arXiv:2601.09077v1 [math.GT] 14 Jan 2026

关于 Qazaqzeh-Chbili-Lowrance 猜想

SHREEVGOYAL、JOSHUA KOU、CHRISTINE RUEY SHAN LEE、EMMA WU、HELEN YANG 和 AARON ZHOU

Abstract. 我们计算了一族 Turaev 属为 2 的链环的最小交叉数，从而验证了 Qazaqzeh-Chbili-Lowrance 猜想对该族成立。

Contents

1. 引言 1 组织结构 4 2. 预备知识 4 2.1. 通过考夫曼括号状态和定义 Jones 多项式 4 2.2. Turaev 属 6 2.3. Jones 多项式的次数跨度 6 2.4. Kauffman 二变量多项式 7 3. Jones 多项式的极端系数。9 3.1. 最高次数 10 3.2. 最低次数 13 3.3. Jones 多项式的跨度 15 3.4. 一个链环示例 $L = D(3,\ 3,\ 5,\ -3,\ -3)$。16 3.5. 何时 $L = D(r,\ s,\ t,\ -u,\ -v)$ 是链环，何时是纽结？16 4. 从 Kauffman 多项式和 Jones 多项式得到交叉数 17 4.1. $L = D(r,\ s,\ t,\ -u,\ -v)$ 的最小交叉数。19 5. 族 $L = D(r,\ s,\ t,\ -u,\ -v)$ 的 Turaev 属 20 6. 降低 Turaev 属的图示与变换 20 致谢 25 参考文献 26

1. Introduction

本文研究一类 Turaev 属为 2 的链环所满足的 Qazaqzeh-Chbili-Lowrance 猜想[QCL25] 。QCL 猜想指出，若链环的交叉数与琼斯多项式之间的亏量等于其 Turaev 属，则该链环是充分的。

猜想 1.1. [QCL25] 一个非分裂链环 L 是充分的，当且仅当跨度$(v_L(t)) = c(L) - g_T(L)$。

这里，充分链环是指存在充分图示的链环，见定义 2.5；span$(V_L(t))$ 是链环 L 的琼斯多项式的次数跨度（定义 2.7）；而 $g_T(L)$ 是链环 L 的 Turaev 属（定义 2.6 ）。

链环 L 的 Turaev 属定义为在其所有可能的图示 D 上，对图示量 $g_T(D)$ 取最小值。交替链的 Turaev 属为 0，而对于一般链环，计算其 Turaev 属则较为困难。虽然已知充分链环的 Turaev 属关于连通和具有可加性 [Abe09]，但截至本文写作时，尚不清楚它对于一般链环关于连通和是否具有可加性。它与琼斯多项式的关系是，一般而言，我们有以下不等式[DL18]:

$$\operatorname{span}(v_L(t)) \leq c(L) - g_T(L).$$

众所周知，充分链环的充分图示可实现最小交叉数 [Lic97]以及 Turaev 属 [Abe09]。此外，琼斯多项式的跨度 span$(V_L(t))$（定义 2.7）满足 [Lic97]

$$\operatorname{span}(v_L(t)) = c(L) - g_T(L). \tag{1}$$

正如 QCL 猜想所提示的，一个值得探讨的问题是，等式 (1) 是否刻画了充分链环。对于交替链环，Howie [How17] 与 Greene [Gre17] , 分别独立解决了这一问题，而 Kalfagianni [Kal18] 则利用彩色琼斯多项式刻画了充分链环。

本文研究由正整数 r、 s、 t、 u、 v 参数化的链环族所满足的这一不等式。该链环族中的链环 L 有一个图示$D(r$、 s、 t、 $-u$、 $-v)$，其中参数 r、 s、 t、 u、 v 分别表示由 r、 s、 t、 u、 $v > 2$ 标记的每个最大扭转区域中的半扭转数，如图 1 所示的示例所示。

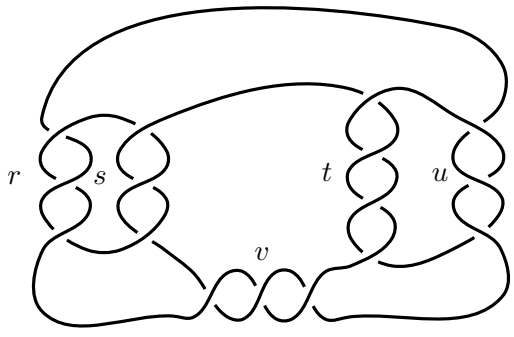


FIGURE 1. 纽结 $K(r,\ s,\ t,\ -u,\ -v) = K(3,\ 3,\ 4,\ -3,\ -3)$。

我们的约定是：将包含 t 个形如 的交叉点的扭转区域记为 t ，将包含 t 个形如 的交叉点的扭转区域记为 $-t$，页面上按从上到下的顺序阅读。

为了计算 Turaev 属，我们使用了关于 Turaev 亏格为 1 的链环 [DL18] 的琼斯多项式首项系数的结果。同一结果也表明，这一族纽结并非充分。我们的结果结合了利用琼斯多项式和 Kauffman 二变量多项式求非充分链环交叉数的技术。我们确定这族链环的 Turaev 属为 2，并确定琼斯多项式跨度的亏量$\delta(L)$，即其与上界 $c(L)-g_T(L)$ 的差。

定义 1.1。

$$\delta(L) := c(L) - g_T(L) - \operatorname{span}(V_L(t)). \tag{2}$$

定理 1.2。令 $L = D(r,\ s,\ t,\ -u,\ -v)$，则

$$\delta(L) = c(L) - g_T(L) - \operatorname{span}(V_L(t)) = s + v - 2.$$

当 $s + v > 4$ 时， $\delta(L) \neq 0$ 这一事实证实，对于这类非充分链环，$\operatorname{span}(V_L(t)) < c(L) - g_T(L)$。为了证明 QCL 猜想，需要证明所有非充分链环都满足严格不等式。我们计划在未来的项目中研究可能的反例来源，例如 Manchon [Man04], 给出的那一族例子。

关于 Turaev 亏格的可加性，本文最后给出一个关于链环图在全-A 态和全-B 态下可能的闭合类型的结果，以便未来研究算法枚举违反 Turaev 亏格可加性猜想的反例。这是对 Lowrance 的学位论文 [Low09] 中一项结果的强化。

定理 1.3. 设 D 是链环 L 的一个图示， D' 是对 D 在一个小圆盘 $\mathbb{D}^2$内的 D_T 进行一次 *Reidemeister*变换后得到的纽结图。如果 $g_T(D') < g_T(D)$，那么该 *Reidemeister*变换必为逆 *II* 型或 *III* 型。此外，在 *A* 态或 *B* 态下，变换周围链环图的闭合还满足某些条件：

$(\mathrm{RII})^{-1}$ 如果该 *Reidemeister*变换是逆 *II* 型，那么用 a, b, c, d 标记 $D \cap \partial\mathbb{D}^2$ 后，对于初始图示 D，其闭合如图 *23* 所示。

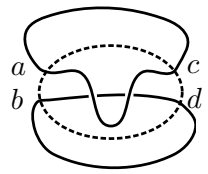


FIGURE 2. a的匹配、 b、 c、 d中，在 D当 Reidemeister变换为 $(\mathrm{RII})^{-1}$时。

(RIII)/($\overline{\text{RIII}}$) 如果该 *Reidemeister*变换是 *III* 型，那么用 a, b, c, d, e, f 标记的缠结 D_T 端点可能的闭合方式如图 *24* 所示。

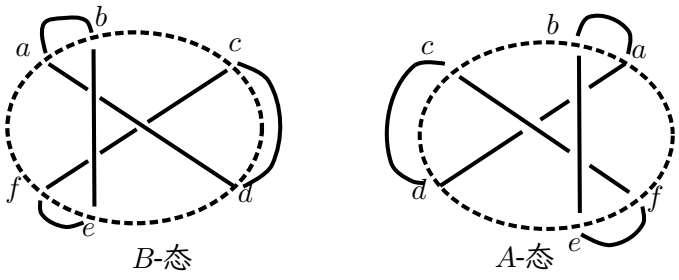


FIGURE 3. 左：当 Reidemeister变换为 RIII 时，a, b, c, d, e, f的匹配。右：当 Reidemeister变换为 RIII 时，a, b, c, d, e, f的匹配。

