arXiv:2601.09080v1 [math.FA] 14 Jan 2026

深零点问题与 HRT 猜想

李宇飞、刘泽光和 KEHE ZHU

摘要。我们研究 Hedenmalm 提出的“深零点问题”。我们证明，Hedenmalm 的问题与时频分析中的经典 HRT 猜想之间存在一种自然联系。借助这一联系，我们证明 Hedenmalm 在 [5] 中提出的问题 5.2 以及它的一些自然类比问题都有肯定答案。

1. 引言

设 Ω 是复平面$\mathbb{C}$ 中的一个区域（连通、开且非空的集合），并令 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 表示所有非负整数构成的集合。经典的 恒等定理指出：若 f 在 Ω 上解析，且满足以下任一条件：对于某个点 $a \in \Omega$ 和所有 $j \in \mathbb{N}_0$，有 $f^{(j)}(a) = 0$；或者对于 Ω 中的一个序列 $\{a_j\}$，有 $f(a_j) = 0$，且该序列在 Ω中有一个聚点；那么 f 在 Ω上恒等于 0。

我们可以尝试沿两个自然方向推广这些恒等定理（或唯一性定理）。第一个方向涉及这样的条件：对于序列 $\{a_j\}$， $f(a_j) = 0$ 在Ω中，而$\{a_j\}$不一定在 Ω中有聚点。我们可以对 f 和 $\{a_j\}$施加额外假设，从而推出 f 恒等于 0。最著名的例子如下：若 $f \in H^\infty$是 $\mathbb{C}$中开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的所有有界解析函数构成的空间，且 $\sum(1 - |a_j|) = \infty$，那么，对所有 j（按重数计）都有 $f(a_j) = 0$ 这一条件蕴含 $f = 0$。更一般地，对于 Ω上的任意给定解析函数空间X，我们可以寻求关于 $\{a_j\}$ 的条件，使得对任意$f \in X$，条件 $f(a_j) = 0$ 对所有 j（按重数计）成立，都能推出 $f = 0$。目前，只有极少数函数空间的零点序列刻画问题得到了解决。许多经典函数空间的相关问题仍未解决，包括 $\mathbb{D}$的 Bergman 空间。

第二个方向涉及条件 $f^{(j)}(a) = 0$对所有 $j \in \mathbb{N}_0$成立，其中 a 是 Ω中的某个固定点。同样，我们可以要求 f 属于某个解析函数空间 X。以下问题已在

日期：2026年1月15日。2020 数学学科分类30H20，42C15，47B38。关键词和短语 深零点问题，Fock 空间，HRT 猜想，Bargmann 变换，Weyl 酉算子，单位根。Liu 为通讯作者。本研究部分得到中国国家自然科学基金资助，项目编号为12571136、12001089和12271328。

文献中得到研究。设 a 和 b 是 Ω中的两个点，设 $\mathcal{E}_0 \subset \mathbb{N}_0$，并设 $\mathcal{E}_1 = \mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{E}_0$。寻找关于 f、$\mathcal{E}_0$、a和 b的附加假设，使得条件

$$\begin{cases} f^{(j)}(a) = 0, & j \in \mathcal{E}_0, \\ f^{(j)}(b) = 0, & j \in \mathcal{E}_1, \end{cases}$$

意味着 $f = 0$。例如，参见 [1, 3, 4, 8, 14] 。

更一般地，如果 $d \geq 2$，并且如果

(i) T_k、$0 \leq k \leq d-1$ 是 X 上的有界线性算子，(ii) $\mathcal{E}_k$、$0 \leq k \leq d-1$ 是 $\mathbb{N}_0$ 的不相交子集，(iii) a_k、$0 \leq k \leq d-1$ 是 Ω 中的点，

我们可以尝试寻找额外的假设，使得条件

$$\begin{cases} (T_0 f)^{(j)}(a_0) = 0, & j \in \mathcal{E}_0, \\ (T_1 f)^{(j)}(a_1) = 0, & j \in \mathcal{E}_1, \\ \vdots & \vdots \\ (T_{d-1} f)^{(j)}(a_{d-1}) = 0, & j \in \mathcal{E}_{d-1}, \end{cases}$$

