arXiv:2601.09094v1 [math.FA] 14 Jan 2026

与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的尖锐局部化加权不等式及其应用

Pingxu Hu、Yinqin Li、Dachun Yang*和 Wen Yuan

摘要 本文分别建立了与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的近乎尖锐的局部化加权不等式，其常数为尖锐的 A_1-权常数，或在$p \in (1,\infty)$时为特定的 A_p-权常数。作为应用，我们进一步得到 Muckenhoupt 权重的一种新刻画；并在球 Banach 函数空间框架下，得到立方体上与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的不等式、一个 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式，以及一个 Bourgain–Brezis–Mironescu 公式。所有这些结果都具有广泛的适用性，并且被证明是（近乎）尖锐的。

本文的原始版本发表于 *[Adv. Math. 481 (2025), Paper No.110537]*。在此修订版中，我们更正了定理 *1.1* 中 $p = 1$ 情形下的一个错误；该错误由 *Emiel Lorist* 指出。

目录

1 引言 **2**

2 定理 1.1 和 1.3 的证明 7

3 球 Banach 函数空间中与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的不等式 $X(Q)$ 在立方体上 17

3.1 球 Banach 函数空间与外推.17 3.2 球 Banach 函数空间 $X(Q)$ 中与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的不等式.20

4 球 Banach 函数空间中的分数阶 Gagliardo–Nirenberg 不等式 21

5 BBM 公式与球 Banach Sobolev 空间的一种新刻画 27

5.1 球 Banach 函数空间上的 BBM 公式.28 5.2 球 Banach Sobolev 空间的一种新刻画.31

6 Triebel–Lizorkin 指数q 的锐性 36

7 特定函数空间中的应用 38

7.1 Bourgain–Morrey 型空间.38 7.2 混合范数 Lebesgue 空间.40 7.3 变指数 Lebesgue 空间.40 7.4 Lorentz 空间.41

2020数学主题分类. 主要分类号 26D10；次要分类号 46E35、42B25、42B35。关键词. Muckenhoupt 权重、Gagliardo 半范数、Sobolev 半范数、Gagliardo–Nirenberg 插值、Bourgain–Brezis–Mironescu 公式、球 Banach 函数空间。本项目得到国家重点研发计划（项目编号：2020YFA0712900）、国家自然科学基金（项目编号：12431006、12371093 和 124B2004）以及中央高校基本科研业务费专项资金（项目编号：2253200028 和 2233300008）的部分资助。*通讯作者，电子邮箱：dcyang@mail.bnu.edu.cn/2026 年 1 月 15 日/最终版本。

7.5 Orlicz 空间和 Orlicz 切片空间.41 7.6 局部和全局广义Herz空间.7.7 更多函数空间.43 42

1 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，并用$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$表示 Ω 上所有局部可积函数构成的集合。回忆一下，对于任意$p \in [1,\infty)$，齐次索伯列夫空间*homogeneous Sobolev space* $\dot{W}^{1,p}(\Omega)$以及任意$s \in (0,1)$的齐次分数阶索伯列夫空间*homogeneousfractional Sobolev space* $\dot{W}^{s,p}(\Omega)$，分别定义如下：

$$\dot{W}^{1,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : |\nabla f| \in L^p(\Omega) \right\}$$

and

$$\dot{W}^{s,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\Omega)} := \left[\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dy\,dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

其中 ∇f 表示 f 的弱梯度。众所周知，若 Ω 是一个光滑有界区域，则对于任意 $p \in [1,\infty)$ 和 $s \in (0,1)$，$\dot{W}^{1,p}(\Omega) \subset \dot{W}^{s,p}(\Omega)$；也就是说，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)$，$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\Omega)} \lesssim \||\nabla f|\|_{L^p(\Omega)}$，其中隐含的正数常数仅依赖于 n、s、p 和 Ω（例如参见 [29, 命题 2.2] 或 [72, 定理 6.21]）。Bourgain、Brezis 和 Mironescu [10, 定理 1], 建立了这一嵌入的一个改进的定量版本；其一个特例是：对于任意给定的立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 以及任意给定的 $p \in [1,\infty)$，对任意 $s \in (0,1)$ 和 $f \in \dot{W}^{1,p}(Q)$，

$$(1-s)^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_Q \int_Q \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dy\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \lesssim [\ell(Q)]^{1-s} \left[\int_Q |\nabla f(x)|^p\,dx \right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

其中隐含的正数常数仅取决于n 和p；下文同样如此，任意立方体 Q 均具有有限的边长，且其所有边均与坐标轴平行，$l(Q)$表示其边长。[1]不等式（1.1）中的因子 $(1-s)^p$ 是最优的，其极限行为（见 [10, 定理 2 和 3]）对此提供了证明：对于任意给定的$p \in [1,\infty)$以及任意$f \in \dot{W}^{1,p}(Q)$，

$$\lim_{s\to 1^-} (1-s)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\dot{W}^{s,p}(Q)} = C_{(n,p)} \||\nabla f|\|_{L^p(Q)}$$

其中$C_{(n,p)} \in (0,\infty)$仅取决于n 和p，其中$s \to 1^-$ 表示$s \in (0,1)$，而$s \to 1$。这一开创性成果现称为Bourgain–Brezis–Mironescu公式 （简称 BBM公式）。该公式与上述定量不等式（1.1）相结合，推动了广泛的后续发展与应用；关于欧几里得空间中的研究，参见 [7, 11, 25, 30, 31, 32, 64, 82, 101]；关于区域中的研究，参见[33, 92]；关于度量空间中的研究，参见 [44]。

然而，若将 Q 替换为 $\mathbb{R}^n$，不等式（1.1）便不再成立。事实上，通过标准缩放论证可知，对于任意 $s \in (0,1)$ 和 $p \in [1,\infty)$，$\dot{W}^{1,p} \not\subset \dot{W}^{s,p}$（例如参见 [112, (1.7)]）。此处及下文中，除非另有说明，我们均默认取 $\mathbb{R}^n$ 为底空间。因此，立方体的局部性质在不等式（1.1）中起着重要作用。最近，为了在任意区域上得到 BBM 公式，Mohanta [92] 引入了一种新的局部化 Gagliardo半范数，其中包含一个额外的指数 q（参见 [92, (5)]）（为行文方便，我们称之为 Triebel–Lizorkin 指数），并借助该半范数建立了一个适用于任意区域的（1.1）的变体。特别地，将其结果应用于 $\mathbb{R}^n$时，可表述如下（参见 [92, 引理 11 和 12]）：若 $p = q = 1$，或 $p \in (1,\infty)$ 且 $q \in [1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$，那么对于任意$s \in (0,1)$、$r \in (0,\infty)$ 和 $f \in \dot{W}^{1,p}$，

$$(1-s)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|f(x+h)-f(x)|^q}{|h|^{n+sq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \lesssim r^{1-s} \||\nabla f|\|_{L^p}. \tag{1.2}$$

其中隐含的正数常数仅依赖于 n、p 和 q。本文给出了这一不等式在高阶 Sobolev 空间中的一个几乎尖锐的 加权推广，并具有尖锐的A_1-权常数；当 $p \in (1,\infty)$ 时，则具有特定的 A_p-权常数（见定理 1.1 和注记 1.2）。利用该结果，我们进一步得到了 Muckenhoupt 权重的新刻画（见定理 1.3），并在一般函数空间框架下（即球 Banach 函数空间；定义见定义 3.1），建立了立方体上与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的不等式（见定理 1.4 和 3.11）、分数阶 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式（见定理 1.6 和 4.1），以及 BBM 公式（见定理 1.8、5.5 和 5.10）。所有这些结果都具有广泛的适用性（见第 7 节）；此外，通过灵活结合鼓包函数与幂权重，我们以构造性方式证明，这些结果也是相应已知结论的（几乎）尖锐推广（见第 6 节）。

接下来，我们陈述主要结果。对于任意$k \in \mathbb{N}$ 和$h \in \mathbb{R}^n$，任意可测函数f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的k-阶差分 $\Delta_h^k f$ 定义为

$$\Delta_h^k f(\cdot) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(\cdot + jh), \tag{1.3}$$

其中 $\binom{k}{j} := k!\,/\,j!(k-j)!$。令$p \in [1,\infty)$，且令 $\omega \in A_p$（Muckenhoupt A_p-权重；其定义见定义 2.1）。记

$$p_\omega := \inf\{r \in [1,\infty) : \omega \in A_r\} \tag{1.4}$$

并用 $\dot{W}^{k,p}_{,\omega}$表示齐次加权 Sobolev 空间 [，其定义见定义 2.1(iv)]。对于任意p、$q \in [1,\infty)$，令

$$\gamma_{p,q} := \begin{cases} 1 & \text{if } p = 1, \\ \frac{1}{q} & \text{if } p \in (1,\infty). \end{cases} \tag{1.5}$$

于是我们得到下述几乎尖锐的 (1.2) 的加权变体。

定理 1.1。令 $k \in \mathbb{N}$ 和 $p \in [1,\infty)$。

(i) 若 $\omega \in A_1$ 且 $q \in [1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$，则存在一个仅依赖于 n、k、p 和 q 的正数常数 C，使得对于任意 $s \in (0,1)$、$r \in (0,\infty)$ 以及 $f \in \dot{W}^{k,p}_{,\omega}$，

$$(1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le C[\omega]_{A_1}^{\frac{1}{p}} r^{(1-s)k} \left\| \left|\nabla^k f\right| \right\|_{L^p_\omega}, \tag{1.6}$$

其中 $\nabla^k f := \{\partial^\alpha f :\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+,\ |\alpha| = k\}$（$f$ 的高阶弱导数），并且

$$\left|\nabla^k f\right| := \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+,\, |\alpha|=k} \left|\partial^\alpha f\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

此外，A_1-权重常数 $[\omega]_{A_1}$ 中指数 $\frac{1}{p}$ 的取值是尖锐的。

(ii) 若 $p \in (1,\infty)$，$\omega \in A_p$ 中 p_ω 如 (1.4) 所示，且 $q \in [1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p_\omega} - \frac{1}{q}) < k$，则存在一个正数常数 C，使得对于任意 $s \in (0,1)$、$r \in (0,\infty)$ 以及 $f \in \dot{W}^{k,p}_{,\omega}$，

$$(1-s)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le C r^{(1-s)k} \left\| \left|\nabla^k f\right| \right\|_{L^p_\omega}, \tag{1.7}$$

其中，C 具有如下形式：$C^{(n,k,p,q,\beta)}[\omega]^{p(\beta-1)}_{A_\beta}$，其中存在某个 $\beta \in (p_\omega, p)$，以及某个正数常数 $C^{(n,k,p,q,\beta)}$，其仅依赖于 n、k、p、q 和 β。

注记 1.2. (i) 根据 A_p-权重的开性质，其中 $p \in (1,\infty)$（例如参见 [35,推论 7.6(i)]），我们得出定理 1.1(ii) 中 β 的存在性。

(ii) 当 $p = q = 1$ 或 $p \in (1,\infty)$ 时，定理 1.1 在 $\omega \equiv 1$ 和 $k = 1$ 的条件下可化为 (1.2)，而在其他情况下则是新的。

(iii) 在定理 1.1 中，$\gamma_{p,q}$ 以及 $^1{}_q$ 关于 $1-s$ 的指数都是 尖锐的；见命题 2.6。

(iv) 定理 1.1 中 Triebel–Lizorkin 指数 q 的取值范围 几乎是尖锐的；见命题 6.1。

(v) 目前仍不清楚 (1.7) 中常数对 A_p-权重常数的依赖关系是否是尖锐的。

利用定理 1.1，我们进一步得到以下四个应用。

应用（I）：Muckenhoupt 权重的刻画。 与 [76, 124], 中一样，我们发现定理 1.1 中的条件 $\omega \in A_p$ 不仅是充分条件，也是必要条件，这为 Muckenhoupt 权重提供了一种新的刻画。下文中，对于任意的 $p \in [1,\infty)$ 以及定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的任意非负局部可积函数 ω，$\dot{Y}^1_{,\omega}{}^p$ 表示齐次加权 Sobolev 空间 [（其定义见 (2.14)）]。

定理 1.3。 若 ω 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数，且 $p \in [1,\infty)$，则下列陈述等价。

(i) $\omega \in A_p$.

(ii) 存在 $s \in (0,1)$、$q \in [1,\infty)$ 及正数常数 C，使得对于任意 $r \in (0,\infty)$ 和 $f \in \dot{Y}^1_{,\omega}{}^p$,

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{B(\mathbf{0},r)}\frac{|f(x+h)-f(x)|^q}{|h|^{n+sq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le Cr^{(1-s)}\|f\|_{\dot{Y}^{1,p}_{\omega}}. \tag{1.8}$$

应用（II）：与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的不等式。请注意，最近，文献 [37, 推论 2.2]中得到了 (1.1) 的一个优美的加权变体，其中采用了特定的 Muckenhoupt A_1 权重。结合定理 1.1、整数阶 Sobolev 空间的延拓定理以及外推，我们在高阶 Sobolev 空间和球 Banach 函数空间的框架下，得到了这一结果的一个近乎尖锐的变体（见定理 3.11）。回顾一下，球 Banach 函数空间的概念（其定义见定义 3.1）由 Sawano 等人 [108] 引入，旨在统一研究若干重要的不同函数空间，例如 Lebesgue 空间、加权 Lebesgue 空间、Morrey 空间以及第 7 节中的所有函数空间。由于其广泛的普适性，球 Banach 函数空间近年来备受关注，并催生了许多应用；关于函数空间的实变函数理论，请参见 [75, 116, 117, 118, 121] ；关于各种函数空间上的算子有界性，请参见 [58, 61, 111, 114, 115, 123] 。

在下文中，对于任意开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$、任意 $x \in \Omega$ 以及任意 $k \in \mathbb{N}$，令

$$\Omega(x,k) := \{h \in \mathbb{R}^n : \text{for any } i \in \{1,\dots,k\},\ x+ih \in \Omega\}$$

并且，对于任意 $p \in [1,\infty)$ 以及任意定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数 ω，记 $\dot{W}^k_{,\omega}{}^p(\Omega)$ [（分别为）$W^k_{,\omega}{}^p(\Omega)$] Ω 上的齐次 [（分别为非齐次）] 加权 Sobolev 空间（其定义见定义 2.1）。作为定理 3.11 的一个易懂示例，我们现在陈述其应用于加权勒贝格空间时的特例。

定理 1.4. 设 $k \in \mathbb{N}$、$p \in [1,\infty)$，$\omega \in A_p$ 满足 *(1.4)* 中对 p_ω 的条件，且 $q \in [1,\infty)$ 满足 $n(p^{-}{}_{\omega}p - {}^{1}q) < k$。则存在正数常数 C，使得对于任意 $s \in (0,1)$、任意 $\mathbb{R}^n$ 中的立方体 Q，以及任意 $f \in \dot{W}^{k}{}_{,\omega}{}^{p}(Q)$，

$$(1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\{ \int_Q \left[\int_{Q(x,k)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le C[\ell(Q)]^{(1-s)k} \left[\int_Q \left|\nabla^k f(x)\right|^p \omega(x)\, dx \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1.9}$$

其中 $l(Q)$ 表示 Q 的边长，$\gamma_{p,q}$ 与 *(1.5)* 中相同。

注 1.5. 虽然我们未能得到 (1.9) 中权重常数的显式依赖关系，但定理 1.4 仍可推广 [37, 推论 2.2]，其意义在于涵盖了更一般的权重类和高阶导数，并包含 Triebel–Lizorkin 指数 q。事实上，取 $\omega \in A_1$，$k = 1$，且 $q = p$ 时，定理 1.4 可化为 [37, 推论 2.2]，但不包含 [37, 推论 2.2] 中权重常数的显式依赖关系。此外，在定理 1.4 中，关于 $1-s$ 的指数 $\gamma_{p,q}$ 是尖锐的，而 q 的取值范围几乎是尖锐的；分别参见注 3.12 和命题 6.2。

应用（三）：Gagliardo–Nirenberg 插值不等式。 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式（参见 [14, (1)]）在 Sobolev 空间和偏微分方程的研究中发挥着重要作用；例如，参见 [15, 34, 39, 45, 67, 73, 90, 91, 109]。特别地，以下带有最优渐近因子的插值不等式成立：对于任意给定的 $p \in (1,\infty)$，以及任意 $s \in (0,1)$ 和 $f \in W^{1,p}$，

$$s^{\frac{1}{p}}(1-s)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} \lesssim \|f\|_{L^p}^{1-s} \| |\nabla f| \|_{L^p}^{s}, \tag{1.10}$$

其中隐含的正数常数仅依赖于 n 和 p（例如，参见 [119, (17)] 或 [62, 89]）；s^p 的最优性源于著名的 Maz'ya–Shaposhnikova 公式（参见 [88]），与（1.1）类似，$(1-s)^p$ 的最优性则由 $\mathbb{R}^n$ 上的 BBM 公式推出（参见 [12]）。

作为定理 1.1 的应用，我们在球 Banach 函数空间和高阶 Sobolev 空间的框架下，得到 (1.10) 的一个近乎尖锐的变体（见定理 4.1）。作为一个易于理解的例子，我们给出其一个特殊情形，即将该结论应用于加权 Lebesgue 空间。

定理 1.6. 设 $k \in \mathbb{N}$、$p \in [1,\infty)$、$\omega \in A_p$，其中 p_ω 如(1.4)所示，且 $q \in [1,\infty)$ 满足 $n(p^{-}{}_{\omega}p - {}^{1}q) < k$。

(i) 若 $q \le p\, p_\omega$，则存在一个正数常数 C，使得对任意 $s \in (0,1)$ 及 $f \in W^{k}{}_{,\omega}{}^{p}$，

$$s^{\frac{1}{q}}(1-s)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le C \|f\|_{L^p_\omega}^{1-s} \left\| \left|\nabla^k f\right| \right\|_{L^p_\omega}^{s}. \tag{1.11}$$

(ii) 若 $q > p\, p_\omega$ 且 $\theta \in (0, 1 - n k [p_\omega p - {}^{1}q])$，则存在一个正数常数 C，使得对任意 $s \in (\max\{1 - \frac{\theta}{2}, 1 - n k q\}, 1)$ 及 $f \in W^{k}{}_{,\omega}{}^{p}$。

$$(1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le C \|f\|_{L^p_\omega}^{1-s} \left\| \left|\nabla^k f\right| \right\|_{L^p_\omega}^{s}, \tag{1.12}$$

其中 $\gamma_{p,q}$ 与 (1.5) 中的相同。

注 1.7. 设所有符号均与定理 1.6 中的相同。那么，定理 1.6 中 Triebel–Lizorkin 指数q 的取值范围$n(p\ {}^{\omega}p-{}^{1}q)\ <k$是锐的；参见命题 6.3。此外，注意到如前所述，<style id='s'>$\frac{1}{q}$ 源于 Maz'ya–Shaposhnikōva 公式。由于加权 Maz'ya–Shaposhnikova 公式中$q\ \leq p\,p_{\omega}$ 是锐的（参见 [99, 注 2.13(iii) 和定理 4.1]），而定理 1.6(ii) 要求$q\ >p\,p_{\omega}$，因此当$s\in\in(0,1)$ 且$s\ \to 0$ 时，我们无法在 (1.12) 中得到渐近因子$s^{\frac{1}{q}}$。因此，定理 1.6(ii) 中$q\ >p\,p_{\omega}$的取值范围也是锐的。

不同于局部化不等式 (1.6)，(1.11) 或 (1.12) 左端半范数的内层积分区域为 $\mathbb{R}^n$。因此，定理 1.6 的证明需要谨慎处理 Gagliardo 半范数的非局部部分。对于定理 1.6 中的次临界情形 $q\ \leq p\,p_{\omega}$，我们通过利用球平均算子在加权 Lebesgue 空间上的有界性（见引理 4.3），使用 Lebesgue 范数控制非局部部分。然而，这种方法不适用于超临界情形 $q>p\,p_{\omega}$；对于该情形，我们利用高阶 Poincar´e 不等式（见引理 4.7）以及平移二进网格的一些精妙几何性质（见引理 4.6），通过涉及导数的插值项（见命题 4.4），得到相应非局部部分的一种新颖控制。

应用（IV）：Bourgain–Brezis–Mironescu 公式。 定理 1.1 的最后一个应用是建立一个尖锐的高阶 BBM 公式，以及对延拓域上的球 Banach Sobolev 空间的相关刻画（见定理 5.5 和 5.10）。这些结果改进了已知的相应结论（详情见注 5.6 和 5.10）。作为一个易于理解的例子，我们陈述将这些结论应用于加权 Lebesgue 空间时的特殊情形。下文中，对于任意多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ 以及任意$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，我们用$x^{\alpha}:=x_1{}^{\alpha_1}\cdots x_n{}^{\alpha_n}$表示次数为 $|\alpha|:=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ 的单项式。