组织结构。第 2 节介绍本文结果所需的琼斯多项式、Turaev 属和 Kauffman 二变量多项式的背景知识。我们在第 3.3 节证明一项关键技术结果，即命题 3.4。命题 3.4 确定了推论 3.5 中 $V_L(t)$ 的跨度。第 3.5 节给出表 1，其中根据各扭转区域内半扭转数的奇偶性，对连通分支数进行分类。在第 4 节中，我们推广 Thistlethwaite 的若干结果，以确定我们这类链环的最小交叉数。具体而言，我们运用 Kauffman 二变量多项式和琼斯多项式，证明图示 $D(r, s, t, -u, -v)$ 实现了最小交叉数（定理 4.3）。在第 6 节中，我们证明定理 1.3。

2. PRELIMINARIES

2.1. 通过考夫曼括号状态和得到琼斯多项式。设 D 为一个链环图。考夫曼括号为 D赋予一个以 $\mathbb{Z}[A^{\pm}]$ 为变量的 Laurent 多项式，记作 $\langle A\rangle$，并通过递归应用 Kauffman 括号 skein 关系计算得出。

- $\langle \bigcirc \rangle = -A^2 - A^{-2}$
- $\langle \times \rangle = A\langle \rangle\langle\rangle + A^{-1}\langle)(\rangle$

定义 2.1（Kauffman 状态）。链环图 D上的 Kauffman 状态，是在每个交叉处选择 A-分辨或 B-分辨。

我们将对应于 0-分解的纽结图记作 D_0，将对应于 1-分解的纽结图记作 D_∞。

对于一个交叉 $x \in D$ 令

$$\operatorname{sgn}_x(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma \text{ chooses the } A\text{-resolution at } x \\ -1 & \text{if } \sigma \text{ chooses the } B\text{-resolution at } x \end{cases}$$

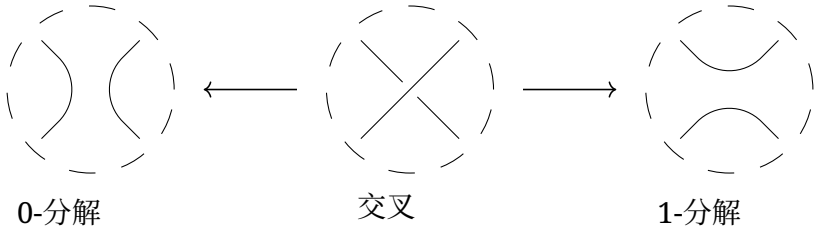


FIGURE 4. 交叉处的一个 Kauffman 状态。

然后定义

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \sum_{x \text{ a crossing in } D} \operatorname{sgn}_x(\sigma).$$

设 $\sigma: D \to \{A, B\}$ 为链环图 D上的一个 Kauffman 状态，并设$\sigma(D)$为将每个交叉替换为与 Kauffman 状态 σ在该交叉处分配的 A, B-分辨相对应的两条弧后，得到的无交叉图 D_σ 中的圆的数量。那么， $|\sigma(D)|$ 是 D_σ 中闭合分支的数量。 D_σ 的闭合分支称为 D的（σ）-状态圆 。

引理 2.1。 [Lic97，命题5。1] 如果 D 是一个具有 n 个交叉点的链环图，那么 D 的考夫曼括号为

$$\langle D\rangle = \sum_{\sigma \text{ a Kauffman state}} A^{\operatorname{sgn}(\sigma)}(-A^2 - A^{-2})^{|\sigma(D)|} \tag{3}$$

设 D 为一个定向链环图， D 的缠绕数 $w(D)$是对 D 的所有交叉点的每个交叉点符号求和。



FIGURE 5. D_+：正交叉。 D_-：负交叉。

定义 2.2。 </style}定向链环 L的琼斯多项式 $V_L(t)$（其图示为 D ）定义为

$$V_L(t) := \left((-A)^{-3w(D)}\langle D\rangle\right)_{t^{1/2}=A^{-2}}. \tag{4}$$

记号 2.3。 我们将全-A 状态的状态圆集合记为 $\sigma_A(D)$。类似地，将全-B状态的状态圆集合记为 $\sigma_B(D)$。

定义 2.4。 设 σ 是链环图 D上的一个 Kauffman 状态。在 D_σ 上，我们用一条虚线边标记交叉的位置，如图 6 所示。

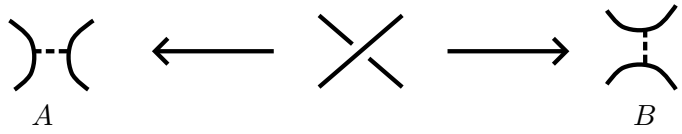


FIGURE 6. A-分辨和标记交叉位置的虚线边。

图 σ-状态图 是指以状态圆为顶点、以标记交叉位置的边为边的图。如果一个图示中，来自全 A-状态 σ_A的状态图里的每条边都连接两个不同的顶点，则称该图示为 A-充分的 。如果一个图示中，来自全 B-状态 σ_B的状态图里的每条边都连接两个不同的顶点，则称该图示为B-充分的 。

定义 2.5。 如果一个链环存在 A-充分图，则称其为 A-充分的 。如果一个链环存在 B-充分图，则称其为 I。如果一个链环存在同时为 A-和 B-充分的图示，则称其为充分 。

每个交替链环都是充分的。

2.2. **Turaev 属**。

定义 2.6 （Turaev 属）。 链环图 D的*Turaev* 属 是一个闭定向曲面的属，该曲面称为 Turaev 曲面，由图示 D在 S^3中得到：

$$g_T(D) = \frac{c(D) + 2 - |\sigma_A(D)| - |\sigma_B(D)|}{2}. \tag{5}$$

链环 L 的*Turaev* 属 是其所有 Turaev 曲面的属的最小值。

$$g_T(L) := \min\{g_T(D) \mid D \text{ is a diagram for } L\}. \tag{6}$$

在实现 Turaev 属的 Turaev 曲面上，纽结是交替的，因此这个不变量也与纽结的去交替属相关。关于 Turaev 属的精彩综述，参见 [CK14] 。

2.3. **琼斯多项式的次数跨度**。

定义 2.7 （琼斯多项式跨度）。 定义

$$M(D) = c(D) + 2|\sigma_A(D)| \tag{7}$$

$$m(D) = -c(D) - 2|\sigma_B(D)| \tag{8}$$

众所周知， A 中考夫曼括号的最高次数和最低次数分别记为 $\deg_M\langle D\rangle$, $\deg_m\langle D\rangle$，其界分别为$M(D)$ 和 $m(D)$ [Lic97，引理 5.4]:

$$\deg_M\langle D\rangle \le M(D)$$
$$\deg_m\langle D\rangle \ge m(D)$$

如果 D 是一个充分图示，那么等式成立。

现在我们来考察从考夫曼括号的次数转换为琼斯多项式的次数。根据式 (4)，变量代换 $t^{1/2} = A^{-2}$ 意味着将 $M(D)$ 乘以 $-1/4$ ，从而得到 $V_L(t)$ 中次数最低的 t 次项。对于最高次项，我们对 $m(D)$ 进行同样的操作。然后乘以单项式 $(-1)^{3w(D)}t^{3w(D)/4}$，以缠绕数进行调整。定义

$$M_J(D) := -\frac{m(D)}{4} + \frac{3w(D)}{4} \tag{9}$$

$$m_J(D) := -\frac{M(D)}{4} + \frac{3w(D)}{4} \tag{10}$$

这些界来自极端 Kauffman 状态： $M_J(D)$ 来自全-B Kauffman 状态，该状态在 D 的每个交叉处都选择 B 分辨；而 $m_J(D)$ 来自全-A Kauffman 状态，该状态在 D 的每个交叉处都选择 A 分辨。记

