mathematical Society* 2024 , . [GGP12] Wee Teck Gan、

Benedict H. Gross 和 Dipendra Prasad。辛局部根数、中心临界值与经典群表示论中的限制问题。第 346 号，第 1–109 页。2012。关于 Gross 和 Prasad 猜想。I。[GGP20] Wee Teck Gan、Benedict H. Gross 和 Dipendra Prasad。经典群的分支律：非温和情形。 *Compos. Math.*, 156(11):2298–2367, 2020。[GI14] Wee Teck Gan 和 Atsushi Ichino。形式度与局部 theta 对应。 *Invent. Math.*, 195 3 509( ): –672, 2014。[GI16] Wee Teck Gan 和 Atsushi Ichino。Gross–Prasad 猜想与局部 theta 对应。 *Inventiones mathematicae* 206 3 705 799, 2016 , ( ): – . [GP92] Benedict H

Gross 和 Dipendra Prasad。表示限制到 SO_{n-1}时的 SO_n 分解。 *Canadian Journal of Mathematics*, 44(5):974–1002, 1992。[GP94] Benedict H Gross 和 Dipendra Prasad。关于

$SO\ 2n+1\ \times SO\ 2m$ *Canadian* ( ) ( )的不可约表示。, ( ): – . [*Journal of Mathematics* 46 5 930 950, 1994
GT16] Wee Teck Gan 和 Shuichiro Takeda。Howe对偶猜想的证明。 *J. Amer. Math. Soc.*, 29 2 473 493, 2016 ( ): – . [He17] Hongyu He。关于 $U(p,q)$的 Gan-Gross-Prasad 猜想。 *Invent. Math.*, 209(3):837–884, 2017。[Jac09] Herv´e Jacquet。阿基米德兰金–塞尔伯格积分。 *Contemporary Mathematics*, 14:57, 2009。[Kak24] Hirotaka Kakuhama。刚性内扭的局部 theta 对应与朗兰兹参数。 *arXiv preprint arXiv:2409.00805* 2024 , . [Kal13] Tasho Kaletha。局部

朗兰兹对应中的一般性与对偶表示。 *Algebra Number Theory* 7 10 2447 2474, 2013 , ( ): – . [Kud94] Stephen S.

Kudla。对偶约化对的元辛覆盖的分裂。 *Israel J. Math.*, 87 401, 1994 1 3 361(-): – .[Lan73] RP Langlands。关于实代数群不可约表示的分类。 *preprint (sic),IAS Princeton* 1973 , , . [LM 15] Hung Yean Loke 和 Jiajun Ma。局部 theta 提升的 K-谱不变量。 *Compos. Math.*, 151 1 179 206, 2015 ( ): – . [LS13] Yifeng Liu 和 Binyong Sun。傅里叶–雅可比模型的唯一性：阿基米德情形。 *Journal of Functional Analysis* 265 12 3325 3344, 2013 , ( ): – . [Luo20] Zhilin Luo。特

殊正交群局部 Gan-Gross-Prasad 猜想的局部迹公式。*arXiv preprint arXiv:2009.13947*, 2020。[MVW87] Colette Mœglin、Marie-France Vign´eras 和 Jean-Loup Waldspurger。 *Correspondances de Howe sur un corps p-adique* 1291 *Lecture Notes in Mathematics* 1987 *Correspondances de Howe sur un corps p-adique* 1291 *Lecture Notes in Mathematics* 1987 第 卷, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique* 1291 *Lecture Notes in Mathematics* 1987 *Correspondances de Howe sur un* 。Springer-Verlag，柏林, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique* 1291 *Lecture Notes in Mathematics* 1987 *Correspondances de Howe sur un* 。[MW12] Colette Mœglin 和 Jean-Loup Waldspurger。特殊正交群的局部 Gross-Prasad 猜想：一般情形。 *Astérisque*, 347:167–216, 2012。[Pau05] Annegret Paul。关于辛-正交对偶对的 Howe 对应。 *J. Funct. Anal.*, 228 2 270 310, 2005 ( ): – . [She08a] D. Shelstad。实群的温和端oscopy。I. 使用典范因子的几何转移。载于 *Representation theory of real reductive Lie groups* 472 *Contemp. Math.* 215 246 , 第 卷 *Representation theory of real reductive Lie groups* 472 *Contemp. Math.* 215 246 , 第 – 页。Amer. Math. Soc.,

普罗维登斯，罗德岛州，2008。[She08b] D. Shelstad。实群的温和端oscopy。III. 转移的反演与 L *Repre-* -簇结构。, : – . [She10] D. *sent. Theory* 12 369 402, 2008
Shelstad。实群的温和端oscopy。II. 谱转移因子。载于 *Automorphic forms and the Langlands program* 9 *Adv. Lect. Math. (ALM)* 236 276 , 第 卷 *Automorphic forms and the Langlands program* 9 *Adv. Lect. Math. (ALM)* 236 276 , 第 – 页。Int. Press，萨默维

尔，马萨诸塞州，2010。[Sun12] BinYong Sun。关于实雅可比群的表示。 *Sci. China Math.*, 55(3):541–555, 2012。[SZ12] Binyong Sun 和 Chen-Bo Zhu。重数一定理：阿基米德情形。 *Annals of Mathematics*, 第 23–44 页，2012。[Vog93] David A Vogan。局部朗兰兹猜想。 *Contemporary Mathematics*, 145:305–305, 1993。

[Wal90] J .-L. Waldspurger . D´在´e-adic 情形下 Howe 对偶猜想的证明， $p \neq 2$.
In*Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)* 2 *Israel Math. Conf. Proc.* 267 324 1990 , 第 卷，第
页 – 页。魏茨曼，耶路撒冷，。[Wal94] Nolan R Wallach。《实约化群 II 》。 *Bull. Amer. Math. Soc*, 30:157–158, 1994。[Wal10] J-L Waldspurger。与 Gross–Prasad 局部猜想相关的积分公式。 , ( ): – 。[Wal12a] Jean-Loup Waldspurger。通过积分公式计算因子 ε 的一个值。 *Astérisque*, 347 1 102, 2012: – 。[Wal12b] Jean-Loup Waldspurger。Gross-Prasad 局部猜想对特殊正交群温和表示的情形。 *Astérisque*, 第 347 期：103–165，2012。[Wal12c] Jean-Loup Waldspurger。与 Gross-Prasad 局部猜想相关的积分公式，第二部分：推广到温和表示。 *Astérisque*, 346:171–312, 2012。[Wal12d] Jean-Loup Waldspurger。Aizenbud、Gourevitch、Rallis 和 Schiffmann 一项结果的变体。*Astérisque*, 第 346 期：313–318，2012。[Xue20] Hang Xue。酉群的贝塞尔模型与 Schwartz 同调。 *preprint*, 2, 2020。[Xue23] Hang Xue。实酉群的贝塞尔模型：温和情形。 *Duke Math. J.*, 172 1031, 2023 5 995( ): – 。[Xue24] Hang Xue。实酉群的 Fourier-Jacobi模型。 *J. Funct. Anal.*, 287 110645, 41, 2024 12( ):论文编号。

Université Paris Cité, Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, Bâtiment Sophie Germain, 8 placeAurélie Nemours, F-75013 Paris, France*Email address*: cheng.chen@imj-prg.fr

School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Zijingang Campus, 866 Yuhangtang Road,Hangzhou 310058, China*Email address*: rchenmat@zju.edu.cn

Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Avenue,Cambridge, MA 02139, USA*Email address*: jlzou@mit.edu