定理 1.8。 设 $k\in\mathbb{N}$, $\omega\in A_p$，其中 p_{ω} 如(1.4)所示，$q\in[1,\infty)$ *satisfy that* $q=p$ $=1$ 或$n(p\ {}^{\omega}p-{}^{1}q)<k$ 当 $p\in(1,\infty)$时成立，并设Ω 为一个 $W^{k}{}_{,\omega}{}^{p}$-延拓域（见定义 *5.3*）。那么以下结论成立。

(i) *For any* $f\in W^{k,p}_{\omega}(\Omega)$,

$$\lim_{s\to1^-}(1-s)^{\frac{1}{q}}\left\{\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega(x,k)}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$=\frac{1}{(kq)^{\frac{1}{q}}}\left\{\int_{\Omega}\left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^{\alpha}f(x)\xi^{\alpha}\right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\right]^{\frac{1}{q}}\omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}},$$

此处及下文中，$\mathcal{H}^{n-1}$ 表示$(n-1)$维 *Hausdorff* 测度。

(ii) 若 $p\in(1,\infty)$，则f 属于 $W^{k}{}_{,\omega}{}^{p}(\Omega)$ 当且仅当 f 属于 $W^{k-1}{}_{,\omega}{}^{p}(\Omega)$ *[*，其中 $W^{0}{}_{,\omega}{}^{p}(\Omega):=L^p_{\omega}(\Omega)$*]* 且

$$I(f):=\liminf_{s\to1^-}(1-s)^{\frac{1}{q}}\left\{\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega(x,k)}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty;$$

此外，对任意f 属于 $W^{k}{}_{,\omega}{}^{p}(\Omega)$，$\|f\|_{W^{k}{}_{,\omega}{}^{p}(\Omega)}\sim\|f\|_{W^{k-1}{}_{,\omega}{}^{p}(\Omega)}+I(f)$，其中正的等价常数与$f$ 无关。

注 1.9. (i) 在特殊情形下，若$k=1,\omega\equiv1$，且 Ω 是$\mathbb{R}^n$中的光滑有界区域，则当$q=p$ 时，定理 1.8 与 [10]中的经典 BBM 公式一致。此外，当$k=1,\omega\equiv1$，且 $\Omega=\mathbb{R}^n$时，定理 1.8(i) 是 [92,定理 1] 的一个特例。

(ii) 定理 1.8 中 Triebel–Lizorkin 指数q 的取值范围是尖锐的；见命题 6.3。

本文其余部分的安排如下。

在第 2 节中，我们证明定理 1.1 和定理 1.3。第 3 节致力于在球 Banach 函数空间框架下证明一个与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的不等式。第 4 节的主要目标是在球 Banach 函数空间框架下得到一个分数阶 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式。在第 5 节中，我们在球 Banach 函数空间上建立 BBM 公式，并给出球 Banach Sobolev 空间的相关刻画。在第 6 节中，我们证明本文主要定理中的 Triebel–Lizorkin 指数 q 的尖锐性。最后，在第 7 节中，我们将这些主要结果（定理 3.11、4.1、5.5 和 5.10）应用于球 Banach 函数空间的若干具体例子。

我们以说明一些符号约定来结束本引言。我们始终令 $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$。若 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，我们用 $\mathbf{1}_E$ 表示其示性函数，并用 $E^{\complement}$ 表示集合 $\mathbb{R}^n \setminus E$。对于任意集合 E、F $\subset \mathbb{R}^n$，令 $E-F := \{x-y : x \in E \text{ 且 } y \in F\}$。此外，我们用 0 表示 $\mathbb{R}^n$的原点，并用 $\mathbb{S}^{n-1}$ 表示 $\mathbb{R}^n$的单位球面。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 及 $r \in (0,\infty)$，令 $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$。对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的任意立方体 Q，λQ 表示一个与 Q 中心相同、边长为 Q 的 λ倍的立方体。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集。对于 Ω 上的任意可测函数 f，其支集 supp (f) 定义为 $\operatorname{supp}(f) := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$。我们用 $C_c^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上所有具有紧支集的无穷次可微函数构成的空间。对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $\mathbb{R}^n$上由可测函数构成的任意 Banach 空间 X，若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ 且 $\nabla^k f$ 存在，则定义 $\|\nabla^k f\|_X := \||\nabla^k f|\|_X$。对于任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ 以及任意有界可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$，令 $f(E) := \int_E f(x)\,dx$，并令 $\fint_E f(x)\,dx := \frac{1}{|E|}\int_E f(x)\,dx$。此外，我们用 C 表示一个与所涉及的主要参数无关、但可在不同步骤中取不同值的正数常数；用 $C_{(\alpha,\dots)}$ 表示依赖于所示参数 $\alpha,\dots$ 的正数常数。符号 $f \lesssim g$ 表示 $f \le Cg$；若 $f \lesssim g \lesssim f$，则记作 $f \sim g$。若 $f \le Cg$ 且 $g = h$ 或 $g \le h$，则分别记作 $f \lesssim g = h$ 或 $f \lesssim g \le h$。符号 $s \to 0^+$（分别为 $s \to 1^-$）表示存在常数 $c_0 \in (0,1)$，使得 $s \in (0,c_0)$ 且 $s \to 0$ [；以及 $s \in (1-c_0,1)$ 且 $s \to 1$]。最后，在所有证明中，我们始终保留原定理（或相关陈述）中引入的符号。

注 1.10。我们指出，在 [Adv. Math. 481 (2025), Paper No.110537], 的定理 1.1(i) 中，由于证明存在错误，$1-s$ 上的指数被表述为$-\frac{1}{q}$，而不是 $\gamma_{p,q}$。在这一修订版本中，我们澄清 $\frac{1}{q}$ 应为 $\gamma_{p,q}$，这确实是尖锐的；参见本版本的定理 1.1 和注 1.2(iii)。因此，我们还分别在本版本的定理 1.4、1.6 和 1.8 中，给出了 [Adv. Math. 481 (2025), Paper No. 110537], 的定理 1.4、1.6 和 1.8 的修正版。

2 定理 1.1 和 1.3 的证明

本节旨在证明定理 1.1 和定理 1.3。

首先，我们回顾如下A_p-权重和加权函数空间的概念（例如，参见 [40,第 7 节1]）。

定义 2.1. 设$k \in \mathbb{N}$、$p \in [1,\infty)$，ω 是 $\mathbb{R}^n$上的非负局部可积函数，且 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集。

(i) 若$p \in (1,\infty)$，则称函数 ω 为A_p-权重，

$$[\omega]_{A_p} := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n}\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right]\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q [\omega(x)]^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right\}^{p-1} < \infty$$

并且，当$p = 1$时，

$$[\omega]_{A_1} := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n}\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right]\left\|\omega^{-1}\right\|_{L^\infty(Q)} < \infty,$$

其中，上确界取遍所有$Q \subset \mathbb{R}^n$立方体。

(ii) 加权勒贝格空间 $L^p_\omega(\Omega)$ 定义为 Ω 上所有满足 $\|f\|_{L^p_\omega(\Omega)} := [\int_\Omega |f(x)|^p \omega(x)\,dx]^{\frac{1}{p}} < \infty$ 的可测函数的集合。

(iii) 非齐次加权索伯列夫空间 $W^{k,p}_\omega(\Omega)$ 定义为所有满足 $f \in L^p_\omega(\Omega)$ 的函数的集合，其中对于任意满足 $|\alpha| \le k$ 的多重指标 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$，$f$ 的第 α 阶弱偏导数 $\partial^\alpha f$ 存在，且 $\partial^\alpha f \in L^p_\omega(\Omega)$。此外，$W^{k,p}_\omega(\Omega)$ 的范数 $\|\cdot\|_{W^{k,p}_\omega(\Omega)}$ 定义为：对于任意 $f \in W^{k,p}_\omega(\Omega)$，$\|f\|_{W^{k,p}_\omega(\Omega)} := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+,\,|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p_\omega(\Omega)}$。

(iv) 齐次加权 Sobolev 空间 $\dot{W}^{k,p}_\omega(\Omega)$ 定义为所有满足以下条件的 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的集合：对于任意满足 $|\alpha| = k$ 的多重指标 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$，$f$ 的 α-阶弱偏导数 $\partial^\alpha f$ 存在，且 $\partial^\alpha f \in L^p_\omega(\Omega)$。此外，$\dot{W}^{k,p}_\omega(\Omega)$ 的半范数 $\|\cdot\|_{\dot{W}^{k,p}_\omega(\Omega)}$ 定义如下：对于任意 $f \in \dot{W}^{k,p}_\omega(\Omega)$，令 $\|f\|_{\dot{W}^{k,p}_\omega(\Omega)} := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+,\,|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p_\omega(\Omega)}$。

下文中，对于任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$，f的 ***Hardy–Littlewood*** 极大函数 $\mathcal{M}(f)$ 定义如下：对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$，令 $\mathcal{M}(f)(x) := \sup_{B\ni x} \fint_B |f(y)|\,dy$，其中上确界取遍所有包含 x 的球 $B \subset \mathbb{R}^n$。我们用 $\|\mathcal{M}\|_{X\to Y}$ 表示从一个 Banach 空间 X到另一个 Banach 空间 Y的 $\mathcal{M}$ 的算子范数。对于 Muckenhoupt A_p-权重，我们有以下基本性质，这些性质在本文中经常用到；例如参见 [35, (7.3) 和 (7.5)], [40, 命题7.1.5 和定理 7.1.9], [18,引理 3.1], 以及 [27, 定理 2.7.4]。

引理 2.2。 若 $p \in [1,\infty)$ 且 $\omega \in A_p$，则以下结论成立。

(i) 对于任意满足 $Q \subset S$ 的立方体 Q，$S \subset \mathbb{R}^n$，$\omega(S) \le [\omega]_{A_p}(|S|/|Q|)^p \omega(Q)$。

(ii) $\omega \in A_q$ 对于任意 $q \in [p,\infty)$ 并且此外，$[\omega]_{A_q} \le [\omega]_{A_p}$。

(iii) 若 $p \in (1,\infty)$，则 $\mathcal{M}$ 在 L^p_ω 上有界，并且此外，存在仅依赖于 n 和 p 的正数常数 C，使得

$$\|\mathcal{M}\|_{L^p_\omega\to L^p_\omega} \le C[\omega]^{\frac{1}{p-1}}_{A_p}; \tag{2.1}$$

furthermore, if $\omega \in A_1$, *then* $[\omega]^{\frac{1}{p-1}}_{A_p}$ *in* (2.1) *can be replaced by* $[\omega]^{\frac{1}{p}}_{A_1}$.

(iv) 若 υ 是 $\mathbb{R}^n$上的非负局部可积函数，则 $\upsilon \in A_p$ 当且仅当

$$[\upsilon]^*_{A_p} := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \sup_{\|f\mathbf{1}_Q\|_{L^p_\upsilon}\in(0,\infty)} \frac{[\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx]^p}{\frac{1}{\upsilon(Q)}\int_Q |f(x)|^p \upsilon(x)\,dx} < \infty,$$

其中，第一个上确界取遍所有立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$，第二个上确界取遍所有满足 $\|f\mathbf{1}_Q\|_{L^p_\upsilon} \in (0,\infty)$。 的 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$。此外，对于任意 $\upsilon \in A_p$，$[\upsilon]^*_{A_p} = [\upsilon]_{A_p}$。

我们首先证明定理 1.1 中p 在A_1-权重常数上的指数是最佳的。

命题 2.3。 设 $k \in \mathbb{N}$，$s \in (0,\ 1)$，且 p，$q \in [1,\infty)$。若存在正数常数 C，使得对任意 $r \in (0,\infty)$、$\omega \in A_1$, 及 $f \in \dot{W}^{k,\ p}_{\omega}$，不等式

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta^k_h f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le C[\omega]^\beta_{A_1} r^{(1-s)k}\left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega} \tag{2.2}$$

在某个 $\beta \in \mathbb{R}$ 下成立，则 $\beta \ge {}^1\!/_p$。

证明。给定任意 $\delta \in (0, n]$, , 考虑权重 $\omega(x) := |x|^{\delta-n}$, 其中任意 $x \in \mathbb{R}^n$。然后, 根据 [40,例 7.1.7], , 我们得到 $\omega \in A_1$, 并且 $[\omega]_{A_1} \sim \delta^{-1}$ 和 $\omega(B(0,1)) \sim \delta^{-1}$, 其正的等价常数与 δ 无关（另见 [100, p. 6118]）。选取一个满足 $\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},4k+4)\setminus B(\mathbf{0},4k)} \le f \le \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},4k-1)^{\complement}}$ 的函数 $f \in C_c^\infty$, 以及一个球 $B_0 \subset B(0, 4k + 3) \setminus B(0, 4k)$, 其半径为 1。注意, 对于任意 $i \in \{0, 。。, k - 1\}$, $x \in B(0, 1)$, 以及 $y \in B0, |(k-i)x+iy|k \le |x|+(k-1)|y|k < 4k - 1$, 这进一步意味着

$$\Delta^k_{\frac{y-x}{k}} f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f\left(\frac{(k-i)x + iy}{k}\right) = f(y) = 1. \tag{2.3}$$

由此, 注意到对于任意 $x \in B(\mathbf{0},1)$ 和 $y \in B0, |x - y| < 4k + 4$, 经变量代换可得

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0},4k+4)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \gtrsim \left\{ \int_{B(\mathbf{0},1)} \left[\int_{B_0} \frac{|\Delta^k_{\frac{y-x}{k}} f(x)|^q}{|y-x|^{n+skq}}\, dy \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \gtrsim \omega(B(\mathbf{0},1))^{\frac{1}{p}} \sim \delta^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

由此, 结合 $r := 4k + 4$ 时的 (2.2) 以及 $[\omega]_{A_1} \sim \delta^{-1}$, 我们得到 $\delta^{-\frac{1}{p}} \lesssim \delta^{-\beta}$, 其中隐含的正数常数与 δ 无关。这再结合 $\delta \in (0,n]$, 的任意性, 进一步推出 $\beta \ge \frac{1}{p}$, 从而完成命题 2.3 的证明。□

为了证明定理 1.1, 我们还需要以下众所周知的 (q,p)-Poincaré 不等式（例如参见 [13, 推论 9.14] 或 [92,引理 4]）。

引理 2.4. 若 $k \in \mathbb{N}$ 和 p, $q \in [1, \infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$, 则存在一个正数常数 $C_{(n,k,p,q)}$, 它仅依赖于 n, k, p 和 q, 使得对于任意半径为 $r \in (0, \infty)$ 的球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 以及任意 $f \in C^\infty$,

$$\left[\fint_B |f(y)|^q\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \le C_{(n,k,p,q)} \left\{ r^k \left[\fint_B \left|\nabla^k f(y)\right|^p\, dy \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\fint_B |f(y)|^p\, dy \right]^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

利用这个不等式, 我们首先建立以下估计。

引理 2.5. 若 $k \in \mathbb{N}$ 和 p, $q \in [1, \infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$, 则存在一个正数常数 $C_{(n,k,p,q)}$, 它仅依赖于 n, k, p 和 q, 使得对于任意 $f \in C^\infty$、$r \in (0, \infty)$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^q\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \le C_{(n,k,p,q)} r^k \left[\int_0^{k+1} \fint_{B(x,tr)} \left|\nabla^k f(y)\right|^p\, dy\, dt \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}$$

证明。 设 $f \in C^\infty$、$r \in (0, \infty)$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$。对于任意 $h \in \mathbb{R}^n$, 定义 $F_x(h) := \Delta_h^k f(x)$。由 (1.3) 可得, 对于任意 $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\nabla^k F_x(h)\right| = \left[\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| = k} \left| \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} j^k \binom{k}{j} \partial^\alpha f(x + jh) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \lesssim \sum_{j=1}^{k} \left|\nabla^k f(x + jh)\right|.$$

由此, 假设 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$, 并应用引理 2.4（其中 $f := F_x$）, 可得

$$\left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^q\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \lesssim r^k \left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\nabla^k F_x(h)\right|^p\, dh \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^p\, dh \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim r^k \sum_{j=1}^{k} \left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\nabla^k f(x+jh)\right|^p \, dh \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^p \, dh \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5}$$

通过变量代换，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\nabla^k f(x+jh)\right|^p \, dh \right]^{\frac{1}{p}} &= \sum_{j=1}^{k} \left[\fint_{B(x,jr)} \left|\nabla^k f(y)\right|^p \, dy \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim \left[\fint_{B(x,kr)} \left|\nabla^k f(y)\right|^p \, dy \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \left[\int_0^{k+1} \fint_{B(x,tr)} \left|\nabla^k f(y)\right|^p \, dy \, dt \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

此外，应用假设$f \in C^\infty$和 [40, 命题 1.4.5], ，我们得出，对于任意$h \in \mathbb{R}^n$,

$$\Delta_h^k f(x) = \int_{[0,1]^k} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha|=k} \partial^\alpha f(x + [s_1 + \cdots + s_k]h) h^\alpha \, ds_1 \cdots ds_k,$$

结合 H¨older 不等式、Tonelli 定理和变量代换，还可进一步推出

$$\begin{aligned}\left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^p \, dh \right]^{\frac{1}{p}} &\lesssim r^k \left[\int_{[0,1]^k} \fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\nabla^k f(x + [s_1 + \cdots + s_k]h)\right|^p \, dh \, ds_1 \cdots ds_k \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\le r^k \left[\int_{[0,1]^{k-1}} \int_0^k \fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\nabla^k f(x+th)\right|^p \, dh \, dt \, ds_1 \cdots ds_{k-1} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= r^k \left[\int_{[0,1]^{k-1}} \int_0^k \fint_{B(x,tr)} \left|\nabla^k f(y)\right|^p \, dy \, dt \, ds_1 \cdots ds_{k-1} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\le r^k \left[\int_0^{k+1} \fint_{B(x,tr)} \left|\nabla^k f(y)\right|^p \, dy \, dt \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

结合这些结果、(2.5) 和 (2.6)，我们得到 (2.4)，从而完成引理 2.5 的证明。□

现在我们来证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。我们先证明 (i)。设 $\omega \in A_1, s \in (0,1)$，且 $r \in (0,\infty)$。现在证明，对于任意$f \in C^\infty \cap \dot{W}^{k}_{\cdot,\omega}{}^{p}$，(1.6) 成立。为此，固定$f \in C^\infty \cap \dot{W}^{k}_{\cdot,\omega}{}^{p}$。注意，对于任意满足$0 < |h| < r$的$h \in \mathbb{R}^n$，

$$\int_{|h|}^{r} \frac{dt}{t^{n+skq+1}} = \frac{1}{n+skq} \left(\frac{1}{|h|^{n+skq}} - \frac{1}{r^{n+skq}} \right),$$

这进一步意味着

$$\frac{1}{|h|^{n+skq}} = (n+skq) \int_{|h|}^{1} \frac{dt}{t^{n+skq+1}} + \frac{1}{r^{n+skq}}.$$

由此，结合假设 $s \in (0,1)$ 和 Tonelli 定理，我们推得，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}&\left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}} \, dh \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \int_{|h|}^{r} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{t^{n+skq+1}} \, dt \, dh \right]^{\frac{1}{q}} + r^{-sk} \left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^q \, dh \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$= \left[\int_0^r t^{-skq-1} \fint_{B(\mathbf{0},t)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^q \, dh\, dt\right]^{\frac{1}{q}} + r^{-sk}\left[\fint_{B(\mathbf{0},r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^q dh\right]^{\frac{1}{q}}; \tag{2.7}$$

注意到

$$\left[\int_0^r t^{-skq-1} \fint_{B(\mathbf{0},t)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^q \, dh\, dt\right]^{\frac{1}{q}} \lesssim r^{-sk}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu skq} \fint_{B(\mathbf{0},2^{-\nu}r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^q \, dh\right]^{\frac{1}{q}}$$

因此，利用 (2.7)，我们得到，对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$\left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh\right]^{\frac{1}{q}} \lesssim r^{-sk}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu skq} \fint_{B(\mathbf{0},2^{-\nu}r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^q \, dh\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{2.8}$$