意味着 $f = 0$。沿用 Hedenmalm 的说法 [5], ，我们将这些问题统称为“深零点问题”。

特别值得关注的是以下情形:

$$\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{E}_{d-1} = \mathbb{N}_0.$$

例如,

$$\mathcal{E}_k = \{k + dj : j \in \mathbb{N}_0\}, \quad 0 \leq k \leq d-1,$$

给出了 $\mathbb{N}_0$ 的这种分解。当 $d = 2$，$\mathcal{E}_0$ 是 $\mathbb{N}_0$ 中所有偶整数构成的集合，而 $\mathcal{E}_1$ 是 $\mathbb{N}_0$ 中所有奇整数构成的集合。如果 Ω “足够对称”，且空间 X “足够规则”，我们或许能够在 Ω 中移动点（例如进行平移），从而调整所涉及的算子，并假设 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{d-1}$。

Hedenmalm 的论文 [5], 与我们在此所做的工作一样，聚焦于这样的情形: X 是复平面上的 Fock 空间 F^2，而 F^2 上的算子 T 是 Weyl 酉算子（加权平移算子）。回忆一下，F^2 由 $\mathbb{C}$ 上满足以下条件的所有整函数 f 构成:

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, \mathrm{d}\mu_G(z) < +\infty,$$

其中 $\mathrm{d}\mu_G(z) = e^{-|z|^2} \mathrm{d}A(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的高斯测度。这里 $\mathrm{d}A(z) = \pi^{-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $z = x + iy$ 是归一化面积测度。对于任意点 $\alpha \in \mathbb{C}$，Weyl 算子 $U_\alpha : F^2 \to F^2$ 定义为

$$U_\alpha f(z) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \overline{\alpha} z} f(z + \alpha).$$

众所周知且易于验证，U_α 是一个酉算子，满足 $U_\alpha^{-1} = U_\alpha^* = U_{-\alpha}$。关于 Fock 空间和 Weyl 酉算子的背景信息，可参见例如 [15]。

[5] 中证明的结果之一如下。

定理A。 设 $f \in F^2$，且 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{N}_0$ 中的偶整数集合（或 $\mathbb{N}_0$ 中的奇整数集合）。如果对于某个 $\beta \in \mathbb{C}$，对所有 $j \in \mathcal{E}$ 都有 $f^{(j)}(0) = 0$，且对所有 $j \in \mathcal{E}^c$都有 $(U_\beta f)^{(j)}(0) = 0$，那么 $f = 0$。

单位圆盘上的 Hardy 空间、Bergman 空间和 Dirichlet空间也证明了类似的结果 [12] 。

在同一篇论文中 [5],，Hedenmalm 还用上述一般框架提出了以下问题。

问题B。 设 $f \in F^2$，并设 $\mathcal{E}_k = \{k + 4j : j \in \mathbb{N}_0\}$，其中 $0 \le k \le 3$。若存在一点 $\beta \in \mathbb{C}$ 使得

$$\begin{cases} f^{(j)}(0) = 0, & j \in \mathcal{E}_0, \\ (U_\beta f)^{(j)}(0) = 0, & j \in \mathcal{E}_1, \\ (U_\beta f)^{(j)}(0) = 0, & j \in \mathcal{E}_2, \\ (U_\beta f)^{(j)}(0) = 0, & j \in \mathcal{E}_3, \end{cases} \tag{1}$$

是否可以推出 $f = 0$?

注意，定义在 $\mathbb{C}$ 上的任意整函数 f 都有泰勒展开

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j.$$

设 $\mathcal{E}_k$、 $0 \le k \le 3$为问题B中定义的集合，容易看出，条件 $f^{(j)}(0) = 0$ 对所有 $j \in \mathcal{E}_0$ 成立，当且仅当

$$f(z) + f(iz) + f(-z) + f(-iz) = 0.$$

类似地，条件 $f^{(j)}(0) = 0$ 对所有 $j \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$ 成立，当且仅当 $f(iz) = f(z)$。因此，问题B可以用函数方程重新表述如下。

问题B′。 设 $f \in F^2$。若存在某个 $\beta \in \mathbb{C}$ 使得

$$\begin{cases} U_\beta f(iz) = U_\beta f(z), \\ f(z) + f(iz) + f(-z) + f(-iz) = 0, \end{cases}$$

能否推出 $f = 0$?

