环面链环 Khovanov 同调的精简复形

CARMEN CAPRAU, NICOLLE GONZÁLEZ、CHRISTINE RUEY SHAN LEE 和 RADMILA SAZDANOVI Ć

摘要。我们给出一种算法，通过沿着一组指定的高斯消元同构应用 Bar-Natan 高斯消元，减少环面辫 $ft_n^k = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^k$（有 n 股）的 Khovanov 链复形的生成元数量。我们将得到的复形称为环面辫 Khovanov 同调的 $\mathcal{FT}_n^k$ 精简复形 。利用这一算法，我们给出了精简复形中固定同调次数下生成元数量的上界。

arXiv:2601.09079v1 [math.GT] 14 Jan 2026

目录

1. 引言 1
1.1. 主要结果 2
1.2. 论文结构 3
2. 背景 4
2.1. 考夫曼状态与增强 Kauffman 状态 4
2.2. Khovanov 同调与 Khovanov 链复形 4
2.3. 缠结的 Khovanov 复形 5
2.4. 链复形的抽象高斯消元 6
2.5. Temperley-Lieb 幺半群与琼斯标准形 8
3. 高斯消元 10
3.1. 高斯消元同构 10
3.2. 算法：选择指定的高斯消元同构 12
3.3. 通过高斯消元同构精简复形 14
3.4. 集合上线性序的存在性 $\mathcal{G}$ 16
4. 化简为琼斯标准形 25
5. 枚举精简复形的生成元 29
5.1. 有序分拆函数 29
致谢 31
参考文献 31

1. 引言

自 Jones 多项式的 Khovanov 范畴化问世以来， [Kho00] 它彻底革新了量子链环不变量的研究，并在低维拓扑领域催生了重要应用， [Pic20，Ras10]。尽管如此，由于相关链复形具有组合复杂性，即便对于环面纽结等特殊类别的纽结，人们对这一同调理论的结构仍知之甚少， [GOR13]，。

本文研究无限环面链环的 Khovanov 同调结构。令 $ft_n = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}$ 表示辫群 B_n 中的一个辫子，它由一个整扭辫子的因子组成

日期：2026年1月15日。

$\triangle_n^2 = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$，作用于 n 股。关于阿廷 [Art47]之后我们对辫群生成元的约定，请参见记号 3.1。我们将 ft_n^k 辫子词 $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^k$ 记为 k个 ft_n的副本。 n 股无限环面辫的 Khovanov 同调定义为同调群 Kh(ft_n^k) 在 $k\to\infty$ [Roz10]下的$\curlywedge$直接极限。取$\curlywedge$辫子 ft_n^k的闭包 ft_n^k，无限环面链环的 Khovanov 同调定义为 Kh(ft_n^k) 在 $k\to\infty$下的直接极限。Stošić 的工作 [Sto07]首次证明了环面纽结的 Khovanov 同调具有稳定性，这意味着该直接极限存在且定义良好；而 Rozansky 的工作 [Roz10]将 Khovanov 同调群的稳定性推广到了缠结。

对 n 股的全扭转，本文记作 $ft_n^n = \triangle_n^2$，是低维拓扑和量子拓扑中的核心对象，围绕它与辫群[Art47]及其闭合所表示的链环、Garside 正规结构 [Deh02], 和辫群表示之间的关系，已有大量研究 [FH19]。近年来，它在拓扑学中的应用也取得了许多进展，尤其是那些在结的缆化、同痕和滤过结构方面表现良好的结不变量；对这些工作的全面介绍超出了本文的范围。

对缆结的 Khovanov 同调进行计算，有助于理解带色 Jones 多项式所包含的几何信息。带色 Jones 多项式是 Jones 多项式的一种推广，可写成纽结图示的各个缆的 Jones 多项式之和。例如，体积猜想认为，双曲结的带色 Jones 多项式的渐近值可以恢复结补空间的体积。关于体积猜想的权威论述，请参阅村上和村上的工作 [MM01], 。带色 Jones 多项式可通过计算链环图示的黑板缆的 Kauffman 括号得到，其中该图示装饰有 Jones-Wenzl 投影子[1] [Lic97]。Rozansky [Roz10]证明，无限个 n 股上的全扭转的 Khovanov 同调，恢复了 Cooper-Krushkal 对 Jones-Wenzl 投影子的范畴化 [CK10], ，进而可用于得到第 n个带色 Jones 多项式的范畴化。在 [Lee25b]中，这一结果被用于建立 Khovanov 同调与双曲体积之间的联系；而在 [Lee25a], 中，第三位作者提出通过计算 Jones-Wenzl 投影子的范畴化来简化 Khovanov 同调的计算。

鉴于其潜在应用，我们受到评估无穷环面辫的 Khovanov 同调这一问题的驱动。本文建立了一套计算工具，通过减少生成元的数量来简化 $\mathrm{Kh}(ft_n^k)$ 的底层链复形。我们采用 Bar-Natan 在 [BN07] 中发展的高斯消元，并将其大规模应用，以化简或精简 Khovanov 链复形 $\mathrm{CKh}(ft_n^k)$ 为一个更易处理得多的复形。我们将这个新复形称为精简复形 $\mathcal{FT}_n^k$ （定义 3.24）。

1.1. **主要结果**。

定理 1.1。 设 $\mathcal{FT}_n^k$ 表示由精简 *Khovanov* 链复形 $\mathrm{CKh}(ft_n^k)$得到的精简复形，并设 (σ,ε) 是 ft_n^k 上的一个增强 *Kauffman* 状态（定义 *2.2*），且 (σ,ε) 出现在精简复形 $\mathcal{FT}_n^k$ 中。设 W 是 *Temperley-Lieb* 幺半群中的相应纽结TL_n。那么，或者（*1*）该单词具有如下形式

$$e_{n-1}^{k_0}V_0e_{n-1}^{k_1}V_1\cdots V_re_{n-1}^{k_r},$$

其中每个 $V_j = e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{n-1}$ 都是由 TL_n 中以e_{n-1} 结尾的连续元素构成的子词，并且 $k_j\geq 2$ 对所有 j均成立。（*2*）或者，存在一条由 TL-变换组成的路径（见定义 *2.7*），将$\curlywedge W$ 变换为其琼斯标准形 $W = \mathrm{JNF}(W)$ （定义 *2.13*），其中每次变换均属于以下三种类型之一：

[1]Lickorish 并未将这个不变量称为“带色 Jones 多项式”。

(D1) $e_{n-1}^2 \to e_{n-1}$*(D2)* $e_i e_j \to e_j e_i$，其中 $|i-j| \geq 2$*(D3)* $e_i e_{i-1} e_i \to e_i$，对于 $2 \leq i \leq n-1$

与原始复形相比，精简复形的优势在于，其中增强 Kauffman 状态的数量远少于原始 Khovanov 链复形中的数量。定理 1.1 使我们能够根据 $\mathcal{FT}_n^k$ 在固定同调次数 h下，对精简复形中增强 Kauffman 状态的数量给出上界， n 和 h。

定理 1.2。对于固定的同调次数 h，令 $C(\mathcal{FT}_n^k, h)$ 表示满足以下条件的考夫曼状态 s的数量：(s, ε) 出现在精简复形 $\mathcal{FT}_n^k$ 中，且(s, ε) 的同调次数为 $= h$。则

$$C(\mathcal{FT}_n^k, h) \leq \left(\sum_{m \leq h} p(h, m) \right) + N(n, h) + (p(n, 2) + 2) C_n.$$

在定理 1.2的表述中， $p(n, k)$ 表示将正整数 n 写成 k 个正整数的有序和的方式数，而 $N(n, h)$ 表示 Temperley-Lieb 幺半群 TL_n 中长度固定为 h的琼斯标准形单词数。最后， C_n 是第 n个 Catalan 数。

我们的方法与 Kelomäki 最近的工作有相似之处 [Kel24，Kel25], 不过，我们在 2020 年启动这个项目时，还不知道离散 Morse 理论的存在。我们为实现自身目的，独立开发了离散 Morse 理论中的许多工具。因此，本文是自包含的。在离散 Morse 理论中，能否应用一组 $\mathcal{G}$ 高斯消元来简化复形，取决于由分辨立方体构造出的有向图是否无环G 。本文推导了这一结果，并构造了该图 G 。除了验证我们的算法外，我们还在定理 3.23 中证明了对任意股数的辫子，

一项相关工作是 Gorsky-Oblomkov-Rasmussen猜想 [GOR13], ，该猜想预言 $\mathrm{Kh}(ft_n^k)$ 的生成元和微分的数量及形式都可以类似地约化。Hogancamp [Hog19] 已在链复形生成元的层面上部分证实了 GOR 猜想。然而，微分尚未得到明确确定。鉴于 GOR 猜想，我们认为，我们的方法有望明确给出精简复形的微分；我们计划在未来的项目中研究这一点，以及精简复形在计算上的优势。

1.2. **论文结构**。

在第 2 节中，我们简要回顾 Khovanov 同调的一般预备知识，其中主要采用 Bar–Natan 在 [BN05], 中的表述，并遵循 Bar–Natan [BN07] 介绍链复形的高斯消元（见引理 2.4）。我们假设读者对 Khovanov 同调有一定了解。在第 2.5 节中，我们定义辫子词的琼斯标准形，并证明了 Jones 的一项结果 [Jon83]（命题 2.14）：Temperley-Lieb 幺半群 TL_n 中的每个单词都等价于一个琼斯标准形的单词。

在第 3 节中，我们描述复形 $\mathrm{CKh}(ft_n^k)$中的一些高斯消元同构。接着在第 3.2 节中，我们介绍算法 3.2 ，该算法针对 $\mathrm{CKh}(ft_n^k)$中的一个增强 Kauffman 状态，至多选取一个高斯消元同构，我们称之为 指定的高斯消元同构。我们在引理3.7中证明该算法的正确性。所有此类指定的高斯消元同构的集合 $\mathcal{G}$ 定义于定义3.5。

在第3.3 节中，我们定义由 G 构造的图 $\mathcal{G}$；在第3.4 节中，我们证明，若 G无环，则存在 $\mathcal{G}$ 上的一种次序，可据此沿着 $\mathcal{G}$中的所有元素应用高斯消元，从而将 $\mathrm{CKh}(ft_n^k)$ 化简为 $\mathcal{FT}_n^k$（定义 3.24）。本文技术性最强的部分是第 3.4 节，我们在其中证明 G 无环。

在第 4 节中，我们结合前几节的结果证明定理 1.1；在第5节中，我们利用定理 1.1 证明定理 1.2。第 1.1 号定理的引例在第 4.0.1 节中讨论。

2. 背景

2.1. 考夫曼状态与增强 Kauffman 状态。

定义 2.1 （考夫曼状态）。 给定一个纽结或链环图 D，其中含有交叉，一个 考夫曼状态 σ 在 D 上是指在 0-分解或 1-分解之间，对 D的每个交叉进行选择，如图 1所示。 将考夫曼状态应用于 D 意味着将 D 中的所有交叉替换为该状态在每个交叉处所选择的 0-分解或 1-分解，从而得到一个由不相交的弧和不含交叉的闭合分支组成的集合，我们称之为完全缠结分辨。



图 1. 考夫曼状态的 0-分解和 1-分解。

定义 2.2。 设 T 是一个具有交叉的纽结，σ 是 T 上的一个考夫曼状态，T_σ 是通过 σ 对 T 作出的完全分解。增强 *Kauffman* 状态 是一个二元组（σ，ε），其中 ε： $T_\sigma \to \{\pm\}$ 是在 $+$ 或 $-$ 上的每个闭合分支中进行标记的标记函数。

2.2. Khovanov 同调与 Khovanov 链复形。

设 L 是一个具有 t 个交叉的链环图，并将这些交叉编号为 $\{1, 2, \ldots, t\}$。对 L 上的考夫曼状态 σ 的选取可以编码为一个长度为 t 的二进制串 s_b，其中第 i 个条目在该考夫曼状态于第 i 个交叉处选择 0-分解时为 0，选择 1-分解时为 1。对于 CKh(L) 中的增强 Kauffman 状态（σ，ε），我们定义其同调次数 h 和量子次数 q。

定义 2.3（同调分次与量子分次 [Tur17]）。设 (σ, ε) 是链环 $L \subset S^3$ （其图示为 D）上的一个增强 Kauffman 状态，对应的二进制串为 s_b。设 r_s 为 s_b中 1 的个数，$c_-(D)$ 为 D中的负交叉点数，而 $c_+(D)$ 为 D中的正交叉点数。设 deg(σ, ε) 为标记为 $+$ 的圆的个数减去标记为 $-$的圆的个数。则

- (σ, ε) 的同调分次 $h = h(\sigma, \varepsilon)$ 为
$$h = r_s - c_-.$$
- $q = q(\sigma, \varepsilon)$ 的量子分次为
$$q = \deg(\sigma, \varepsilon) + h + c_+(D) - c_-(D).$$

对于具有 t 个交叉的定向链图 D，Khovanov 关联一个链复形 $C^{*,\,*}(D)$。令 $V = \mathbb{Z}\{v_-, v_+\}$ 表示以 v_- 和 v_+ 为基的 $\mathbb{Z}$-模，其分次满足 deg$(v_-) = -1$，且 deg$(v_+) = 1$。对于一个考夫曼状态 σ，令 k_s 表示通过对 D 应用 σ，以 D 分解所有交叉后所得完全分解中的闭合分支数。对于 D 的 2^t 分解集合中的一个元素 s_b，我们关联如下分次向量空间

$$V_s := V^{\otimes k_s}\{r_s + c_+(D) - 2n_-(D)\},$$

并定义

$$C^{h,*}(D) := \bigoplus_{s_b\in\{0,1\}^n, r_s = h + c_-(D)} V_s.$$

现在我们来描述微分 d，它将 $\{C^{*,*}(D)\}$ 转化为链复形。给定两个 Kauffman 状态，若其对应的二进制串 s 和 s' 仅有一处不同：s_b 中的一个 0 变为 s'_b中的一个 1，而其他所有项都相同，则定义映射 d_s：$V_s \to V_{s'}$ 如下。定义

$$m : V \otimes V \to V$$

by

$$m(v_+ \otimes v_+) = v_+, \qquad m(v_+ \otimes v_-) = m(v_- \otimes v_+) = v_-, \qquad m(v_- \otimes v_-) = 0.$$

此外，定义

$$\triangle : V \to V \otimes V$$

by

$$\triangle(v_+) = v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+, \qquad \triangle(v_-) = v_- \otimes v_-.$$