接下来，我们考虑 p 的以下两种情形。

情形 *1*：$p = 1$。在此情形下，$\gamma_{p,\,q} = 1$。由 (2.8) 可知，对任意数列 $\{a_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ 以及任意 $\mu \in (0,1]$，

$$\left(\sum_{\ell\in\mathbb{N}} |a_\ell|\right)^{\mu} \le \sum_{\ell\in\mathbb{N}} |a_\ell|^{\mu}, \tag{2.9}$$

结合 $p := 1$ 的引理 2.5、Tonelli 定理和定义 2.1(i)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh\right]^{\frac{1}{q}} \omega(x)\, dx\\
&\lesssim r^{-sk}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu sk}\left[\fint_{B(\mathbf{0},2^{-\nu}r)} \left|\Delta_h^k f(x)\right|^q \, dh\right]^{\frac{1}{q}} \omega(x)\, dx\\
&\lesssim r^{(1-s)k}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(s-1)k}\int_0^{k+1} \fint_{B(x,2^{-\nu}tr)} \left|\nabla^k f(y)\right| \, dy\, dt\omega(x)\, dx\\
&= r^{(1-s)k}\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(s-1)k}\int_0^{k+1}\int_{\mathbb{R}^n} \fint_{B(y,2^{-\nu}tr)} \omega(x)\, dx \left|\nabla^k f(y)\right| \, dy\, dt\\
&\le r^{(1-s)k}[\omega]_{A_1}\left\|\nabla^k f\right\|_{L^1_\omega}\frac{k+1}{1-2^{(s-1)k}}.
\end{aligned}$$

结合 $1 - 2^{(s-1)k} \sim 1 - s$ 对任意 $s \in (0,1)$ 成立这一事实，可知 (1.6) 在此情形下成立。

情形 *2*：$p \in (1,\infty)$。在此情形下，$\gamma_{p,\,q} = {}^1\!/_q$。取满足条件的 $\beta \in (1,p)$，使得 $n({}^\beta\!/_p - {}^1\!/_q) < k$。由 (2.8)、将 p 替换为 p/β 的引理 2.5、Hardy–Littlewood 极大函数的定义，以及对任意 $s \in (0,1)$ 再次成立的 $1 - 2^{(s-1)k} \sim 1 - s$，我们推得，对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned}
\left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh\right]^{\frac{1}{q}} &\lesssim r^{(1-s)k}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu skq}\left[\int_0^{k+1} \fint_{B(x,tr)} \left|\nabla^k f(y)\right|^{\frac{p}{\beta}} \, dy\, dt\right]^{\frac{\beta q}{p}}\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\le r^{(1-s)k}(k+1)^{\frac{\beta}{p}}\left[\mathcal{M}\left(\left|\nabla^k f\right|^{\frac{p}{\beta}}\right)(x)\right]^{\frac{\beta}{p}}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(s-1)kq}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&\sim \frac{r^{(1-s)k}}{(1-s)^{\frac{1}{q}}}\left[\mathcal{M}\left(\left|\nabla^k f\right|^{\frac{p}{\beta}}\right)(x)\right]^{\frac{\beta}{p}}.
\end{aligned}$$

对上述不等式最左端和最右端取 L^p_ω 范数，并应用引理 2.2(iii) 和 $\beta \in (1, p)$，进一步得到 (1.6)。由此完成证明：对于任意 $f \in C^\infty \cap \dot{W}^{k,p}_\omega$，(1.6) 均成立。

接下来，我们证明 (1.6) 对任意 $f \in \dot{W}^{k,p}_\omega$ 也成立。为此，设 $f \in \dot{W}^{k,p}_\omega$，并取满足 $\operatorname{supp}(\eta) \subset B(0,1)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,dx = 1$ 的 $\eta \in C^\infty_c$。对任意 $j \in \mathbb{N}$，令 $\eta_j(\cdot) := j^n \eta(j\cdot)$，并令 $f_j := \eta_j * f$。于是，由 [113, 定理 2.1.4] 和 [36, 定理 4.1(iv)]，可得 $\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{\dot{W}^{k,p}_\omega} = 0$，且对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$。应用这些结论、法图引理以及对 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的 (1.6)，我们得出：对任意 $s \in (0,1)$ 和 $r \in (0,\infty)$，

$$
\begin{aligned}
&(1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \le \liminf_{j\to\infty} (1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta_h^k f_j(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \lesssim \liminf_{j\to\infty} [\omega]_{A_1}^{\frac{1}{p}} r^{(1-s)k} \left\| \nabla^k f_j \right\|_{L^p_\omega} = [\omega]_{A_1}^{\frac{1}{p}} r^{(1-s)k} \left\| \nabla^k f \right\|_{L^p_\omega},
\end{aligned}
$$

这意味着对于任意 $f \in \dot{W}^{k,p}_\omega$，(1.6) 也成立。因此，我们得到 (1.6)，从而完成证明 (i)。

最后，设 $p \in (1,\infty)$、$\omega \in A_p$，且 $\beta \in (p_\omega, p)$ 满足 $n(\frac{\beta}{p} - \frac{1}{q}) < k$。则 $\omega \in A_\beta$。因此，根据情形 2 的证明和引理 2.2(iii)，我们得出 (1.7)。至此，(ii) 的证明完成，从而定理 1.1 得证。□

此外，以下命题表明，在定理 1.1 中，关于 $(1-s)$ 的因子是尖锐的。

命题 2.6. 设 $p, q \in [1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$，且 $\gamma \in (0,\infty)$。若存在正数常数 C，使得对于任意 $s \in (0,1)$ 以及 $f \in \dot{W}^{1,p}$，

$$
(1-s)^{\gamma} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{|h|\le 1} \frac{|f(x+h) - f(x)|^q}{|h|^{n+sq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le C \|\nabla f\|_{L^p}, \tag{2.10}
$$

则 $\gamma \ge \gamma_{p,\,q}$。

证明。我们考虑 p 和 n 的以下三种情形。

情形 1：$p = n = 1$。在此情形下，令 $m \in \mathbb{N}$ 为一个稍后指定的大整数。对于任意 $t \in \mathbb{R}$，定义

$$
\eta_m(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \le 0, \\ t & \text{if } 0 < t < 2^{-m}, \\ 2^{-m} & \text{if } 2^{-m} \le t \le 2 - 2^{-m}, \\ -t + 2 & \text{if } 2 - 2^{-m} < t < 2, \\ 0 & \text{if } t \ge 2. \end{cases}
$$

于是 $\|\eta_m'\|_{L^1(\mathbb{R})} \sim 2^{-m}$ 且 $\|\eta_m\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim 2^{-m}$。令 $f_m := \eta_m$。注意，对于任意固定的 $j \in \{0,\dots,m\}$，以及任意 $x \in (2^{-j}, 2^{-j+1})$ 和 $h \in (2^{-j+2}, 2^{-j+3})$，$x - h < 0$ 且 $2^{-m} < x \le 1$，这进一步意味着 $f_m(x-h) = 0$ 且 $f_m(x) = 2^{-m}$。由此并通过变量代换可得，对于任意 $s \in (0,1)$，

$$
\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{-1}^{1} \frac{|f_m(x+h) - f_m(x)|^q}{|h|^{1+sq}}\,dh \right]^{\frac{1}{q}} dx
$$

$$\geq \sum_{j=3}^{m} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \left[\int_{2^{-j+2}}^{2^{-j+3}} \frac{|f_m(x) - f_m(x-h)|^q}{h^{1+sq}}\, dh \right]^{\frac{1}{q}} dx$$

$$= 2^{-m} \sum_{j=3}^{m} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \left(\int_{2^{-j+2}}^{2^{-j+3}} \frac{1}{h^{1+sq}}\, dh \right)^{\frac{1}{q}} dx$$

$$\sim 2^{-m} \sum_{j=3}^{m} 2^{j(s-1)} = 2^{-m} \frac{2^{3(s-1)}[1 - 2^{-(m-2)(1-s)}]}{1 - 2^{s-1}}. \tag{2.11}$$

对于任意 $s \in (0,1)$，取满足 $(m-2)(1-s) \geq 1$ 的 m。于是有

$$\frac{2^{3(s-1)}[1 - 2^{-(m-2)(1-s)}]}{1 - 2^{s-1}} \gtrsim \frac{1}{1-s}.$$

结合这一点、(2.11)、(2.10) 和 $\|f_m'\|_{L^1} \sim 2^{-m}$，可得对于任意 $s \in (0,1)$，$(1-s)^{\gamma-1} \lesssim 1$，这进一步意味着$\gamma \geq 1 = \gamma_{p,q}$。

情形 *2*：$p = 1$ 且 $n \geq 2$。在此情形下，令 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ 为一个非负光滑函数，使得

$$\operatorname{supp}(\phi) \subset \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| \leq 1\} \quad \text{and} \quad \inf_{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| \leq \frac{1}{2}} \phi(y) > 0.$$

对于任意给定的 $s \in (0,1)$，我们选取与情形 1 中相同的 $m \in \mathbb{N}$，即 $(m-2)(1-s) \geq 1$。对于任意 $x := (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$，定义 $f_m(x) := \eta_m(x_1)\phi(x')$。因此，

$$\begin{aligned} \|\nabla f_m\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\partial_{x_1} f_m\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_{x'} f_m\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|\eta_m'\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\eta_m\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\nabla_{x'} \phi\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim 2^{-m}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

与情形 1 类似，对于任意固定的 $j \in \{3, \ldots, m\}$ 以及任意 $x \in E_j := \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : x_1 \in (2^{-j}, 2^{-j+1}),\ |x'| < \frac{1}{2}\}$ 且 $h = (h_1, h') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 满足 $h_1 \in (2^{-j+2}, 2^{-j+3})$ 以及 $|h'| \leq h_1$，，成立 $\eta_m(x_1) = 2^{-m}$ 和 $\eta_m(x_1 - h_1) = 0$，这意味着

$$|f(x) - f(x-h)| = |\eta_m(x_1)\phi(x') - \eta_m(x_1 - h_1)\phi(x' - h')| = \eta_m(x_1)\phi(x') \gtrsim 2^{-m}.$$

由此以及 m 的选取，我们进一步得到

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{|h| \leq 1} \frac{|f(x) - f(x-h)|^q}{|h|^{n+sq}}\, dh \right]^{\frac{1}{q}} dx \\ &\geq \sum_{j=3}^{m} \int_{E_j} \left[\int_{2^{-j+2}}^{2^{-j+3}} \int_{|h'| \leq h_1} \frac{|f(x) - f(x-h)|^q}{|h|^{n+sq}}\, dh'\, dh_1 \right]^{\frac{1}{q}} dx \\ &\gtrsim 2^{-m} \sum_{j=3}^{m} \int_{E_j} \left(\int_{2^{-j+2}}^{2^{-j+3}} \int_{|h'| \leq h_1} \frac{1}{|h|^{n+sq}}\, dh'\, dh_1 \right)^{\frac{1}{q}} dx \sim 2^{-m} \sum_{j=3}^{m} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \left(\int_{2^{-j+2}}^{2^{-j+3}} \frac{1}{h_1^{1+sq}} dh_1 \right)^{\frac{1}{q}} dx_1 \\ &\sim 2^{-m} \frac{2^{3(s-1)}[1 - 2^{-(m-2)(1-s)}]}{1 - 2^{s-1}} \gtrsim \frac{2^{-m}}{1-s}. \end{aligned}$$

因此，由此、(2.12) 和 (2.10)，我们推得对于任意 $s \in (0,1)$，$(1-s)^{\gamma-1} \lesssim 1$，进而可得 $\gamma \geq 1 = \gamma_{p,q}$。

情形 *3*：$p \in (1, \infty)$。在这种情况下，$\gamma_{p,q} = \frac{1}{q}$ 和 $C_c^\infty \subset \dot{W}^{1,p}$（例如参见 [43, 定理4]）。选取 $f \in C_c^\infty$ 使得 $\nabla f \neq 0$。根据 [92, 定理 14],，可知存在一个正数常数 C 使得

$$\lim_{s \to 1^-} (1-s)^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|h| \leq 1} \frac{|f(x+h) - f(x)|^q}{|h|^{n+sq}}\, dh \right)^{\frac{p}{q}} dx \right]^{\frac{1}{p}} = C \|\nabla f\|_{L^p}.$$

因此，存在 $s_f \in (0,1)$，使得对于任意 $s \in (s_f,1)$，

$$(1-s)^{\frac{1}{q}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{|h|\le 1}\frac{|f(x+h)-f(x)|^q}{|h|^{n+sq}}\,dh\right)^{\frac{p}{q}}dx\right]^{\frac{1}{p}} \ge \frac{C}{2}\|\nabla f\|_{L^p}.$$

结合这一点与 (2.10)，我们得出，对于任意 $s \in (s_f,1)$，$(1-s)^{\gamma-\frac{1}{q}} \lesssim 1$，这进一步推出 $\gamma \ge \frac{1}{q} = \gamma_{p,q}$。至此，命题 2.6 的证明完成。□

现在，我们致力于证明定理 1.3。先回顾一些相关概念。令 $\mathcal{S}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有施瓦茨函数的集合，令 $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ 表示所有模多项式的缓增分布构成的集合。回忆一下，对于任意 $f \in \mathcal{S}$，其傅里叶变换 $\mathcal{F}f$ 定义为：对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$\mathcal{F}f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi$；其逆傅里叶变换 $\mathcal{F}^{-1}f$ 定义为 $\mathcal{F}^{-1}f(x) := \mathcal{F}f(-x)$，其中任意 $x \in \mathbb{R}^n$。这些定义可自然地扩展到 $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$。于是，对于任意 $\beta \in \mathbb{R}$ 以及 $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$，$f$ 的黎斯势 $I_\beta f$ 定义为

$$I_\beta f := \mathcal{F}^{-1}\left[(2\pi|\cdot|)^{-\beta}\mathcal{F}f\right]; \tag{2.13}$$

更多详情请参见 [41, 第 1] 章。设 $p \in [1,\infty)$，且 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数。齐次加权 Sobolev 空间 $\dot{H}^1_{,\omega}{}^p$ 定义为所有满足 $\|f\|_{\dot{H}^1_{,\omega}{}^p} := \|I_{-1}f\|_{L^p_\omega}$ 有限的 $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ 的集合。此外，设

$$\dot{Y}^{1,p}_\omega := \begin{cases} \dot{W}^{1,p}_\omega & \text{if } n=1 \text{ or } p=1,\\ \dot{H}^{1,p}_\omega & \text{if } n \in \mathbb{N}\cap[2,\infty) \text{ and } p \in (1,\infty). \end{cases} \tag{2.14}$$

为证明定理 1.3，我们还需要以下结论，它是由 [16, 定理 2.8 和推论 2.9]直接得到的；细节略去。

引理 2.7。若 $p \in (1,\infty)$ 且 $\omega \in A_p$，则 $\dot{W}^1_{,\omega}{}^p = \dot{H}^1_{,\omega}{}^p$，且二者具有等价半范数。

定理 *1.3* 的证明。由带有 $k=1$ 的定理 1.1 以及引理 2.7，可得 (i) $\Longrightarrow$(ii)。接下来，我们通过分别考虑 n 和 p 的以下三种情形，证明 (ii) $\Longrightarrow$ (i)。

情形 1：$n = 1$ 且 $p \in (1,\infty)$。在此情形下，$\dot{Y}^1_{,\omega}{}^p(\mathbb{R}) = \dot{W}^1_{,\omega}{}^p(\mathbb{R})$。令 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\mathbf{1}_{[0,1]} \le \eta \le \mathbf{1}_{[-2,2]}$，$g \in C^\infty(\mathbb{R})$ 为非负函数，并且对任意 $x \in \mathbb{R}$，$f(x) := \int_{-\infty}^x g(t)\eta(t)\,dt$。则 $f' = g\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \dot{W}^1_{,\omega}{}^p(\mathbb{R})$，且

$$\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^p\omega(x)\,dx \le \int_{-2}^2 [g(x)]^p\omega(x)\,dx. \tag{2.15}$$

注意，对于任意 $x \in [-1,0]$ 和 $h \in [2,3]$，

$$|\Delta_h f(x)| = \int_x^{x+h} g(t)\eta(t)\,dt \ge \int_0^1 g(t)\,dt$$

并且，对于任意 $x \in [1,2]$ 和 $h \in [-3,-2]$，

$$|\Delta_h f(x)| = \int_{x+h}^x g(t)\eta(t)\,dt \ge \int_0^1 g(t)\,dt.$$

由此我们推得

$$\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{|h|<3}\frac{|\Delta_h f(x)|^q}{|h|^{1+sq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}&\geq \int_{-1}^{0}\left[\int_{2}^{3}\left\{\int_{0}^{1} g(t)\,dt\right\}^{q}|h|^{-1-sq}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\&\quad+\int_{1}^{2}\left[\int_{-3}^{-2}\left\{\int_{0}^{1} g(t)\,dt\right\}^{q}|h|^{-1-sq}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\&\sim \omega\left([-1,0]\cup[1,2]\right)\left[\int_{0}^{1} g(t)\,dt\right]^{p}.\end{aligned}$$

利用这一点，结合取$r := 3$时的 (1.8) 和 (2.15)，可得

$$\omega\left([-1,0]\cup[1,2]\right)\left[\int_{0}^{1} g(t)\,dt\right]^{p}\lesssim\int_{-2}^{2}[g(x)]^{p}\omega(x)\,dx.$$

重复 [24, (3.43)], 的证明，我们得出，对于任意非负函数 $\in L^{1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$,

$$\omega\left([-1,0]\cup[1,2]\right)\left[\int_{0}^{1} g(t)\,dt\right]^{p}\lesssim\int_{0}^{1}[g(x)]^{p}\omega(x)\,dx.\tag{2.16}$$

由此取函数 := 1，可推得 $\omega([-1,0]) \leq \omega\left([-1,0]\cup[1,2]\right)\lesssim\omega([0,1])$。由于 (1.8) 关于权重 ω [平移不变，也就是说，对于任意$x_0 \in \mathbb{R}$，权重 $\omega(\cdot - x_0)$ 满足 (1.8)，且正数常数], 保持不变，因此可得 $\omega([0,1]) \lesssim \omega([1,2]) \leq \omega([-1,0]\cup[1,2])$。结合 (2.16)，进一步可知，对于任意非负函数函数 $\in L^{1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$,

$$\left[\int_{0}^{1} g(x)\,dx\right]^{p}\lesssim\frac{1}{\omega([0,1])}\int_{0}^{1}[g(x)]^{p}\omega(x)\,dx.$$

由此以及 (1.8) 关于平移和伸缩不变这一事实 [也就是说，对于任意 $\delta \in (0,\infty)$，权重 $\omega(\delta\cdot)$ 满足 (1.8)，且正数常数], 保持不变，我们得出，对于任意区间I 以及任意非负函数 $\in L^{1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$,

$$\left[\fint_{I} g(x)\,dx\right]^{p}\lesssim\frac{1}{\omega(I)}\int_{I}[g(x)]^{p}\omega(x)\,dx,$$

结合引理 2.2(iv)，可进一步推出在此情形下 $\omega \in A_p$ 。

情形 2：$n \in \mathbb{N}$ 且 $p = 1$。在此情形下，$\dot{W}^{1,p}_{\omega} = \dot{W}^{1,p}_{\omega}$。令 $D_0 := B(0,6)\setminus B(0,3)$，$D_1 := B(0,2)\setminus B(0,1)$，$D_2 := B(0,18)\setminus B(0,9)$，以及 $D_3 := B(0,48)\setminus B(0,24)$。设 $g \in C^{\infty}$ 为非负径向函数，并选取 $\eta \in C^{\infty}$，使得 η 为径向函数且 $\mathbf{1}_{D_0} \leq \eta \leq \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},8)\setminus B(\mathbf{0},2)}$。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，令 $f(x) := \int_{B(0,|x|)} g(y)\eta(y)\,dy$。则对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$\nabla f(x) = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})g(x)\eta(x)|x|^{n-2}x$。因此，

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|\omega(x)\,dx\lesssim\int_{B(\mathbf{0},8)\setminus B(\mathbf{0},2)}|g(x)|\omega(x)\,dx.\tag{2.17}$$

注意，对于任意 $x \in D_1$ 和 $h \in D_2 - \{x\}$，有 $7 < |h| < 20$ 且

$$|\Delta_h f(x)| = \int_{|x|\leq|y|<|x+h|} g(y)\eta(y)\,dy \geq \int_{D_0} g(y)\,dy;$$

另一方面，对于任意 $x \in D_2$ 和 $h \in D_1 - \{x\}$，也有 $7 < |h| < 20$ 且

$$|\Delta_h f(x)| = \int_{|x+h|\leq|y|<|x|} g(y)\eta(y)\,dy \geq \int_{D_0} g(y)\,dy.$$