本文旨在说明问题B有肯定的答案。事实上，我们将证明以下结论。

主要定理。 问题B以及关于 $d = 3$ 和$d = 6$ 的相应问题都有肯定的答案。

我们的方法是探究 Fock 空间的深零点问题与时频分析中所谓的 HRT 猜想之间的某种联系。尽管 HRT 猜想仍未解决，但一个已知的特殊情形将使我们能够证明上述定理。我们自然可以猜想，对于任意正整数 $d > 1$，问题B都有肯定的答案。

2. HRT 猜想

以下是时频分析中的一个核心开放问题，称为线性无关猜想，有时也称为 *HRT* 猜想。例如，参见 [6, 7] 。和往常一样，我们用 $\mathbb{R}$ 表示实数轴。

猜想 C. 如果 $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x) \setminus \{0\}$ 和 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N$ 是 $\mathbb{R}^2$中的两个不同点，那么函数

$$g_k(x) = e^{2\pi i b_k x} g(x - a_k), \quad 1 \le k \le N,$$

在 $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$中线性无关。

实际上，我们将使用 HRT 猜想的 Fock 空间版本。回忆一下（例如参见 [15, 16] ），Bargmann 变换是由下式定义的积分算子

$$(\mathbf{B}g)(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}x^2} g(x)\, \mathrm{d}x, \quad z \in \mathbb{C}.$$

众所周知， $\mathbf{B} : L^2(\mathbb{R}, dx) \to F^2$ 是一个酉变换。

对于猜想 C 中的函数 g 和 g_k，众所周知（例如参见 [16]），直接验证也很容易得到

$$(\mathbf{B}g_k)(z) = e^{i\pi a_k b_k} (U_{\lambda_k} f)(z),$$

其中

$$f = \mathbf{B}g \quad \text{and} \quad \lambda_k = -2\pi b_k - i a_k/2$$

对于 $1 \le k \le N$。

因此，HRT 猜想可以用 Fock 空间表述如下。

猜想 C′。若 λ_k、 $1 \le k \le N$ 是 $\mathbb{C}$ 中互不相同的点，且 $f \in F^2 \setminus \{0\}$，则函数 $U_{\lambda_k} f$、 $1 \le k \le N$ 在 F^2 中线性无关。

尽管 HRT 猜想仍未解决，文献中已有大量关于这一问题的研究。下面的定理汇总了几个与本文工作相关的部分结果。

定理 D。 *HRT* 猜想成立

(a) 若 $N \le 3$, *(b)* 或若 $N = 4$ ，且 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^4$ 中的四个点里有两个位于同一条直线上，另两个位于与之平行的第二条直线上，*(c)* 或若

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} : 1 \le k \le N \right\} \subset A\mathbb{Z}^2 + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

其中， $\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} : n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ 是 $\mathbb{R}^2$中的普通整数格， A 是一个可逆的 2×2 矩阵，并且 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$。

（a）由 [7], 中的定理1得出，（b）由[2], 中的定理1.4得出，（c）则由 [11]中的命题 1.3得出。有关 HRT 猜想的更多信息和结果，请参见 [7, 10, 13]及其中的参考文献。

我们将集合 $A\mathbb{Z}^2+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 称为 $\mathbb{R}^2$中的正则格。同样，我们也可以讨论 $\mathbb{C}$ 中的正则格，它们是形如 $\mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2+e$ 的集合，其中 e 是任意复数，而 e_1、e_2 是任意两个 $\mathbb{R}$-线性无关的复数。

容易看出，映射

$$z=-2\pi y-ix/2$$

（参见前面对 Bargmann 变换的说明）从实欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 到复平面 $\mathbb{C}$, 具有以下性质：

（i）它将 $\mathbb{R}^2$ 中的直线映射为 $\mathbb{C}$中的直线。（ii）它将 $\mathbb{R}^2$ 中的平行直线映射为 $\mathbb{C}$中的平行直线。（iii）它将 $\mathbb{R}^2$ 中的任意正则格映射为 $\mathbb{C}$中的正则格。