对于通过将 s中的 0 改为 s' 中的 1 而相关联的 s 和 s'（注意，一个闭合分支会分裂为两个闭合分支，或两个闭合分支会合并为一个），对于 $v \in V_s$，定义如下：

$$d_{s,\ s'}(v) = \begin{cases} (v)\text{：若从 } s \text{ 到 } s' \text{时，} C,\ C' \text{ 中的一对闭合分支合并为 } D_\sigma \text{ 中的一个分量；}(\,)\text{：若} \\ \\ \text{从 到 时，闭合分支 } C \in D_\sigma \text{ 分裂为 } D_{\sigma'} \text{中的两个闭合分支 } C',\ C'' \end{cases}$$

映射 m 和 $\triangle$ 通过仅作用于张量积中对应于 D_σ里的 C 和 C' 的分量 $V \otimes V$，以及分别作用于对应于 D_σ中C 的分量 V，扩展到 V_s 上。

最后，对于仅通过一次从 0 到 1 的分解变换相关联的 s 和 s'，其中 s' 由s 将一个 $0 \in s$ 改为 1 得到，令 $\star$ 表示 s 中发生改变的数字。将二进制串从左向右读取，令 sgn(s, s') 为

$$\mathrm{sgn}(s, s') = (-1)^{\#\text{ of 1's to the left of } \star \text{ in } s}.$$

于是，对于 $v \in C^{h,\ *}(D)$，同调分次为 h 时的微分 d^h 定义为

$$d^h(v) = \sum_{s\in C^{h,*}(D),\ s' \in C^{h,*} \text{ related to } s} \mathrm{sgn}(s, s') d_{s,s'}(v).$$

2.3. **缠结的 Khovanov 复形**。 Bar-Natan 将 Khovanov 同调推广到了缠结上，见 [BN05], 。他为一个缠结关联了一个形式链复形，其对象是分次缠结分解的形式直和，态射则是缠结分解之间由协边构成的矩阵。不取模于 $\mathbb{Z}$-模时，Bar-Natan 关联到缠结 T 的形式链复形的同伦类型在 Reidemeister变换 [BN05定理 1]下不变；因此它是缠结的不变量。我们指出，Bar-Natan 的构造同样适用于链环，只需将链环视为没有边界点的缠结。我们假定读者熟悉论文 [BN05], ，下面仅简要介绍论文 [BN05] 中与本文工作最相关的设定。

范畴 $\mathrm{Cob}^3(\emptyset)$ 是一个预加法范畴，其对象为完全缠结分辨，态射则是这些分辨（平滑）之间的协边，并视保边界同痕为等价。若 B 是圆上的一个有限点集，例如纽结 T 的边界 ∂T，则 $\mathrm{Cob}^3(B)$ 是一个范畴，其对象是边界为 B 的完全缠结分辨的（保边界）同痕类，态射则是这些对象之间的协边。我们沿用 Bar-Natan 的做法，将 Cob^3 既用来表示 $\mathrm{Cob}^3(\emptyset)$，也用来表示 $\mathrm{Cob}^3(B)$，以避免不必要的记号。

预加法范畴 Mat(Cob^3) 由 Cob^3 按如下方式构造:

• **对象**: 可能为空的形式直和 $\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_i$，其项为 Cob^3 的对象 $\mathcal{O}_i$。•若 $\mathcal{O}=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_i$ 且 $\mathcal{O}'=\bigoplus_{j=1}^{m}\mathcal{O}'_j$，则 Mat(Cob^3) 中的态射 F: $\mathcal{O}'\to\mathcal{O}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵 $F=(F_{ij})$，其元素为态射 F_{ij} : $\mathcal{O}'_j\to\mathcal{O}_i$。• **态射**在 Mat(Cob^3) 中通过矩阵加法相加。• Mat(Cob^3) 中态射的复合按一条仿照矩阵乘法的规则定义:

$$((F_{ij})\circ(G_{jk}))_{ik}:=\sum_j F_{ij}\circ G_{jk}.$$

我们将范畴 Cob^3 中的态射按图 2所示的局部关系取商，并将所得的商记为Cob$^3_{/l}$。

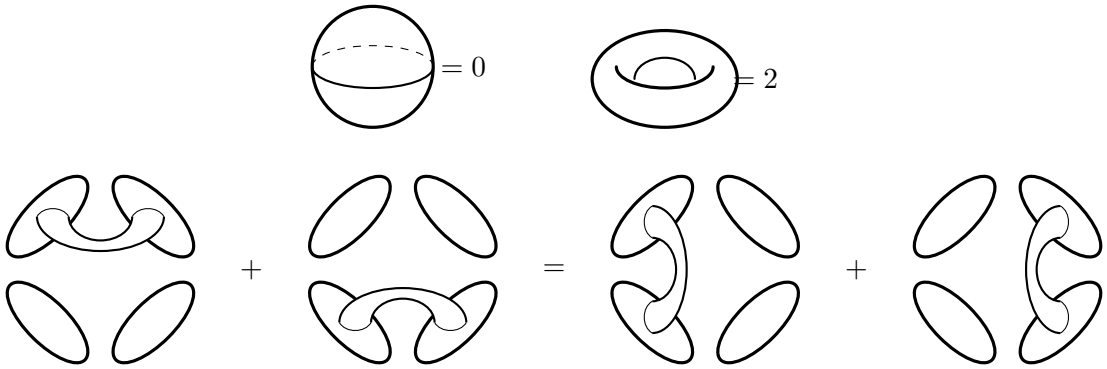

图 2. Bar-Natan 关系。

令 Kob 为 Mat(Cob$^3_{/l}$) 上的链复形范畴，其对象是有限长度的链

$$\cdots\longrightarrow\Omega^{r-1}\xrightarrow{d_{r-1}}\Omega^{r}\xrightarrow{d_r}\Omega^{r+1}\longrightarrow\cdots,$$

其中，对所有 r，复合 $d_r\circ d_{r-1}$ 均为 0。

给定一个纽结 T，Bar-Natan 的形式链复形 $[T]$视为 Kob中的一个对象时，是 T 的同伦不变量（见 [BN05, 定理 1]）。

就本文的研究范围而言，采用范畴 $Cob^3_{\bullet/l'}$进行研究较为方便，其中 $Cob^3_{\bullet}$ 与 Cob^3具有相同的对象 -2，但现在协边允许带有点，每个点都赋予形式度 $Cob^3_{\bullet/l'}$。范畴 $Cob^3_{\bullet}$ 由范畴 l' 模去涉及带点协边的局部关系而得到。新的关系 l是初始关系 [, 现在改写为带点协边的形式。详情请参阅 BN05，第 11 节。。

2.4. 链复形的抽象高斯消元。

引理 2.4 （高斯消元 [BN07]）。若 ϕ： $b_1\to b_2$ 是一个同构，则四项链复形片段

$$\cdots\to[C]\xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}}\begin{bmatrix}b_1\\ D\end{bmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\phi & \delta\\ \gamma & \varepsilon\end{pmatrix}}\begin{bmatrix}b_2\\ E\end{bmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\mu & \nu\end{pmatrix}}[F]\to\cdots$$

与该复形片段同伦等价

$$\cdots\to[C]\xrightarrow{(\beta)}[D]\xrightarrow{(\varepsilon-\gamma\phi^{-1}\delta)}[E]\xrightarrow{(\nu)}[F]\to\cdots$$

设 α 是链复形中微分的一个分量，并假设 α 是一个同构。通过 沿 α 进行高斯消元，我们指的是利用引理 α 2.4，创建一个新复形，并替换与 α 对应的分量。

对完全分解中的一个闭合分支进行解环 T_σ，我们在 T_σ 中得到两个副本，其复形按 q 和 q^{-1} 分次。下面的引理（记号略有不同）是众所周知的 [BN07]。

引理 2.5 (解环)。参见图 3。若对象 T 属于 $Cob^3_{\bullet/l'}$ 且满足 $T = T' \cup \ell$，其中 ℓ 是一个闭合环，那么 T 同构于两个副本的直和 qT' 和 $q^{-1}T'$，其中 T'的一个副本的次数平移为 $+1$，另一个副本的次数平移为 -1。

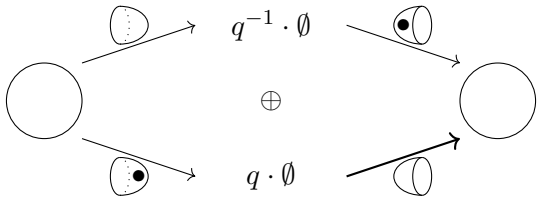

图 3。 来自 [BN07]的解环图示。

我们将引理2.5 中从包含闭合环的对象 T 到其解环所得的一个副本 $q^{\pm 1}T'$的映射记为 $D_\pm$。从 $q^{\pm 1}T'$ 到 T 的相应映射记为$L_\pm$。

引理 2.6. 设有一个映射 $m\colon T_1 \cup \ell \to T_2$，其中 ℓ 是一个闭合环，而 m 通过一个鞍点将该闭合环合并。则复合 $m \circ L_+\colon qT_1 \to T_2$ 是恒等映射。类似地，设有一个映射 $\Delta\colon T_1 \to T_2 \cup \ell$，其中 ℓ 是一个闭合环，而 Δ 将 T_1 中的一条弧分开，生成闭合环 ℓ。则复合 $D_- \circ \Delta\colon T_1 \to q^{-1}T_2$ 是恒等映射。见图 4，其中同构的分量以虚线表示。

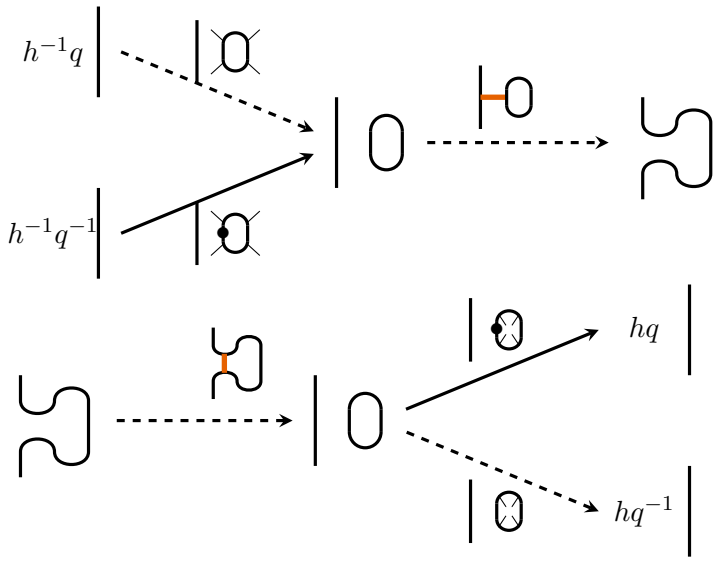

图 4. 合并与分裂一个圆。

注意，乘以 $q^{\pm 1}$ 会使量子分次改变 ± 1。

2.5. **Temperley-Lieb 幺半群与琼斯标准形。**

定义 2.7 (TL 变换)。 设 $n \in \mathbb{N}$，其中 $n \geq 2$。令 TL_n 为由集合 $E = \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ 生成的、包含 n 股单词的 Temperley-Lieb 幺半群，并对以下关系取商：

[TL-A] $e_i^2 \sim e_i$ [TL-B] $e_i \sim e_i e_j e_i$ 对于 $|i-j| = 1$ [TL-C] $e_i e_j \sim e_j e_i$ 对于 $|i-j| \geq 2$。

注记 2.8。 Temperley–Lieb代数通常定义在交换环 R 上，并带有一个特定元素 $\delta \in R$，使得关系 [TL-A]表示为$e_i^2 \sim \delta e_i$。就我们的目的而言，读者可以假设 $\delta = 1$，不过我们实际上处理的是底层的单词，将这些关系视为“移动”而非等价关系。

记号 2.9。 对于 TL_n 中的两个单词 W，W'，当它们是同一个单词时，我们记作 $W = W'$；当 W 和 W' 在 TL_n 中属于同一个等价类时，我们记作 $W \sim W'$。

记号 2.10. 我们进一步将 Temperley-Lieb 关系拆分为若干变换，每种变换都将一个单词替换为一个等价单词。我们定义七种变换 $a_\pm$，$b_\pm^{\pm 1}$，c 如下。

- 由关系 [TL-A], 可得两种变换：
$$e_i \xrightarrow{a_+} e_i^2 \xrightarrow{a_-} e_i.$$
- 由关系 [TL-B], 可得四种变换：
$$e_i \xrightarrow{b_+^1} e_i e_{i+1} e_i \xrightarrow{b_-^1} e_i$$
and
$$e_i \xrightarrow{b_+^{-1}} e_i e_{i-1} e_i \xrightarrow{b_-^{-1}} e_i.$$
- 关系 [TL-C] 只给出一种变换：
$$e_i e_j \xrightarrow{c} e_j e_i$$
其中 $|i-j| \geq 2$。

定义 2.11. 设 W, W' 是 TL_n 中的等价单词。从 W 到 W' 的路径 P 是一个单词序列 $(W_i)_{i=0}^k$，其中这些单词属于 TL_n，且满足 $W = W_0, W' = W_k$；对所有 $i < k$，W_{i+1} 都可通过记号 2.10 中的一次变换由 W_i 得到。注意，对所有 i，$W_i \sim W \sim W'$。

P的子路径是 P的一个子序列（W_i）$_{i=j}^{l}$，其中 $0 \leq j \leq l \leq k$。

我们常用以下形式表示 TL_n 中的路径：列出用于从前一个单词 W_i得到每个 W_{i+1} 的操作：

$$W_0 \xrightarrow{M_1} W_1 \xrightarrow{M_2} \cdots \xrightarrow{M_k} W_k,$$

其中，$(W_i)_{i=1}^k$ 的数据可以由路径 P的数据确定。作为简写，我们也会写作 $W \rightsquigarrow W'$，以表示存在一条从 W到 W'的路径。

定义 2.12。 设 P为一条路径（W_i）$_{i=0}^{k}$。若对所有 $i < k$，len(W_i) ≤len(W_{i+1})，则称 P是单调递增（按长度）。另一方面，若对所有 $i < k$，len(W_i) ≥len(W_{i+1})，则称 P是单调递减（按长度）。

定义 2.13 (琼斯标准形 [KT08])。 对于 $1 \leq k \leq n-1$，令 $E_{n,k}$ 为由满足以下条件的整数 $2k$ 元组 $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k)$ 所组成的集合

$$0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n, \qquad 0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_k < n,$$

and

$$j_1 \leq i_1, j_2 \leq i_2, \ldots, j_k \leq i_k.$$

对于这样的元组 $t=(i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k)$，令

$$W_t := (e_{i_1}e_{i_1-1}\cdots e_{j_1})(e_{i_2}e_{i_2-1}\cdots e_{j_2})\cdots(e_{i_k}e_{i_k-1}\ldots e_{j_k}).$$