由此，我们进一步推得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{|h|<20}\frac{|\Delta_h f(x)|^{q}}{|h|^{1+sq}}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\omega(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{D_1}\left[\int_{D_2-\{x\}}\left\{\int_{D_0} g(y)\,dy\right\}^q |h|^{-1-sq}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\quad+\int_{D_2}\left[\int_{D_1-\{x\}}\left\{\int_{D_0} g(y)\,dy\right\}^q |h|^{-1-sq}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\sim \omega(D_1\cup D_2)\int_{D_0} g(y)\,dy.
\end{aligned}$$

由此，利用（1.8）（其中$r:=20$）和（2.17），可得

$$\omega(D_1\cup D_2)\int_{D_0} g(y)\,dy \lesssim \int_{B(\mathbf{0},8)\setminus B(\mathbf{0},2)} g(x)\omega(x)\,dx. \tag{2.18}$$

现在，重复 [76, 命题 5.1] 中情形 2 的证明，将其中的 (5.12) 替换为本文的 (2.18)，我们得到 $\omega\in A_1$。

情形 3：$n\in\mathbb{N}\cap[2,\infty)$ 且 $p\in(1,\infty)$。在此情形下，$\dot{Y}^1_{\omega^p}=\dot{H}^1_{\omega^p}$。令 $g\in C^\infty$ 为非负函数，$\eta\in C^\infty$ 满足 $\mathbf{1}_{A_0}\leq\eta\leq\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},8)\setminus B(\mathbf{0},2)}$，并令 $f:=I_1(g\eta)$，其中 I_1 与 (2.13) 中的相同，只是将 β 替换为 1。于是，根据 [41, 第 10–11] 页以及假设 $n\in\mathbb{N}\cap[2,\infty)$，可知 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$，并且对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{g(y)\eta(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy, \tag{2.19}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数。此外，利用黎斯势的半群性质（例如，参见 [41, p. 9]）和 (2.31)，我们得出

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{\dot{H}^{1,p}_\omega}&=\|I_{-1}f\|^p_{L^p_\omega}=\|I_{-1}I_1(g\eta)\|^p_{L^p_\omega}\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)\eta(y)|^p\omega(y)\,dy\leq\int_{B(\mathbf{0},8)\setminus B(\mathbf{0},2)}|g(y)|^p\omega(y)\,dy.
\end{aligned}\tag{2.20}$$

注意，对于任意 $x\in A_1$，$h\in A_3-\{x\}$，以及 $y\in B(\mathbf{0},8)\setminus B(\mathbf{0},2)$，$|x-y|\leq|x|+|y|<10$ 和 $|x+h-y|\geq|x+h|-|y|>16$，结合 (2.19)，进一步可得

$$\begin{aligned}
|\Delta_h f(x)|&\sim\int_{B(\mathbf{0},8)\setminus B(\mathbf{0},2)} g(y)\eta(y)\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1}}-\frac{1}{|x+h-y|^{n-1}}\right)dy\\
&\gtrsim\int_{B(\mathbf{0},8)\setminus B(\mathbf{0},2)} g(y)\eta(y)\,dy\geq\int_{A_0} g(y)\,dy;
\end{aligned}$$

同理，对于任意的 $x\in A_3$ 和 $h\in A_1-\{x\}$，$|\Delta_h f(x)|\gtrsim\int_{A_0} g(y)\,dy$。另一方面，注意到，对于任意的 $x\in A_1$ 和 $h\in A_3-\{x\}$，或对于任意的 $x\in A_3$ 和 $h\in A_1-\{x\}$，都有 $22<|h|<50$。由此可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{|h|<50}\frac{|\Delta_h f(x)|^q}{|h|^{1+sq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\gtrsim\int_{A_1}\left[\int_{A_3-\{x\}}\left\{\int_{A_0} g(y)\,dy\right\}^q|h|^{-1-sq}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\quad+\int_{A_3}\left[\int_{A_1-\{x\}}\left\{\int_{A_0} g(y)\,dy\right\}^q|h|^{-1-sq}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\sim\omega(A_1\cup A_3)\left[\int_{A_0} g(y)\,dy\right]^p.
\end{aligned}$$

利用这一点，结合 $r := 50$ 时的 (1.8) 和 (2.20)，可得

$$\omega(A_1 \cup A_3)\left[\int_{A_0} g(y)\,dy\right]^p \lesssim \int_{B(\mathbf{0},8)\setminus B(\mathbf{0},2)} [g(x)]^p \omega(x)\,dx. \tag{2.21}$$

重复 [76, 命题 5.1] 中情形 3 的证明，并将其中的 (5.16) 替换为这里的 (2.21)，即可得到本情形下的 $\omega \in A_p$。这就完成了 (ii) $\Longrightarrow$ (i) 的证明，从而得出定理 1.3。□

3 球 Banach 函数空间 $X(Q)$在立方体上的 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关不等式

本节的主要目标是在球 Banach 函数空间框架下建立一个与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的不等式（见定理 3.11）。为此，我们首先在第 3.1 小节介绍球 Banach 函数空间的一些预备概念，这些概念在后续章节中会经常用到。此外，我们还在第 3.1 小节中建立了一个关于球 Banach 函数空间的外推引理（见引理 3.9），这是后续章节中最重要的工具之一。接下来，我们将在第 3.2 小节证明一个与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的不等式。

3.1 球 Banach 函数空间与外推

本小节介绍球 Banach 函数空间的一些预备概念，并建立一个关键的外推引理（见引理 3.9）。对于任意 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，用 $\mathscr{M}(\Omega)$ 表示 Ω 上所有可测函数的集合。球 Banach 函数空间的定义如下，该定义最初发表于 [108, 定义 2.1]。

定义 3.1。若 Banach 空间 $X \subset \mathscr{M}$配备一个范数 $\|\cdot\|_X$，且该范数对 $\mathscr{M}$ 中的所有函数都有定义，则称其为球 *Banach* 函数空间（简称 BBF 空间），如果 X 满足以下条件：

(i) 对任意$f \in \mathscr{M}$，若 $\|f\|_X = 0$，则$f = 0$几乎处处；

(ii) 若f、$g \in \mathscr{M}$满足 $|g| \le |f|$几乎处处，则 $\|g\|_X \le \|f\|_X$；

(iii) 若数列 $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathscr{M}$，且 $0 \le f_m \uparrow f$ 几乎处处成立，其中$m \to \infty$，则$\|f_m\|_X \uparrow \|f\|_X$成立，其中$m \to \infty$；

(iv) 对任意球B，有 $\mathbb{R}^n, \mathbf{1}_B \in X$；

(v) 对任意球B，若属于 $\mathbb{R}^n$，则存在一个正数常数$C_{(B)}$，其取值依赖于B，使得对于任意 $f \in X$，有$\int_B |f(x)|\,dx \le C_{(B)}\|f\|_X$。

注 3.2. (i) 如 [116, 注 2.5(ii)], 中所述，将任意球B替换为任意有界可测集S，其中属于 $\mathbb{R}^n$，即可得到定义 3.1 的一个等价表述。

(ii) 在定义 3.1 中，若将任意球B替换为任意满足 $|E| < \infty$ 的可测E，则得到 Banach函数空间*Banachfunctionspaces*的定义。该定义最初由 Bennett 和 Sharpley 在 [6, 第 1 章 定义 1.1 和 1.3]中引入。根据他们的定义，我们很容易发现，Banach函数空间总是球 Banach 函数空间。然而，反过来则未必成立（例如，参见 [108, 第 9]页）。

(iii) 在定义 3.1 中，若将 (iv) 替换为如下饱和性质：对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意满足 $|E| \in (0,\infty)$ 的可测集E，都存在一个满足 $|F| \in (0,\infty)$ 的可测集$F \subset E$，使得$\mathbf{1}_F \in X$，那么我们就得到了 Lorist 和 Nieraeth [79, p. 251] 所用术语中的 Banach函数空间 定义。此外，根据 [128, 命题 2.5]（另见 [98, 命题

4.21]），我们得出结论：如果所考虑的赋范向量空间X 满足一项附加假设，即 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$在其某个凸化空间上是弱有界的，那么 [79] 中 Banach函数空间 的定义就与球 Banach 函数空间的定义一致。因此，在这项附加假设下，采用定义 3.1 意义下的球 Banach 函数空间，或采用 [79] 意义下的 Banach函数空间，所得结果完全相同。

(iv) 由 [75, 命题 1.2。36], 可知，定义 3.1 的 (ii) 和 (iii) 均意味着任意球 Banach 函数空间都是完备的。

对于任意 $g \in \mathscr{M}$，记 $g|_\Omega$ 为 g 在 Ω 上的限制。以下限制空间的概念由 [129,定义 2。6]引入。

定义 3.3。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，且 X 为一个 BBF 空间。X 的限制空间 $X(\Omega)$ 定义为：令 $X(\Omega) := \{f \in \mathscr{M}(\Omega) : f = g|_\Omega$，其中某个 $g \in X\}$。此外，对于任意 $f \in X(\Omega)$，定义 $\|f\|_{X(\Omega)} := \inf\{\|g\|_X : f = g|_\Omega,\ g \in X\}$。

注 3.4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，X 为一个 BBF 空间，$X(\Omega)$ 为其限制空间。由[129, 命题 2.7], 可知，对于任意 $f \in X(\Omega)$，$\|f\|_{X(\Omega)} = \|\widetilde{f}\|_X$，其中

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in \Omega, \\ 0 & \text{if } x \in \Omega^{\complement}. \end{cases}$$

此外，我们还需要以下关于 BBF 空间的p-凸化的定义，该定义见[108, 定义 2.6]。

定义 3.5. 设 X 为一个 BBF 空间，且$p \in (0,\infty)$。X^p 的p-凸化定义为令 $X^p := \{f \in \mathscr{M} : |f|^p \in X\}$，并赋予准范数 $\|f\|_{X^p} := \||f|^p\|_{pX}$，其中任意$f \in X^p$均成立。

关于 BBF 空间伴随空间的以下概念可见于 [108, p. 9]；更多详情请参见[6,第 1 章，第 2] 节。

定义 3.6。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，X 为一个 BBF 空间，且 $X(\Omega)$ 为其限制空间。伴随空间 （也称为 *K¨othe* 对偶） $[X(\Omega)]'$ 定义如下：

$$[X(\Omega)]' := \left\{ f \in \mathscr{M}(\Omega) : \|f\|_{[X(\Omega)]'} := \sup_{\substack{g \in X(\Omega) \\ \|g\|_{X(\Omega)}=1}} \|fg\|_{L^1(\Omega)} < \infty \right\},$$

其中 $\|\cdot\|_{[X(\Omega)]'}$ 称为 $\|\cdot\|_{X(\Omega)}$的伴随范数 。

注 3.7。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，X 为一个 BBF 空间，且 $X(\Omega)$ 为其限制空间。

(i) 由 [108, 命题 2.3], 可得，伴随空间 X' 也是一个 BBF 空间

(ii) 由 [129, 命题 2.12], 可知，$X'(\Omega) = [X(\Omega)]'$，且范数相同，其中 $X'(\Omega)$ 表示 X' 在 Ω 上的限制空间。

(iii) 由 [123, 引理 2.6], 可推得，X 与 X'' 一致（即其二阶伴随空间），且范数相同。

现在，我们给出在 $\mathbb{R}^n$ 的任意开集上定义的球 Banach Sobolev 空间的如下定义，该定义首次见于 [129, 定义 2.14] （另见 [23, 定义 2.6] ，其中定义了相应的、定义在 $\mathbb{R}^n$上的空间）。

Defi定义 3.8. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，X 是一个 BBF 空间，$X(\Omega)$ 是其限制空间，且 $k \in \mathbb{N}$.

(i) 非齐次球班纳赫-索伯列夫空间 $W^{k,X}(\Omega)$ 定义为所有满足以下条件的 $f \in X(\Omega)$ 的集合：对于任意满足 $|\alpha| \le k$ 的多重指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$，$f$ 的 α 阶弱偏导数 $\partial^\alpha f$ 存在，且 $\partial^\alpha f \in X(\Omega)$。此外，$W^{k,X}(\Omega)$ 的范数 $\|\cdot\|_{W^{k,X}(\Omega)}$ 定义如下：对于任意 $f \in W^{k,X}(\Omega)$，令 $\|f\|_{W^{k,X}(\Omega)} := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{X(\Omega)}$。

(ii) 齐次球班纳赫-索伯列夫空间 $\dot{W}^{k,X}(\Omega)$ 定义为所有满足以下条件的 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的集合：对于任意满足 $|\alpha| = k$ 的多重指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$，$f$ 的 α 阶弱偏导数 $\partial^\alpha f$ 存在，且 $\partial^\alpha f \in X(\Omega)$。此外，$\dot{W}^{k,X}(\Omega)$ 的半范数 $\|\cdot\|_{\dot{W}^{k,X}(\Omega)}$ 定义如下：对于任意 $f \in \dot{W}^{k,X}(\Omega)$，令 $\|f\|_{\dot{W}^{k,X}(\Omega)} := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|= k} \|\partial^\alpha f\|_{X(\Omega)}$。

最后，我们在 BBF 空间上建立以下外推引理，这是后续章节中最重要的工具之一；关于 BBF 空间上外推引理的其他变体，请参见 [80, 98, 111]。

引理 *3.9.* 设 X 是一个 *BBF* 空间，Ω 是一个开集，$X(\Omega)$ 是 X 在 Ω 上的限制空间。[1]假设存在某个 $p \in [1,\infty)$，使得 $X^{\frac{1}{p}}$ 也是一个 *BBF* 空间，且 *Hardy–Littlewood* 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $Y := (X^{\frac{1}{p}})'$ 上有界。如果 Ω 上的非负可测函数对 (F, G) 满足 $G \in X(\Omega)$，并且存在一个递增函数 $\phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$，使得对于任意 $\omega \in A_1$，$\|F\|_{L^p_\omega(\Omega)} \le \phi([\omega]_{A_1})\|G\|_{L^p_\omega(\Omega)}$，那么

$$\|F\|_{X(\Omega)} \le 2^{\frac{1}{p}}\phi(2\|\mathcal{M}\|_{Y\to Y})\|G\|_{X(\Omega)}.$$

为证明这个外推引理，我们需要以下 Rubio de Francia 迭代算法以及 BBF 空间的相关等价范数；这正是 [24, 引理 4.6 和注 4.7]。

引理3.10。 设 X 是一个满足与引理 *3.9* 相同假设的BBF 空间，且某个 $p \in [1,\infty)$。对于任意 $g \in Y := (X^{\frac{1}{p}})'$，令 $R_Y g := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^m g}{2^m\|\mathcal{M}\|_{Y\to Y}^m}$，其中，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，$\mathcal{M}^m$ 是 $\mathcal{M}$ 的 m 次迭代，且 $\mathcal{M}^0 g := |g|$。那么，对于任意 $g \in Y$，以下结论成立：

(i) 对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$|g(x)| \le R_Y g(x)$，

（ii）$R_Y g \in A_1$ 以及 $[R_Y g]_{A_1} \le 2\|\mathcal{M}\|_{Y\to Y}$，

(iii) $\|R_X g\|_Y \le 2\|g\|_Y$。

此外，如果 $f \in X$，那么

$$\|f\|_X \le \sup_{\|g\|_Y\le 1}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p R_Y g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_X.$$

引理 *3.9* 的证明。 设 $F \in \mathscr{M}(\Omega)$ 且 $G \in X(\Omega)$。根据注 3.4、定义 3.5、注 3.7(iii)、定义 3.6 和引理 3.10，我们得到

$$\begin{aligned}
\|F\|_{X(\Omega)} &= \big\|\widetilde{F}\big\|_X = \Big\|\big(\widetilde{F}\big)^p\Big\|_{X^{\frac{1}{p}}}^{\frac{1}{p}} = \Big\|\big(\widetilde{F}\big)^p\Big\|_{(X^{\frac{1}{p}})''}^{\frac{1}{p}} = \sup_{\|g\|_Y\le 1}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\big|\widetilde{F}(x)\big|^p g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{\|g\|_Y\le 1}\left[\int_\Omega |F(x)|^p R_Y g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \le \sup_{\|g\|_Y\le 1}\phi([R_Y g]_{A_1})\left[\int_\Omega |G(x)|^p R_Y g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \phi(2\|\mathcal{M}\|_{Y\to Y})\sup_{\|g\|_Y\le 1}\left[\int_\Omega |G(x)|^p R_Y g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \phi(2\|\mathcal{M}\|_{Y\to Y})\sup_{\|g\|_Y\le 1}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\big|\widetilde{G}(x)\big|^p R_Y g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}}\phi(2\|\mathcal{M}\|_{Y\to Y})\|G\|_{X(\Omega)}.
\end{aligned}$$

至此，引理 3.9 的证明完成。 □

3.2 X(Q) 框架下一个与 Gagliardo 和 Sobolev 半范数相关的不等式

在本小节中，我们主要证明以下定理。

定理 3.11. 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 X 是一个 BBF 空间。假设 X 满足引理 *3.9* 中相同的假设，其中某个 $p \in [1,\infty)$。若 $q \in [1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) < k$，则存在一个正数常数 C，使得对于任意 $s \in (0,1)$、任意 $\mathbb{R}^n$ 中的立方体 Q，以及任意 $f \in \dot{W}^{k,X}(Q)$，

$$(1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\| \left[\int_{Q(\cdot,k)} \frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X(Q)} \le C[\ell(Q)]^{(1-s)k} \left\|\nabla^k f\right\|_{X(Q)}, \tag{3.1}$$

其中 $\mathrm{l}(Q)$ 表示 Q 的边长，且 $\gamma_{p,q}$ 与 *(1.5)* 中相同。

证明。设 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个立方体。我们首先声称存在一个递增函数 $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，使得对于任意 $s \in (0,1)$、A_1 和 $f \in \dot{W}^{k,p}_{\omega}$，

$$(1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\{ \int_Q \left[\int_{Q(x,k)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \lesssim \phi([\omega]_{A_1})\ell(Q)^{(1-s)k} \left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega(Q)}, \tag{3.2}$$

其中，隐含的正数常数仅依赖于 n、k、p 和 q。为此，固定 $\omega \in A_1$。通过仔细检查 [17, 定理 1.2], 的证明，我们发现存在一个延拓算子 Λ：

$\dot{W}^{k,p}_{\omega} \to \dot{W}^{k,p}_{\omega}$ 以及一个递增函数 $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，使得对于任意 $f \in W^{k,p}(Q)$ $\dot{W}^{k,p}_{\omega}(Q)$，$\Lambda f = f$ 几乎处处在 Q 中成立，并且

$$\left\|\nabla^k \Lambda f\right\|_{L^p_\omega} \lesssim \psi([\omega]_{A_1}) \left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega(Q)} \tag{3.3}$$

其中，隐含的正数常数仅依赖于 n、k 和 p。

另一方面，设 c_Q 表示 Q 的中心。那么，对于任意 $x \in Q$ 和 $h \in Q(x,k)$，有 $|h| \le |h + x - c_Q| + |x - c_Q| < 2\sqrt{n}\mathrm{l}(Q)$。结合这一点、定理 1.1(i) 和 (3.3)，我们发现，对于任意 $s \in (0,1)$ 和 $f \in \dot{W}^{k,p}_{\omega}(Q)$，

$$\begin{aligned}
&(1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\{ \int_Q \left[\int_{Q(x,k)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \le (1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0},2\sqrt{n}\ell(Q))} \frac{|\Delta_h^k \Lambda f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \lesssim [\omega]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \ell(Q)^{(1-s)k} \left\|\nabla^k \Lambda f\right\|_{L^p_\omega} \lesssim [\omega]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \psi([\omega]_{A_1}) \ell(Q)^{(1-s)k} \left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega(Q)}.
\end{aligned}$$

[1]因此，对于任意 $t \in [0,\infty)$，上述断言 (3.2) 成立，其中 $\phi(t) := t^p\psi(t)$。由 (3.2) 和引理 3.9 可得 (3.1)，从而完成定理 3.11 的证明。□

注 3.12。与命题 2.6 的证明类似，我们可以发现，在定理 3.11 中，$\gamma_{p,q}$ 关于 $1-s$ 的指数是尖锐的。

接下来，借助定理 3.11，我们可以证明定理 1.4。

定理 *1.4* 的证明。应用定理 3.11 可知，为证明当前定理，我们只需验证 $X := L^p_\omega$，其中 $\omega \in A_p$ 满足定理 3.11 的所有假设。为此，我们考虑 ω 的 p 的以下两种情形。