因此，当将 $\mathbb{R}^2$ 中的点替换为 $\mathbb{C}$中的点时，定理 D 的相应版本也适用于 HRT 猜想的 Fock 空间版本。

定理1. 设 $d\in\{1,2,3,4,6\}$和 $\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$。那么，*HRT* 猜想（*Fock* 空间版本）对这些点成立。

$$\lambda_k=\beta e^{2k\pi i/d},\qquad 0\le k\le d-1.$$

证明。 </style)情况 $d=1$ 是显然的。情况 $d=2$和 3 可由定理 D 的 (a) 部分或 (c) 部分推出。显然，情况 $d=4$ 可由定理 D 的 (b) 部分或 (c) 部分推出。

不太明显的是情形 $d=6$，我们证明它也可由定理 D 的 (c) 部分推出。事实上，随着

$$\omega=e^{2\pi i/6}=e^{\pi i/3},$$

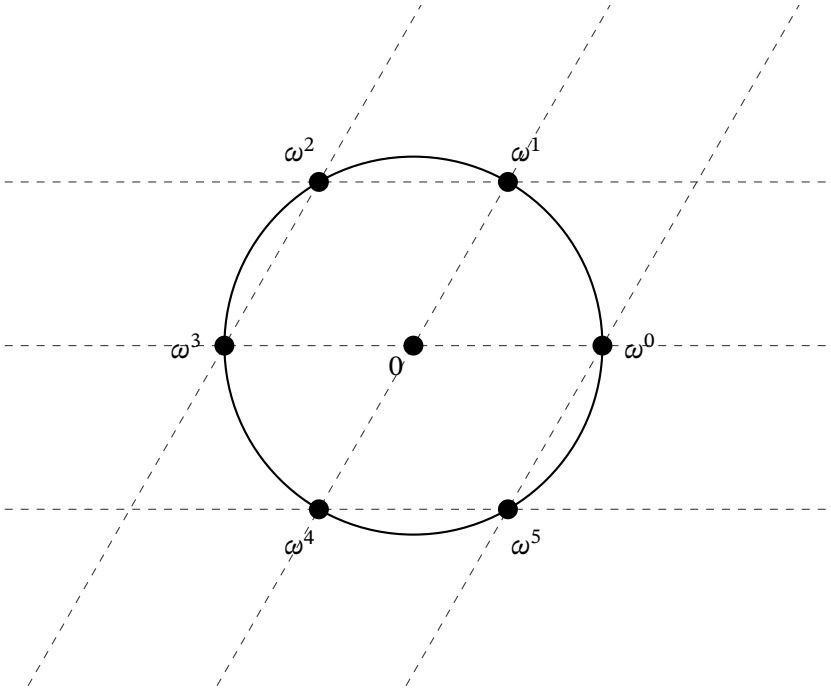
我们有 $\lambda_k=\beta\omega^k$，对应 $0\le k\le 5$，并且

$$\omega^0=1,\ \omega^1=\omega,\ \omega^2=\omega-1,\ \omega^3=-1,\ \omega^4=-\omega,\ \omega^5=1-\omega.$$

这表明，对于每个 $0\le k\le 5$，我们都有

$$-\beta\omega^k=-\beta(m_k+n_k\omega),\qquad m_k,n_k\in\{-1,0,1\}.$$

由此可知，$\{1,\omega,\cdots,\omega^5\}$中的点属于$\mathbb{C}$ 中的正则格 $\mathbb{Z}+\omega\mathbb{Z}$（见下图）。因此，$\{\beta e^{2k\pi i/6}:0\le k\le 5\}$中的点属于正则格 $\beta(\mathbb{Z}+\omega\mathbb{Z})$。定理得证。□



对于任意整数 $d > 1$，点 $\omega_k = \exp(2k\pi i/d)$、$0 \le k \le d-1$在单位圆上的分布都非常对称。我们很容易猜想，它们一定总是属于某个正则格。但事实并非如此！要证明这一点，我们需要一些代数预备知识。