若单词 $W\in TL_n$ 满足：对于某个元组 t，有 $W=W_t$，则称 W 为琼斯标准形。已知 TL_n 中的每个单词都等价于一个琼斯标准形的单词。事实上，对于任意单词 $W\in\mathrm{TL}_n$，都存在一条从 W 到其琼斯标准形 $\mathrm{JNF}(W)$ 的单调下降路径。

命题 2.14。 *[Jon83，引理 4.1。2]*

给定 $W\in\mathrm{TL}_n$，存在一条单调下降路径 $P=(W_i)_{i=0}^k$，其中 $W_0=W$ 和$W_k=\mathrm{JNF}(W)$。也就是说，存在一条单调下降路径，可将 W 变换为其琼斯标准形 $\mathrm{JNF}(W)$。

证明。 我们通过对指标 n进行归纳来证明。下文中，我们将“贪心约化”定义为尽可能多地应用以下变换：

- $e_ie_i\to e_i$
- $e_ie_{i\pm1}e_i\to e_i$

贪心约化的结果是一个新单词，其中不会出现 e_i^2和 $e_ie_{i\pm1}e_i$。在下文的算法中，只要可能，我们就进行贪心约化。

基本情形 $n=2$：任意一个 $W\in\mathrm{TL}_2$ 都具有形式 e_1^l，其中 $l\geq 1$。若 $l>1$，我们就应用贪心约化；事实上，我们反复应用变换 $e_ie_i\to e_i$，直到所得单词为 $e_1=\mathrm{JNF}(W)$。

归纳步骤：假设该命题对任意指标为 n 的单词都成立，并设 $W\in\mathrm{TL}_{n+1}$，其中最大指标 e_n 至少出现一次。（否则，根据归纳假设即可得证，因为若 e_n 未出现在 W 中，则 $W\in\mathrm{TL}_n$。）经过贪心约化后，修改所得的单词具有如下形式

$$W_0\cdot e_n\cdot W_1\cdot e_n\cdot W_2\cdot\ldots\cdot e_n\cdot W_k,$$

其中 $W_i\in\mathrm{TL}_n$，对所有 $0\leq i\leq k$ 均成立。根据归纳假设，我们可以对该单词进行修改，直到所有 W_i 都处于 Jones 标准形，即得到以下单词：

$$\mathrm{JNF}(W_0)\cdot e_n\cdot\mathrm{JNF}(W_1)\cdot e_n\cdot\mathrm{JNF}(W_2)\cdot\ldots\cdot e_n\cdot\mathrm{JNF}(W_k).$$

现在，利用 TL_n 中的交换关系，将所有 k 个 e_n 的出现尽可能向右移动，然后尽可能使用关系 $e_n^2\to e_n$ 约化该单词。这样，每个 e_n 要么（1）后接一个以 e_{n-1} 开头的下降串，要么（2）位于单词的最末尾。另请注意，对于所有 $0\leq i\leq k$，$\mathrm{JNF}(W_i)$ 中 e_{n-1} 恰好出现一次。

写作 $V_i=\mathrm{JNF}(W_i)$ 后，我们修改后的单词现在呈现为

$$V_0\cdot(e_ne_{n-1})\cdot V_1\cdot(e_ne_{n-1})\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_{k-1}(e_n)V_k,$$

其中，V_k 要么是单位元，要么是一个以 e_{n-1}开头的下降串。注意，对于所有$1\leq i\leq k$，$V_i\in\mathrm{TL}_{n-1}$，因此它与 e_n交换。于是，我们可以将e_n 的第二个副本向左交换，直到它紧邻第一个 e_n的出现次数之后的 e_{n-1}；再将 e_n 的第四个副本向左交换，使其紧邻 e_n的第三个出现次数之后的 e_{n-1}；依此类推。按照上述方式交换 e_n 的第二个副本后，得到的单词形式为

$$V_0\cdot(e_ne_{n-1}e_n)\cdot V_1\cdot(e_{n-1})\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_{k-1}(e_n)V_k$$

or

$$V_0\cdot(e_ne_{n-1}e_n)\cdot V_1\cdot(e_{n-1})\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_{k-1}(e_n),$$

这取决于 e_n 或 V_{k-1}中单词的结尾。现在，我们将出现的 $e_ne_{n-1}e_n$ 替换为 e_n。这减少了单词中 e_n 的出现次数。

我们重复此算法（将 e_n 向左移动，直到它紧邻一个 e_{n-1}，然后将 $e_ne_{n-1}e_n$ 替换为 e_n），共重复$\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ 次，直到 e_n 的出现次数至多为一次。如果

e_n 出现在所得单词中，那么它必定是单词最末端某个递减段的开头；也就是说，修改后的单词形式为

$$U \cdot (e_n e_{n-1} \dots e_m),$$

其中 $m \le n$ 和 $U \in \mathsf{TL}_n$；注意，下降串可能恰好就是单词 e_n。根据归纳假设，存在一条单调下降路径，将 U 变为 JNF(U)。应用这条路径后，我们得到

$$\mathrm{JNF}(U) \cdot (e_n e_{n-1} \dots e_m),$$

它处于琼斯标准形。 ■

等价地，对于任意单词 W，都存在一条单调递增路径 $\mathrm{JNF}(W) \rightsquigarrow W$。这可以通过反向使用命题2.14证明中的路径得到。

3. Gaussian elimination

3.1. 高斯消元同构。

记号 3.1 (辫群生成元)。 我们用 σ_i 表示涉及辫子的第 i股和第 $(i+1)$股的辫群生成元，并用 σ_i^{-1} 表示辫群生成元 σ_i的逆；我们的约定见图5 。

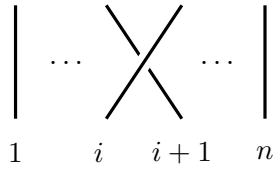

图 5. 辫群生成元 σ_i.

记号 3.2 （带横线辫词）。 设 β 是一个有 n 股的辫子。数字（带横线或不带横线）构成的单词 w 表示 β 上的一个考夫曼状态，定义如下。我们将 β 中的每个 σ_i 替换为 i 或 $\bar{i}$，从而得到与该考夫曼状态对应的数字单词。如果考夫曼状态 $\bar{}$ 在 σ_i 上选择 0-分解，那么我们将 σ_i 替换为 i；否则，将 σ_i 替换为 $\bar{i}$。

例如，带横线辫词 $1\bar{2}33\bar{2}1$ 表示一个考夫曼状态：它在辫子 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ 的前四个交叉处选择 0-分解，在最后两个交叉处选择 1-分解。我们将使用带横线辫词中数字的下标，进一步标明该数字在辫子词中的位置，位置按从左到右的顺序读取。例如，$1_1\bar{2}_2 3_3 3_4 \bar{2}_5 1_6$。

我们将使用动词“加横线”来表示将与带横线辫词中的某个数字对应的交叉的分辨率从 0 改为 1 。我们还将用小写字母表示带横线的单词 $w = w(\sigma)$，它表示一个考夫曼状态 σ；并用带横线数字指代相应的交叉。图6 给出了一个示例。

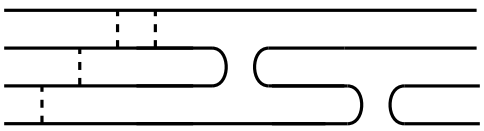

图 6。考夫曼状态 $1\bar{2}33\bar{2}1$。

设 TL_n 表示定义 n 中定义的2.7上的 Temperley-Lieb 幺半群。对考夫曼状态 σ （由带横线单词 w 表示）应用后得到的完全纽结分辨

¯辫子 β 可以描述为 $W \in$TL$_n$ 的一个单词：按照 w 上的顺序从左到右读取，将每个带横线数字 $i \in w$ 映射到 e_i。对于与该考夫曼状态对应的带横线辫子词所对应的 TL$_n$ 单词，我们约定使用大写字母表示。

对于由 w 表示的考夫曼状态，其中的每个闭合分支 C 在 W 中都有一个最左交叉$\ell(C)$ 表示 β中的交叉，将其替换为 e_i 对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，由考夫曼状态围出的闭合分支边界所对应的交叉，且从左到右读取单词时，该交叉在 w中的位置最小。类似地， C 中的 W 每个闭合分支都有一个最右交叉 $r(C)$，它位于该闭合分支的边界上，且该交叉在 w 中的位置最大（见图 7）。

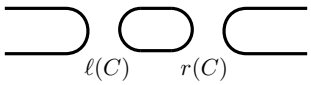

图7。闭合分支 C 的最左交叉和最右交叉。

定义 3.3（高斯消去对）。在辫子 β 的增强 Kauffman 状态集合中，高斯消去对（简称高斯消去对）是由两个增强 Kauffman 状态 (s, ε)、(t, δ) 组成的一对，其中
(G1) $s = w\bar{i}_j x i_{j'} z$ 和 $t = w\bar{i}_j x \bar{i}_{j'} z$，对于 $j' - j = n - 1$，或 (G2)
$s = w\bar{i}_j x \bar{i}_{j'} z$ 和 $t = w\bar{i}_j x_L (i+1) x_R \overline{\bar{i}_{j'} z}$，对于 $j' - j = n - 1$，
使它们的增强态 ε，δ 具有如下差异：
(G1) 假设 s 和 t 如上文 (G1) 情形所述。那么 T 有一个闭合分支 C，它由δ 用一个 –标记，使得 $\ell(C) = \bar{i}_j$ 且 $r(C) = \bar{i}_{j'}$。(G2) 假设 s和 t 如上文 (G2) 情形所述。那么 S 有一个闭合分支 C，δ 用一个 +标记¯ ¯，且 $\ell(C) = i_j$，$r(C) = i_{j'}$。

参见图8，其中展示了这两种情形。

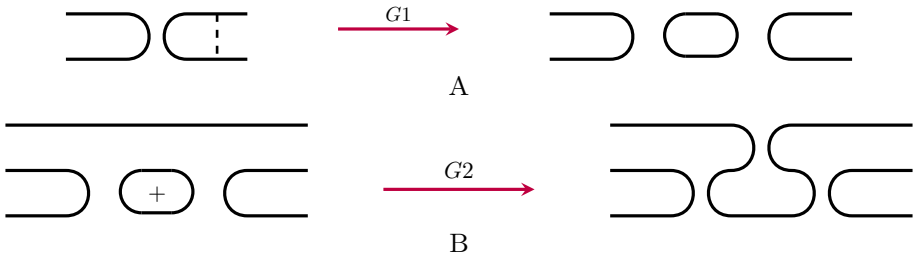

图8. G1 (A) 和 G2 (B) 高斯消去对。

我们也称相应的（未增强）考夫曼状态 s 和 t 为一个高斯消去对。

我们定义分别对应定义3.3中两种情形的高斯消元 G1 和 G2。

定义 3.4（高斯消元同构）。
高斯消去 G1：假设我们有一对 G1 型的高斯消去对 (s, ε)、(t, δ)。根据定义，考夫曼状态 $\sigma(s)$ 由一个单词表示

$$s = w\bar{i}_j x i_{j'} z,$$

且状态 $\sigma(t)$由一个单词表示

$$t = w\bar{i}_j x \bar{i}_{j'} z.$$

根据引理 2.6，存在一个同构 $D_- \circ \Delta : (s,\ \varepsilon) \to q^{-1}(t,\ \delta)$，它是 Khovanov 链复形的一个分量。

可以对该同构应用高斯消元（引理 2.4），以消去增强 Kauffman 状态 $(s,\ \varepsilon)$ 和目标 $(t,\ \delta)$。我们将这样的同构 $g = D_- \circ \Delta$称为 G1 同构。此类映射见图 9 Δ。

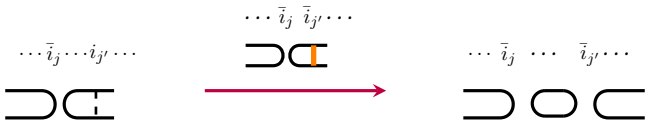

图 9。G1 高斯消元同构的映射 Δ 。

G2 型高斯消元：假设我们有一个 G2 型高斯消去对 $(s,\ \varepsilon)$、$(t,\ \delta)$。根据定义，考夫曼状态 $\sigma(s)$ 可由一个单词表示

$$s = w\bar{i}_j x \bar{i}_{j'} z,$$

而状态 $\sigma(t)$可由一个单词表示

$$t = w\bar{i}_j x_L \overline{(i+1)} x_R \bar{i}_{j'} z.$$

根据引理2.6，我们可以对同构 $m \circ L_+$ 应用高斯消元（引理2.4），从链复形中同时消去s、$\varepsilon)$ 和 $(t$ 、 $\delta)$。我们称这样的同构 $g = m \circ L_+$ 为 G2 型同构。此类映射见图 10 。 m

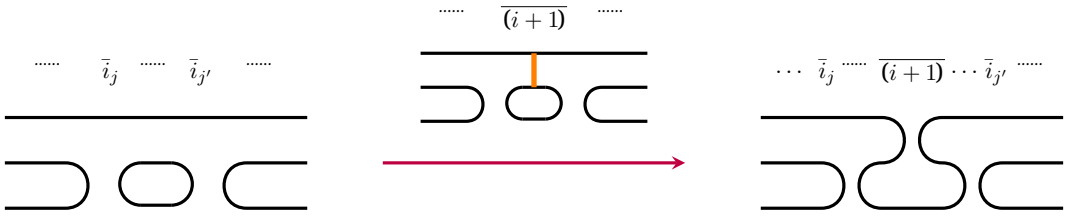

图 10。G2 高斯消元同构的映射 m。

给定一个高斯消元同构 $g_i : (s, \varepsilon) \to (t, \delta)$，其中 $i = 1$ 表示 G1 高斯消元同构， $i = 2$ 表示 G2 高斯消元同构，我们称 (s, ε) 为 g_i 的源，称 (t, δ) 为 g_i 的目标。

3.2. **算法：选择一个指定的高斯消元同构**。 通常，给定一对增强 Kauffman 状态 (s, ε) 和 (t, δ)，根据定义3.3构成一个高斯消去对的状态对，可能存在不同的高斯消元同构，其支撑在 s 和 t的不同子词对上。给定一个增强 Kauffman 状态(w, ε)，我们使用以下步骤选择一个（至多一个）源为 (w, ε) 的同构 G1 或 G2。我们将这样的同构称为特定同构。