$$J_K(t) = a_m t^{m(L)} + \cdots + a_M t^{M(L)},$$

其中 a_m 和 a_M 均非零。链环 L 的琼斯多项式的 跨度 定义为

$$\operatorname{span}(V_L(t)) = M(L) - m(L). \tag{11}$$

众所周知， [BM03, DFK+08]有

$$\operatorname{span}(V_L(t)) \le c(L) - g_T(L), \tag{12}$$

若 L 有一个充分图 [Abe09, Thi88b]，则等号成立。

2.4. **Kauffman 二变量多项式**。Kauffman 多项式[Kau90] 是一个关于 $\mathbb{Z}[a^{\pm1}, z^{\pm1}]$ 的二变量多项式，为定向链环定义如下:

$$F(L) = a^{-w(D)}\Lambda(D). \tag{13}$$

这里 $\Lambda(D)$ 是一个二变量多项式，它对除 I 型 Reidemeister 变换以外的所有 Reidemeister 变换均保持不变。我们将遵循 Lickorish 对 Kauffman 二变量多项式的描述。

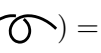
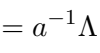
定理 2.2。 [Lic97，定理 15。5] 存在一个函数

$$\Lambda : \{\textit{Unoriented link diagrams in } S^2\} \to \mathbb{Z}[a^{\pm1}, z^{\pm1}]$$

它由以下条件唯一确定:

(i) $\Lambda(U) = 1$，其中 U 是平凡结的零交叉图;

(ii) $\Lambda(D)$ 在图示 D上经 *II* 型和 *III* 型 *Reidemeister* 变换后保持不变；
(iii) $\Lambda(D)$ 在 *I* 型 *Reidemeister* 变换下的变化如下：

$$\Lambda(\text{}) = a^{-1}\Lambda(\text{});$$

(iv) 若 D_+、D_-、D_0 和 D_∞ 是四个图示，除一个小圆盘 D^2 内的部分外完全相同；该圆盘与图示交于四点，其中 $D_+ \cap D^2$ 是正交叉，$D_- \cap D^2$ 是负交叉，$D_0 \cap D^2$ 是 *A*-分辨，$D_\infty \cap D^2$ 是 *B*-分辨。则

$$\Lambda(D_+) + \Lambda(D_-) = z(\Lambda(D_0) + \Lambda(D_\infty)). \tag{14}$$

设 D 是一个纽结的图示，桥是 D 的一段子弧，其中包含一个上交叉。桥的长度是其包含的上交叉数。

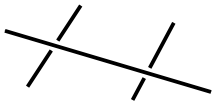


FIGURE 7. 长度为 2 的桥。

注意，交替链环图中的桥长度都为 1。Thistlethwaite 利用 Kauffman 多项式证明了以下结论。

定理 2.3. [Thi88a，定理 4] 设 D 是一个有 n 个交叉点的链环图，它是链环图 D_1、……、D_k 的连通和。设 $\Lambda_D(a, z) = \sum u_{rs} a^r z^s$，并设 b_1、……、b_k 分别为 D_1、……、D_k 中最长桥的长度。那么，对于每个非零系数 u_{rs}，$|r| + s \leq n$ 和 $s \leq n - (b_1 + \cdots + b_k)$。

在同一篇论文中，Thisthlethwaite 对素、约化、交替链环的 Kauffman 多项式作出了如下观察。

观察 2.4. [Thi88a，页码 315] 设 L 是一个链环，它有一个含 n 个交叉点、缠绕数为 w 的素约化交替图 D。$\Lambda_D(a, z)$ 中的系数 z^{n-1} 为 $k(a^{-1} + a)$，其中 $k > 0$。

特别地，素交替链环实现了 Kauffman 多项式可能的最大z-次数。

在 [Lee22] 中，第三位作者引入了近交替纽结，其中包括具有一个负扭转区域的椒盐链环。

引理 2.5。 [Lee22，引理 5。1] 设 D 是一个链环的近交替图，其具有 n 个交叉点和一个权重为 $r \leq 0$ 的极大负扭结区域，且 $|r| \geq 2$，则 $\Lambda(D)$ 的 z-次数等于 $n - 2$。

在第 4 节中，我们将使用引理 2.5 来确定我们的链环族 $L = D(r, s, t, -u, -v)$ 的交叉数。

定义 2.8（链环的连通和）。两个定向纽结或链环 L_1，L_2的图示 D_1，D_2 可以通过将图示 D_1，D_2 并排放置并将它们连接起来，使得连通和中的定向得以保留，从而得到一个新的纽结或链环 $L_1 + L_2$ $=D_1 + D_2$。所得结果称为 L_1 与 L_2的连通和 。

注 2.9。如果 L_1，L_2 都是纽结，那么连通和 $L_1 + L_2$ 的同痕类型不取决于图示的选择及其连接方式。

命题 2.6。 [Lic97，命题 16 的部分内容。2] 若 L_1 和 L_2 是定向链环，则

$$F(L_1 + L_2) = F(L_1)F(L_2).$$

3. Extreme coefficients of the Jones polynomial.

本节研究链环族 $L = D(r,\ s,\ t,\ -u,\ -v)$ 的琼斯多项式次数，其中 r，s，t，u，$v \geq 2$。通过引理 3.2 和 3.3，我们提取出关于 r，s，t，u，v的条件，以便确定琼斯多项式的最高次数和最低次数，以及琼斯多项式 $V_L(t)$ 的首系数和尾系数均为 2。这将使我们能够计算 L的 Turaev 属，以及该链环的琼斯多项式跨度的亏量 $\delta(L)$，并将其与上界 $c(L) - g_T(L)$ 进行比较。

我们需要一个关于考夫曼括号多项式在 I 型 Reidemeister 变换下如何变化的著名事实。

引理 3.1。设链环 L 由链环图 D_1, D_2表示，其中 D_1 和 D_2 除一个小圆盘内部外处处相同；该圆盘与每个图示横截相交于四个点。在小圆盘内部，两者的差异是如下图所示的 *I* 型 *Reidemeister* 变换：



Figure 8. D_1 和 D_2。

回忆一下，$M(D)$（定义 *2.7*，式 (7)）对于链环图 D 是考夫曼括号次数的图示上界。那么

$$M(D_1) = M(D_2) - 4.$$

如果改为 D, D' 通过另一种镜像的 *Reidemeister I*变换延后，那么我们有接着

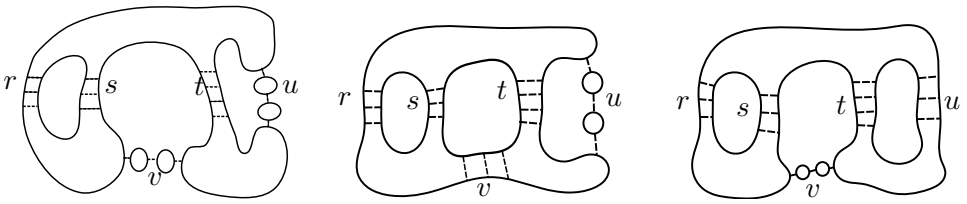
$$M(D_1) = M(D_2) + 4.$$

证明。这可由一个初等计算得出，相关内容可见[Lic97], ，其中介绍了 $M(D)$ 在 I型Reidemeister变换下如何变化。□

定义 3.1（Kauffman 状态的次数）。（最高）*Kauffman* 状态的次数 σ 是琼斯多项式状态和公式 (3) 中对应单项式的次数。

$$\deg \sigma := \operatorname{sgn}(\sigma) + 2|\sigma|.$$

3.1. 最高次数。 我们区分三种 Kauffman 状态，并将它们标记为 σ_1、σ_2、σ_3。参见图 9。



(A) σ_1 (B) σ_2 (C) σ_3

FIGURE 9. Kauffman 状态 σ_1、σ_2、σ_3。

设 σ 是链环图 D上的一个 Kauffman 状态，我们用 $\langle S_\sigma \rangle$ 表示状态和公式 (3) 中与 σ 对应的项：

$$\langle S_\sigma \rangle := A^{\operatorname{sgn}(\sigma)}(-A^2 - A^{-2})^{|\sigma(D)|}.$$