情形 1：$p \in (1,\infty)$ 且 $\omega \in A_p \setminus A_1$。在此情形下，$p_\omega > 1$。由 $n(p\,{}^{\omega}p - {}^{1}q) < k$ 这一假设可知，存在 $\epsilon \in (0, p - p_\omega)$ 使得 $n(p_{\omega+\epsilon}p - {}^{1}q) < k$。根据 p_ω 的定义，我们得到 $\omega \in A_{p_{\omega+\epsilon}}$。由定义 3.5 可推得 $[L^p_\omega]^{p_{\omega+\epsilon}} p = L^{p_{\omega+\epsilon}}_\omega$。由此，结合 $\omega \in A_{p_{\omega+\epsilon}}$ 和 [108, p. 86], ，可知 L^p_ω 和 $L^{p_{\omega+\epsilon}}_\omega$ 均为 BBF 空间。此外，由[23, 定理 5.10], 的证明可推得，Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在$[L^{p_{\omega+\epsilon}}_\omega]'$上有界。因此，应用定理 3.11，并分别以此处的 L^p_ω 和 $p\,p_{\omega+\epsilon}$ 替换其中的 X 和 p，可得 (1.9)。

情形 2：$p \in [1,\infty)$ 且 $\omega \in A_1$。在这种情况下，$p_\omega = 1$。与情形 1 的证明类似，我们得出L^p_ω，其中 $\omega \in A_1$ 满足定理 3.11 的所有假设。因此，(1.9) 在这种情况下也成立。定理 1.4 的证明至此完成。□

4 BBF 空间框架下的分数阶 Gagliardo–Nirenberg 不等式

本节中，我们将在 BBF 空间上建立以下一般的分数阶 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式。

定理 4.1. 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 X 是一个BBF 空间。假设 X 满足引理 *3.9* 中相同的假设，其中某个 $p \in [1,\infty)$。

(i) 若 $q \in [1,p]$, ，则存在正数常数 C，使得对任意 $s \in (0,\ 1)$ 以及 $f \in W^{k,\ X}$,

$$s^{\frac{1}{q}}(1-s)^{\frac{1}{q}} \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \le C \|f\|_X^{1-s} \left\|\nabla^k f\right\|_X^s .$$

(ii) 如果 $q \in (p,\infty)$满足 $n(\frac{1}{p} - {}^{1}q) < k$ 且 $\theta \in (0, 1 - n\,k\,[{}^{1}p - {}^{1}q])$，那么存在一个正数常数 C，使得对于任意 $s \in (\max\{1 - \frac{\theta}{2}, 1 - n\,kq\}, 1)$ 以及 $f \in W^{k,X}$,

$$(1-s)^{\gamma_{p,q}} \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \le C \|f\|_X^{1-s} \left\|\nabla^k f\right\|_X^s ,$$

其中$\gamma_{p,\ q}$ 与(1.5)中的相同。

注 4.2. 定理 4.1 给出了X 与 $\dot{W}^{k,X}$之间的分数阶 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式。对于不同的函数空间 X_1 和 X_2，在X_1 与 $\dot{W}^{k,X_2}$ 之间建立相应的插值不等式将会很有意思；另请参阅 [24, 注 4.14(iii)] ，了解相关问题。

为证明定理 4.1，我们首先建立两个加权估计。事实上，应用 [23, 引理 3.15] ，并重复一个与证明 [99, 引理 2.25] 中所用论证类似的论证，只需将其中的一阶差分替换为高阶差分，即可得到以下引理。该引理在定理 4.1(i) 的证明中起关键作用；细节从略。

引理 4.3。设 $\omega \in A_1, k \in \mathbb{N}$，且 $1 \le q \le p < \infty$。则存在一个仅依赖于 n、k、p 和 q 的正数常数 C，使得对任意 $r \in (0,\ \infty)$ 以及 $f \in L^p_\omega$,

$$s^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0},r)^{\complement}} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le C [\omega]_{A_1}^{\frac{2}{p}} r^{-sk} \|f\|_{L^p_\omega} .$$

另一方面，以下涉及导数的加权估计是定理 4.1(ii) 证明中的关键，也具有独立的研究价值。

命题 4.4. 设 $\omega\in A_1, k\in\mathbb{N}, 1\le p<q<\infty$ 满足 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})<k$，且 $\theta\in[0,1-n\,k\,[\frac{1}{p}-\frac{1}{q}])$。假设 ρ 是定义在 (c_0,∞) 上的非负递减函数，其中某个 $c_0\in(0,\infty)$。若

$$C_{(\rho)}:=\int_{c_0}^{\infty}\left[\rho(r)r^{n-kq\theta}\right]^{\frac{p}{q}}\frac{dr}{r}<\infty, \tag{4.1}$$

则存在正数常数 $C_{(n)}$，仅依赖于 n，以及正数常数 $C_{(n,k,p,q)}$，仅依赖于 n,k,p 和 q，使得对于任意 $f\in W^{k,p}_{\omega}$，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{B(\mathbf{0},C_{(n)}c_0)^{\complement}}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{kq}}\rho(|h|)\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx$$
$$\le C_{(n,k,p,q)}C_{(\rho)}[\omega]_{A_1}\left([\omega]_{A_1}+1\right)\|f\|_{L^p_\omega}^{p\theta}\left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{p(1-\theta)}.$$

为证明该命题，我们需要一些概念和引理。令 $\mathcal{P}_s$ 表示所有次数不超过 $s\in\mathbb{Z}_+$ 的多项式的集合。对于任意 $s\in\mathbb{Z}_+$、任意球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 以及任意 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$，令 $P^{(s)}_B(f)$ 表示 $\mathcal{P}_s$ 中满足下列条件的极小化多项式：对于任意满足 $|\alpha|\le s$ 的 $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$，

$$\int_B\left[f(x)-P_B^{(s)}(f)(x)\right]x^\alpha\,dx=0;$$

对于任意立方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$，$P^{(s)}_Q(f)$ 的定义方式类似。关于极小化多项式的以下技术引理可由定义轻易推出；另见 [110, p. 83] 和 [81,引理 4.1]。

引理 4.5。设 $s\in\mathbb{Z}_+$，$p\in[1,\infty)$，且 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个球或立方体。那么，对于任意 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$，

$$\left\|f-P_\Omega^{(s)}(f)\right\|_{L^p(\Omega)}\sim\inf_{P\in\mathcal{P}_s}\|f-P\|_{L^p(\Omega)},$$

其中正的等价常数仅依赖于 n 和 s。

此外，我们还需要平移二进网格及其精妙的几何性质。回顾一下，对于任意 $\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n$，平移二进网格 $\mathcal{D}^\alpha$ 定义如下：

$$\mathcal{D}^\alpha:=\left\{2^j\left[m+[0,1)^n+(-1)^j\alpha\right]:j\in\mathbb{Z},\,m\in\mathbb{Z}^n\right\}.$$

欧几里得空间上的平移二进网格具有以下性质（例如参见 [95, p. 479]），它们在命题 4.4 的证明中起着关键作用。

引理 4.6。令 $\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n$。在 $\mathcal{D}^\alpha$ 上，以下结论成立。

(i) 对于任意 $Q,P\in\mathcal{D}^\alpha$ 满足 $\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n$，$Q\cap P\in\{\emptyset,Q,P\}$。

(ii) 存在一个仅依赖于 n 的正数常数 $C_{(n)}$，使得对于任意球 $B\subset\mathbb{R}^n$，存在 $\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n$ 和 $Q\in\mathcal{D}^\alpha$，满足 $B\subset Q\subset C_{(n)}B$。

以下高阶 Poincaré 不等式的变体正是 [57, 引理 3.10]，在命题 4.4 的证明中也需要用到（另见 [76, 引理 4.13]）。

引理 4.7. 设 $k\in\mathbb{N}$ 且 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$。那么存在一个正数常数 $C_{(n,k)}$，它仅依赖于 n 和 k，使得对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$、任意 $r\in(0,\infty)$ 以及任意球 $B_1\subset B:=B(x,r)\subset 3B_1$，

$$\left|f(x)-P_{B_1}^{(k-1)}(f)(x)\right|\le C_{(n,k)}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\fint_{B(x,2^{-j}r)}\left|f(y)-P^{(k-1)}_{B(x,2^{-j}r)}(f)(y)\right|dy.$$

命题 *4.4* 的证明。设$f \in W^{k,p}_{\omega}$。注意，若$P \in \mathcal{P}_{k-1}$，则$\Delta_h^k P(x) = 0$对任意x、$h \in \mathbb{R}^n$均成立。利用这一点和 (1.3)，我们得到，对任意x、$h \in \mathbb{R}^n$，

$$\left|\Delta_h^k f(x)\right| = \left|\Delta_h^k \left(f - P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)\right)(x)\right| \le \sum_{i=0}^{k} 2^k \left|\left(f - P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)\right)(x+ih)\right|,$$

其中$B_{x,h,k} := B(x + kh, k|h|)$。由此可知，要证明本命题，只需证明，对于任意$i \in \{0, \dots, k\}$，

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_i :&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+ih) - P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)(x+ih)|^q}{|h|^{kq}} \rho(|h|)\, dh\right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \\ &\lesssim C_{(\rho)}[\omega]_{A_1}\left([\omega]_{A_1}+1\right)\|f\|^{p\theta}_{L^p_\omega} \left\|\nabla^k f\right\|^{p(1-\theta)}_{L^p_\omega} \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中隐含的正数常数仅依赖于n、k、p和q。

固定$i \in \{0, \dots, k\}$和$x \in \mathbb{R}^n$，并令$C^{(n)}$与引理 4.6 中相同，且$h \in B(\mathbf{0}, C^{(n)}c_0)^{\complement}$。利用引理 4.7，取$B_1 := B_{x,h,k}$和$B := B(x + ih, 2k|h|)$，我们得到

$$\begin{aligned} &\left|f(x+ih) - P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)(x+ih)\right| \\ &\quad \le C_{(n,k)} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \fint_{B(x+ih, 2^{-j+1}k|h|)} \left|f(z) - P^{(k-1)}_{B(x+ih,2^{-j+1}k|h|)}(f)(z)\right| dz, \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中$C^{(n,k)}$与引理 4.7 中的正数常数相同。根据假设$n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$且$\theta \in [0, 1 - \frac{n}{k}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})]$，我们可以选择

$$\epsilon \in \left(0, k[1-\theta] - n\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right]\right), \tag{4.4}$$

并令$c_0 := \frac{1-2^{-\epsilon}}{C^{(n,k)}}$。于是，由（4.3）可推得

$$\begin{aligned} &c_0 \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} 2^{-j\epsilon} \left|f(x+ih) - P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)(x+ih)\right| \\ &\quad = \frac{1}{C_{(n,k)}} \left|f(x+ih) - P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)(x+ih)\right| \\ &\quad \le \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \fint_{B(x+ih,2^{-j+1}k|h|)} \left|f(z) - P^{(k-1)}_{B(x+ih,2^{-j+1}k|h|)}(f)(z)\right| dz, \end{aligned}$$

这进一步意味着存在$j_{x,h} \in \mathbb{Z}_+$使得

$$\begin{aligned} &c_0 2^{-j_{x,h}\epsilon} \left|f(x+ih) - P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)(x+ih)\right| \\ &\quad \le \fint_{B(x+ih,2^{-j_{x,h}+1}k|h|)} \left|f(z) - P^{(k-1)}_{B(x+ih,2^{-j_{x,h}+1}k|h|)}(f)(z)\right| dz. \end{aligned} \tag{4.5}$$

此外，应用引理 4.6，我们发现存在$\alpha_{x,h} \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$以及$Q_{x,h} \in \mathcal{D}^{\alpha_{x,h}}$满足

$$B\left(x+ih, 2^{-j_{x,h}+1}k|h|\right) \subset Q_{x,h} \subset B\left(x+ih, 2^{-j_{x,h}+1}C_{(n)}k|h|\right). \tag{4.6}$$

由此、引理 4.5 以及高阶庞加莱不等式（例如，参见 [71, 定理 13.27]），我们得出

$$\fint_{B(x+ih,2^{-j_{x,h}+1}k|h|)} \left|f(z) - P^{(k-1)}_{B(x+ih,2^{-j_{x,h}+1}k|h|)}(f)(z)\right| dz$$

$$\begin{aligned}
&\sim \inf_{P\in\mathcal{P}_{k-1}} \fint_{B(x+ih,2^{-j_{x,h}+1}k|h|)} |f(z)-P(z)|\,dz\\
&\lesssim \inf_{P\in\mathcal{P}_{k-1}} \fint_{Q_{x,h}} |f(z)-P(z)|\,dz \lesssim |Q_{x,h}|^{\frac{k}{n}} \fint_{Q_{x,h}} \left|\nabla^k f(z)\right|\,dz. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

另一方面，再次应用 (4.6) 和 [81,引理 4.1], ，我们发现

$$\fint_{B(x+ih,2^{-j_{x,h}+1}k|h|)} \left|f(z)-P^{(k-1)}_{B(x+ih,2^{-j_{x,h}+1}k|h|)}(f)(z)\right|\,dz \lesssim \fint_{Q_{x,h}} |f(z)|\,dz. \qquad (4.8)$$

此外，由 (4.6) 可推得

$$c_1\left|2^{j_{x,h}}Q_{x,h}\right|^{\frac{1}{n}} := \left[2C_{(n)}k\omega_n^{\frac{1}{n}}\right]^{-1}\left|2^{j_{x,h}}Q_{x,h}\right|^{\frac{1}{n}} \le |h| \le \left(2k\omega_n^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}\left|2^{j_{x,h}}Q_{x,h}\right|^{\frac{1}{n}},$$

其中， ω_n表示 $\mathbb{R}^n$中单位球的体积。这意味着$c_1|2_{j_{x,\ h}}Q_{x,\ h}|^{\frac{1}{n}} \ge C_{(n)}^{-1}|h| \ge c_{0}$。因此，结合这些结果、(4.5)、(4.7)、(4.8)，以及假设 ρ 在 $(c0,\infty)$ 上递减，可进一步推出

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(x+ih)-P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)(x+ih)|^q}{|h|^{kq}}\rho(|h|)\\
&= \frac{|f(x+ih)-P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)(x+ih)|^{q\theta+q(1-\theta)}}{|h|^{kq}}\rho(|h|)\\
&\lesssim 2^{j_{x,h}q(\epsilon-k)}\left[\left|Q_{x,h}\right|^{-\frac{k}{n}}\fint_{Q_{x,h}}|f(z)|\,dz\right]^{q\theta}\left[\fint_{Q_{x,h}}\left|\nabla^k f(z)\right|\,dz\right]^{q(1-\theta)}\rho\left(c_1\left|2^{j_{x,h}}Q_{x,h}\right|^{\frac{1}{n}}\right). \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

再次利用 (4.6)，可得

$$(x,h)\in\begin{cases} Q_{x,h}\times\left[\left(2^{j_{x,h}}Q_{x,h}\right)-\{x\}\right] & \text{if } i=0,\\ \left(2^{j_{x,h}}Q_{x,h}\right)\times\dfrac{[Q_{x,h}-\{x\}]}{i} & \text{if } i\in\{1,\dots,k\}.\end{cases}$$

应用这一结果、(4.9) 和 $Q_{x,\ h}\in\mathcal{D}^{\alpha_{x,\ h}}$，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(x)-P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)(x)|^q}{|h|^{kq}}\rho(|h|)\\
&\lesssim \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}2^{jq(\epsilon-k)}\sum_{\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n}\sum_{Q\in\mathcal{D}^\alpha}\left[|Q|^{-\frac{k}{n}}\fint_Q|f(z)|\,dz\right]^{q\theta}\left[\fint_Q\left|\nabla^k f(z)\right|\,dz\right]^{q(1-\theta)}\\
&\quad\times\rho\left(c_1\left|2^jQ\right|^{\frac{1}{n}}\right)\mathbf{1}_{E_0}(x,x+h)
\end{aligned}$$

并且，对于任意 $i\in\{1,\dots,\ k\}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(x+ih)-P^{(k-1)}_{B_{x,h,k}}(f)(x+ih)|^q}{|h|^{kq}}\rho(|h|)\\
&\lesssim \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}2^{jq(\epsilon-k)}\sum_{\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n}\sum_{Q\in\mathcal{D}^\alpha}\left[|Q|^{-\frac{k}{n}}\fint_Q|f(z)|\,dz\right]^{q\theta}\left[\fint_Q\left|\nabla^k f(z)\right|\,dz\right]^{q(1-\theta)}\\
&\quad\times\rho\left(c_1\left|2^jQ\right|^{\frac{1}{n}}\right)\mathbf{1}_{E_i}(x,x+ih), \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

其中

$$E_i := \begin{cases} Q \times 2^j Q & \text{if } i = 0, \\ \left(2^j Q\right) \times Q & \text{if } i \in \{1, \dots, k\}. \end{cases} \tag{4.11}$$

接下来，我们考虑 i 的以下两种情形。

情形 1：$i = 0$。在此情形下，根据引理 4.6(i)、ρ 在 $(c0, \infty)$ 上递减这一假设以及 (4.1)，可得，对于任意 $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$、$j \in \mathbb{Z}_+$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned} &\sum_{Q \in \mathcal{D}^\alpha} \left[\rho\left(c_1 \left|2^j Q\right|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\frac{p}{q}} \left|2^j Q\right|^{\frac{p}{q}(1-\frac{kq\theta}{n})} \mathbf{1}_Q(x) \\ &\quad = \sum_{\nu \in \mathbb{Z},\, c_1 2^{j+\nu} \geq c_0} \left[\rho\left(c_1 2^{j+\nu}\right)\right]^{\frac{p}{q}} 2^{\frac{p(n-kq\theta)(j+\nu)}{q}} \\ &\quad \lesssim \sum_{\nu \in \mathbb{Z},\, c_1 2^{j+\nu} \geq c_0} \int_{B(\mathbf{0}, c_1 2^{j+\nu}) \setminus B(\mathbf{0}, c_1 2^{j+\nu-1})} \left[\rho(|y|)|y|^{n-kq\theta}\right]^{\frac{p}{q}} \frac{dy}{|y|^n} \\ &\quad \sim \int_{c_0}^{\infty} \left[\rho(r) r^{n-kq\theta}\right]^{\frac{p}{q}} \frac{dr}{r} = C_{(\rho)}. \end{aligned}$$

由此，根据假设 $\omega \in A_1 \subset A_p$、引理 2.2(iv) 以及 Tonelli 定理，我们得到，对于任意 $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$ 和 $j \in \mathbb{Z}_+$，

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{\alpha,j} :&= \sum_{Q \in \mathcal{D}^\alpha} \left[\fint_Q |f(z)|\, dz\right]^p \left[\rho\left(c_1 \left|2^j Q\right|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\frac{p}{q}} \left|2^j Q\right|^{\frac{p}{q}(1-\frac{kq\theta}{n})} \omega(Q) \\ &\leq [\omega]_{A_p} \sum_{Q \in \mathcal{D}^\alpha} \left[\int_Q |f(z)|^p\, \omega(z)\, dz\right] \left[\rho\left(c_1 \left|2^j Q\right|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\frac{p}{q}} \left|2^j Q\right|^{\frac{p}{q}(1-\frac{kq\theta}{n})} \\ &\leq [\omega]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{Q \in \mathcal{D}^\alpha} \left[\rho\left(c_1 \left|2^j Q\right|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\frac{p}{q}} \left|2^j Q\right|^{\frac{p}{q}(1-\frac{kq\theta}{n})} \mathbf{1}_Q(z) \right\} |f(z)|^p\, \omega(z)\, dz \\ &\lesssim C_{(\rho)} [\omega]_{A_1} \|f\|_{L^p_\omega}^p \end{aligned} \tag{4.12}$$

类似地，

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{\alpha,j} :&= \sum_{Q \in \mathcal{D}^\alpha} \left[\fint_Q \left|\nabla^k f(z)\right| dz\right]^p \left[\rho\left(c_1 \left|2^j Q\right|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\frac{p}{q}} \left|2^j Q\right|^{\frac{p}{q}(1-\frac{kq\theta}{n})} \omega(Q) \\ &\lesssim C_{(\rho)} [\omega]_{A_1} \left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^p. \end{aligned} \tag{4.13}$$