定义 3.5. 我们归纳地构造指定的高斯消元同构集合 $\mathcal{G}$，其中我们设定 $\mathcal{G}_0 = \emptyset$ 和

$$\mathcal{G}_i := \cup_{k \le i} \mathcal{G}_{k-1}.$$

设 (w, ε) 是 Khovanov 链复形 CKh(β) 中的一个增强 Kauffman 状态，其同调分次与量子分次分别为 i 和 j。设 $m(\beta)$ 是链 CKh(β) 的最低同调次数， $M(\beta)$ 是最高同调次数。我们首先考察 $(w, \varepsilon) \in \mathrm{CKh}_{i,*}(\beta)$。

我们先考察 Khovanov 链复形 $\mathrm{CKh}^{i,*}(\beta)$ 中同调次数最低的生成元 (w,ε)，其同调次数为 $i(w) = m(\beta)$。为确定是否存在源为 (w,ε) 的特定同构，我们分析 w 的子词 s，并应用定义 3.3 和 3.4 判断 (w,ε) 是高斯消元同构的源还是目标。支撑高斯消元同构的 w 的子词 s 必须以带横线字母开头，但结尾可以是带横线字母，也可以是不带横线字母。我们将 $\mathrm{init}(\alpha)$ 定义为子词 s 的首字母，将 $\mathrm{fin}(\alpha)$ 定义为子词 s 的末字母。

s的第一个子词 w 按如下方式选取：我们从 w中最左侧带横线字母处开始；将其称为 s的“起点”。s 的“终点”是 s的“起点”右侧的一个字母。最初，s 的“终点”是 s的“起点”右侧紧邻的 w 中的字母。

固定“起点”位置，并考虑子词 s，其第一个字母位于“起点”位置，最后一个字母位于“终点”位置。

步骤 1：如果子词 s 表明（w,ε）是 $\mathcal{G}_{i-1}$中某个 G1 或 G2 同构的目标，我们可以通过从左到右去掉 s 中带横线数字的横线、查看原像并应用定义 3.3 和 3.4来验证这一点，那么我们就不选取源为（w,ε）的特定同构，而是转到 $\mathrm{CKh}^{i,*}(\beta)$ 的下一个生成元（w,ε），并从步骤 1 开始。如果 $\mathrm{CKh}^{i,*}(\beta)$ 中没有剩余生成元，那么我们就转到 $\mathrm{CKh}^{i+1,*}(\beta)$ 中的一个生成元。由于$M(i) < \infty$，当复形中没有更多生成元可供考察时，我们就终止。否则，继续执行步骤 2。

步骤 2：如果 s 对应于某个 G1 或 G2 高斯消元同构的源，我们可以通过从左到右给 s中不带横线的数字加上横线，并根据定义 3.3和 3.4检查其像来判断，那么我们就将这个 G1（或 G2）同构 g_1 认定为一个特定同构，其源为 (w,ε)，并将 g_1（或 g_2）加入 $\mathcal{G}_i$（所谓“加入”，也会记录 g_1（或 g_2）的源增强状态和目标增强状态的信息）。接着，我们移至 $\mathrm{CKh}^{i,*}(\beta)$ 的下一个生成元 (w,ε)，并从步骤 1 开始。如果 $\mathrm{CKh}^{i,*}(\beta)$ 中没有剩余生成元，我们就移至 $\mathrm{CKh}^{i+1,*}(\beta)$ 中的一个生成元。由于 $M(i) < \infty$，当复形中没有更多需要考察的生成元时，我们就终止。否则，我们继续步骤 3。

注记 3.6. 我们指出，对于子词 s，不可能存在相同的增强 Kauffman 状态同时支撑 G1 和 G2 同构（见引理 3.7），因此该过程定义良好。

步骤 3：检查子词 s 的“终点”是否是 w 的最后一个字母。如果是，则将“起点”向右移动一位，并将“终点”移动到紧接在“起点”右侧的位置。返回步骤 1，用新的子词 s 重复其余步骤，其中首位数字为“起点”，末位数字为“终点”。

如果子词 s 的“终点”不是 w 的最后一个字母，则将“终点”向右移动一位，得到新的子词 s，并对 s 重复步骤 1 和 2。

由于单词长度有限，该过程必然终止。

上述选择特定同构的方法意味着以下引理成立。

引理 3.7。 特定同构的选取方式保证：对于每个增强 *Kauffman* 状态(w,ε)，至多存在一个与之关联的特定同构 $g(w)$，使其源为 $s_g = (w,\varepsilon)$ 或其目标为 $t_g = (w,\varepsilon)$。

证明。 根据设计，算法 3.2 中的步骤 1 不会选择指定的高斯消元同构，前提是单词 w 包含某个指定的高斯消元同构的目标。如果单词 w 不包含任何作为高斯消元同构目标的子词，我们将考察算法后续每一步可能产生的歧义。在算法的步骤 2 中，子词 s 会与可能的 GE 对的源进行比较。

¯支持 G1 指定的高斯消元同构的考夫曼状态 $i_j x i_{j'}$ 不同于¯ ¯支持 G2 指定的高斯消元同构的考夫曼状态 $i_j x i_{j'}$，因此该赋值不可能相同。此外，对于 s 要成为 G2 高斯消元同构的源，考夫曼状态中与相邻的带横线 i'相对应的闭合分支必须标记为 $-$，这与闭合分支标记为 $+$时所得到的增强 Kauffman 状态不同。■

3.3. **通过高斯消元同构精简复形。**

定义 3.8. 用 $\mathcal{G}$ 表示根据第 $\mathrm{CKh}(ft_n^k)$ 节所述过程，在 3.1 中为增强 Kauffman 状态选取的特定同构的集合。

我们定义一个有向图 G，其顶点为 $\mathcal{G}$ 中的元素，有向边则来自 Khovanov 链复形 CKh(ft_n^k) 的微分分量。

定义 3.9. 令图 G 的顶点集为 $V(G) = \mathcal{G}$。令 $\alpha : (s, \varepsilon) \to (t, \delta)$ 和$\alpha' : (s', \varepsilon') \to (t', \delta')$ 为 $\mathcal{G}$ 中的特定同构，其对应顶点分别为 v 和 v'。若存在一个映射，则 G 中存在一条从 v 指向 v' 的有向边 E，

$$\varphi : (s, \varepsilon) \to (t', \delta')$$

使其满足以下两个条件：

- φ 是 CKh(ft^k) 中微分的一个单独分量。这里，单独分量是指将一个删去字母的映射（表示 Kauffman 状态从 0- 分解变为 1- 分解）与去圈映射的一个分量复合所得的结果，且• $\varphi \neq 0$。

我们将 φ 连接映射称为 α 与 α'之间的连接映射。

该图的用途是理解沿特定同构 $g \in \mathcal{G}$应用高斯消元后所得到的新复形中的映射。

引理*3.10.* 对于辫子 β，设 $\mathcal{F}$ 是 ***CKh(β)*** 中的一组同构。假设 $f \in \mathcal{F}$，并记通过沿 ***CKh(β)*** 中的 f 应用高斯消元（见引理 *2.4*）得到的新链复形为 ***CKhf(β)***。假设由定义 *3.9* 定义的有向图 G 没有 *2*-环，并令 $f' \neq f$为 $\mathcal{F}$中的另一个元素。那么，高斯约化复形 ***CKhf(β)*** 中对应于 f'的微分 f'_f的分量等于 f'。

证明。 根据引理 2.4，高斯约化复形 $\mathrm{CKh}f(\beta)$ 是原复形去掉项 b_1 和 b_2 后的复形，它们分别是同构 f 的源和目标。复形 $\mathrm{CKh}f(\beta)$ 中以 c_1 为源且以 c_2 为目标的新微分分量由 $\varepsilon - \gamma\phi^{-1}\delta$ 给出（见图 11）。

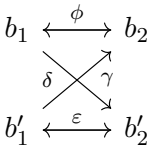

图 11. 一个包含 ϕ、ε 的 2-环。

这里 $\varepsilon = f'$，而且如果 γ 和 δ 都非零，那么它们就在图 G中定义一个 2-环。由于我们的图 G 没有 2-环，因此 γ 和 δ 中必有一个为零，因为 $\phi^{-1} = f^{-1}$ 是一个同构。如果 γ和 δ 中有一个为零，那么新复形中微分的分量保持不变。■

在本文的语境中， $\mathcal{G}$ 表示指定的高斯消元同构的集合，我们的目标是对 $\alpha \in \mathcal{G}$中的元素迭代这一构造。给定 $\alpha \in \mathcal{G}$，令 CKh$_\alpha(\beta)$ 表示沿着 α对 CKh(β) 进行高斯消元后得到的新链复形。我们希望对 $\mathcal{G} \setminus \{\alpha\}$中其余的高斯消元同构进行迭代。

事实证明，如果图 G 是无环的，那么其顶点存在一种拓扑排序，由此可在 $\mathcal{G}$ 上诱导出一种排序；按照该排序，可以沿着 $\mathcal{G}$中的元素依次应用高斯消元。

定义 3.11。如果有向图没有有向环，则称其为无环图。

定义 3.12。有向图的拓扑排序是顶点的一种线性序 $<$，满足 $u \to v$ 蕴含 $u < v$。

众所周知，有向图存在拓扑排序等价于该图无环。

定理 3.13。*[Kah62]*有向图无环，当且仅当其顶点存在拓扑排序。

现在假设 G 是无环的，因此根据定理3.13，顶点集合 $V(G)$ 可以取一种线性序 $<$。按照此线性序为顶点编号 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$，使得$\alpha_i < \alpha_{i+1}$ 对于 $1 \le i \le |V(G)|$成立。我们证明可以对 $\mathcal{G}$中的元素迭代应用高斯消元。

引理 3.14。 设 CKh是一个链复形。设 $\mathcal{G}$ 是 CKh 中的一组同构，并设 G 是与之对应的图，该图关联于 $\mathcal{G}$，其构造见定义 *3.9*。设 $\alpha \in \mathcal{G}$，并记 CKh$_\alpha$ 为沿 CKh 通过高斯消元得到的新链复形。考虑为 α构造的新图 G_α，该图对应于CKh$_\alpha$。若 G_α 含有一个环，则 G 也含有一个环。

证明。 从 G 到 G_α，我们删除一个顶点 v，它对应于 α，然后在两个顶点之间添加一条新边 v'、$v'' \in V$（G_α）$= V$（G）$\setminus v$，前提是图 12 中存在以下映射。边 12图 （v'， v''）在 G_α 中对应于复合映射 $\varphi \circ \alpha^{-1} \circ \varphi'$。

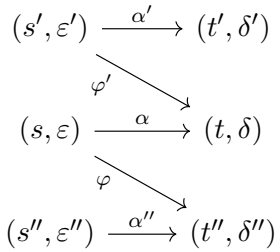

图 12。由 G 中的边在 G_α 中得到的一条新边（v'， v''）。

考虑一个环 C： v_1，……， $v_k = v_1$ 位于 G_α中。如果 G_α 中的边与 G中的边相同，也就是说，标记每条边的微分分量相同，那么顶点序列 v_1，……， v_k就是 G中的一个环。图13A给出了 G_α中该环的一般示意图。

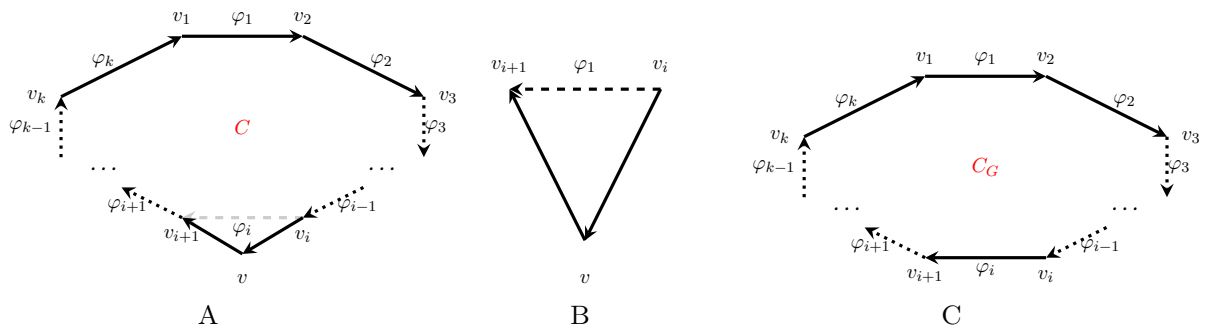

图13. (A)： G_α 中的一个环 C，(B)： G 中的一列顶点 v_i， v， v_{i+1}，以及 (C)：与 G_α 中的 C 相对应的环 C_G，位于 G 中。

否则，假设 v_i 与 v_{i+1} 之间有一条边，其在 G 中的对应映射 φ 为零，但 $\varphi_\alpha \in G_\alpha$ 非零。那么，这条边必定是沿着 α应用高斯消元同构得到的，如图 12 所示。这意味着 G 中有一个顶点 v，以及两条边（v_i， v）和（v， v_{i+1}）。图 13B 展示了仅涉及 v_i、 v_{i+1}、 v 的局部图，图 13C 则展示了涉及 G中一个环的示意图。将 C 中的这条边（v_i， v_{i+1}）替换为（v_i， v）和（v， v_{i+1}），即可在图 G中得到一个环 C_G。■

命题3.15. 设 $1 \le k \le |V(G)|$ 和$\mathrm{CKh}^k(\beta)$ 为通过沿着 $\mathcal{G}$ 中相对于线性序 $<$的前 k 个同构进行高斯消元，从 $CKh(\beta)$ 得到的链复形。也就是说，

$$\mathrm{CKh}^k(\beta) := (((\mathrm{CKh}_{\alpha_1})_{\alpha_2})\cdots)_{\alpha_k}(\beta).$$

假设 G 无环，并令 $f \in \mathcal{G} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$.。在$\mathrm{CKh}^k(\beta)$ 中，与 f 具有相同源和目标的微分分量 f^k 等于 f。更确切地说，

$$f^k = f.$$

证明。 证明对 k作归纳。基本情形 $k = 1$ 由引理 3.14得出。考虑$k+1$。由引理 3.10，若 G_{k-1} 没有 2-环，则 $f = f^k$。于是，引理 3.14 告诉我们，若 G无环，则 G_{k-1} 没有 2-环。■

3.4. **集合 $\mathcal{G}$ 上的线性序的存在性**。 在本节中，我们固定 n，并在本文余下部分对 $\beta = ft_n^k$作专门讨论。

由上一节可知，要沿着 $\mathcal{G}$中的所有特定同构进行高斯消元，只需证明 G 无环。这正是本节的目标。我们首先理解 G中对应于高斯消元的两个顶点之间的连接映射 。