现在，状态和公式 (3) 可以写为

$$\langle D \rangle = \sum \sigma \in S\langle \sigma \rangle. \tag{15}$$

为了确定琼斯多项式的次数（ D 的考夫曼括号可确定其次数，但相差一个平移量），我们用向量 $v(\sigma) = (\sigma_r,\ \sigma_s,\ \sigma_u,\ \sigma_v)$ 为 Kauffman 状态 $\sigma \in S$ 编号，其中 $0 \le \sigma_r \le r$ 是在扭转区域 T_r, $0 \le \sigma_s \le s$, $0 \le \sigma_u \le u$ 等处， σ 选择 1-分解的交叉点数。

引理 3.2。 设 $L = D(r, s, t, u, v)$。我们有

$$\langle D(r,s,t,u,v) \rangle = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \tag{16}$$

其中

$$S_1 = \sum_{\sigma_t=0,\ \sigma_u \neq u,\ \sigma_v \neq v} \langle \sigma \rangle,$$

$$S_2 = \sum_{\sigma_t=0,\ \sigma_u = u,\ \sigma_v \neq v} \langle \sigma \rangle,$$

$$S_3 = \sum_{\sigma_t=0,\ \sigma_v = v} \langle \sigma \rangle,$$

and

$$S_4 = \sum_{\sigma_t>0} \langle \sigma \rangle.$$

此外,

$$\begin{aligned}
\deg\ S_1 &= \deg\ \sigma_1 - 4t \\
&= (2r + t + 6u) - 4t = 2r - 3t + 6u \\
\deg\ S_2 &= \deg\ \sigma_2 \\
&= 2r + t + 2u + 4 = \deg\ \sigma_1 - (4u - 4) \\
\deg\ S_3 &= \deg\ \sigma_3 = \deg\ \sigma_2 \\
\deg\ S_4 &= \deg\ \sigma_1 - 4(t - 1)
\end{aligned}$$

证明。 我们按照 $\sigma_t = 0$, $\sigma_t > 0$ 对状态和 (15) 中的项进行分类:

$$\langle D \rangle = \sum_{\sigma_t=0} \langle \sigma \rangle + \sum_{\sigma_t>0} \langle \sigma \rangle.$$

当 $\sigma_t = 0$ 时，Kauffman 状态 σ 在扭转区域 T_t的每个交叉点都选择 A-分辨。我们进一步分为两种情况:

(1) $\sigma_u \neq u$ 和 $\sigma_v \neq v$。 σ-状态图有 t 个单边环。图 10 展示了一个示例。因此，根据引理 3.1，将通过进行 tReidemeister I变换来解开 t 环后得到的图示记为,

$$\deg \sum_{\sigma_t = 0, \sigma_u \neq u \text{ and } \sigma_v \neq v} \langle \sigma \rangle = \deg\ \sigma_1 - 4t$$

.

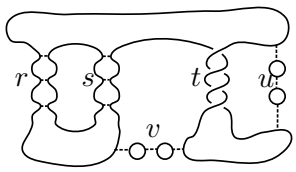


FIGURE 10. 有 t个环对应于 t 个交叉点。

(2) $\sigma_u = u$。
在这种情况下，与扭转区域 T_t 相对应的 σ-状态图中的边连接着一个不同的闭合分支，而不受其余交叉点的分辨方式 σ 影响。参见图 11。因此,

$$\deg \sum_{\sigma_t=0, \sigma_u=u} \langle \sigma \rangle = \deg\ \sigma_2$$

.

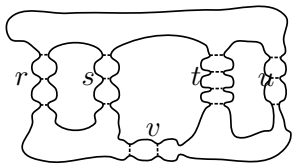


FIGURE 11. 在 σ-状态图中， t边不再连接同一个连通分支。

(3) $\sigma_v = v$。
这种情况与前一种类似：无论对其余交叉点如何选择分辨，对应于扭转区域 T_t 的 σ-状态图中的边都会连接到不同的闭合分支。参见图 12。

$$\deg \sum_{\sigma_t=0,\ \sigma_v=v} \langle \sigma \rangle = \deg\ \sigma_3$$

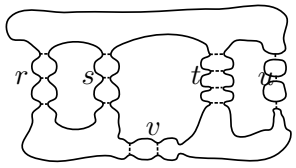


FIGURE 12. 情况 $\sigma_v = v$ ， 但 $\sigma_u = 0$。

当 $\sigma_t > 0$ 时，无论 σ 对其余交叉点选择何种分辨，状态和中的项都属于消去 $t-1$ 个扭结的过程，这些扭结位于 σ-状态图中。示例见图 13。因此，

$$\deg \sum_{\sigma_t>0} \langle \sigma \rangle = \deg\ \sigma_1 - 4(t-1).$$

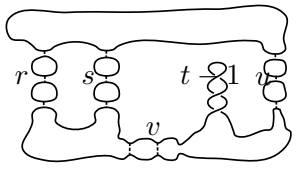
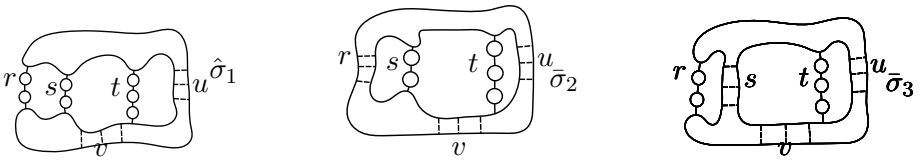


FIGURE 13. 一个 $\sigma_t > 0$的例子。

□

3.2. **最低次数**。对于最低次数，我们同样区分三种 Kauffman 状态，其中第一种是全-B Kauffman 状态，并将它们标记为 σ_1， σ_2， σ_3。见图 14。



(A) $\overline{\sigma_1}$ (B) $\overline{\sigma_2}$ (C) $\overline{\sigma_3}$

FIGURE 14. 考夫曼状态 σ_1， $\overline{\sigma_2}$, $\overline{\sigma_3}$。

引理 3.3。设 $L = D(r, s, t, u, v)$。我们有

$$\langle D(r,s,t,u,v)\rangle = \overline{S_1} + \overline{S_2} + \overline{S_3}, \tag{17}$$

其中

$$\overline{S_1} = \sum_{\sigma_u+\sigma_v\neq u+v} \langle\sigma\rangle,$$

$$\overline{S_2} = \sum_{\sigma_u+\sigma_v=u+v,\ \sigma_s=r\ \sigma\ \neq s} \langle\sigma\rangle,$$

and

$$\overline{S_3} = \sum_{\sigma_u+\sigma_v=u+v,\sigma_s=s} \langle\sigma\rangle.$$

此外，

$$\begin{aligned}
\deg_m\ \overline{S_1} &= \deg_m\overline{\sigma_1} + 4(u+v)\\
&= -6r - 3t + 6u + 4 + 8u = -6r - 3t + 14u + 4\\
\deg_m\ \overline{S_2} &= \deg_m\overline{\sigma_2}\\
&= -2r - 3t - 2u\\
&= \deg_m\overline{\sigma_1} + 4r - 8u - 4\\
\deg_m\ \overline{S_3} &= \deg_m\overline{\sigma_1} + 4\min\{u-1, v-1\}.
\end{aligned}$$

证明。 我们将状态和分解为 $\sigma_u+\sigma_v = u+v$和 $\sigma_u+\sigma_v < u+v$两种情况。末项（即考夫曼括号的最低次数小于或等于状态和中其他某些项的次数的项）按照它们与全-B Kauffman 状态的差异进行整理。