由此，结合 (4.10)、(4.11)、(2.9)、H¨older 不等式以及 (4.4)，可推得

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_0 &\lesssim \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} 2^{jp(\epsilon-k+k\theta)} \sum_{\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n} \sum_{Q \in \mathcal{D}^\alpha} \left[\fint_Q |f(z)|\, dz\right]^{p\theta} \left[\fint_Q \left|\nabla^k f(z)\right| dz\right]^{p(1-\theta)} \\ &\quad \times \left[\rho\left(c_1 \left|2^j Q\right|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\frac{p}{q}} \left|2^j Q\right|^{\frac{p}{q}(1-\frac{kq\theta}{n})} \omega(Q) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} 2^{jp(\epsilon-k+k\theta)} \sum_{\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n} \left(\mathrm{A}_{\alpha,j}\right)^\theta \left(\mathrm{B}_{\alpha,j}\right)^{1-\theta} \lesssim C_{(\rho)} [\omega]_{A_1} \|f\|_{L^p_\omega}^{p\theta} \left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{p(1-\theta)}. \end{aligned}$$

因此，我们在这种情形下得到 (4.2)。

情形 2：$i \in \{1,\dots,k\}$。在这种情形下，利用 (4.10)、(4.11)、(2.9)、$\omega \in A_1$, H¨older 不等式、(4.4)、(4.12) 和 (4.13)，我们可得，对于任意 $i \in \{1,\dots,k\}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_i &\lesssim [\omega]_{A_1} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} 2^{jp[\epsilon+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-k+k\theta]} \sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n} \sum_{Q\in\mathcal{D}^\alpha} \left[\fint_Q |f(z)|\,dz\right]^{p\theta} \\
&\quad\times \left[\fint_Q \left|\nabla^k f(z)\right| dz\right]^{p(1-\theta)} \left[\rho\left(\left|2^j Q\right|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\frac{p}{q}} \left|2^j Q\right|^{\frac{p}{q}(1-\frac{kq\theta}{n})} \omega(Q) \\
&\le [\omega]_{A_1} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} 2^{jp[\epsilon+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-k+k\theta]} \sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n} \left(\mathrm{A}_{\alpha,j}\right)^{\theta} \left(\mathrm{B}_{\alpha,j}\right)^{1-\theta} \\
&\lesssim C_{(\rho)}[\omega]_{A_1}^2 \|f\|_{L^p_\omega}^{p\theta} \left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{p(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

这进一步意味着 (4.2) 在此情形下也成立，从而完成了命题 4.4 的证明。□

现在，我们转而证明定理 4.1。

定理 *4.1* 的证明。我们先证明 (i)。为此，令 $q \in [1,p]$。我们断言，对于任意 $s \in (0,1)$，$\omega \in A_1$, 以及 $f \in W^{k,\omega^p}$,

$$s^{\frac{1}{q}}(1-s)^{\frac{1}{q}} \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \lesssim [\omega]_{A_1}^{\frac{2}{p}} \|f\|_{L^p_\omega}^{1-s} \left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{s}. \tag{4.14}$$

若此断言成立，则通过类似于引理 3.9 证明中的论证，我们可立即得出 (i)。因此，只需证明上述断言。令 $\omega \in A_1$ 以及 $f \in W^{k,\omega^p}$，其中 $\|\nabla^k f\|_{L^p_\omega} \in (0,\infty)$。利用 (1.6) 和引理 4.3，我们发现，对于任意 $s \in (0,1)$ 和 $r \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\le \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad + \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{B(\mathbf{0},r)^{\complement}} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\lesssim (1-s)^{-\frac{1}{q}}[\omega]_{A_1}^{\frac{1}{p}} r^{(1-s)k} \left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega} + s^{-\frac{1}{q}}[\omega]_{A_1}^{\frac{2}{p}} r^{-sk} \|f\|_{L^p_\omega}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

取 $r \in (0,\infty)$，使其满足 $(1-s)^{-\frac{1}{q}}[\omega]_{pA_1}^{\frac{1}{p}} \bar{r}^{(1-s)k} \|\nabla^k f\|_{L^p_\omega} = s^{-\frac{1}{q}}[\omega]_{pA_1}^{\frac{2}{p}} \bar{r}^{-sk} \|f\|_{L^p_\omega}$，这意味着

$$r = \left[\frac{(1-s)}{s}\right]^{\frac{1}{kq}} [\omega]_{A_1}^{\frac{1}{kp}} \|f\|_{L^p_\omega}^{\frac{1}{k}} \left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{-\frac{1}{k}}.$$

因此，结合这一点、(4.15) 以及 $[\omega]_{A_1} \ge 1$ 这一事实（例如参见 [40, 命题7.1.5(5)]），我们得到，对于任意 $s \in (0,1)$,

$$s^{\frac{1}{q}}(1-s)^{\frac{1}{q}} \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim s^{\frac{s}{q}}(1-s)^{\frac{1-s}{q}}[\omega]_{A_1}^{\frac{2-s}{p}}\|f\|_{L^p_\omega}^{1-s}\left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{s}\le s^{\frac{s}{q}}(1-s)^{\frac{1-s}{q}}[\omega]_{A_1}^{\frac{2}{p}}\|f\|_{L^p_\omega}^{1-s}\left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{s}.$$

由此以及观察到 $\sup_{s\in(0,1)} s^{\frac{s}{q}}(1-s)^{\frac{1-s}{q}}\lesssim 1$，可推得上述断言 (4.14) 成立。至此，(i) 的证明完成。

接下来，我们证明 (ii)。为此，令 $q\in(p,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})<k$ 且令 $\theta\in(0,1-\frac{n}{k}[\frac{1}{p}-\frac{1}{q}])$。固定 $\omega\in A_1$ 和 $r\in(0,\infty)$。对于任意给定的 $s\in(\max\{1-\theta,1-\frac{n}{kq}\},1)$ 以及任意 $t\in(0,\infty)$，定义

$$\rho_s(t):=\begin{cases}0 & \text{if } t\in(0,r],\\ t^{(1-s)kq-n} & \text{if } t\in(r,\infty).\end{cases}$$

于是，对于任意 $s\in(\max\{1-\theta,1-\frac{n}{kq}\},1)$，$\rho_s$ 是定义在 (r,∞) 上的非负递减函数，并且

$$C_{(\rho_s)}:=\int_r^\infty\left[\rho_s(t)t^{n-kq\theta}\right]^{\frac{p}{q}}\frac{dt}{t}=\int_r^\infty t^{kp(1-s-\theta)}\frac{dt}{t}=\frac{r^{kp(1-s-\theta)}}{kp(\theta+s-1)}.$$

由此，结合 $\rho:=\rho_s$ 的命题 4.4 以及 $[\omega]_{A_1}\ge 1$ 再次成立这一事实可知，存在一个仅依赖于 n 的正数常数 $C_{(n)}$，使得对于任意 $s\in(\max\{1-\theta,1-\frac{n}{kq}\},1)$ 以及 $f\in W^{k,p}_\omega$，

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{B(\mathbf{0},C_{(n)}r)^{\complement}}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\lesssim(\theta+s-1)^{-\frac{1}{p}}[\omega]_{A_1}^{\frac{2}{p}}r^{k(1-s-\theta)}\|f\|_{L^p_\omega}^{\theta}\left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{1-\theta}.\tag{4.16}$$

将 (i) 的证明中的引理 4.3 替换为 (4.16)，我们发现，对于任意 $s\in(\max\{1-\theta,1-\frac{n}{kq}\},1)$，

$$(1-s)^{\gamma_{p,q}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\lesssim(1-s)^{\frac{(1-s)\gamma_{p,q}}{\theta}}(\theta+s-1)^{\frac{s-1}{p\theta}}[\omega]_{A_1}^{\frac{1-s}{p\theta}}\|f\|_{L^p_\omega}^{1-s}\left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{s}.$$

由此以及 $\sup_{s\in(\max\{1-\frac{\theta}{2},1-\frac{n}{kq}\},1)}(1-s)^{\frac{(1-s)\gamma_{p,q}}{\theta}}(\theta+s-1)^{\frac{s-1}{p\theta}}\lesssim 1$，并再次利用上述事实，我们推得，对于任意 $s\in(\max\{1-\frac{\theta}{2},1-\frac{n}{kq}\},1)$，

$$(1-s)^{\gamma_{p,q}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\lesssim[\omega]_{A_1}^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p_\omega}^{1-s}\left\|\nabla^k f\right\|_{L^p_\omega}^{s}.$$

由此和引理 3.9，我们得到 (ii)，从而完成定理 4.1 的证明。 □

现在，我们可以证明定理 1.6。

定理 *1.6* 的证明。 根据定理 1.4 的证明，我们发现 $X:=L^p_\omega$ with $p\in[1,\infty)$ 以及$\omega\in A^p$ satisfies all the assumptions of 引理 3.9。结合定理 4.1，进一步可推出定理 1.6。 □

5 BBM 公式与球 Banach Sobolev 空间的新刻画

本节分为两个小节。在第 5.1 小节中，我们在延拓域上为 BBF 空间建立了尖锐的高阶 BBM 公式（见定理 5.5）。随后，我们在第 5.2 小节中证明了球 Banach Sobolev 空间的相关刻画（见定理 5.10）。

5.1 球 Banach 函数空间上的 BBM 公式

在本小节中，我们给出 BBF 空间上的一个 BBM 公式。为陈述这一结果，我们先回顾一些定义。以下概念正是 [114, 定义 3.2]（另见 [6, 定义 3.1]）。

定义 5.1。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，X 是一个 BBF 空间，且$X(\Omega)$ 是其在 Ω 上的限制空间。若对于任意$f \in X(\Omega)$以及任意数列 $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，其中各项均为 Ω 中的可测集，并且满足 $\mathbf{1}_{E_j} \to 0$几乎处处成立（当$j \to \infty$时），且$\|f\,\mathbf{1}_{E_j}\|_{X(\Omega)} \to 0$（当$j \to \infty$时），则称$X(\Omega)$ 具有绝对连续范数 。

注 5.2。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，X 是一个具有绝对连续范数的 BBF 空间，且$X(\Omega)$是其限制空间。

(i) 由 [129, 命题 2.10], 可得$X(\Omega)$也具有绝对连续范数 .

(ii) 根据 [79, 命题 3.12 和 3.13] 以及 [124, 注 3.2(vi)], , 我们得出$X(\Omega)$是可分的。此外, 由 [129, 注 2.13], 可知, $[X(\Omega)]'$ 与 $[X(\Omega)]^*$一致；另见 [6, 第 23 页，推论 4.3]。此处及下文中，我们用$[X(\Omega)]^*$表示$X(\Omega)$的对偶空间。

接下来，我们给出球型 Banach Sobolev 延拓域的以下概念（例如参见 [129,定义 2.17]）。

定义 5.3. 设 X 是一个 BBF 空间，且 $k \in \mathbb{N}$。若存在一个线性延拓算子 $\Lambda : W^{k,x}(\Omega) \to W^{k,x}$，使得对于任意 $f \in W^{k,x}(\Omega)$，都有 $(\Lambda f)|_\Omega = f$，且 $\|\Lambda f\|_{W^{k,x}} \le C\|f\|_{W^{k,x}(\Omega)}$，其中正数常数 C 与 f 无关，则称开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个 $W^{k,x}$-延拓域。

注 5.4. 设$k \in \mathbb{N}$和X 是满足与引理 3.9 相同假设的 BBF 空间。如 [129, 定理 5.10], 所述, 一个 (ϵ, δ)-区域（其定义见 [63, 第 73] 页），若满足 $\epsilon \in (0, 1]$和 $\delta \in (0, \infty]$，则是一个 $W^{k,x}$-延拓域。特别地，Lipschitz域（例如参见 [36, 定义 4.4]）、经典雪花域（例如参见 [70, 第 104–105] 页）和半空间都是 $W^{k,x}$- 延拓域。

基于这些结果，我们给出球 Banach 函数空间上的以下 BBM 公式。

定理 5.5. 设 $k \in \mathbb{N}$，X 是一个具有绝对连续范数的BBF空间，且$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 $W^{k,x}$-延拓域。假设 X 对某个 $p \in [1, \infty)$满足与引理 *3.9* 相同的假设。若 $q \in [1, \infty)$满足 $q = p = 1$或 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$（当 $p > 1$时），则对任意 $f \in W^{k,x}(\Omega)$,

$$\lim_{s\to 1^-} (1-s)^{\frac{1}{q}} \left\| \left[\int_{\Omega(\cdot,k)} \frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X(\Omega)}$$
$$= \frac{1}{(kq)^{\frac{1}{q}}} \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n, |\alpha|=k} \partial^\alpha f(\cdot)\xi^\alpha \right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X(\Omega)}. \tag{5.1}$$

注 5.6。(i) 值得指出的是，对于任意 $f \in W^{k,x}(\Omega)$,

$$\left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n, |\alpha|=k} \partial^\alpha f(\cdot)\xi^\alpha \right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X(\Omega)} \sim \left\|\nabla^k f\right\|_{X(\Omega)} \tag{5.2}$$

其中正的等价常数仅依赖于n、k和q；特别地，当$k = 1$时，(5.2) 的左端等于 $[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\xi \cdot e|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)]^{\frac{1}{q}} \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$，其中$e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 可任意固定（例如，参见 [57, 引理 4.12]或 [38]）。

(ii) 定理 5.5 改进了 [23, 定理 3.36]。具体而言，在$k = 1$、$\Omega = \mathbb{R}^n$且$X := L^p$并满足$p \in [1, \infty)$的情形下，定理 5.5 将 [23, 定理 3.36]中的范围$q \in [1, p]$扩展至满足$n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$的范围$q \in [1, \infty)$。此外，当$k \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$时，定理 5.5 在球 Banach 函数空间的框架下是新的。

(iii) 定理 5.5 中的假设$n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$是尖锐的；见命题 6.3。

为了证明定理 5.5，我们先给出一些辅助引理。事实上，将定理 3.5]的证明中一阶差分、p 和 β 分别替换为此处的高阶差分、q 和 $_{n\,p}$，即可得到下面针对良函数的渐近公式，这对定理 5.5 的证明很重要；细节从略。

引理 5.7。设 X 是一个BBF 空间，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集。假设 $\epsilon_0 \in (0, \infty)$，且一族定义在$(0, \infty)$上的局部可积函数$\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$满足：对于任意 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$，$\rho_\epsilon$非负且单调递减，

$$\int_0^\infty \rho_\epsilon(r) r^{n-1}\, dr = 1, \tag{5.3}$$

并且，对于任意 $\delta \in (0, \infty)$，

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\delta^\infty \rho_\epsilon(r) r^{n-1}\, dr = 0. \tag{5.4}$$

假设 $p \in [1, \infty)$，使得对于任意 $\lambda \in [1, \infty)$，

$$\left\| \mathbf{1}_{B(\mathbf{0}, \lambda)} \right\|_X \lesssim \lambda^{\frac{n}{p}} \left\| \mathbf{1}_{B(\mathbf{0}, 1)} \right\|_X$$

其中隐含的正数常数与 λ 无关。如果 $k \in \mathbb{N}$ 且 $q \in [1, \infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$，那么对于任意 $f \in C_c^\infty$，

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left\| \left[\int_{\Omega(\cdot, k)} \frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{kq}} \rho_\epsilon(|h|)\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X(\Omega)} = \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| = k} \partial^\alpha f(\cdot) \xi^\alpha \right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X(\Omega)}.$$

此外，我们还需要如下的另一个渐近公式。

引理 5.8。设 X 是一个 BBF 空间，满足与引理 *3.9*相同的假设，其中某个 $p \in [1, \infty)$。假设 $k \in \mathbb{N}$ 且 $q \in [1, \infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$。如果 Ω 是一个$W^{k,X}$-延拓域，那么对于任意 $f \in W^{k,X}(\Omega)$，

$$\lim_{s \to 1^-} (1 - s)^{\frac{1}{q}} \left\| \left[\int_{\{h \in \Omega(\cdot, k) : |h| \geq 1\}} \frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{n + skq}}\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X(\Omega)} = 0.$$

证明。令 Λ 为从 $W^{k,X}(\Omega)$ 到 $W^{k,X}$，$f \in W^{k,X}(\Omega)$ 的延拓算子，且 $\theta \in [0, \min\{1, 1 - nk(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})\})$。由此、引理 4.3 以及 (4.16)，我们推得，对于任意 $s \in (\max\{1 - \frac{\theta}{2}, 1 - \frac{1}{nkq}\}, 1)$和 $\Lambda f \in W^{k,p}_\omega$，

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0}, 1)^\complement} \frac{|\Delta_h^k \Lambda f(x)|^q}{|h|^{n + skq}}\, dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \lesssim [\omega]_{A_1}^{\frac{2}{p}} \max\left\{ \|\Lambda f\|_{L^p_\omega}^\theta \left\| \nabla^k \Lambda f \right\|_{L^p_\omega}^{1-\theta}, \|\Lambda f\|_{L^p_\omega} \right\} \leq [\omega]_{A_1}^{\frac{2}{p}} \|\Lambda f\|_{W^{k,p}_\omega}. \end{aligned}$$

由此， $\Lambda f|_\Omega = f$，并采用与引理 3.9 证明中类似的论证，我们得出

$$(1-s)^{\frac{1}{q}}\left\|\left[\int_{\{h\in\Omega(\cdot,k):|h|\geq 1\}}\frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega)} \leq (1-s)^{\frac{1}{q}}\left\|\left[\int_{B(\mathbf{0},1)^{\complement}}\frac{|\Delta_h^k \Lambda f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X$$
$$\lesssim (1-s)^{\frac{1}{q}}\|\Lambda f\|_{W^{k,X}} \lesssim (1-s)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{W^{k,X}(\Omega)} \to 0$$

如 $s \to 1^-$。至此，引理 5.8 的证明完成。 □

最后，为了证明定理 5.5，我们还需要关于延拓域上的球 Banach Sobolev 空间的一个稠密性结果。回顾一下，对于任意开集 Ω，空间 C_c^∞在 Ω 上的限制定义为 $C_c^\infty|_\Omega := \{f|_\Omega : f \in C_c^\infty\}$。此外，我们用 符号 $W_c^{k,X}$, 表示所有具有紧支集的 $W^{k,}$ $_X$ 函数的集合。于是有以下结论。

引理 5.9. 设 $k \in \mathbb{N}$且 X 是一个具有绝对连续范数的 BBF 空间。若 X 满足引理 *3.9* 中的相同假设，其中某个 $p \in [1,\infty)$，则下列断言成立。

(i) $W_c^{k,X}$, 和 C_c^∞在 $W^{k,}$ $_X$ 中均稠密。

(ii) 若Ω $\subset \mathbb{R}^n$ 是 $W^{k,X}$-扩张域，则 $C_c^\infty|_\Omega$ 在 $W^{k,X}(\Omega)$中稠密。

证明。我们先证明 (i)。为此，设 f $\in W^{k,X}$ 且 $\phi \in C_c^\infty$满足 $\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},1)} \leq \phi \leq \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},2)}$。对于任意 l $\in \mathbb{N}$, 令 $f_l(\cdot) := f(\cdot)\phi(\cdot/l)$。然后，采用与 [23, 命题 3.6] 的证明中类似的论证，并将其中的一阶导数替换为高阶导数，我们发现，对于任意 l $\in \mathbb{N}$, $f_l \in W_c^{k,X}$, 且 $\lim_{l\to\infty}\|f_l - f\|_{W^{k,X}} = 0$。因此，$W_c^{k,X}$, 在 $W^{k,X}$中稠密。现在，假设 g $\in W_c^{k,X}$,, 并令 $\eta \in C_c^\infty$满足 supp $(\eta) \subset B(0,1)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\eta$ (x) dx = 1; 对于任意 j $\in \mathbb{N}$, 令 $\eta_j(\cdot) := j^n\eta(j\cdot)$。那么 $g * \eta_j \in C_c^\infty$。重复 [23, 命题 3.8], 的证明，我们得到 $\lim_{j\to\infty}\|g * \eta_j - g\|_{W^{k,X}} = 0$，因此 C_c^∞在 $W_c^{k,X}$, 中稠密。由此以及上面已证明的 $W_c^{k,X}$, 在 $W^{k,X}$ 中稠密这一事实，我们可推出 (i) 成立。

接下来证明 (ii)。为此，设 f $\in W^{k,X}(\Omega)$。由于 Ω 是一个 $W^{k,X}$-延拓域，因此存在 g $\in W^{k,X}$, 使得 $g|_\Omega = f$。根据 (i)，我们发现存在一个数列 $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 属于 C_c^∞，满足 $\|g_j - g\|_{W^{k,X}} \to 0$，当 j $\to \infty$ 时成立。对于任意 j $\in \mathbb{N}$, 令 $f_j := g_j|_\Omega \in C_c^\infty|_\Omega$。由此以及 $W^{k,X}(\Omega)$ 的定义可知， $\|f_j - f\|_{W^{k,X}(\Omega)} \leq \|g_j - g\|_{W^{k,X}} \to 0$，当 j $\to \infty$ 时成立。至此，(ii) 得证，进而引理 5.9 得证。□