回顾一下，对于由 (w, ε) 表示的增强 Kauffman 状态，单词 w 是一个带横线辫词：它通过给数字 i 加横线来编码交叉 σ_i 上 1-分解的 Kauffman 状态 σ 的选择，而 0-分解则由不带横线的数字表示。当同一条辫子上的两个 Kauffman 状态的所有横线及其位置都相同时，我们将其记作 $w = w'$。

定义 3.16 （活动交叉）。 设 $\varphi\colon (s, \varepsilon) \to (t, \delta)$ 是链复形 CKh(β) 中微分 d 的一个分量。 φ 的活动交叉 AC(φ) 是这样的交叉：通过一个鞍点， d 将 s 中相应数字上的 0-分解改变为 t 中相应数字上的 1-分解。

我们通过以下定义/记号来跟踪 s 和 t 中子词的位置：

• $\alpha \in \mathcal{G}$的支撑：若（s, ε）是由¯ ¯通过算法 3.2 选出的特定同构 $\alpha \in \mathcal{G}$ 的源，则其中包含一个子词 $w = ixi$ 或 ixi ， α 支撑于该子词，分别取决于 $\mathcal{G}$ 是 G1 型还是 G2 型。也就是说，分别有 AC(α) $= i$ 或 AC(α) $= i + 1$。最短的此类子词 $w = ixi$ 称为 α的支撑。• init(w)：对于 $w = \bar{i}xi$ 或 $w = \bar{i}x\bar{i}$，令 init(w) 表示 s 中第一个 $\bar{i}$ 的位置，fin(w) 表示紧接在 x右侧的 s 中第二个（带横线或不带横线的） i 的位置。对于$\alpha \in \mathcal{G}$，我们定义 init(α) 为 init(w)，其中 w 是 α 的支撑；fin(α) 则为 fin(w)。• a $<$ b：设 a, b 是带横线辫词 w中的两个数字，我们记作 $a < b$ ，表示 a 在辫子词中的位置在 b的位置左侧。• w[m, n]：设 w 是表示一个考夫曼状态的带横线辫词。子词 $w[m, n]$是从左向右读时，从第 m个位置到第 n个位置的子词，包括第 m个数字和第n个数字。我们用 $w[m]$ 表示 $w[m, m]$。• s $\subseteq$ w：我们用 $s \subseteq w$ 表示带横线辫词的一个子词，用 $s \subset w$ 表示一个真子词。

本节的第一个结果刻画了连接映射 φ ： $\alpha \to \alpha'$ 与 α 和 $\alpha' \in \mathcal{G}$的支撑之间的关系。

定义 3.17 （阻碍一个源并生成一个目标）。 考虑图 φ ： (s， ε) $\to (t'$， $\delta')$ 所示的连接映射，见图 14。

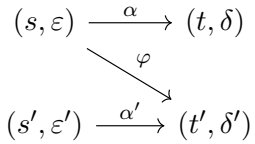

图 14。一般的连接映射 φ。

• 令 w 为高斯消元同构 α的支撑。若 AC(φ) $\in w$ 且 t'[init(w)， fin(w)] 不是 α• 的源，则称 φ 阻碍α 。令 w' 为高斯消元同构 α'的支撑。若 AC(φ) $\in t'$[init(w')， fin(w')], 且 s[init(w')， fin(w')] 不是 α'的目标，则称 φ 生成α' 。

引理 3.18。 设给定图 φ： (s， ε) $\mapsto (t'$， $\delta')$ 所示的连接映射，见图 14。则 AC(φ) $\neq$AC(α') 且以下条件至少有一项成立：

(1) φ 阻碍 α。在这种情况下 init(α) $<$ init(α')。

(2) φ 使 α'。在这种情况下 init(α') $<$init(α)。

证明。首先，我们有 AC(φ) $\neq$ AC(α')；否则便会推出 (s， ε) $= (s'$， $\varepsilon')$，这与算法 3.2 定义良好相矛盾。

假设 φ 阻碍 α。那么，我们需要证明 init(α) $<$init(α')。反过来假设 init(α') $<$ init(α)。考虑 $w = s$[init(α), fin(α)] 和 $w' = s$[init(α'), fin(α')]。子词w' 是指定的高斯消元同构 α'的目标。这意味着 $w' = \bar{i}x\bar{i}$或 $w' = \bar{i}i + 1x\bar{i}$。在第一种情况下，数字 $i + 1, i \in x$ 是不带横线的；在第二种情况下，数字 $i - 1 \in x$ 是不带横线的。由于 init(α') $<$ init(α)，算法 3.2 不会选择 α 作为指定的高斯消元同构，由此产生矛盾。

接下来，假设 φ 不妨碍 α。我们需要证明 init(α') $<$init(α)，并且 φ 使得α'。根据定义，一种可能是 AC(φ) $\notin w$。这里 w 是 α的支撑。这意味着t'[init(w), fin(w)] 支撑一个高斯消元同构，但不知为何没有被选入 $\mathcal{G}$。令 $w' \subseteq t'$ 为 α'的支撑。因此，init(w') 在辫子 β 中的位置必定在 β 中 init(w)的左侧。也就是说，init(α') $<$init(α)。否则，算法 3.2 就不会选择 α'。

设 $w'(s) = s[\text{init}(w'), \text{fin}(w')]$。如果 $w'(s) = t'[\text{init}(w'), \text{fin}(w')]$,，那么 $w'(s)$ 就是 s 中指定的高斯消元同构 α'的目标。由于 $\text{init}(w') < \text{init}(w)$，我们有 $\text{init}(w'(s)) <\text{init}(w)$。这与假设 α 是指定的高斯消元同构相矛盾。因此，$w'(s) \neq t'[\text{init}(w'), \text{fin}(w')]$，由此可得 $\text{AC}(\varphi) \in t'[\text{init}(w'), \text{fin}(w')]$。因此 φ 使得 α'。■

根据引理3.18，连接映射 φ对应的考夫曼状态局部形状有以下几种可能，具体取决于指定的高斯消元同构 α的类型（*G1* 或 *G2*），α' 该同构 φ 会阻碍或促成这些形状。

3.4.1. 连接映射的可能形状。采用引理 3.18中相同的记号，我们展示与引理各情形相对应的 φ局部图示。在图15-17中，红色的一对鞍点对应于 φ对 s中一个交叉的遮挡。

- **连接映射 φ 阻碍 α，其中 α 是一个 G1 高斯消元同构（图 15 $w \subseteq s$ ）**。假设 α是支撑 φ 的子词。改变 w 的方式有两种，使其不再是 G1 高斯消元同构的支撑或源。这两种可能性（A）和（B）见图 15，其中分别展示了每种情形下 φ 所修改的子词。

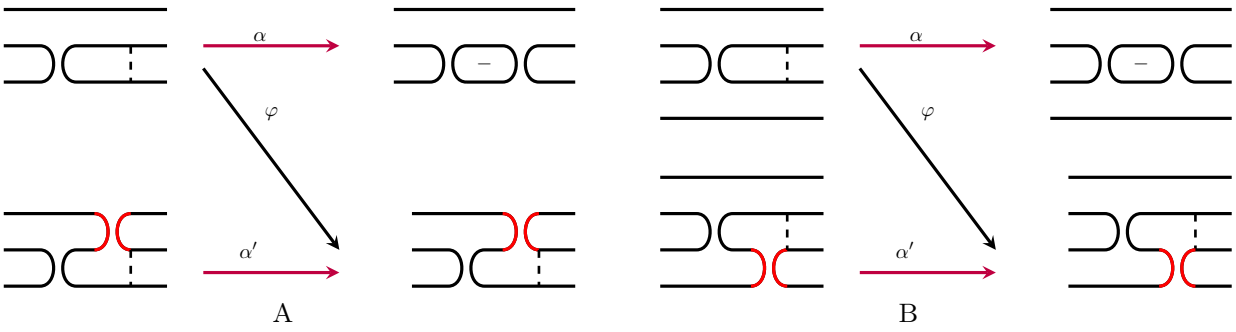

图 15。（A）：G1 高斯消元同构的支撑被 φ 通过置于顶部的红色鞍点修改，因此不再是 t' 中 G1 高斯消元同构的源。（B）：G1 高斯消元同构的支撑被 φ 通过置于底部的红色鞍点修改，因此不再是 t'中 G1 高斯消元同构的源。

- **连接映射 φ 阻碍了 α，其中 α 是一个 G2 高斯消元同构（图 16A）**。我们举例说明连接映射的阻碍使 G2 高斯消元同构无法成立的情况。

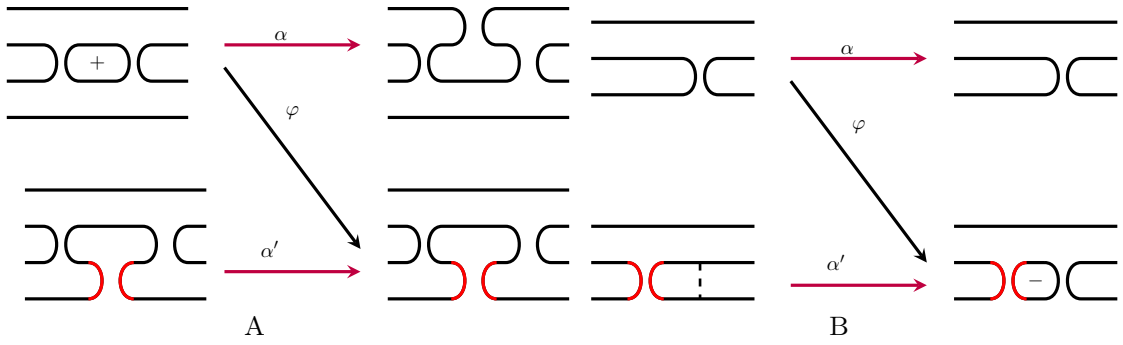

图16。(A)：连接映射 φ 改变了 α所支撑的子词 $w \subseteq s$，因此 $t'[\mathrm{init}(w), \mathrm{fin}(w)]$ 不再是 G2 高斯消元同构的源。(B)：连接映射 φ屏蔽了对应于红色鞍点的字母，而该字母是 t'中某个高斯消元同构的目标。

- **连接映射 φ 使得 α'，其中 α' 是一个 G1 高斯消元同构（图16B）。**
- **连接映射 φ 使得 α'，其中 α' 是一个 G2 高斯消元同构（图17）。**

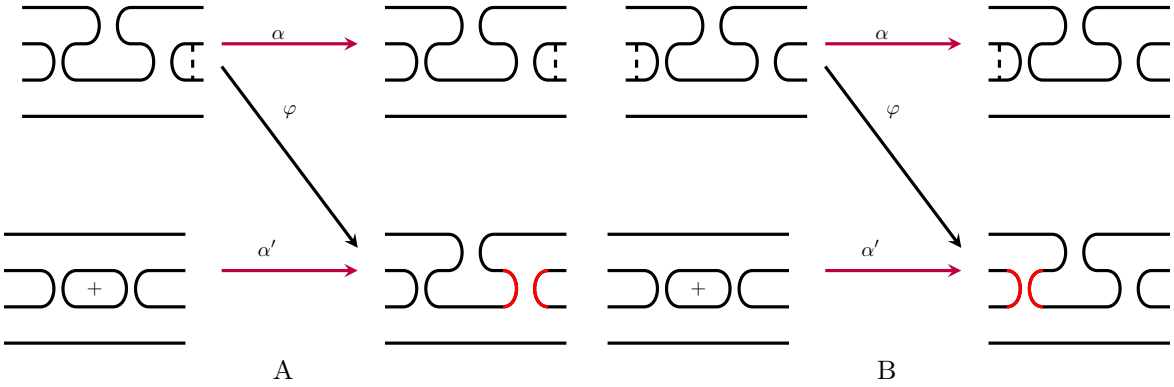

图17。(A)：屏蔽对应于红色鞍点的 φ，会在 t' 中产生子词，而该子词是某个 $G2$ 高斯消元同构的目标。(B)：屏蔽对应于另一种可能位置上的红色鞍点的 φ，会在 t' 中产生子词，而该子词是某个 $G2$ 高斯消元同构的目标。

现在我们证明，图 G （其顶点为 $V = V(G)$， $\mathcal{G}$中的指定高斯消元同构集合，以及边 $E = E(G)$（连接映射集合）是无环的。一般来说，$\mathrm{CKh}(\beta)$中微分的任意分量映射子集未必无环；但这里是 Khovanov复形的一个特殊子图，在构造 G时，算法 3.2 从完整的 Khovanov立方体中选取了相对较少的一部分边。我们的证明依赖于引理 φ 中对连接映射的刻画，详见引理3.18；该连接映射对应于 G的一条边。主要策略是采用反证法：假设 G 中存在一个环，并由此推出矛盾。

注3.19。截至本文撰写之时，我们认为可以利用以下事实给出另一种证明：无环对应于由同一对增强 Kauffman 状态之间的微分分量复合而成的协边

。当且仅当协边不是零映射时， G 中才存在环，这意味着该协边的亏格较低。接下来，可以证明此类低亏格协边不存在。由于这种替代方法仍需分析短环所涉及的微分分量的各种情形，我们认为沿用原来的方法更具说明性。

令 G 为与高斯消元同构集合 $\mathcal{G}$对应的图。我们用对应的高斯消元同构 α 来标记顶点：$(s,\ \varepsilon) \to (t,\ \delta)$。图 G 中的一条路径 P 记作： $\alpha_1 \xrightarrow{\varphi_1} \alpha_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{p-1}} \alpha_p$.

我们定义 $\triangle(P)$，以追踪路径 P 经过图 G时，作为顶点源和目标的增强 Kauffman 状态所发生的变化。

定义 3.20. ($\triangle(P)$) 设 P: $\alpha_1 \xrightarrow{\varphi_1} \alpha_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{p-1}} \alpha_p$ 是 G中的一条路径，其中，对所有 $1 \le i \le p$, α_i: $(s_i,\ \varepsilon_i) \to (t_i,\ \delta_i)$ 都是 $\mathcal{G}$中的特定同构。集合 $\triangle(P)$ 是这样一个交叉的集合： t_p 的考夫曼状态在这些交叉处选取 1-分解，而 s_1 的考夫曼状态选取 0-分解。

接下来，对于 $b \in \triangle(P)$，我们将 $Z(b)$ 定义为这样一组交叉：相对于辫子 β 中 b 的位置，它记录了不属于 $\triangle(P)$ 的其他交叉，如下所述。

记号。 我们将字母 c 在辫子词中对应于某个交叉时，从左至右读取其水平位置，记作 $h(c)$。其垂直位置记作 $v(c)$。垂直位置是该交叉所邻接的下方辫股的股线编号；见图 18。

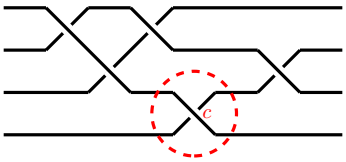

图 18. 交叉的水平位置和垂直位置 c，使得 $h(c) = 4$ 和$v(C) = 1$.