情况 $\sigma_u + \sigma_v = u + v$。

- $\sigma_r = r$。注意，对于状态 σ_2 （在其余所有交叉点上均选择 B 分辨），σ-状态图不再含有单边环。因此，它是该和式的末项。参见图15。

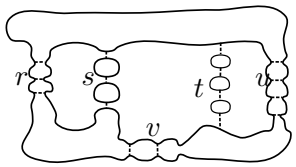


FIGURE 15. 全-B 态中的 $u+v$ 单边环不再连接 σ-态图中的单个连通分支。

在这种情况下，最低次数为

$$\deg_m \sum_{\sigma_u+\sigma_v=u+v,\ \sigma_r=r} \langle\sigma\rangle = \deg_m \overline{\sigma}_2$$

- $\sigma_s = s$。在这种情况下， σ_3 的 σ-态图不再具有单边环，因此它就是末项。见图 16。

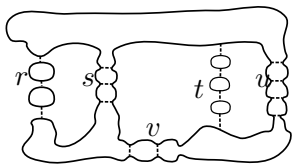


FIGURE 16. 全-B 态中的 $u+v$ 单边环不再连接 σ-态图中的单个连通分支。

最低次数为

$$\deg_m \sum_{\sigma_u+\sigma_v=u+v,\ \sigma_s=s} \langle\sigma\rangle = \deg_m \overline{\sigma}_3$$

情况 $\sigma_u+\sigma_v \neq u+v$。扭转区域 T_u或 T_v 中至少有一个交叉，使得状态 σ 选择了 A-分辨。这会产生 $u-1$或 $v-1$ 个扭结，可通过 Reidemeister变换解开；根据引理 3.1，该变换会增加次数。图 17 展示了 $\sigma_u = 1$ 和$\sigma_v = 1$的一个例子。

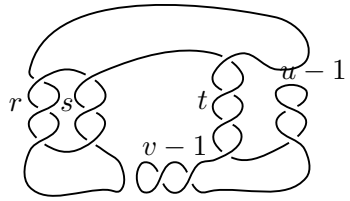


FIGURE 17. 这是 $\sigma_u = 1$ 和 $\sigma_v = 1$的情况。

- 假设 $\sigma_u < u$。那么，该 σ-状态图至少有 $u-1$ 个单边环。

• 假设 $\sigma_v < v$。那么，该 σ-状态图至少有 $v-1$ 个单边环。

Thus

$$\deg_m \sum_{\sigma_u+\sigma_v\neq u+v} \langle\sigma\rangle \leq \deg_m \overline{\sigma_1} + 4\min\{u-1, v-1\}.$$

□

现在我们明确参数 r, s, t, u, v 所需满足的条件；在这些条件下，琼斯多项式的首系数和尾系数均为 2，并可确定琼斯多项式的跨度。这些条件是 $r = s, u = v$，且 $t > \max\{r+1, u+1\}$。我们讨论一个链环 $L = D(r, s, t, -u, -v)$ 的例子，其参数 r, s, t, u, v 满足这些约束。

3.3. 琼斯多项式的跨度。 现在我们确定链环族的琼斯多项式 $V_L(t)$的最大次数和最低次数。

命题 3.4。 设 $L = D(r, s, t, -u, -v)$ 是一个链环，其图示为 $D(r, s, t, -u, -v)$，且满足 $r = s$, $u = v$，以及 $t \geq \max\{r+2, u+2\}$. 那么琼斯多项式的最大次数和最低次数为

$$\deg V_L(t) = \frac{-1}{4}(4r - 6t - 2u + 2) \tag{18}$$

$$\deg_m V_L(t) = \frac{-1}{4}(8r - 2t + 2u + 2) \tag{19}$$

此外，$V_L(t)$ 的首项系数和末项系数均为 2。

证明。当参数 r, s, t, u, v 满足命题的条件时，由引理 3.2 可知，D 的考夫曼括号的次数等于 $\deg\sigma_2 = 2r + t + 2u + 4$。特别地，对应于状态 σ_2, σ_3 的两项以相同符号达到最高次数（因为$r = s$），因此，D 的考夫曼括号多项式的首项系数为 2。因此，经过缠绕数调整，并将变量 A 转换为变量 t 时进行相应的次数转换，可得：

$$\begin{aligned}\deg_m V_L(t) &= \frac{-1}{4}(-3w(D) + 2r + t + 2u + 4 - 2)\\ &= \frac{-1}{4}(-3(-2r + t) + 2r + t + 2u + 2)\\ &= \frac{-1}{4}(8r - 2t + 2u + 2)\end{aligned}$$

对于最高次数，应用引理 3.3 后，我们进行相同的操作：

$$\begin{aligned}\deg V_L(t) &= \frac{-1}{4}(-3w(D) - 2r - 3t - 2u + 2)\\ &= \frac{-1}{4}(-3(-2r + t) - 2r - 3t - 2u + 2)\\ &= \frac{-1}{4}(4r - 6t - 2u + 2).\end{aligned}$$

同样，由于 $u = v$，对应于 Kauffman 状态σ_2, σ_3 的两项合并后，得到 D 的考夫曼括号的最后一个系数为 2。经过次数转换后，琼斯多项式的第一个系数为 2。□

推论 3.5。设 $L = D(r, s, t, u, v)$。琼斯多项式的跨度为

$$\text{span}V_L(t) = \frac{1}{4}(4r + 4t + 4u) = r + t + u.$$

3.4. **一个链环示例** $L = D(3, 3, 5, -3, -3)$。图示 $D(3, 3, 5, -3, -3)$见图 18。使用 SageMath [S+YY]计算得到该链环的琼斯多项式为

$$V_L(t) = 2t^{11/2} - 4t^{9/2} + 7t^{7/2} - 12t^{5/2} + 14t^{3/2} - 17t^{1/2} + 16t^{-1/2} - \\ - 13t^{-3/2} + 11t^{-5/2} - 7t^{-7/2} + 3t^{-9/2} - 2t^{-11/2}.$$

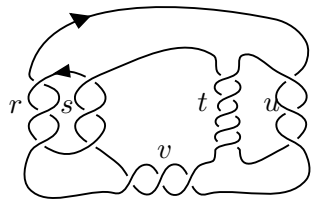


FIGURE 18. 由箭头所示定向的链环 $L(3, 3, 5, -3, -3)$。

3.5. **何时是 $L = D(r, s, t, -u, -v)$ 一个链环，何时是一个纽结?** 我们将说明每个扭转区域中的交叉点数的奇偶性如何决定链环的分支数。在表 1 中，$0 = x$ 模 2 表示 $x \in \{r, s, t, u, v\}$ 和 $1 = x$ 模 2 表示 $x \in \{r, s, t, u, v\}$的奇偶性。

r	s	t	u	v	分支
偶数	偶数	偶数	偶数	偶数	4
偶数	偶数	偶数	偶数	odd	3
偶数	偶数	偶数	奇数	偶数	3
偶数	偶数	偶数	odd	odd	2
偶数	偶数	奇数	偶数	偶数	3
偶数	偶数	奇数	偶数	odd	2
偶数	偶数	odd	奇数	偶数	2
偶数	偶数	odd	odd	odd	2
even	奇数	偶数	偶数	偶数	3
even	奇数	偶数	偶数	odd	2
even	奇数	偶数	奇数	偶数	2
even	奇数	偶数	odd	odd	1
even	odd	奇数	偶数	偶数	2
even	odd	奇数	偶数	odd	1
even	odd	odd	奇数	偶数	1
even	odd	odd	odd	odd	1
奇数	偶数	偶数	偶数	偶数	3
奇数	偶数	偶数	偶数	odd	2
奇数	偶数	偶数	奇数	偶数	2
奇数	偶数	偶数	odd	odd	1
奇数	偶数	奇数	偶数	偶数	2
奇数	偶数	奇数	偶数	odd	1
奇数	偶数	odd	奇数	偶数	1
奇数	偶数	odd	odd	odd	1
odd	奇数	偶数	偶数	偶数	2
odd	奇数	偶数	偶数	odd	2
odd	奇数	偶数	奇数	偶数	1
odd	奇数	偶数	odd	odd	1
odd	odd	奇数	偶数	偶数	1
odd	odd	奇数	偶数	odd	1
odd	odd	odd	奇数	偶数	2
odd	odd	odd	odd	odd	2