现在，我们来证明定理 5.5。

定理 *5.5* 的证明。 设 Ω 是一个 $W^{k,X}$-延拓域，其中 Λ 是相应的延拓算子，并设$f \in W^{k,X}(\Omega)$。由此，根据定理 1.1(i)（其中 $r := 1$）以及引理 3.9，我们可知，对于任意 $s \in (0,1)$,

$$(1-s)^{\frac{1}{q}}\left\|\left[\int_{B(\mathbf{0},1)}\frac{|\Delta_h^k \Lambda f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X \lesssim \left\|\nabla^k \Lambda f\right\|_X,$$

结合 $W^{k,}$ $_X$-延拓域的定义，可进一步推出

$$(1-s)^{\frac{1}{q}}\left\|\left[\int_{\Omega(\cdot,k)\cap B(\mathbf{0},1)}\frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W^{k,X}(\Omega)}$$

其中隐含的正数常数与s 和f无关。另一方面，由引理 5.9 可知，对于任意 $\delta \in (0,\infty)$，存在 $\eta \in C_c^\infty$，使得 $\|f - \eta|_\Omega\|_{W^{k,X}(\Omega)} < \delta$。利用

[1] – [1]引理3.10、X_p 是 BBF 空间且 $-\mathcal{M}$ 在 $Y:=(X_p)'$上有界的假设，以及引理 2.2(i)，我们得出，对于任意 $\lambda\in[1,\infty)$,

$$\left\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},\lambda)}\right\|_X \sim \sup_{\|g\|_Y=1}\left[R_Y g\left(B(\mathbf{0},\lambda)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \lesssim \lambda^{\frac{n}{p}} \sup_{\|g\|_Y=1}\left[R_Y g\left(B(\mathbf{0},1)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \sim \lambda^{\frac{n}{p}}\left\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},1)}\right\|_X.$$

由此以及引理 5.7，结合

$$\rho_\epsilon(r):=\begin{cases} kq\epsilon r^{\epsilon kq-n} & \text{if } r\in(0,1),\\ 0 & \text{if } r\in[1,\infty)\end{cases} \tag{5.5}$$

对于任意 $r\in(0,\infty)$ 以及任意给定的 $\epsilon\in(0,\frac{n}{kq})$，可得

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to1^-}(1-s)^{\frac{1}{q}}\left\|\left[\int_{\Omega(\cdot,k)\cap B(\mathbf{0},1)}\frac{|\Delta_h^k\eta(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega)}\\ &\quad=\frac{1}{(kq)^{\frac{1}{q}}}\left\|\left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^\alpha\eta(\cdot)\xi^\alpha\right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega)}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

结合标准稠密性论证（例如参见 [23, p. 1732]）、注 5.6(i)、范数 $\|\cdot\|_{X(\Omega)}$ 的三角不等式以及 δ 的任意性，可进一步推出，将 η 替换为 f 后，(5.6) 仍然成立。由此结合引理 5.8，可得 (5.1)。至此，定理 5.5 的证明完成。□

5.2 球 Banach Sobolev 空间的一种新刻画

在本小节中，我们利用 BBM 公式（即定理 5.5）建立球 Banach Sobolev 空间的以下新刻画。

定理 *5.10.* 设 $k\in\mathbb{N}$，X 是一个 *BBF* 空间，且 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 $W^{k,X}$-延拓域。假设 X 和 X' 都具有绝对连续范数，并且 X 满足引理 *3.9* 中的相同假设，其中某个 $p\in(1,\infty)$。令 $q\in[1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})<k$。则 $f\in W^{k,X}(\Omega)$ 当且仅当 $f\in W^{k-1,X}(\Omega)$ [，其中 $W^{0,X}(\Omega):=X(\Omega)$]，并且

$$I(f):=\liminf_{s\to1^-}(1-s)^{\frac{1}{q}}\left\|\left[\int_{\Omega(\cdot,k)}\frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega)}<\infty; \tag{5.7}$$

此外，对于任意 $f\in W^{k,X}(\Omega)$，$\|f\|_{W^{k,X}(\Omega)}\sim\|f\|_{W^{k-1,X}(\Omega)}+I(f)$，其中正的等价常数与 f 无关。

注 5.11。(i) 定理 5.10 改进了 [129, 推论 4.10]。事实上，在$k=1$且 $X:=L^p$、其中 $p\in[1,\infty)$ 的情形下，定理 5.10 将范围 $q\in[1,p]\cup(1,\frac{np}{n-1}]$在 [23, 定理 3.36] 中扩展为范围 $q\in[1,\infty)$，满足~~$n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})<1$~~。此外，当$k\in\mathbb{N}\cap[2,\infty)$ 时，定理 5.10 在球 Banach 函数空间的框架下是新的。

(ii) 根据下面的命题 6.3，我们发现定理 5.10 中的假设 ~~$n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})<k$~~是 尖锐的 p.

为了证明定理 5.10，我们需要以下众所周知的不等式（例如参见 [12,第 699] 页）。

引理 5.12. 设 $q\in[1,\infty)$。若 $\theta\in(0,1)$，则存在正数常数 $C(\theta)$，仅依赖于 θ，使得对于任意 $a,b\in(0,\infty)$，$(a+b)^q\le(1+\theta)a^q+C(\theta)b^q$。

此外，还需要以下技术引理。

引理 5.13. 设 $k \in \mathbb{N}, q \in [1,\infty)$，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$\epsilon_0 \in (0,\infty)$，且 $\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,\epsilon_0)}$ 如引理 *5.7* 中所述。若 $f \in C^\infty(\Omega)$ 且 $U \subset \Omega$ 是满足 $U \subset \Omega$的有界开集，则对任意 $x \in U$,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{B(\mathbf{0},R_x)}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\,dh=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha\right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi), \tag{5.8}$$

其中 $R_x := k^{-1}\mathrm{dist}(x,U^\complement)$。

*Pro*其中。设 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$，$f\in C^\infty(\Omega)$，且 $x\in U$。由于 U 有界，我们可以推知，对任意 $x\in U$,

$$kR_x \le \mathrm{diam}\,(U) := \sup\{|y-z| : y,z\in U\} < \infty. \tag{5.9}$$

由此，结合假设 $f\in C^\infty(\Omega)$ 和泰勒公式，可得存在一个正数常数 $C^{(k,f,U)}$，它仅依赖于 k、f和 U，使得对任意 $h\in B(\mathbf{0},R_x)$,

$$\left|\Delta_h^k f(x)-\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^\alpha f(x)h^\alpha\right|\le C_{(k,f,U)}|h|^{k+1}.$$

由此结合引理 5.12 可知，对于任意 $\theta\in(0,1)$，存在一个正数常数$C^{(\theta)}$，仅依赖于 θ，使得对于任意 $h\in B(\mathbf{0},R_x)$,

$$\left|\Delta_h^k f(x)\right|^q \le (1+\theta)\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^\alpha f(x)h^\alpha\right|^q + C_{(\theta)}[C_{(k,f,U)}]^q|h|^{(k+1)q}.$$

由此，利用极坐标以及（5.9），可得对于任意 $\theta\in(0,1)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{B(\mathbf{0},R_x)}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\,dh\\
&\quad\le(1+\theta)\int_{B(\mathbf{0},R_x)}\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^\alpha f(x)h^\alpha\right|^q|h|^{-kq}\rho_\epsilon(|h|)\,dh\\
&\qquad+C_{(\theta)}[C_{(k,f,U)}]^q\int_{B(\mathbf{0},R_x)}|h|^q\rho_\epsilon(|h|)\,dh\\
&\quad\le(1+\theta)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha\right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\int_0^{\mathrm{diam}\,(U)}\rho_\epsilon(r)r^{n-1}\,dr\\
&\qquad+C_{(\theta)}[C_{(k,f,U)}]^q\mathcal{H}^{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\int_0^{\mathrm{diam}\,(U)}\rho_\epsilon(r)r^{q+n-1}\,dr.
\end{aligned}\tag{5.10}$$

由（5.3）和（5.4）可得

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{\mathrm{diam}\,(U)}\rho_\epsilon(r)r^{n-1}\,dr=1 \tag{5.11}$$

并且，对于任意 $\delta\in(0,\mathrm{diam}\,(U))$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mathrm{diam}\,(U)}\rho_\epsilon(r)r^{q+n-1}\,dr&=\int_0^{\delta}\rho_\epsilon(r)r^{q+n-1}\,dr+\int_\delta^{\mathrm{diam}\,(U)}\rho_\epsilon(r)r^{q+n-1}\,dr\\
&\le\delta^q\int_0^\infty\rho_\epsilon(r)r^{n-1}\,dr+[\mathrm{diam}\,(U)]^q\int_\delta^\infty\rho_\epsilon(r)r^{n-1}\,dr\to\delta^q
\end{aligned}$$

当 $\epsilon \to 0^+$ 时，结合 δ 的任意性，进一步可得

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{\operatorname{diam}(U)} \rho_\epsilon(r) r^{q+n-1}\, dr = 0.$$

应用这一结果、(5.10) 和 (5.11)，令 $\epsilon \to 0^+$，再令 $\theta \to 0^+$，可得

$$\limsup_{\epsilon\to 0^+} \int_{B(\mathbf{0},R_x)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{kq}} \rho_\epsilon(|h|)\, dh \le \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha \right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi).$$

同理，有

$$\liminf_{\epsilon\to 0^+} \int_{B(\mathbf{0},R_x)} \frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{kq}} \rho_\epsilon(|h|)\, dh \ge \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha \right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi).$$

因此，我们得到 (5.8)，从而完成引理 5.13 的证明。 □

基于此引理，我们接下来得到以下结论，它在定理 5.10 的证明中也起着关键作用。

引理 *5.14.* 设 X 是一个 *BBF* 空间，满足与引理 *3.9* 相同的假设，其中某个 $p \in (1,\infty)$。假设 X 和 X' 都具有绝对连续范数。设 $k \in \mathbb{N}$，$q \in [1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$，$\Omega$ 为一个开集，$\epsilon_0 \in (0,\infty)$，且 $\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,\epsilon_0)}$ 如引理 *5.7* 中所述。若 $f \in W^{k-1,X}(\Omega)$ [，其中 $W^{0,X}(\Omega) := X(\Omega)$]，并且

$$\mathrm{I} := \liminf_{\epsilon\to 0^+} \left\| \left[\int_{\Omega(\cdot,k)} \frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{kq}} \rho_\epsilon(|h|)\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X(\Omega)} < \infty, \tag{5.12}$$

则 $f \in W^{k,X}(\Omega)$ 且 $\|\nabla^k f\|_{X(\Omega)} \lesssim \mathrm{I}$。

证明。 设 $f \in W^{k-1,X}(\Omega)$ 满足 (5.12)，且 $\varphi \in C_c^\infty$ 是一个非负函数，满足 $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$，并且 $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(\mathbf{0},1)$。对任意 $t \in (0,\infty)$，令 $\varphi_t := \frac{1}{t^n}\varphi(\frac{\cdot}{t})$ 并

$$\Omega_t := \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}\left(x, \Omega^{\complement}\right) > t \right\}.$$

对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $t \in (0,\infty)$，令 $r_{x,t} := k^{-1}\operatorname{dist}(x, \Omega_t^{\complement})$ 以及 $r_x := k^{-1}\operatorname{dist}(x, \Omega^{\complement})$。我们断言，对于任意 $t \in (0,\infty)$ 和 $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$，

$$\left\| \left[\int_{B(\mathbf{0},r_{\cdot,t})} \frac{|\Delta_h^k (\varphi_t * f)(\cdot)|^q}{|h|^{kq}} \rho_\epsilon(|h|)\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{\Omega_t} \right\|_X \lesssim \left\| \left[\int_{B(\mathbf{0},r_\cdot)} \frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{kq}} \rho_\epsilon(|h|)\, dh \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{\Omega} \right\|_X. \tag{5.13}$$

事实上，注意到对于任意 $t \in (0,\infty)$、$x \in \Omega_t$ 以及 $y \in B(\mathbf{0},t)$，

$$\operatorname{dist}\left(x-y, \Omega^{\complement}\right) \ge \operatorname{dist}\left(x, \Omega^{\complement}\right) - |y| > 0,$$

这进一步意味着 $x - y \in \Omega$，因此

$$\mathbf{1}_{\Omega_t}(\cdot) \le \mathbf{1}_{\Omega}(\cdot - y). \tag{5.14}$$

另一方面，对于任意 $t \in (0,\infty)$、$x \in \Omega_t$、$y \in B(\mathbf{0},t)$ 以及 $z \in \Omega^{\complement}$，我们有 $y + z \in \Omega_t^{\complement}$ 且

$$|x - y - z| = |x - (y+z)| \ge \operatorname{dist}\left(x, \Omega_t^{\complement}\right)$$

因此 $\operatorname{dist}(x-y,\Omega^{\complement}) \geq \operatorname{dist}(x,\Omega_t^{\complement})$，这进一步推出$r_{x,t} \leq r^{x-y}$。结合 $\operatorname{supp}(\varphi_t) \subset B(\mathbf{0},t)$这一事实、(5.14)、闵可夫斯基不等式、 [35, 命题 2.7], 以及假设 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx = 1$，进一步可得

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[\int_{B(\mathbf{0},r_{\cdot,t})}\frac{|\Delta_h^k(\varphi_t*f)(\cdot)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\mathbf{1}_{\Omega_t}(\cdot)\right\|_X\\
&\quad\leq\left\|\left[\int_{B(\mathbf{0},r_{\cdot,t})}\left\{\int_{B(\mathbf{0},t)}\varphi_t(y)\frac{|\Delta_h^k(f)(\cdot-y)|}{|h|^k}[\rho_\epsilon(|h|)]^{\frac{1}{q}}\,dy\right\}^q dh\right]^{\frac{1}{q}}\mathbf{1}_{\Omega_t}(\cdot)\right\|_X\\
&\quad\leq\left\|\int_{B(\mathbf{0},t)}\varphi_t(y)\left\{\int_{B(\mathbf{0},r_{\cdot,t})}\frac{|\Delta_h^k(f)(\cdot-y)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\mathbf{1}_{\Omega_t}(\cdot)\,dh\right\}^{\frac{1}{q}}dy\right\|_X\\
&\quad\leq\left\|\int_{B(\mathbf{0},t)}\varphi_t(y)\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Delta_h^k(f)(\cdot-y)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},r_{\cdot-y})}(h)\,dh\right\}^{\frac{1}{q}}\mathbf{1}_\Omega(\cdot-y)\,dy\right\|_X\\
&\quad=\|\varphi_t*F\|_X\leq\|\mathcal{M}(F)\|_X,
\end{aligned}\tag{5.15}$$

其中，对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$F(x):=\left[\int_{B(\mathbf{0},r_x)}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\mathbf{1}_\Omega(x).\tag{5.16}$$

[1]由 [128, 引理 3.7] 以及假设 $p\in(1,\infty)$、X_p是一个 BBF 空间，且 $\mathcal{M}$在$(X_p)'$上有界，可推得 $\mathcal{M}$在X上有界。由此以及(5.15)和(5.16)，可知上述断言(5.13)成立。

注意，对于任意 $x\in\Omega$，$B(\mathbf{0},r_x)\subset\Omega(x,k)$。因此，利用这一点、(5.13)和(5.12)，可得对于任意 $t\in(0,\infty)$,

$$\liminf_{\epsilon\to0^+}\left\|\left[\int_{B(\mathbf{0},r_{\cdot,t})}\frac{|\Delta_h^k(\varphi_t*f)(\cdot)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega_t)}\lesssim \mathrm{I}.\tag{5.17}$$

对于任意 $t\in(0,\infty)$，令$U_t\subset\Omega_t$ 为满足$U_t\subset\Omega_t$ 的有界开集，并且对于任意$x\in\Omega$，令$r'_{x,t}:=k^{-1}\operatorname{dist}(x,U_t^{\complement})$。由此及引理 5.13 可推得，对于任意$t\in(0,\infty)$和$x\in U_t$,

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{B(\mathbf{0},r'_{x,t})}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\,dh=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha\right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi).$$

由此以及$X(\Omega)$上的法图引理（例如，参见 [129, 引理 3.7]），我们得到，对于任意$t\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^\alpha(\varphi_t*f)(\cdot)\xi^\alpha\right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\right]^{\frac{1}{q}}\mathbf{1}_{U_t}\right\|_{X(\Omega_t)}\\
&\quad\leq\liminf_{\epsilon\to0^+}\left\|\left[\int_{B(\mathbf{0},r'_{\cdot,t})}\frac{|\Delta_h^k(\varphi_t*f)(\cdot)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\mathbf{1}_{U_t}\right\|_{X(\Omega_t)},
\end{aligned}$$

w这一点结合U_t 的任意性以及 [129,命题 2.8], 进一步推出

$$\left\|\left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=k}\partial^\alpha(\varphi_t*f)(\cdot)\xi^\alpha\right|^q d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega_t)} \tag{5.18}$$
$$\le \liminf_{\epsilon\to 0^+}\left\|\left[\int_{B(\mathbf{0},r_{\cdot,t})}\frac{|\Delta_h^k(\varphi_t*f)(\cdot)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega_t)}.$$

设 $U\subset\Omega$ 是满足 $U\subset\Omega$ 的开集，并选取充分小的 $t_0\in(0,\infty)$，使得$U\subset\Omega_{t_0}$。由此，结合 Ω_t 关于t的单调性、注 5.6(i)、(5.18) 和 (5.17)，可得，对任意 $t\in(0,t_0)$,

$$\left\|\nabla^k(\varphi_t*f)\right\|_{X(U)}\lesssim \mathrm{I}. \tag{5.19}$$

根据 X 和 X′ 具有绝对连续范数的假设以及注 3.7 和注 5.2，可知 X(Ω) 和 [X(Ω)]′ 都具有绝对连续范数，X(Ω) 是自反且可分的，$\mathrm{X}(\Omega)=[\mathrm{X}(\Omega)]^{**}$，并且 $[\mathrm{X}(\Omega)]^*=[\mathrm{X}(\Omega)]'$。这些性质结合 (5.19) 和 Banach–Alaoglu 定理（例如参见 [105, 定理 3.17]），进一步意味着，对于任意给定的 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ 满足$|\alpha|=\mathrm{k}$，都存在一个数列 $\{\mathrm{t\,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$，其中 $\mathrm{t\,j}\in(0,\mathrm{t}_0)$，以及 $\mathrm{g}_\alpha\in\mathrm{X(U)}$，使得当 $\mathrm{j}\to\infty$ 时 $\mathrm{t\,j}\to 0^+$，并且对于任意 $\Phi\in[\mathrm{X(U)}]'$,

$$\int_U\partial^\alpha(\varphi_{t_j}*f)(x)\Phi(x)\,dx\to\int_U g_\alpha(x)\Phi(x)\,dx \tag{5.20}$$

如$j\to\infty$。由此、定义 3.6 及注 3.7(iii)，我们得出

$$\begin{aligned}\|g_\alpha\|_{X(U)}&=\sup_{\|\Phi\|_{[X(U)]'}=1}\left|\int_U g_\alpha(x)\Phi(x)\,dx\right|=\sup_{\|\Phi\|_{[X(U)]'}=1}\lim_{j\to\infty}\left|\int_U\partial^\alpha(\varphi_{t_j}*f)(x)\Phi(x)\,dx\right|\\&\le\sup_{\|\Phi\|_{[X(U)]'}=1}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\int_U\partial^\alpha(\varphi_{t_j}*f)(x)\Phi(x)\,dx\right|\le\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\|\nabla^k(\varphi_{t_j}*f)\right\|_{X(U)}\lesssim\mathrm{I}.\end{aligned} \tag{5.21}$$

此外，由注 3.7(ii) 以及再次应用 [129, 命题 2.8]，我们推知$C_c^\infty(U)\subset X'(U)=[X(U)]'$。由 [40, 第 27 页，定理 1.2.19],，我们发现，当$t\to 0^+$时，$\varphi_t*f\to f$属于$L^1_{\mathrm{loc}}(U)$。应用这一点和 (5.20)，我们得出，对任意 $\phi\in C_c^\infty(U)$,

$$\begin{aligned}\int_U f(x)\partial^\alpha\phi(x)\,dx&=\lim_{j\to\infty}\int_U(\varphi_{t_j}*f)(x)\partial^\alpha\phi(x)\,dx\\&=(-1)^k\lim_{j\to\infty}\int_U\partial^\alpha(\varphi_{t_j}*f)(x)\phi(x)\,dx=(-1)^k\int_U g_\alpha(x)\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