定义 3.21 ($Z(b)$)。 设 P 是 G 中的一条路径，并设 $b \in \triangle(P)$。对于 $j \le v(b)$ 以及满足$v(c) = j$ 和 $h(c) = \min\{c \in \beta \mid h(c) \ge h(b)\}$ 的 c，定义

$$Z_j(b) := \{a \in \beta \mid h(a) \le h(c)\}.$$

则 $Z(b) := \cup_{j \le v(b)} Z_j(b)$。 我们将这样的交叉称为 梯形的，这是由于其包围区域的形状；示例见图19 。

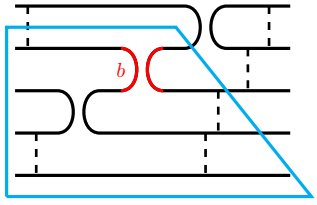

图 19. 交叉集合 $Z(b)$ 包含图示梯形区域中的所有交叉。

我们引入一些额外的记号和定义，以追踪作为源的考夫曼状态的带横线辫词中横线的变化；这些源对应于 G 路径中的顶点。

设 P: $\alpha_1 \to \cdots \to \alpha_p$ 是 G 中的一条路径。对于 $1 < i \le p$ 和顶点 α_i: $(s_i, \varepsilon_i) \to (t_i, \delta_i)$，令$\triangle^i(P) := \triangle(P_i)$ 表示这样的交叉集合：在这些交叉处，考夫曼状态 s_i 将字母 a 加上横线，而在以 α_i 结尾的子路径 P_i: $\alpha_1 \to \cdots \to \alpha_i$ 中，字母 a 不带横线。令 $b \in \triangle^i(P)$。那么$Z_i(b)$ 是与 s_i 的子词对应的带横线辫词，该子词由 $Z(b)$ 中的交叉集合构成，并采用来自 s_i 的横线信息。

引理 3.22。 设我们在 G 中有一条路径 P: $\alpha_1 \to \cdots \to \alpha_p$。设 b 是 s_1 中带横线的交叉。假设 b 在路径末端变为不带横线的。也就是说，它在 s_p 中是不带横线的，并且这是路径 P 中首次发生这种情况。此外，$Z_p(b) = Z_1(p)$。

那么存在一个 i、$1 < i < p$ 和一个交叉 $b' \in \beta$，使得
(1) $b' \in \triangle^i(P)$，且 *(2)* $Z_i(b') = Z_1(b')$，并且以下至少一项成立：*(a)* $b' < b$，或 *(b)* $b' \in Z(b)$。

证明。 我们对 $Z(b)$ 中交叉的数量进行归纳证明。
基本情形： $|Z(b)| = 0$。如果集合 $Z(b)$ 为空，则无需证明，因为不能通过指定的高斯消元同构移除 b 上的横线。路径 P 不存在。我们排除这一情形；见图20。

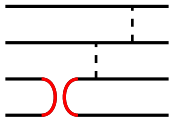

图 20。 b 上不可移除横线的示例。字母 b 是辫子词中的第一个字母，而 b 上的横线无法通过任何指定的高斯消元同构移除，因为它不可能是任何高斯消元同构的目标中的活动交叉。

归纳假设。 我们假设 $Z(b)$ 与 $|Z(b)| = n$ 非空，并且对于所有满足$Z(b) < n$ 的 b，都存在一个 i、$1 < i < p$ 和一个交叉 $b' \in \beta$，使得引理的条件 (1) 和 (2) 均成立。

要使交叉 b 在 s_p 中不带横线，这必须是沿着指定的高斯消元同构 α_p 的反向进行的结果。因此，交叉 b 必须属于 t_p 的一个子词，而该子词是 α_p 的目标。我们根据指定同构 α_p 属于 G1 型还是 G2 型，分别讨论这两种情况。

- **指定的高斯消元同构 α_p 属于 G1 型**。这意味着 $\bar{\ }$ $\bar{\ }$，$b = j$子词 j 中的第二个带横线的 $w = jxj \in t_p$；见图21。

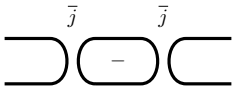

图 21。 t_p的局部图示。

我们考察子词周围交叉的可能带横线方式 t_p，如图21所示；图22A 给出了示例。

记作 a =init(α_p) 。若 a 在 s_1中不带横线，则我们选择 $b' = a$。否则，我们在 s_1中有一个子词 w(1) $= \bar{j}x_1\bar{j} = s_1$[init($w$)，fin($w$)] 。这个子词在 s_1中有两种情况：

(1) w(1) 是 G1 或 G2 高斯消元同构的目标。

比较 w(1) 与 $w_1 \subseteq s_1$，其中 w_1 是指定的高斯消元同构 α_1 的支撑。我们必须有 $w_1 < w$(1)。也就是说，init(α_1) <init(α_p)。否则，按照算法 3.2， α_1 不会被选为 s_1 的指定高斯消元同构。根据引理 3.18， φ_1 必须阻碍 α_1 或使 α_2。这意味着存在一个 $b' \in s_2[1,\text{fin}(\alpha_1)],$ ，它在 s_2 中带横线，但在 s_1 中没有带横线。我们可以直接验证， b' 满足引理 3.22 的条件，尤其是 $b' < b$。图 22B 展示了 w(1) 是 G2 高斯消元同构的目标的情形。



图 22。（A）： w(1) 周围可能的加横线情形；（B）： w(1) 是 G2 高斯消元同构的目标的情形。

(2) w(1) 不是 G1 或 G2 高斯消元同构的目标。子词 w(1) 上带横线的可能情况如图 22 B 所示。特别注意，我们无需考虑 c 带横线但 d不带横线的情况，因为我们假设 w(1) 不是 G1 或 G2 高斯消元同构的目标。因此，我们总可以假设存在一个交叉 d，其中 $a = s_1[\text{init}(w)] < d < b = s_1[\text{fin}(w)],$ ，它在 s_1中位于 a 与 b 之间且带横线。在这种情况下，我们有一个交叉 d, $a < d < b$，它在 s_1中位于 a 与 b 之间且带横线：若要通过将 α_p的活动交叉移除来消除 b 上的横线，就必须在某个 s_i处移除交叉 d ，其中 $i < p$。我们可以对 d 应用归纳假设，找到一个b'，注意到 $|Z(d)| < |Z(b)|$。

•指定的高斯消元同构 α_2 属于 G2 型。 这意味着 $b = (j+1)$ 在子词 $w = \bar{j}(j+1)$ $x_p\bar{j} \subseteq s_p$ 中，而它正是 α_p (见图 23) 的目标。

令 $a = \text{init}(\alpha_p)$ 和 $c = \text{fin}(\alpha_p)$。如果 a, b 中有任意一个在 s_1 中不带横线，那么我们可以将 b' 选为 a 或 c。否则，我们考虑 w(1) $= s_1[\text{init}(w),\text{fin}(w)]$。有两种情况：

(1) w(1) 是 G1 或 G2 高斯消元同构的目标。在此情况下， w(1) 必然是 G2 高斯消元同构的目标，因为否则，如果 w(1) 是 G1 高斯消元同构的目标，则相应的协边将从一个带有以 $-$ 标记的闭合分支的增强 Kauffman 状态，映射到一个带有以 $+$标记的同一个圆的增强 Kauffman 状态。由于分次原因，该协边为零。与 α_1 的支撑 w_1 比较可知，必有 init(w_1) < init(w)，否则就不会选择 α_1 。现在 φ_1 必须阻碍 α_1 或

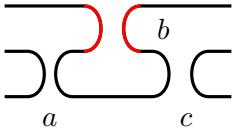

图 23. 与 $(j+1)$ 对应的交叉 b 以红色显示。

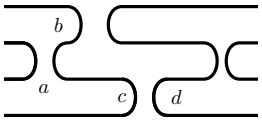

图 24. 指定的高斯消元同构为 G2 型时，带横线的配置可能性。

令 α_2，这意味着存在一个 $b' \in s_2[1,\text{init}(\alpha_1)]$，它在 s_2 中带横线，但在 s_1 中不带横线。我们可以直接验证，b' 满足引理的所有条件。(2) $w(1)$ 不是 G1 或 G2 高斯消元同构的目标。在此情况下，我们有一个交叉 d，$a < d < c$，如图 24 所示。

如果 d 在 s_1中没有带横线，那么我们可以选择 $b' = d$。否则，我们假设 d 在 s_1中带横线。为了使 b上的横线能够作为 G2 高斯消元同构 α_p的活动交叉而被移除，必须在 s_k处移除 d 上的横线，其中 $k < p$。我们对 d 应用归纳假设，找到满足引理条件的 b'。■

现在所需的工具已准备就绪，我们来证明本节的主定理。令 $\mathcal{G}$ 为辫子 ft_n^k的指定高斯消元同构集合。回顾一下，G 是由 $\mathcal{G}$ 构造的图，其顶点是 $\mathcal{G}$ 的元素，边则对应于 CKh(ft_n^k) 中微分的非零分量。

定理 3.23. 图 G 无环。

证明。反设 G 中存在一条路径，它是一个环：

$$P : \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_p = \alpha_1.$$

对于每个 $1 < i \le p$，$\triangle^i$（P）中的任何交叉在到达最终目的地 $\alpha_p = \alpha_1$ 之前都必须是不带横线的。这是因为，如果 $\triangle^{(p-1)}$（P）非空，那么从 $s_{p-1} \to t_1$ 出发的微分的每个分量都为零。

我们的主要策略是证明，$\triangle^i$（P）中交叉的去横线化要么不可能，要么必然会在某个 $j > i$ 对应的 $\triangle^j$（P）中产生一个新元素。因此，$\triangle^i$（P）永远不会为空，这与环 P 的存在矛盾。

不难验证，对于任意路径 P，$\triangle^2$（P）$\neq \emptyset$。令 $b \in \triangle^2$（P）。
我们对 $|Z$（b）$|$作归纳证明。
基本情形 $|Z$（b）$| = 0$。对于基本情形，当 Z（b）$= \emptyset$，因此 $|Z$（b）$| = 0$ 时，b 上的加横线操作无法消除，因此对于任何 $1 < i < p$，$\triangle^i$（P）都不为空，因为其中始终包含 b。
归纳步骤 $|Z(b)| > 0$。一般而言，我们令 j 为 b 在环 P中变为不带横线时的指标。也就是说，$b =$ AC(α_j)。我们总是选择路径中可能的最小 $j < p$。我们还假设 b 是 $\cup_i \triangle^i(P)$ 中最左边的交叉，这意味着 $h(b)$ 是所有 $b \in \cup_i \triangle^i(P)$ 中的最小值。

与引理的证明类似3.22，我们根据 α_j（G1 型或 G2 型）的高斯消元同构类型来分类讨论。

- **特定同构 α_j 是 G1 型。**
  令 $w_j \subseteq s_j$ 为 α_j 的支撑单词，$w_i \subseteq s_i$ 为 α_i的支撑单词。由于 b 是 $\cup_i \triangle^i(P)$ 中最左边的交叉，且 $h(a) < h(b)$，因此我们有，$a =$init(w_j)在 s_i 和 s_1中带横线。

  考虑 $w = t_j[a,b]$。这是 G1 高斯消元同构 α_j 的目标。子词 $w' = s_{j+1}[a,b]$ 是高斯消元同构 α_{j+1} 的支撑。我们将 w 和 w' 与子词 $w'_1 = s_1[\text{init}(w), \text{fin}(w)]$进行比较。

(1) w_1' **是 G1 或 G2 高斯消元同构的支撑**。
在这种情况下，要么 $w_1' = w_1$，其中 w_1 是 α_1 的支撑，此时 b 在s_1中带横线；要么 w_1' 不是 α_1 的支撑。子词 w_1' 存在于 s_1 中，且 α_1 是为 s_1 选定的高斯消元同构，这意味着 $w_1 < w_1'$。由 φ_1 对 α_1造成的障碍，或根据引理 α_2 使其成为3.18，都会与 b 的极小性矛盾。

(2) w_1' **不是 G1 或 G2 高斯消元同构的支撑**。 周围可能出现的交叉（它们均带横线）见图 25。

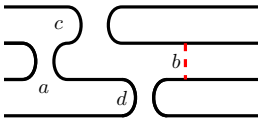

图 25。子词 w_1' 周围交叉的可能带横线方式。

如图 26 所示，共有三种不同的可能性。

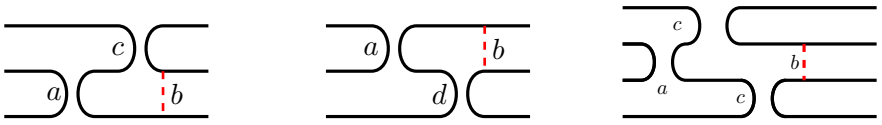

图 26。当 w_1' 不是 G1 或 G2 高斯消元同构的支撑时， c、 d 带横线的三种可能方式：(A) 只有 c 带横线；(B) 只有 d 带横线；(C) c 和 d 均带横线。

对于上述每种情形，都必须去掉交叉 c、d 在路径 $k < j$中 P上的标记，才能去掉 c 上的标记。因此，根据引理 3.22，存在某个交叉 $b' \in \triangle^k(P)$，使得 $b' < b$ 或者 $b' \in Z(b)$。第一种情形 $b' \in \triangle^k(P)$ 与 b的极小性矛盾。第二种情形符合递减 $|Z(b')|$的归纳假设。

- **特定同构 α_j 属于 G2 型**。
设 $w_j \subseteq s_j$ 为 α_j 的支撑所对应的单词，且 $w_2 \subseteq s_2$ 为 α_2的支撑所对应的单词。子词 w_j 如图 27 A所示。



图27。（A）：支撑 G2 型高斯消元同构的子词；（B）：带有一个标记为 – 的圆的增强 Kauffman 状态。

由于 b 是 $\cup_i \triangle^i(P)$中的最左交叉，因此 $a = \text{init}(w_j)$在 s_1中是带横线的。考虑 $c = \text{fin}(w_j)$。如果交叉 c 在 s_1 中是不带横线的，那么我们就完成了，因为可以选择 $b' = c$。否则，我们可以假设 c 在 s_1中是带横线的。