令 $\mathbb{N}$ 表示所有正整数的集合。回顾一下，欧拉函数 $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为

$$\phi(n) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{r} p_j^{k_j-1}(p_j - 1), & n > 1, \\ 1, & n = 1, \end{cases}$$

其中

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}, \qquad p_1 < \cdots < p_r,$$

是 $n > 1$ 的唯一素因数分解。参见 [9, 第 95-96] 页。

引理 2. *$\phi(n)$ 对所有 $n > 2$ 都是偶数。*

证明。如果 n 含有奇素因数 p，那么 $\phi(n)$ 包含因子 $p-1$，它是偶数。如果 n 不含奇素因数，那么 $n = 2^k$，其中 $k \ge 2$；在这种情况下，$\phi(n) = 2^{k-1}$ 也为偶数。□

引理 3. *方程 $\phi(n) = 2$ 的解为 $n = 3,\ 4,\ 6$。*

证明。显然，对于 $n = 3,\ \phi(n) = 2$，4，6。另一方面，若 n 是 $\phi(n) = 2$ 的任意一个解，则 $n > 1$ 和 $n = 2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}\cdots$，其中每个 $k_j \ge 0$，且它们不全为零。若 n 有一个素因数 $p \ge 5$，则 $\phi(n) \ge 4$。因此，对于所有 $j \ge 3$，$k_j = 0$，并且我们必须有 $n = 2^{k_1}3^{k_2}$。

(a) 若 $k_1 = 0$，则 $2 = \phi(n) = \phi(3^{k_2}) = 3^{k_2-1}(3-1)$，由此得到 $k_2 = 1$ 和 $n = 3$。(b) 若 $k_2 = 0$，则 $2 = \phi(n) = \phi(2^{k_1}) = 2^{k_1-1}(2-1)$，由此得到 $k_1 = 2$ 和 $n = 4$。(c) 若 k_1 和 k_2 都非零，则 $2 = \phi(n) = \phi(2^{k_1}3^{k_2}) = 2^{k_1-1}3^{k_2-1}\cdot 2$，由此得到 $k_1 = k_2 = 1$ 和 $n = 6$。

这就证明了所需的结论。 □

设 $\mathbb{F}$ 是另一个域 $\mathbb{E}$ 的子域。沿用 [9, 第 223 页-224], 的记号，我们用 $[\mathbb{E}:\mathbb{F}]$ 表示 $\mathbb{E}$ 作为 $\mathbb{F}$ 上向量空间的维数。

定理 E。 [9, 定理 3.1，第278]设 d 为正整数，且 $\omega = e^{2\pi i/d}$。那么

$$[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}] = \phi(d),$$

其中 $\mathbb{Q}$ 表示有理数域，

$$\mathbb{Q}(\omega) = span_{\mathbb{Q}}\{\omega^k : k = 0, \cdots, d-1\},$$

而 ϕ 是欧拉函数。

现在我们可以证明，对于 $4 < d \neq 6$， d 次单位根无法置于任何正则格中。代数领域的专家或许已经知道以下结果。但我们未能找到具体出处，因此在此给出完整证明。

定理 4. 设 $d \in \mathbb{N} and\, \omega = e^{2\pi i/d}$。则以下条件等价。

(a) 点

$$\lambda_k = \omega^k = e^{2k\pi i/d}, \qquad 0 \le k \le d-1,$$

属于复平面上的一个正则格。*(b)* $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$。

证明。</style}显然，当 $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ 时， $\{\omega^k : 0 \le k \le d-1\}$ 中的点属于 $\mathbb{C}$ 中的一个正则格。根据定理1，当 $d = 6$ 时，这一点也成立。

接下来固定 $d > 4$，并假设 $\{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{d-1}\}$ 属于一个正则格

$$L = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + e$$

在复平面中，其中 $e \in \mathbb{C}$ 和 e_1、e_2 是关于 $\mathbb{R}$线性无关的两个复数。

对于 $1 \le k \le d-1$，我们写作

$$v_k = \lambda_k - \lambda_0 = n_{k1}e_1 + n_{k2}e_2,$$

其中， n_{k1} 和 n_{k2} 是整数。因此，对于 $k \ge 2$，我们可以写成

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{k1} & n_{k2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