TABLE 1. 每个最大扭转区域中交叉点的奇偶性与链环分支数相对应。

4. CROSSING NUMBER FROM THE KAUFFMAN POLYNOMIAL AND THE JONES POLYNOMIAL

在本节中，我们证明，链环族$L = D(r, s, t, -u, -v)$ 的给定图示是最小交叉图示。结合使用 Kauffman 多项式和琼斯多项式的方法可追溯至

Lickorish-Thistlethwaite [LT88]。我们首先为链环族建立一些引理。请与 [LT88, Lemma 8]比较。

引理 4.1。设 $L = D(r, s, t, -u, -1)$，则 $\Lambda(D)$ 的 z-次为 $n-2$，其中 n 是 D 中的交叉点数。

证明。将 skein 关系式 (14) 应用于扭转区域 T_v 中的单个交叉点 x，得到

$$\Lambda(D) = -\Lambda(D_v) + z\Lambda(D_0) + z\Lambda(D_\infty). \tag{20}$$

图示 D_v 是一个具有长度为 2 的桥的非交替图。因此，其 z-次为 $\leq n-3$。

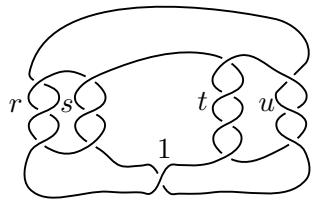


FIGURE 19. D_v。

图示 D_0 是两个图示 $L_1 + L_2$的连通和。 L_1 是素交替图示，而 L_2 可以化简以去掉 4 个交叉点。因此， $\Lambda(D_0)$ 的 z次数为 $n-1-4-2 = n-7$。

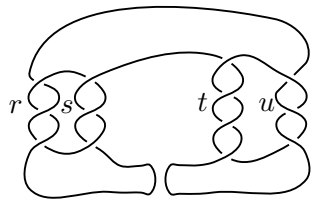


FIGURE 20. D_0。

图示 D_∞ 是仅含一个负扭转区域T_u的椒盐结。因此，根据引理 2.5， $\Lambda(D_\infty)$ 的 z次数为 $n-3$。

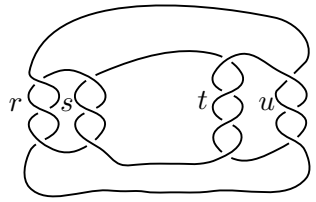


FIGURE 21. D_∞。

比较式 (20) 中所有项的 z-次数，可得项 $z\Lambda(D_\infty)$ 决定了 $\Lambda(D_v)$ 的次数，其值等于 $n-2$。□

定理 4.2. 令 $L = D(r, s, t, -u, -v)$ 为 n 交叉链环图。那么， $\Lambda_D(a, z)$ 的 z-次数为 $n-2$。

证明。 我们对与图 1 中标记为 v 的扭转区域相对应的 T_v 扭转区域中的半扭转数进行归纳。对 D 的一个交叉 x 应用 skein 关系，得到

$$\Lambda(D) = -\Lambda(D_v) + z\Lambda(D_0) + z\Lambda(D_\infty).$$

将交叉 x 变换后，得到一个仅含一个负扭转区域的椒盐纽结图，因此由引理 2.5 可知， $\Lambda(D_v)$ 的 z-次数为 $n-4$。该交叉 x 的 0-分解产生一个扭结，可以将其消去而不影响 z-次数。结果是两个素交替链环的连通和，因此， $\Lambda(D_0)$ 的 z-次数为 $n-4$。最后，该交叉 x 的 ∞-分解得到一个含有长度为 2 的桥的图示。因此， $\Lambda(D_\infty)$ 的 z-次数为 $\leq n-3$。应用引理 4.1，可得 $\Lambda(D_\infty)$ 的 z-次数为 $n-3$。

比较应用 skein 关系时所有项的 z次数可得， $\Lambda(D)$的 z次数为 $n-2$。

现在根据归纳假设，我们假设扭转区域 T_v 中的交叉点数为 $k \geq 3$。

再次对扭转区域 T_v中的一个交叉点 x应用 skein 关系，可得

$$\Lambda(D) = -\Lambda(D_v) + z\Lambda(D_0) + z\Lambda(D_\infty).$$

按照前面类似的过程，可得 D_v的 z次数为 $n-4$。 D_0 的 z次数为 $n-k-2$。 D_∞ 的 z次数为 $n-3$。乘以 z 后，可得 $z\Lambda(D_\infty)$决定了 $\Lambda(D)$ 的次数，该次数为 $n-2$。

□

4.1. $L = D(r, s, t, -u, -v)$**的最小交叉数**。

定理 4.3. 图示 D 是最小交叉图。因此， $c(L) = r + s + t + u + v$。

证明。我们证明，链环 L 不能用少于 n个交叉点的投影表示，除非它有一个 $n-2$ 交叉点的素交替图 D'。假设它有一个 $n-1$ 交叉点的图示，但该图示既非交替也非素，那么它关于 $\Lambda(L)$的 z 次数将小于或等于 $n-1-1-2 = n-4$，这与引理 4.1 矛盾。类似地，我们可以排除 L有一个 $n-1$交叉点的图示且该图示非交替但为素的情形，进而得到它有一个 $n-1$ 交叉点的素交替图这一情况。

我们还知道，由于 z-次数界，链环不能投影成少于 $n-3$ 个交叉点的图示。因此，我们还得出一种可能性：它存在一个具有 $n-2$ 个交叉点的素交替图示。然而，这意味着跨度($V_L(t)$) $= n-2$。根据命题 3.4，跨度(V_L) $= r+t+u <$

$(n-2) = r+s+t+u+v-2$，因此 D实现了 L的最小交叉数。□

5. The Turaev genus for the family $L = D(r, s, t, -u, -v)$

我们应用以下来自 [DL18] 的定理，该定理刻画了 Turaev 属为一的链环的琼斯多项式的极端系数。

定理 5.1。 [DL18，定理 1。3] 设 L 是一个几乎交替链环，或一个 *Turaev* 属为一且琼斯多项式为

$$J_L(t) = a_m t^m + a_{m+1}t^{m+1} + \cdots + a_{M-1}t^{M-1} + a_M t^M,$$

其中 a_m 和 a_M 均非零。$|a_m| = 1$ 或 $|a_M| = 1$ 成立（也可能两者都成立）。

推论 5.2. 若 L 是一个链环，其图示为 D，满足 $g_T(D) = 2$，且 $a_m(L)\ a_M(L) \neq 1$，则 L 的 *Turaev* 属为 *2*。也就是说，

$$g_T(L) = g_T(D).$$

现在我们可以证明定理 1.2。为方便读者，我们在此将其重新表述为一个命题。

命题 5.3. 设 $L = D(r, s, t, -u, -v)$，则

$$\delta(L) = c(L) - g_T(L) - \operatorname{span}(V_L(t)) = s + v - 2.$$

证明。该命题由以下结果综合得出：关于 $c(L)$ 的定理 4.3、关于 $g_T(L)$ 的推论 5.2，以及关于 span($V_L(t)$) 的推论 3.5。□