我们考虑 $w_1' = s_1[\text{init}(w_j), \text{fin}(w_j)]$。有两种可能。

(1) w_1' **是 G1 或 G2 高斯消元同构的目标** .
在这种情况下，唯一的可能是它是一个 G1 高斯消元同构的目标，因为 b 在 s_1 中不带横线（见图 27B）。在这种情况下，子词 $w_1 \subsetneq s_1$；也就是说，高斯消元同构 α_1 的支撑必然位于 w_1' 之前，这是由我们应用算法 3.2的方式决定的。也就是说，init(w_1) <init(w_1')。然而，AC(φ_1) 的位置与 b的极小性相矛盾。

(2) w_1' **不是 G1 或 G2 高斯消元**同构的目标。在这种情况下，若 b在 s_1中不带横线，则唯一的可能性是交叉 d在 a和 c之间带横线的，如图 28所示。

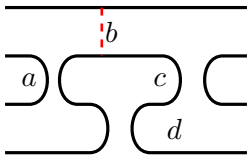

图 28。子词w_1'。

在路径的某处，为了移除 d 上的横线，必须先移除交叉上的横线 b，使其成为高斯消元同构 α_p的活动交叉。应用引理3.22 于 b，可找到一个 b'，这与 b的极小性矛盾。

这 就完成了证明。■

定义 3.24（精简复形）。设 CKh(ft_n^k) 为辫子$\beta = ft_n^k$的 Khovanov 链复形。设 $\mathcal{G}$ 为算法 3.2选取的高斯消元同构集合，并设G 为定义 3.9中相应的图。设 $<$ 为 $\mathcal{G}$ 上的一个线性序，该线性序由定理 3.23保证存在，并按此顺序将元素编号为 $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_{|\mathcal{G}|}$。精简复形定义为按以下顺序应用高斯消元后得到的链复形：

$$\mathcal{FT}_n^k := ((\mathrm{CKh}(ft_n^k)_{\alpha_1})_{\alpha_2}) \cdots)_{\alpha_{|\mathcal{G}|}}.$$

备注 3.25。注 意， $\mathcal{FT}_n^k$与原链复形 CKh(ft_n^k) 同伦等价。

4. Reduction to Jones Normal Form

我们利用前几节的结果证明定理 1.1，并在此将其重述为一个命题。

命题 4.1。设 $\mathcal{FT}_n^k$ 表示对 *Khovanov* 链复形 CKh(ft_n^k)进行精简后得到的精简复形，设 (σ, ε) 为定义 *2.2*中 ft_n^k上的一个增强 *Kauffman* 状态。假设(σ, ε) 出现在精简复形 $\mathcal{FT}_n^k$ 中，并设 W为 *Temperley-Lieb* 幺半群中的相应纽结TL$_n$。那么，*(1)* 该单词具有如下形式

$$e_{n-1}^{k_0} V_0 e_{n-1}^{k_1} V_1 \cdots V_r e_{n-1}^{k_r},$$

其中每个 $V_j = e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{n-1}$都是由 TL$_n$ 中的连续元素组成、并以e_{n-1} 结尾的子词，且 $k_j \geq 2$ 对所有 j均成立。（2）或者，存在一条由 TL变换构成的路径（见定义 *2.7*），将$\curvearrowright W$ 变换为其琼斯标准形 $W = \mathrm{JNF}(W)$（定义 *2.13*），其中每次变换均属于以下三种类型之一：

(D1) $e_{n-1}^2 \to e_{n-1}$*(D2)* $e_i e_j \to e_j e_i$，其中 $|i-j| \geq 2$*(D3)* $e_i e_{i-1} e_i \to e_i$，对于 $2 \leq i \leq n-1$

注 4.2。 我们的证明与命题2.14相似，该命题展示了 TL_n 中一个单词的琼斯标准形的存在性。关键区别在于，得益于在 $\mathcal{G}$ 中通过指定的高斯消元同构进行精简，我们只考虑精简复形中表示生成元的可能单词的一个小得多的子集。特别地，任何包含形如 TL_n 的子词的单词 e_i^2 和 $e_ie_{i+1}e_i$（其中 $1 \le i \le n-2$）都不会出现在精简复形中。

在提供 命题 4.1的证明之前，我们考虑以下引例 .

4.0.1. 引例。

- 3-辫子：TL_3 中的一个元素具有以下形式：
$$e_2^{k_0}e_1^{\ell_0}e_2^{k_1}e_1^{\ell_1}\cdots e_2^{k_n}e_1^{\ell_m}.$$
注意，对于所有 $0 \le i \le m$，都有 $\ell_i = 1$，因为否则该单词将包含 e_1^2，而这是一个支撑 G1 高斯消元同构的子词。因此，一个单词具有以下形式之一：
(1) $e_2^{k_0}e_1e_2^{k_1}e_1\cdots e_2^{k_n}e_1$，$k_j \ge 2$。
(2) $e_2^{k_0}e_1e_2^{k_1}e_1\cdots e_2^{k_n}$，$k_j \ge 2$。
(3) $e_1e_2^{k_1}e_1^{\ell_1}\cdots e_2^{k_n}e_1$，$k_j \ge 2$。
(4) $e_1e_2^{k_1}e_1^{\ell_1}\cdots e_2^{k_n}$，$k_j \ge 2$。
- 4-braids:
TL_4 中的一个元素具有以下形式：
$$e_3^{k_0}V_0e_3^{k_1}V_1\cdots V_{m-1}e_3^{k_m},$$
其中 V_i 是 TL_3 TL_3 中处于琼斯标准形的单词。按照定理 1.1 所述进行消去后，可得单词具有以下形式之一：
(1) $e_3^{k_0}e_{i_{k_0}}e_{i_{k_0}+1}\cdots e_2e_3^{k_1}e_{i_{k_1}}e_{i_{k_1}+1}\cdots e_2e_3^{k_{m-1}}\cdots e_2e_3^{k_m}$(2) $e_3^{k_0}Ve_3^{k_1}$，
其中 V 是 TL_3 中处于琼斯标准形的一个单词。
- 5-辫子：
TL_5 中的一个元素具有以下形式之一：
(1) $e_4^{k_0}e_{i_{k_0}}e_{i_{k_0}+1}\cdots e_3e_4^{k_1}e_{i_{k_1}}e_{i_{k_1}+1}\cdots e_3e_4^{k_{m-1}}\cdots e_{i_{k_{m-1}}}e_{i_{k_{m-1}}+1}\cdots e_3e^{k_m}$
$_4$(2) $e_4^{k_0}Ve_4^{k_1}$，其中 V 是 Jones 标准形中的一个 TL_3 单词。

证明。 我们通过对辫子的 4.1 股数进行归纳来证明命题ft_n^k。

基本情形 $n = 2$。对于两股的情形，形如 e_1^m 的每个单词（其中 $m > 1$）都可通过 D1 操作化简为 e_1 的单个副本。然而，我们还可以说得更多。作为 G1 高斯消元同构的目标，任何至少有一个标记为 $-$ 的闭合分支的增强 Kauffman 状态，都不会出现在精简复形 $\mathcal{FT}^k$ 中。 $\mathcal{FT}^k$ 中剩下的状态是这样的增强 Kauffman 状态：对于某个 m， e_1^m 的每个闭合分支都用 $+$ 标记；我们可以将其表示为 e_1，并附上适当的次数平移。对于所有 n，这一观察可推广到 n-辫子上的 Kauffman 状态，其中这些状态包含形如 e_i^m 的子词，且 $1 \le i \le n-2$。**情形** $n \ge 3$。 正是在这一情形中使用 D2 和 D3 操作。

设 (s, ε) 是精简复形 $\mathcal{FT}^k$ 中的一个增强 Kauffman 状态，且 S 是相应的 Temperley-Lieb 幺半群 TL_{n+1} 中的单词。

归纳假设。 假设对于所有 $n' \le n$，在 n' 股上的带横线辫子词，若不属于命题 4.1 陈述中的情形（1），则可通过适用于 n' 的变换 D1–D3 化为 Jones 标准形。

归纳步骤。 我们证明，TL_{n+1} 中的单词可通过变换 D1–D3 化为琼斯标准形。

设 s 是一个带横线辫词，它表示生成元 $(\sigma,\ \varepsilon)$ 在 $\mathcal{FT}_{n+1}^{k}$ 中的考夫曼状态，对应的 Temperley–Lieb词为 $S\in \mathrm{TL}_{n+1}$。首先，我们找出单词 S 中所有连续的 e_n，并写作

$$S = e_n^{k_0}\cdot V_0\cdot e_n^{k_1}\cdot V_1\cdot e_n^{k_2}\cdots e_n^{k_{r-1}}\cdot V_{r-1}\cdot e_n^{k_r}\cdot V_r\cdot e_n^{k_{r+1}}.$$

注意，我们可以假设 e_n 在辫子词 ft_n^k 中是连续出现的，也就是说，在 S 的带横线辫词 s 中，两个带横线的 n 之间没有不带横线的 n；否则，单词 s 将包含某个 G1 高斯消元同构的支撑。此外，与 e_n 的各个副本对应的所有闭合分支都标记有一个 $+$。如果任何闭合分支标记有一个 $-$，那么该单词就包含某个 G2 高斯消元同构的支撑。

假设对于 $0\le j\le r+1$，每个 $V_j\in \mathrm{TL}_n$ 都是琼斯标准形。我们关注单词 S 的最后一段:

$$\cdots V_{r-1}\cdot e_n^{k_r}\cdot V_r\cdot e_n^{k_{r+1}}$$

由于 V_{r-1} 非空，V_{r-1} 的最后一个字母在 s 中带横线。假设 V_{r-1} 的最后一个字母不是 e_{n-1}。那么，如果 $k_r>1$，s 就包含一个 G1 高斯消元同构的源，因此不会出现在精简复形中。对于 $0\le j\le r-1$，对 V_j 也可作相同推理。因此，我们可以假设它们都以 e_{n-1} 结尾。

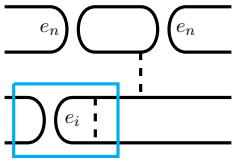

图 29。G1 高斯消元同构的源。

令 $V_j'e_{n-1}=V_j$。在 V_j 附近（见图 30）我们有如下图示，其中涉及辫子的最上方两股。

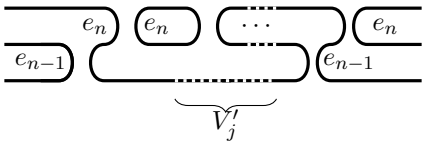

图 30。 $S=\cdots e_{n-1}e_nV_j'e_{n-1}e_n\cdots$

若 $k_r>1$，我们考虑 $V_j'=V_j''e_ke_{n-1}$。设 $k<n-2$，则该子词包含某个 G1 高斯消元同构的支撑，因此不会出现在精简复形中。因此 $k=n-2$，我们可以继续以这种方式推理，从而得到 $V_j=e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{n-1}$，其中 $j_{\ell+1}=j_\ell+1$。

若 V_j'不包含 e_{n-2} 和 $k_r=1$，则子词 $e_{n-1}e_nV_j'e_{n-1}e_n$ 是某个 G2 高斯消元同构的目标 $e_{n-1}e_ne_{n-1}$。因此，我们可以假设 V_j' 包含 e_{n-2}，并且对于 $V_j'=V_j''e_{n-2}$，我们可以写成

$$S=\cdots e_{n-1}e_nV_j''e_{n-2}e_{n-1}e_nV_{j+1}''e_{n-2}e_{n-1}e_n\cdots.$$

但是，S 所示的子词可能包含 G2 高斯同构的目标，即子词 $e_{n-2}e_{n-1}e_{n-2}\subset e_{n-1}e_nV_j''e_{n-2}e_{n-1}e_nV_{j+1}''e_{n-2}e_{n-1}e_n$，如果 $e_{n-3}\notin V_{j+1}''$。因此，我们可以假设 $e_{n-3}\in V_{j+1}''$，依此类推。最终，我们到达辫子的底部辫股，因此该生成元不会出现在精简复形 $\mathcal{FT}_n^k$ 中。

特别是，这迫使 $r=0$，于是我们有

$$S = e_n^{k_0} \cdot V_0 \cdot e_n^{k_1}.$$

现在，由于 $V_0 \in \mathsf{TL}_n$，我们可以应用归纳假设，将 V_0 替换为其琼斯标准形。若 $k_0 = 0$ 或 $k_1 = 0$，那么只需进行若干次交换移动，将 e_n 推到 V_0 中与之交换的任意元素右侧即可。因此，我们可以假设 k_0，$k_1 \neq 0$。此时，单词 S 具有如下形式

$$\begin{aligned} S &= \underbrace{e_n \cdot e_n \cdots e_n}_{k_0 \text{ times}} \cdot V_0 \cdot \underbrace{e_n \cdot e_n \cdots e_n}_{k_1 \text{ times}} \\ &= \underbrace{e_n \cdot e_n \cdots e_n}_{k_0 \text{ times}} \cdot V_0' e_{n-1} \cdot \underbrace{e_n \cdot e_n \cdots e_n}_{k_1 \text{ times}}. \end{aligned}$$

现在假设 $k_1 > 1$。然后 $V_0 = V_0' e_{n-1} = V_0'' e_{n-2} e_{n-1} = V_0''' e_{n-3} e_{n-2} e_{n-1} = V_0'''' \cdots$，依此类推，以避免 S 包含某个 G1 高斯消元同构的源的可能性，正如我们在上一段中类似地论证 $r=0$ 时所做的那样。因此，我们得到如下结论：

$$S = \underbrace{e_n \cdot e_n}_{k_0 \text{ 次}} \underbrace{\cdots e_n} \cdot \underbrace{e_v e_{v+1} \cdots e_{n-2} e_{n-1}}_{V_0} \cdot \underbrace{e_n \cdot e_n}_{k_1 \text{ 次}} \underbrace{\cdots e_n}$$

反复应用 D1 操作：$e_n^2 \to e_n$，将 $e_n^{k_0}$和 $e_n^{k_1}$化简为 e_n，得到如下结果：

$$S = e_n \cdot V_0' e_{n-1} \cdot e_n.$$

然后应用 D3 操作：$e_i e_{i-1} e_i \to e_i$，其中 $i=n$，将 $e_n e_{n-1} e_n$ 变为 e_n，于是剩下：

$$S = V_0' \cdot e_n,$$

这正是所需的琼斯标准形。

此后，我们假设 $k_1 = 1$。回顾一下，Jones标准形中的单词 V_0 可以写成

$$V_0 = (e_{i_1} e_{i_1-1} \cdots e_{j_1}) \cdots (e_{i_v} e_{i_v-1} \cdots e_{j_v}),$$

with

$$0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_v < n, \qquad 0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_v < n,$$

and

$$j_1 \leq i_1, j_2 \leq i_2, \cdots, j_v \leq i_v.$$

由于

$$\begin{aligned} S &= e_n^{k_0} V_0 e_n \\ &= e_n^{k_0} (e_{i_1} e_{i_1-1} \cdots e_{j_1}) \cdots (e_{i_v} e_{i_v-1} \cdots e_{j_v}) e_n, \end{aligned}$$