关于实数， v_1 和 v_k 线性无关，且 e_1和 e_2线性无关。因此，上述每个由整数构成的 2×2矩阵都是可逆的。特别地，我们有

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

因此，对于 $k \geq 3$，我们可以写成

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{k1} & n_{k2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

初等线性代数告诉我们，整数项可逆矩阵的逆矩阵具有有理数项。因此，每个 v_k、 $k \geq 3$ 都是 v_1 和 v_2 的有理系数线性组合。由此，集合

$$\{v_0, v_1, \cdots, v_{d-1}\} \quad \text{and} \quad \{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{d-1}\}$$

都包含于 $\text{Span}_{\mathbb{Q}}\{1, \omega, \omega^2\}$ 中，这意味着 $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] \leq 3$。结合引理 2 和定理 E，可得 $\phi(d) = 2$。应用引理 3，进而得到 $d = 6$。□

显然，如果将点 λ_k 替换为 $\lambda_k = \beta\omega^k$、$0 \leq k \leq d-1$，其中 β 是任意非零复数，那么定理 4 仍然成立。

3. 一个深零点问题

本节中，我们利用 HRT 猜想研究 Fock 空间的一个特定深零点问题。我们先介绍一些关于 Fock 空间上复合算子的预备结果。

给定一个整数 $d > 1$，我们再次令 $\omega = e^{2\pi i/d}$。考虑函数$\varphi(z) = \omega z$。显然，φ只是绕原点旋转复平面，因此它在 Fock 空间上诱导出一个酉复合算子 C_φ，

$$C_\varphi f(z) = f \circ \varphi(z) = f(\omega z), \qquad f \in F^2.$$

显然，任意函数

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

在 F^2 中都存在唯一分解

$$f(z) = \sum_{k=0}^{d-1} f_k(z),$$

其中

$$f_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+jd} z^{k+jd}, \qquad 0 \leq k \leq d-1.$$

对于 $0 \le k \le d-1$，我们通过 $P_k f = f_k$ 定义投影算子 $P_k : F^2 \to F^2$。显然，上述 f 的分解是正交的，也就是说，实际上有

$$I = \bigoplus_{k=0}^{d-1} P_k,$$

其中， I 是 F^2上的恒等算子。

引理 5。 采用上述记号，我们有 $C_\varphi P_k = \omega^k P_k$ 并且

$$P_k f(z) = \frac{1}{d}\sum_{m=0}^{d-1} \omega^{-km} f(\omega^m z) = \frac{1}{d}\sum_{m=0}^{d-1} \omega^{-km} C_\varphi^m f(z)$$

对于 $0 \le k \le d-1$ 和 $f \in F^2$。

证明。 对于 F^2 中的任意$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$， 我们有

$$\begin{aligned} C_\varphi P_k f(z) = C_\varphi f_k(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+dj}(\omega z)^{k+dj} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+dj}\omega^{k+dj} z^{k+dj} = \omega^k \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+dj} z^{k+dj} \\ &= \omega^k f_k(z) = \omega^k P_k f(z). \end{aligned}$$

因此 $C_\varphi P_k = \omega^k P_k$。 于是可得

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{d-1} \omega^{-km} f(\omega^m z) &= \sum_{m=0}^{d-1} \omega^{-km} C_\varphi^m f(z) = \sum_{m=0}^{d-1} \omega^{-km} \sum_{n=0}^{d-1} C_\varphi^m P_n f(z) \\ &= \sum_{m=0}^{d-1} \omega^{-km} \sum_{n=0}^{d-1} \omega^{mn} P_n f(z) = \sum_{n=0}^{d-1} P_n f(z) \sum_{m=0}^{d-1} (\omega^{n-k})^m \\ &= dP_k f(z) + \sum_{n=0, n\neq k}^{d-1} \frac{1-\omega^{d(n-k)}}{1-\omega^{n-k}} P_n f(z) \\ &= dP_k f(z). \end{aligned}$$