6. Diagram and moves that decrease Turaev genus

众所周知，同一链环的任意两个图示都可以通过 Reidemeister 变换相互关联。我们在图 22 中展示并标注了本节结果所涉及的这些变换。

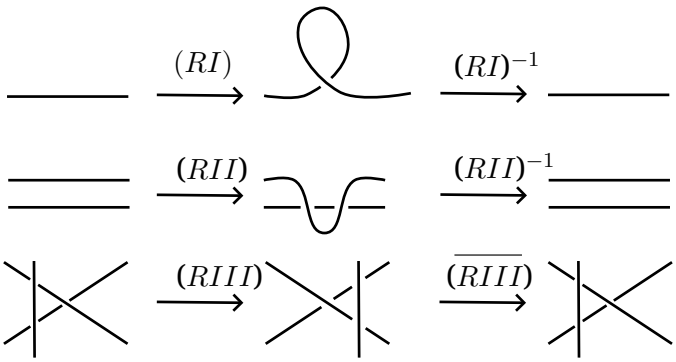


Figure 22. Reidemeister 变换。

现在，我们来探讨同一链环的链图中，哪些图示可能导致 Turaev 属降低。具体而言，我们

设 $\mathbb{D}^2$ 是链环图 D 在投影平面上的一个圆盘，链环图的边界在有限个点 $D \cap \partial\mathbb{D}^2$ 处与其横截相交，并且可以在这些点上进行 Reidemeister 变换。也就是说，在圆盘 $\mathbb{D}^2$ 内，链环呈现为图 22 中的某一种图示。

在其学位论文中，Lowrance [Low09] 计算了 Reidemeister变换可能如何影响 Turaev 属。我们进一步拓展这一思路，考察圆盘 $\mathbb{D}^2$中链环图的闭合。也就是说，考察 $L \cap \partial\mathbb{D}^2$ 可能形成的匹配，并探究它们是否会导致 Turaev 属降低。这为我们提供了有关链环的全-A态图示的可能局部特征的信息；对于这些特征，Turaev 属可能会因一次 Reidemeister变换而降低。

我们用 D_T表示在小圆盘 $\mathbb{D}^2$ 内进行 Reidemeister变换的链环图 D 的缠结，并用 $\{a, b, c, d, e, f\}$中的字母标记$\mathbb{D}^2 \cap D$ 上的点。

现在我们证明定理 1.3，并在此重述该定理，以方便读者查阅。

命题 6.1。设 D 是链环 L 的一个图示，设 D' 是对 D_T 在小圆盘 $\mathbb{D}^2$ 内进行 *Reidemeister*变换后，由 D 得到的纽结图。如果 $g_T(D') < g_T(D)$，那么该 *Reidemeister*变换必定是逆 *II* 型或 *III* 型。此外，在 *A* 态或 *B* 态下，变换附近链环图示的闭合还满足某些条件：

$(\mathrm{RII})^{-1}$ 如果该 *Reidemeister*变换是逆 *II* 型，则用 a、b、c、d 标记 $D \cap \partial\mathbb{D}^2$，对于初始图示 D，其闭合如图 *23* 所示。

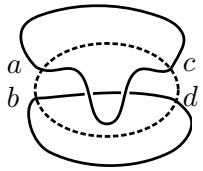


FIGURE 23. 在 D 中，当 Reidemeis- ter 变换为 $(\mathrm{RII})^{-1}$ 时，a、b、c、d 的匹配。

$(\mathrm{RIII})/(\overline{\mathrm{RIII}})$ 如果 *Reidemeister*变换属于 *III* 型，那么缠结 D_T中标记为 a、b、c、d、e、f的端点可能的闭合方式如图 *24* 所示。

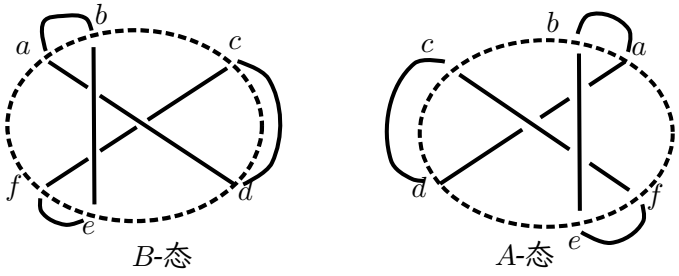


FIGURE 24. 左侧：当 Reidemeister 变换为 RIII 时， a、b、c、d、e、f 的匹配。右侧：当 Reidemeister 变换为 RIII 时， a、b、c、d、e、f 的匹配。

证明。 我们将首先证明，无论图示 D如何，Reidemeister I型变换和非逆II型变换都不会降低 Turaev 属。

Reidemeister I型变换会在 A-态或 B-态中增加一个交叉和一个圆。

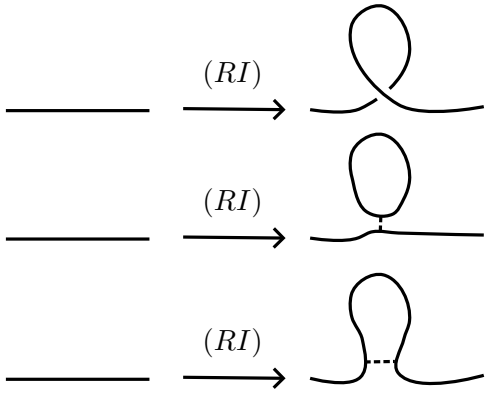


FIGURE 25. 一次 Reidemeister I 移动会在 A态或 B态中增加一个交叉和一个圆。

在图26中，(RI)与箭头方向相同，而(RI)$^{-1}$ 与反向箭头方向相同。因此

$$\begin{aligned} g_T(D') &= \frac{c(D')+2-|s_A(D')|-|s_B(D')|}{2} \\ &= \frac{(c(D)+1)+2-|s_A(D)|-|s_B(D)|-1}{2} = g_T(D). \end{aligned}$$

Reidemeister I型变换会为 A 态和 B 态各增加两个交叉点，且至多各增加一个圆。参见图26。

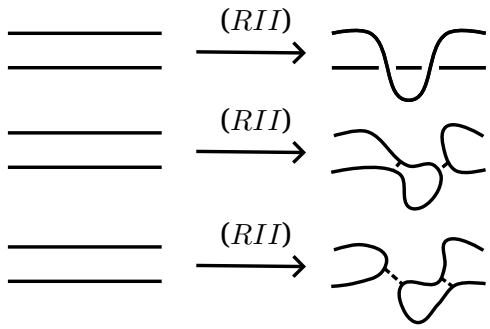


FIGURE 26. Reidemeister II 变换对A态和 B态的影响。

因此

$$g_T(D') = \frac{c(D') + 2 - |s_A(D')| - |s_B(D')|}{2}$$
$$\geq \frac{(c(D) + 2) + 2 - |s_A(D)| - |s_B(D)| - 2}{2} = g_T(D).$$

现在我们考虑逆 Reidemeister II 型变换。图 27 展示了 D_T 可能的闭合方式。由于 A-态和 B-

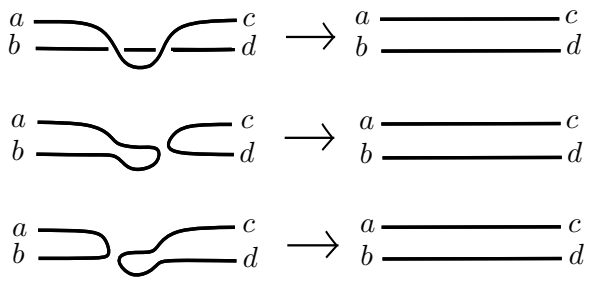


FIGURE 27. 逆 Reidemeister II 型变换下 A-状态和 B 状态的变化。

状态是平面的，因此每种状态只有两种可能的闭合。也就是说，按照图 28 中图示的标记，

(i) a与 b相连， c与 d相连；或

(ii) a与 c相连， b与 d相连。

如果闭合如（i）所述，那么该操作会使状态中的圆的数量减少一个。如果闭合如（ii）所述，那么该操作会使状态中的圆的数量增加一个。因此，我们有

$$s_A(D') \geq s_A(D) - 1, \qquad s_B(D') \geq s_B(D) - 1,$$

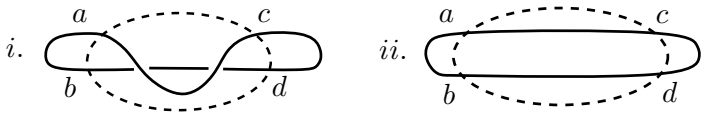


FIGURE 28. II 型闭合。

当且仅当闭合如（i）所述时，等号成立。应用图示的 Turaev 属公式，我们得到

$$g_T(D') = \frac{c(D') - 2 - |s_A(D')| - |s_B(D')|}{2}$$
$$\leq \frac{(c(D)+1) - 2 - (|s_A(D)| - 1) - (|s_B(D)| - 1)}{2} = g_T(D),$$