我们可以对 $e_n^{k_0}$应用 D1 操作，将其简化为 e_n。如果 V_0 与 e_n可交换，那么如果与 e_n^2 对应的闭合分支标记有 $-$，则 $e_n V_0 e_n \subset S$ 是 G1 高斯消元同构的目标。否则，该分量保持不变。如果 $i_v < n-1$，那么我们可以将 e_n一路移至 V_0 的最右侧，并通过 D1 操作化简该单词。所得单词处于琼斯标准形。否则，我们假设 $i_v = n-1$。应用这些操作（如有必要）后，我们得到如下结果：

$$S \sim e_n (e_{i_1} e_{i_1-1} \cdots e_{j_1}) \cdots (e_{n-1} e_{n-2} \cdots e_{j_v}) e_n.$$

通过交换移动（D2）并应用 D3 操作：$e_n e_{n-1} e_n \to e_n$，我们可以移除 e_{n-1}，最终得到如下结果：

$$S \sim (e_{i_1} e_{i_1-1} \cdots e_{j_1}) \cdots (e_{n-2} \cdots e_{j_v}) e_n.$$

可能会有 e $i_{v-1} = n-2$，在这种情况下，我们有一个 e_{n-2}^2 或 $e_{n-2}e_{n-3}e_{n-2}$ 的副本来约简 e:

$$S \sim (e_{i_1}e_{i_1-1}\cdots e_{j_1})\cdots(e_{n-2}e_{n-3}\cdots e_{j_{v-1}})(e_{n-2}\cdots e_{j_v})e_n.$$

根据需要反复应用变换 D1、D2 或 D3，即可将该单词化为琼斯标准形。 ■

5. 精简复形生成元的枚举

现在，我们反向执行定理1.1 （命题 4.1）中的过程，以给出固定同调分次下精简复形 $\mathcal{FT}_n^k$ 的生成元个数上界。首先，对于定理 1.1的情形（2），与直接选取长度不超过给定同调次数的单词并任意组合应用变换 D1–D3 相比，我们将介绍一种更高效的方法，从 Temperley-Lieb 幺半群 $\mathcal{FT}_n^k$ 中的单词构造增强 Kauffman 状态。TL_n。

引理 5.1。 固定链复形 h 的非零同调次数 $\mathcal{FT}_n^k$，并设 s 是定理 *1.1* 情形（*2*）所述的一个考夫曼状态，其同调分次为 $h\,(s) = h$，对应的单词为 $S \in \mathrm{TL}_n$。那么，单词 S 可以由 *Jones* 标准形中的单词 $V \in \mathrm{TL}_{n-1}$ 按如下方式得到，其中 $\mathrm{len}(V) \le h$：

(1) 判断单词 S 中是否存在 e_{n-1}。如果不存在，那么只有当 $\mathrm{len}(V) = h$ 时， V 才会出现在同调分次 h 中。*(2)* 如果单词 S 中存在 e_{n-1}，那么 S 可以写成如下形式

$$e_{n-1}^{k_0} V e_{n-1}^{k_1},$$

其中 k_0、$k_1 \neq 0$ 至少有一个成立。

证明。 这可由定理1.1 的情形（2）的证明（命题4.1）得出。 ■

因此，要枚举精简复形 $\mathcal{FT}_n^k$ 中生成元的数量，只需枚举 TL_{n-1} 中截至某个固定同调次数的单词数量，然后通过应用 D1 或 D3 操作增加单词长度，以达到相应的同调次数（注意，作为交换的 D2 操作不会改变单词长度）。我们认为，考夫曼状态的周期性也可以推导出来，但这里不对此作出精确表述。

5.1. **有序分拆函数**。

定义 5.2 （整数分拆）。 正整数的一个分拆 n，是将 n 写成若干个正整数之和的一种方式。非负整数 n 的一个有序分拆，是将n 写成若干个正整数之和的一种方式，其中，正整数的不同排列顺序（可用一个序列表示）对应不同的有序分拆。我们用 $p(n,k)$表示将非负整数 n 分拆成 k 部分的有序分拆数。

以下内容 is 这是组合数学中插板法 的一个著名应用。

定理 5.3 （插板法）。 将正整数 n 写成 k 个正整数的有序和的方法数为

$$p(n,k) = \binom{n-1}{k-1}.$$

证明。 我们将正整数 n表示为 n颗星星 $\star$: $\overbrace{\star\star\cdots\star}$，并画出 k条竖线 $|$。对于由n 个n 颗星星组成的字符串，共有 $n-1$ 个位置可用于放置 k条竖线，这些位置可以表示为一个（$k-1$）元组，用以编码将 n 分为 k 部分的有序整数分拆。例如，

$$\star\star|\star\star\star|\star$$

表示将 6 分为 3 部分的有序整数分拆。在 $n-1$ 个整数中，我们选取$k-1$ 个元素，二项式系数给出了相应公式。■

引理 5.4。 固定长度为 h 的 TL_n 琼斯标准形单词的数量，记为$N(n,h)$，由下式给出

$$N(n,h)=\sum_{k\le h}\binom{n-1}{k}p(h,k). \tag{5.1}$$

证明。 只需枚举固定长度为k的琼斯标准形单词的数量。根据定义 2.13，TL_n 中一个单词的琼斯标准形由满足以下条件的$2k$元组 $(i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k)$ 确定

$$0<i_1<i_2<\ldots<i_k<n,\qquad 0<j_1<j_2<\ldots<j_k<n, \tag{5.2}$$

and

$$j_1\le i_1, j_2\le i_2,\ldots,j_k\le i_k. \tag{5.3}$$

根据（5.3），我们首先枚举满足 $0<i_1<i_2<\ldots<i_k<n$ 条件的递增序列数量$k\le h$。

集合 $\{1,\ldots,n-1\}$ 中有 $n-1$ 个元素。取一个含 k 个元素的子集。这样的子集有 $\binom{n-1}{k}$ 个。每个子集都可以重新排列成一个严格递增序列 $0<i_1<i_2<\ldots<i_k<n$。

现在，一个满足定义 2.13 中条件的 k 元组（j_1，j_2，…，j_k），即对所有$1\le\ell\le k$ 都有 $j_\ell\le i_\ell$，确定了该 Temperley-Lieb 元素的琼斯标准形。再加上由 $2k$ 元组（i_1，i_2，…，i_k，j_1，j_2，…，j_k）指定的单词条件，这对应于将非负整数 h 分成 k 份的有序分拆。因此，对于给定的 k 元组（i_1，i_2，…，i_k），共有

$$p(h,k)$$

根据定理，可能的情况有 5.3。总共，我们有

$$\sum_{k\le h}\binom{n-1}{k}p(h,k)$$

种可能。 ■

现在我们可以证明定理 1.2。为方便读者，我们在下文将其重述为命题。在该命题的表述中，C_n 表示 n个 Catalan数。

命题 5.5。 对于固定的同调次数 h，令 $C(\mathcal{FT}_n^k、h)$ 表示这样的考夫曼状态的数量：s 其中 $(s、\varepsilon)$ 出现在精简复形 $\mathcal{FT}_n^k$ 中，且 $(s、\varepsilon)$ 的同调次数为 $=h$。那么

$$C(\mathcal{FT}_n^k,h)\le\left(\sum_{m\le h}p(h,m)\right)+N(n,h)+(p(n,2)+2)C_n. \tag{5.4}$$

证明。 **情形 1**。 我们从定理 1.1中情形（1）的计数开始。在这种情况下，与增强 Kauffman 状态 W 相对应的单词 (w,ε) 在 $\mathcal{FT}_n^k$ 中具有如下形式

$$e_{n-1}^{k_0}V_0e_{n-1}^{k_1}V_1\cdots V_re_{n-1}^{k_r},$$

其中 $V_j = e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{n-1}$。计数取决于两个元组 $(j_1)_{j=0}^{r}$ 和 $(k_0, \ldots\ldots, k_{r+1})$。固定同调次数 h，给定辫子词 ft_n^k，求和

$$m := \sum_{i=0}^{r} k_i \leq h. \tag{5.5}$$

若 $m = h$，那么同调次数已耗尽，我们在增强 Kauffman 状态中计入一个元素 e_{n-1}^m。若方程（5.5）中是不等式，则令 $\ell := h - m$. 接下来，我们考虑将 h 分成 m 部分的有序划分数。根据定理5.3，该数量为$p(h, m)$。定义 $p(0, m) = 1$。因此，此情形下的总计数为

$$\sum_{m \leq h} p(h, m). \tag{5.6}$$

情形 2。我们将计数分为两组考夫曼状态。

(2a) $\mathrm{len}(S) = h$：计数等于长度为 h 的 Temperley-Lieb 元素的数量。根据引理 5.4，该数量为 $N(n, h)$。(2b) $\mathrm{len}(S) < h$：如命题 4.1 所证，$S = e_{n-1}^{k_0} V e_{n-1}^{k_1}$，其中 V 处于琼斯标准形。注意，辫子词 $ft_n^k = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^k$ 中 e_{n-1} 的最大数量为 k。因此 $k_0 + k_1 \leq k$。对于 $V \in \mathrm{TL}_{n-1}$ 的取值，我们有 TL_{n-1} 中元素的数量为第 n 个 Catalan数 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。此外，根据定理 5.3，与 k_0、$k_1 + 2$ 对应的将 k 分成 2 部分的有序划分数为 $p(n, 2)$。因此，此情形下的总数为 $C_n \cdot p(n, 2)$。情形 1 以及情形（2a）和（2b）的计数之和等于方程 5.4 给出的总计数。

■

注记 5.6。对于固定的同调次数 h，能够支撑在给定辫子 ft_n^k 上的 TL_n 元素数量有限，因此上界很可能并不尖锐，还可以进一步降低。

致谢。我们感谢 Melissa Zhang、Matt Hogancamp、Mikhail Khovanov 和 Eugene Gorsky，就他们的工作与本项目的关联进行了富有启发性的讨论。我们尤其要感谢 Melissa Zhang 提供命题 2.14 的出处和证明，并建议将我们的复形命名为“削简复形”。我们谨此致谢 AIM Square 资助、SLMath（前身为 MSRI）的数学暑期研究（SWiM）资助，以及 ICERM 合作资助；这些资助为我们在美国数学研究所和计算与实验数学研究所提供了优良的工作条件。C. Caprau 获得 NSF-RUI 资助项目 DMS 2204386 的部分支持。C. Lee 获得 NSF 资助项目 DMS 1907010（南阿拉巴马大学）、DMS 2244923（德克萨斯州立大学）和 CAREER-DMS 2440680（德克萨斯州立大学）的部分支持。R. Sazdanovic 获得 NSF 资助项目 DMS-1854705（北卡罗来纳州立大学）的部分支持。

参考文献

[Art47] E. Artin. 辫子理论。数学年刊（第二辑），48:101–126，1947。[BN05] Dror Bar-Natan. 缠结与协边的 Khovanov 同调。几何与拓扑，9(3):1443–1499，2005。[BN07] Dror Bar-Natan. 快速 Khovanov 同调计算。纽结理论及其应用，16 255，2007 03 243( ): – 。[CK10] Benjamin Cooper 和 Slava Krushkal. Jones-Wenzl 投影子的范畴化。量子拓扑，05 2010。[Deh02] Patrick Dehornoy. Garside 群。高等师范学校科学年刊（第四辑），35(2):267–306，2002。[FH19] Peter Feller 和 Diana Hubbard. 扭转次数与股数相同的辫子可实现辫子指数。拓扑学杂志，12(4):1069–1092，2019。[GOR13] Eugene Gorsky、Alexei Oblomkov 和 Jacob Rasmussen. 环面纽结的稳定 Khovanov 同调。实验数学，22(3):265–281，2013。

[Hog19] Matthew Hogancamp. 着色 $\mathfrak{sl}_2$ 链环同调上的多项式作用。量子拓扑，10(1):1–75，2019。[Jon83] V. F. R. Jones. 子因子的指数。Invent. Math.，72(1):1–25，1983。[Kah62] Arthur B. Kahn. 大型网络的拓扑排序。ACM 通讯，5:558–562，1962。[Kel24] Tuomas Kelomäki. Khovanov 同调的离散 Morse 理论，2024。[Kel25] Tuomas Kelomäki. 四股环面链环的 Morse 匹配与 Khovanov 同调，2025。[Kho00] Mikhail Khovanov. Jones 多项式的范畴化。Duke Math. J.，101(3):359–426，02 2000。[KT08] Christian Kassel 和 Vladimir Turaev. 辫群，数学研究生教材第 247 卷。施普林格，纽约，2008。图示由 Olivier Dodane 协助完成。[Lee25a] Christine Ruey Shan Lee. 通过范畴化的 Jones-Wenzl 投影子计算 Khovanov 同调。Contemp. Math.，827:31–48，2025。[Lee25b] Christine Ruey Shan Lee. 稳定 Khovanov 同调与体积。Proc. Amer. Math. Soc.，153(5):2219–2234，2025。[Lic97] W. B. Raymond Lickorish. 纽结理论导论，数学研究生教材第 175 卷。施普林格出版社，纽约，1997。[MM01] Hitoshi Murakami 和 Jun Murakami. 纽结的着色 Jones 多项式与单纯体积。Acta Math.，186(1):85–104，2001。[Pic20] Lisa Piccirillo. Conway 纽结不可切片。数学年刊（第二辑），191(2):581–591，2020。[Ras10] Jacob Rasmussen. Khovanov 同调与切片亏格。Invent. Math.，182(2):419–447，2010。[Roz10] Lev Rozansky. 无限环面辫产生一个范畴化的 Jones-Wenzl 投影子。Fundam. Math.，225，05 2010。[Sto07] Marko Stošić. 环面纽结的同调厚度与稳定性。Algebr. Geom. Topol.，7(1):261–284，2007。[Tur17] Paul Turner. Khovanov 同调五讲。J. Knot Theory Ramifications，26(3):1741009，41，2017。

数学系，加利福尼亚州立大学，弗雷斯诺，加利福尼亚州 93740电子邮箱: ccaprau@csufresno.edu

数学系，英属哥伦比亚大学，温哥华，不列颠哥伦比亚省，加拿大电子邮箱: nicolle@math.ubc.ca

数学系，德克萨斯州立大学，圣马科斯，德克萨斯州 78666电子邮箱: vne11@txstate.edu

数学系，北卡罗来纳州立大学，罗利，北卡罗来纳州 27695-88205电子邮箱: rsazdan@ncsu.edu