引理的证明至此完成。 □

以下引理确立了 Weyl 算子 U_α 与复合算子 C_φ 之间的交换关系。

引理 6。 设 $d > 1$、 $\omega = e^{2\pi i/d}$、 $\varphi(z) = \omega z$和 $\beta \in \mathbb{C}$。则

$$C_\varphi U_\beta f = U_{\beta\omega^{-1}} C_\varphi f, \quad f \in F^2.$$

证明。 对于任意 $f \in F^2$，我们有

$$\begin{aligned}(C_\varphi U_\beta f)(z) &= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2-\bar{\beta}\omega z} f(\omega z+\beta)\\ &= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2-\bar{\beta}\omega z} f(\omega(z+\omega^{-1}\beta))\\ &= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2-\bar{\beta}\omega z}(C_\varphi f)(z+\omega^{-1}\beta)\\ &= e^{-\frac{1}{2}|\beta\omega^{-1}|^2-\overline{\beta\omega^{-1}}z}(C_\varphi f)(z+\omega^{-1}\beta)\\ &= (U_{\beta\omega^{-1}}C_\varphi f)(z).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

本节的主要结果如下。由此，我们将得到 Hedenmalm 定理 A 这一特例，对 Hedenmalm 问题 B 给出肯定回答，并推导出另外几个新结果。

定理 7. 设 $d > 1$ 是一个整数，$\beta_k = \beta \in \mathbb{C}$ 对于 $k = 1, \dots, d-1$，且 $\mathcal{E}_k = \{k + dj : j \in \mathbb{N}_0\}$ 对于 $0 \le k \le d-1$。若猜想 C' 对 $N = d$ 和 $\lambda_k = -\beta\omega^{-k+1}$，$0 \le k \le d-1$ 成立，其中 $\omega = e^{2\pi i/d}$，那么深零点问题

$$\begin{cases} f^{(j)}(0) = 0, & j \in \mathcal{E}_0,\\ (U_{\beta_1} f)^{(j)}(0) = 0, & j \in \mathcal{E}_1,\\ \vdots & \vdots\\ (U_{\beta_{d-1}} f)^{(j)}(0) = 0, & j \in \mathcal{E}_{d-1}, \end{cases} \tag{2}$$

对于 $f \in F^2$ 有肯定答案，也就是说，上述条件蕴含 $f = 0$。

证明。令 $h = U_\beta f$。(2) 中的条件等价于

$$\begin{cases} (U_{-\beta}h)^{(j)}(0) = (U_\beta^{-1}h)^{(j)}(0) = 0, & j \in \mathcal{E}_0,\\ h^{(j)}(0) = 0, & j \in \mathcal{E}_k, 1 \le k \le d-1, \end{cases}$$

由此可得 $P_0 U_{-\beta} h = 0$ 和 $h_k = P_k h = 0$，其中 $1 \le k \le d-1$。记作 $h = \sum_{k=0}^{d-1} h_k$，并应用引理 5 和 6。我们得到

$$\begin{aligned} 0 = P_0 U_{-\beta} h &= P_0 U_{-\beta} h_0\\ &= \frac{1}{d}\sum_{m=0}^{d-1} C_\varphi^m U_{-\beta} h_0 = \frac{1}{d}\sum_{m=0}^{d-1} U_{-\beta\omega^{-m}} C_\varphi^m h_0\\ &= \frac{1}{d}\sum_{m=0}^{d-1} U_{-\beta\omega^{-m}} h_0 = \frac{1}{d}\sum_{m=0}^{d-1} U_{-\beta\omega^{-m}} h. \end{aligned}$$

如果猜想 C′ 对 $N = d$ 以及点 $\lambda_k = -\beta\omega^{-k}$、$0 \le k \le N-1$成立，那么必有 $h = 0$，因此 $f = 0$。这就证明了所需的结果。□

以下结果现在是定理1、定理 D 和定理 7 的推论。情形 $d = 2$ 给出定理A，情形 $d = 4$ 对问题B给出了肯定的回答，而情形 $d = 3$ 和 $d = 6$ 则是此前从未考虑过的。