当且仅当两种状态下的闭合均如 (i) 所示时取等号。因此，当 A 态或 B 态中至少有一个的闭合如 (ii) 所示时，逆 Reidemeister II 型变换会降低 Turaev 属。

接下来需要考虑 Reidemeister I型变换。

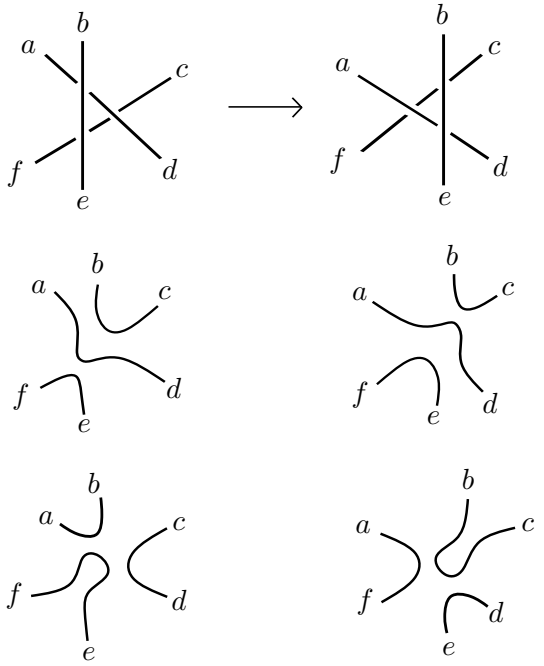


FIGURE 29. Reidemeister III 型变换。

我们先枚举可能的闭合方式。端点 a 不能与 c 或 e 相连，因为这样 b 或 f 就会成为孤立端，而全 A 态图中不会出现这种情况；与此同时，链环图的 A-状态是一组简单闭曲线。因此， a 会与 b、 d或 f相连。

若 a 与 b 相连，则 c 与 d 或 f 相连。若 a 与 d 相连，则 b 与 c 相连，且 e 与 f 相连。若 a 与 f 相连，则 b 与 c 或 e 相连。因此，可能的闭合如下所列，从（i）到（v）。

(i) a 与 b 相连， c 与 d 相连， e 与 f 相连；(ii) a 与 b 相连， c 与 f 相连， d 与 e 相连；(iii) a 与 d 相连， b 与 c 相连， e 与 f 相连；(iv) a 与 f 相连， b 与 c 相连， d 与 e 相连；以及 (v) a 与 f 相连， b 与 e 相连， c 与 d 相连。

注意， D 和 D' 的 A-态相同。因此，对于所有闭合， $|s_A（D'）| = |s_A（D）|$。对于 $|s_B（D'）|$，通过检查可以验证，对于情况 (i) 到 (v)，我们有

(i) $|s_B(D)| = 3, \quad |s_B(D')| = 1$; (ii) $|s_B(D)| = |s_B(D')| = 2$; (iii) $|s_B(D)| = |s_B(D')| = 2$; (iv) $|s_B(D)| = 1, \quad |s_B(D')| = 3$; 以及 (v) $|s_B(D)| = |s_B(D')| = 2$.

因此， D' 的 Turaev 属为

$$\begin{aligned} g_T(D') &= \frac{c(D') - 2 - |s_A(D')| - |s_B(D')|}{2} \\ &= \frac{c(D) - 2 - |s_A(D)| - |s_B(D)| + |s_B(D)| - |s_B(D')|}{2} \\ &= g_T(D) + \frac{|s_B(D)| - |s_B(D')|}{2}. \end{aligned}$$

因此，在以下情况下 Turaev 属会降低

$$\frac{|s_B(D)| - |s_B(D')|}{2} < 0,$$

这只会发生在情形 (iv) 中。 □

Acknowledgments

我们谨向 Texas State University 的 Mathworks 暑期项目致谢，感谢其促成了这次合作；同时感谢 Adam Lowrance 与我们交流他的研究工作。C. Lee 获得了美国国家科学基金会部分资助，资助项目包括 DMS 1907010（University of South Alabama）、DMS 2244923（Texas State University）和 CAREER-DMS 2440680（Texas State University）。

References

[Abe09] Tetsuya Abe. 充分结的 Turaev 属. *Topology Appl.*, 156 17 2704 2712, 2009 ( ): – . [BM03] Yongju Bae and Hugh R. Morton. 琼斯多项式的跨度与极端项. *J. Knot Theory Ramifications*, 12(3):359–373, 2003. [CK14] Abhijit Champanerkar and Ilya Kofman. 纽结 Turaev 属综述. *Acta Math. Vietnam.*, 39(4):497–514, 2014. [DFK+08] Oliver T. Dasbach, David Futer, Efstratia Kalfagianni, Xiao-Song Lin, and Neal W. Stoltzfus. 琼斯多项式与曲面上的图. *J. Combin. Theory Ser. B* 98 2 384 399, 2008 , ( ): – . [DL18]

Oliver T. Dasbach and Adam M. Lowrance. Turaev 属一链环的不变量. *Comm. Anal. Geom.*, 26(5):1103–1126, 2018. [Gre17] Joshua Evan Greene. 交替链环与定号曲面 . *Duke Math. J.*, 166 11 2133 2151, 2017 ´ ´ ( ): – . 附录由 Andras Juhasz 和 Marc Lack-enby 撰写。[How17] Joshua A. Howie. 交替结外部的刻画. *Geom. Topol.* 21 4 2353 2371, 2017 , ( ): – . [Kal18]

Efstratia Kalfagianni. 充分纽结的 Jones 斜率刻画. *Indiana Univ. Math. J.* 67 1 205 219, 2018 , ( ): – . [Kau90]

Louis H. Kauffman. 正则同痕的一个不变量. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318 2 417 471, 1990 ( ): – . [Lee22] Christine Ruey Shan Lee. 近交替纽结的 Jones 斜率与粗体积 . *Comm. Anal. Geom.*, 30(4):891–948, 2022. [Lic97] W. B. Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory* 175 *Graduate Texts in Mathematics* 1997 Springer-Verlag, 纽约, . [Low09] Adam Lowrance. *Homological width and Turaev genus*. 博士论文, 路易斯安那州立大学, 2009. [LT88] W. B. R. Lickorish and M. B. Thistlethwaite. 一些具有非平凡多项式及其交叉数的链环. *Comment. Math. Helv.* 63 4 527 539, , ( ): – . [Man04] 1988 P. M. G. Manch´on. 琼斯多项式的极端系数与图论. *J. Knot Theory Ramifications*, 13(2):277–295, 2004. [QCL25] Khaled Qazaqzeh, Nafaa Chbili, and Adam M. Lowrance. 充分 Turaev 属一链环的刻画, 2025。[S+YY] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version x.y.z)*. Sage 开发团队, YYYY。http://www.sagemath.org。[Thi88a] Morwen B. Thistlethwaite. Kauffman 多项式与交替链环. *Topology*, 27(3):311–318, 1988. [Thi88b] Morwen B. Thistlethwaite. 关于充分链环的 Kauffman 多项式. *Invent. Math.*, 93(2):285–296, 1988.

University of Texas at Austin
Brown University
Texas State University*Email address*:
Christine.rs.lee@gmail.com
William P. Clements High School
St. John's School

California Institute of Technology