推论8。对于 $2 \le d \le 4$ 或 $d = 6$，令 $\beta_0 = 0$且 $\beta_1 = \cdots = \beta_{d-1} = \beta \in \mathbb{C}$。若 $f \in F^2$满足

$$(U_{\beta_j} f)^{(j)}(0) = 0, \text{ for each } j \in \mathcal{E}_k \text{ and } k = 0, \dots, d-1,$$

则 $f = 0$。

证明。若 $\beta = 0$，则这些假设意味着 f 在原点处的所有泰勒系数均为 0，因此 $f = 0$。情形 $\beta \neq 0$ 由定理1、定理 D 的 (c) 部分以及定理 7 得出。□

我们以如下问题作为本文的结尾，它是 HRT 猜想的一个自然特例。

问题9。对于任意正整数 d，令 $\lambda_k = e^{2k\pi i/d}, 0 \le k \le d-1$。对于 $\{\lambda_k\}$中的点，*HRT* 猜想是否成立？也就是说，若 $f \in F^2 \setminus \{0\}$，则$\{U_{\lambda_k} f\}$ 中的函数是否线性无关？

尽管完整的 HRT 猜想仍未解决，而且似乎是一个非常困难的问题，但我们认为这个特例或许没有那么难。它的解答与我们的定理 7 相结合，将会得出一个关于深零点问题的漂亮结果。根据上一节，$d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$的情形下问题9已有肯定答案，因此剩下有趣的情形是 $d = 5$ 和 $d > 6$，也就是说，单位根不再位于正则格中，但我们猜测 HRT 猜想仍然成立。

参考文献

[1] N. H. Abel，关于生成函数及其行列式，载于全集，Grøn- dahl & Son, Christiania，1839年，第77–88页。[2] C. Demeter 和 A. Zaharescu，(2,2)构型的HRT猜想的证明，《数学分析及其应用杂志》**388** (2012)，第1期，151–159页。[3] M. A. Evgrafov，*Abel-Gončarov*插值问题，Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit.，莫斯科，1954年，共126页。[4] A. O. Gel'fond 和 I. I. Ibragimov，关于导数在两点处为零的函数，《苏联科学院通报：数学辑》**11** (1947)，547–560页。[5] H. Hedenmalm，深零点问题，《数学分析杂志》**156** (2025)，第1期，83–95页。[6] C. Heil，Gabor框架密度定理的历史与演变，《傅里叶分析及其应用杂志》**13**(2007)，113–166页。[7] C. Heil、J. Ramanathan 和 P.Topiwala，时频平移的线性无关性，《美国数学会会刊》**124** (1996)，第9期，2787–2795页。[8] Yu. A. Kaz'min，指数型整函数幂级数展开的若干形式，《莫斯科大学学报：第一辑数学与力学》**23** (1968)，第1期，49–63页。[9] S. Lang，《代数》（修订第3版），Springer，纽约，2002年。[10] D. Li，有限个时频移位的线性无关性，《中国数学前沿》**17**(2022)，第4期，501–509页。[11] P. A. Linnell，冯·诺依曼代数与平移族的线性无关性，《美国数学会会刊》**127** (1999)，第11期，3269–3277页。

[12] A. Montes-Rodríguez，Hardy 空间和 Bergman 空间中酉加权复合算子作用下的零点，*Mediterr.J. Math.* **20** (2023)，第2期，论文编号82，共9页。[13] D. W. Stroock，关于HRT猜想的若干评述，数学讲义 **2137**，Springer，Cham，2015年，603–617页。[14] J. M. Whittaker，插值函数理论，Stechert-Hafner公司，纽约，1964年，v+107页。[15] K. Zhu，*Fock* 空间上的分析，Springer，纽约，2012年，x+344 页。[16] K. Zhu，迈向 Bargmann 变换词典，载于解析算子理论手册，Chapman & Hall/CRC，2019年，319–349页。

数学与统计学院，东北师范大学，中国吉林长春 130024电子邮箱地址：liyf495@nenu.edu.cn

数学与统计学院，东北师范大学，中国吉林长春 130024电子邮箱地址：liuzeguang205@nenu.edu.cn

数学与统计系，纽约州立大学奥尔巴尼分校，美国纽约州奥尔巴尼 12222电子邮箱地址：kzhu@albany.edu