结合定义以及弱导数的唯一性（例如，参见[36, 第 143–144] 页），进一步可知 $\partial^\alpha\mathrm{f}$ 在 U 上存在，且对几乎处处的 $\mathrm{x}\in\mathrm{U}$，有 $\partial^\alpha\mathrm{f(x)}=\mathrm{g}_\alpha\mathrm{(x)}$。由此及 (5.21)，我们推得 $\|\nabla^k\mathrm{f}\|_{X(U)}\sim\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\,|\alpha|=\mathrm{k}}\|\mathrm{g}_\alpha\|_{X(U)}\lesssim\mathrm{I}$。由此，利用 U 的任意性，并再次对 X(Ω) 应用法图引理（参见 [129, 引理 3.7]），我们发现，对于任意满足 $|\alpha|=\mathrm{k}$ 的$\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$，$\partial^\alpha\mathrm{f}$ 在 Ω 上存在，且 $\|\nabla^k\mathrm{f}\|_{X(\Omega)}\lesssim\mathrm{I}$；这进一步意味着 $\mathrm{f}\in\mathrm{W}^{k,x}(\Omega)$，从而完成引理 5.14 的证明。□

应用引理 5.14 和定理 5.5，我们现在证明定理 5.10。

定理 *5.10* 的证明。我们先证明必要性。为此，设$f\in W^{k,x}(\Omega)$。应用定理 5.5、$W^{k,x}(\Omega)$ 的定义以及注 5.6(i)，我们立即得到

$$I(f)\lesssim\left\|\nabla^k f\right\|_{X(\Omega)}<\infty$$

且$f \in W^{k-1,x}(\Omega)$。必要性的证明至此完成。

接下来，我们证明充分性。为此，设$f \in W^{k-1,x}(\Omega)$ 满足 (5.7)，且 $\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,\,nkq)}$ 与 (5.5) 中相同。由此，我们得到

$$\liminf_{\epsilon\to 0^+}\left\|\left[\int_{\Omega(\cdot,k)}\frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{kq}}\rho_\epsilon(|h|)\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega)}$$
$$\lesssim \liminf_{s\to 1^-}(1-s)^{\frac{1}{q}}\left\|\left[\int_{\{h\in\Omega(\cdot,k):|h|<1\}}\frac{|\Delta_h^k f(\cdot)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{X(\Omega)} \le I(f) < \infty.$$

由此以及引理 5.14 可知，$f \in W^{k,x}(\Omega)$ 和 $\|f\|_{W^{k,x}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W^{k-1,x}(\Omega)} + I(f)$。因此，我们得到充分性。这就完成了定理 5.10 的证明。□

最后，将定理 5.5 和 5.10 应用于加权勒贝格空间，我们给出定理 1.8 的证明。

定理 *1.8* 的证明。 我们先证明 (i)。由 [104, 定理 1.34], 可知，L^p_ω 具有绝对连续范数。由此，结合与定理 1.4 的证明中类似的论证，我们发现L^p_ω 满足定理 5.5 的所有假设，从而推出 (i)。

现在，我们证明 (ii)。令 $p \in (1,\infty)$。由此，结合 $[L^p_\omega]' = L^{p'}_{\omega^{1-p'}}$这一事实，并再次利用 [104, 定理 1.34]，我们推得 $[L^p_\omega]'$ 具有绝对连续范数。再结合上面已经证明的事实，即 L^p_ω 满足定理 5.5 的所有假设，进一步可知L^p_ω满足定理 5.10 的所有假设。由此，我们得到 (ii)，从而完成定理 1.8 的证明。□

6 Triebel–Lizorkin 指数q的尖锐性

本节证明本文主要定理中 Triebel–Lizorkin 指数q 的尖锐性。首先，下面的命题表明，定理 1.1 中的 Triebel–Lizorkin 指数q 几乎是尖锐的。

命题 6.1. 设 $k \in \mathbb{N}$，$s \in (0,1)$，且 $p, q \in [1,\infty)$。

(i) 如果存在一个正数常数 C，使得对于任意 $r \in (0,\infty)$ 以及 $f \in C_c^\infty$，

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{B(\mathbf{0},r)}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le Cr^{(1-s)k}\left\|\nabla^k f\right\|_{L^p}, \tag{6.1}$$

则 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) \le k$。

(ii) 假设 $p \in (1,\infty)$。那么存在一个权重 $\omega \in A_p$，使得如果不等式 (1.7) 对于任意 $r \in (0,\infty)$ 以及 $f \in C_c^\infty$成立，则 $n(p\,{}^{\omega}p - 1\,q) \le k$。

证明。我们先证明 (i)。为此，取满足 $f \in C_c^\infty$ 的 $f \le \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},2)}$，并固定 $r \in (12k,\infty)$。于是，对于任意 $i \in \{0,\ldots,k-1\}$、$y \in B(0,1)$ 以及满足 $r_4 \le |x| < r\,2$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$，有 $|x-y| < r$ 且 $\left|\frac{(k-i)x+iy}{k}\right| \ge |x|-(k-i)|y|\ k > 2$。类似于 (2.3)，利用上述结果并作变量代换，我们得到

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{B(\mathbf{0},r)}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\gtrsim \left\{ \int_{\frac{r}{4}\le|x|<\frac{r}{2}} \left[\int_{B(\mathbf{0},1)} \frac{|\Delta^k_{\frac{y-x}{k}} f(x)|^q}{|y-x|^{n+skq}}\,dy \right]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\gtrsim r^{-\frac{n}{q}-sk} \left\{ \int_{\frac{r}{4}\le|x|<\frac{r}{2}} \left[\int_{B(\mathbf{0},1)} |f(y)|^q\,dy \right]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \sim r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-sk}. \tag{6.2}$$

由此以及 (6.1) 可知 $r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-sk}\lesssim r^{(1-s)k}$。结合这一点以及$r\in(12k,\infty)$ 的任意性，我们进一步得到 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\le k$。这就完成了(i) 的证明。

接下来，我们证明 (ii)。为此，考虑权重 $\omega(x):=|x|^{\delta-n}$，其中任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 以及任意给定的$\delta\in(n,np)$均成立。然后，利用 [40, 例 7.1.7], 我们发现 $\omega\in A_p$ 和 $p_\omega=\frac{\delta}{n}$（另见 [18,第 24]页）。设 f 如 (i) 中所述。与 (6.2) 类似，对于任意 $r\in(12k,\infty)$，我们得到，

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{|\Delta^k_h f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} |x|^{\delta-n}\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \gtrsim \left\{ \int_{\frac{r}{4}\le|x|<\frac{r}{2}} \left[\int_{B(\mathbf{0},1)} \frac{|\Delta^k_{\frac{y-x}{k}} f(x)|^q}{|y-x|^{n+skq}}\,dy \right]^{\frac{p}{q}} |x|^{\delta-n}\,dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\sim r^{-\frac{n}{q}-sk} \left\{ \int_{\frac{r}{4}\le|x|<\frac{r}{2}} |x|^{\delta-n}\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \sim r^{\frac{\delta}{p}-\frac{n}{q}-sk}.$$

由此及 (1.7)，我们推得 $\frac{\delta}{p}-\frac{n}{q}\le k$，也就是说，$n(\frac{1}{p}-\frac{\omega_p}{q})\le k$。因此，(ii) 成立，从而完成了命题 6.1 的证明。□

类似地，下面的结果给出了定理 1.4 和 3.11 中 q取值范围的近乎尖锐性。

命题 6.2. 设 $k\in\mathbb{N}$，$s\in(0,1)$，且 $p,q\in[1,\infty)$。

(i) 若对任意立方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$ 及任意 $f\in C_c^\infty(Q)$，不等式 (1.9) 在 $\omega\equiv1$ 下成立，则 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\le k$。

(ii) 假设 $p\in(1,\infty)$。则存在一个权重 $\omega\in A_p$，使得若对任意立方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$ 及任意 $f\in C_c^\infty(Q)$，不等式 (1.9) 成立，则 $n(\frac{\omega_p}{p}-\frac{1}{q})\le k$。

证明。设 Q 是一个以$\mathbf{0}$ 为中心的立方体，且 $l(Q)\in(24k,\infty)$。选取 $f\in C_c^\infty(Q)$，使其满足 $\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},1)}\le f\le\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},2)}$。将其中的 r 和 (6.1) 分别替换为 $l(Q)/2$ 和本文的 (1.9)，重复命题 6.1 的证明，即可得到所需结果。□

最后，Gagliardo–Nirenberg 插值不等式（定理 4.1）、BBM 公式（定理 5.5）以及相关的 Sobolev 型空间新刻画（定理 5.10）中q 取值范围的锐性，可由以下命题推出。

命题 6.3. 设 $k\in\mathbb{N}$、$s\in(0,1)$，且 $p,q\in[1,\infty)$。

(i) 若 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\ge k$，则存在 $f\in C_c^\infty$，使得

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta^k_h f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \infty.$$

(ii) 假设 $p\in(1,\infty)$。则存在 $\omega\in A_p$ 和 $f\in C_c^\infty$，使得当 $n(\frac{\omega_p}{p}-\frac{1}{q})\ge k$ 时，有

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta^k_h f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \infty.$$

证明。我们首先证明 (i)。为此，选取满足 $\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},\frac{1}{2})} \le f \le \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},\frac{3}{2})}$ 的 $f \in C_c^\infty$。注意，对于任意 $i \in \{0,\ldots\ldots, k-1\}$、$x \in B(0,2k)^\complement$ 和 $y \in B(0,\frac{1}{2})$，$|\Delta_{y-x}^{(k-i)x+iy} f(x)| = |f(y)| = 1$。由此并通过变量代换 $y := x + kh$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}dx &\ge \int_{B(\mathbf{0},2k)^\complement}\left[\int_{B(\mathbf{0},\frac{1}{2})}|y-x|^{-n-skq}\,dy\right]^{\frac{p}{q}}dx\\ &\gtrsim \int_{B(\mathbf{0},2k)^\complement}|x|^{-\frac{pn}{q}-skp}\,dx \sim \int_{2k}^{\infty} r^{p[\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-k]+(1-s)kp-1}\,dr\\ &\ge \int_{2k}^{\infty} r^{(1-s)kp-1}\,dr = \infty.\end{aligned}$$

因此，(i) 成立。

现在，我们证明 (ii)。为此，固定 $\delta \in (n, np)$，并且对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，令 $\omega(x) := |x|^{\delta-n}$。于是，由 [40, 例 7.1。7], 可知，$\omega \in A_p$ 且 $p_\omega = \delta n$（另见 [18, 第 24] 页）。应用这一结论以及与 (i) 的证明中所用方法类似的论证，我们得到：如果 $\delta p - nq = n(p - \omega p - 1q) \ge k$，那么，对于任意满足 $\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},\frac{1}{2})} \le f \le \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},\frac{3}{2})}$ 的 $f \in C_c^\infty$，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Delta_h^k f(x)|^q}{|h|^{n+skq}}\,dh\right]^{\frac{p}{q}}|x|^{\delta-n}\,dx &\gtrsim \int_{B(\mathbf{0},2k)^\complement}|x|^{-\frac{pn}{q}-skp+\delta-n}\,dx \sim \int_{2k}^{\infty} r^{p[\frac{\delta}{p}-\frac{n}{q}-k]+(1-s)kp-1}\,dr\\ &\ge \int_{2k}^{\infty} r^{(1-s)kp-1}\,dr = \infty.\end{aligned}$$

这就完成了 (ii) 的证明，从而也完成了命题 6.3 的证明。 □

7 对特定函数空间的应用

在本节中，我们将定理 3.11、4.1、5.5 和 5.10 应用于各种球 Ba- nach 函数空间的例子，包括 Bourgain–Morrey 型空间（见第 7.1 小节）、混合范数 Lebesgue 空间（见第 7.2 小节）、变指数 Lebesgue 空间（见第 7.3 小节）、Lorentz 空间（见第 7.4 小节）、Orlicz（切片）空间（见第 7.5 小节）以及 Herz 空间（见第 7.6 小节）。在第 7.7 小节中，我们还介绍另外两个可应用本文上述主要定理的特定函数空间，但不提供详细内容。人们非常期待将这些定理进一步应用于新发现的函数空间。

7.1 Bourgain–Morrey 型空间

回顾一下，Morrey 引入的 Morrey 空间 [93], 在偏微分方程理论和调和分析中有重要应用（例如，参见 Adams 的专著 [1]、Sawano 等人的专著 [106, 107] 以及 Yuan 等人的专著 [120] ）。1991 年，Bourgain [8] 引入了一种新的函数空间（Bourgain–Morrey 空间的一个特例），以研究 $\mathbb{R}^3$中的 Bochner–Riesz 乘子。后来，Masaki [83] 将其推广到全部指数范围（即如今所称的 Bourgain–Morrey 空间），用于研究非线性 Schr¨ödinger 方程，从而推广了 Morrey 空间。此后，这些空间在偏微分方程研究中变得至关重要（例如，参见 [4, 9, 65, 84, 85, 94]）；而其基本的实变量性质则由 Hatano 等人最近建立 [46]。最近，Zhao 等人 [125] 和 Hu 等人 [56] 分别通过结合 Besov–Triebel–Lizorkin 结构与 Bourgain–Morrey 结构，引入了 Besov–Bourgain–Morrey 空间和 Triebel–Lizorkin–Bourgain–Morrey 空间。

接下来回顾上述 Bourgain–Morrey 型空间的定义。设 $p \in (0,\infty]$。我们用 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 表示开集 Ω 上所有局部 p 可积函数构成的集合。

对于任意 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $m := (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$，回顾一下，$\mathbb{R}^n$ 中的二进立方体 $Q_{j,m}$ 定义为 $Q_{j,m} := 2^{-j}(m + [0,1)^n)$。例如，[46, 56, 125]中给出了 Bourgain–Morrey 型空间的以下定义。

定义 7.1. 设 $0 < p \le u \le r \le \infty$ 且 $\tau \in (0, \infty]$.

(i) *Morrey* 空间 M^u_p 定义为满足以下条件的所有 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}$ 的集合：

$$\|f\|_{M^u_p} := \sup_{j\in\mathbb{Z},\, m\in\mathbb{Z}^n} |Q_{j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left\|f\mathbf{1}_{Q_{j,m}}\right\|_{L^p} < \infty.$$

(ii) *Bourgain–Morrey* 空间 $M^u_{p,r}$ 定义为满足以下条件的所有 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}$ 的集合：

$$\|f\|_{M^u_{p,r}} := \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z},\, m\in\mathbb{Z}^n} \left[|Q_{j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left\|f\mathbf{1}_{Q_{j,m}}\right\|_{L^p} \right]^r \right\}^{\frac{1}{r}},$$

当 $r = \infty$ 有限时，按通常方式作相应修改。

(iii) *Besov–Bourgain–Morrey* 空间 $M\dot{B}^{u,\tau}_{p,r}$ 定义为满足以下条件的所有 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}$ 的集合：

$$\|f\|_{M\dot{B}^{u,\tau}_{p,r}} := \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \left\{ |Q_{j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left\|f\mathbf{1}_{Q_{j,m}}\right\|_{L^p} \right\}^r \right]^{\frac{\tau}{r}} \right\}^{\frac{1}{\tau}},$$

当 $r = \infty$或 $\tau = \infty$ 时，作通常的修改，且其值有限。

(iv) *Triebel–Lizorkin–Bourgain–Morrey* 空间 $M\dot{F}^{u,\tau}_{p,r}$ 定义为满足以下条件的所有 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}$ 的集合：

$$\|f\|_{M\dot{F}^{u,\tau}_{p,r}} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^\infty \left[t^{n(\frac{1}{u}-\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \left\|f\mathbf{1}_{B(y,t)}\right\|_{L^p} \right]^\tau \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{r}{\tau}} dy \right)^{\frac{1}{r}},$$

当 $r = \infty$或 $\tau = \infty$ 时，作通常的修改，且其值有限。

注 7.2. 显然，$M^u_{p,\infty} = M^u_p$ 以及 $M\dot{B}^{u,r}_{p,r} = M^u_{p,r}$。此外，由 [56, 命题 3.6(iii)], 可推得 $M\dot{F}^{u,r}_{p,r} = M^u_{p,r}$。

定理 7.3. 设 $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p < u < r \le \infty$, $\tau \in (0, \infty]$, $A \in \{B, F\}$, 且 $q \in [1, \infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < k$。则定理 *3.11* 中取 $X := M\dot{B}^{u,\tau}_{p,r}$ 时成立，定理 *4.1* 中取 $X := M\dot{A}^{u,\tau}_{p,r}$ 时成立。此外，若 $p \in (1, \infty)$，则定理 *5.10* 中取 $X := M\dot{A}^{u,\tau}_{p,r}$ 且 $\Omega := \mathbb{R}^n$ 时成立；若 $p, r \in (1, \infty)$，则定理 *5.5* 中取 $X := M\dot{B}^{u,\tau}_{p,r}$ 时成立。

证明。由 [76, 命题 7.7], , 采用与证明 [76, 定理 7.5], 中类似的论证，并结合定理 1.4、1.6 和 1.8(ii) 在 $\omega \in A_1$，下的结论，可轻易得出：定理 3.11 和 4.1 在 $X := M\dot{A}^{u,\tau}_{p,r}$ 下成立，而定理 5.10 在 $X := M\dot{A}^{u,\tau}_{p,r}$ 且 $p \in (1, \infty)$ 时成立。此外，由 [128, 定理 4.12], 的证明可知，所考虑的 $M\dot{B}^{u,\tau}_{p,r}$ 满足定理 3.11 的所有假设，而 $M\dot{B}^{u,\tau}_{p,r}$ 在 $p, r \in (1, \infty)$ 时满足定理 5.5 的所有假设。应用这些结果，即可得到所需结论。□

注记 7.4。设所有符号均与定理 7.3 中的相同。则当 $X := M\dot{B}^{u,\tau}_{p,r}$ 时，定理 3.11 是新的；当 $X := M\dot{A}^{u,\tau}_{p,r}$ 时，定理 4.1 也是新的。当 $p \in (1, \infty)$ 时，若 $X := M\dot{A}^{u,\infty}_{p,\infty}$, $k := 1$, $q \in (1, p)$，且 $\Omega := \mathbb{R}^n$，则定理 5.10 与 [23, 命题 5.3], 一致；若 $X := M\dot{A}^{u,\tau}_{p,r}$, , $k := 1$，且 $q \in [1, n n^{-1}] \cup [1, \min\{p, \tau\})$，则该定理化为 [129, 定理 6.16]；定理 5.10 中 $X := M\dot{A}^{u,\tau}_{p,r}$ 的其他情形都是新的。当 $p, r \in (1, \infty)$ 时，若 $X := M\dot{B}^{u,\tau}_{p,r}$, , $k := 1$，且 $q \in [1, n n^{-1}] \cup [1, \min\{p, \tau\})$，则定理 5.5 化为 [129, 定理 6.16]，其他情形都是新的。 —

7.2 混合范数 Lebesgue 空间

给定向量 $\vec{r} := (r_1, \ldots, r_n) \in [1, \infty]^n$，混合范数勒贝格空间 $L^{\vec{r}}$ 定义为所有满足以下有限范数的 $f \in \mathscr{M}$ 构成的集合

$$\|f\|_{L^{\vec{r}}} := \left\{ \int_{\mathbb{R}} \cdots \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, \ldots, x_n)|^{r_1} \, dx_1 \right]^{\frac{r_2}{r_1}} \cdots dx_n \right\}^{\frac{1}{r_n}},$$

其中，当 $r_i = \infty$ 对于某个 $i \in \{1, \ldots\ldots n\}$ 时，需作通常的相应修改。混合范数 Lebesgue 空间的研究可追溯至 H¨ormander [55]以及 Benedek 和 Panzone [5]。有关混合范数 Lebesgue 空间的更多研究，请参阅 Cleanthous 等人 [19, 20, 21] 以及综述文章 [59]。

定理 7.5. 设 $k \in \mathbb{N}$, $\vec{r} := (r_1, \ldots, r_n) \in (1, \infty)^n$, $r_- := \min\{r_1, \ldots, r_n\}$，且 $q \in [1, \infty)$ 满足 $n(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{rq}) < k$。则定理 *3.11*、*4.1*、*5.5* 和 *5.10* 在 $X := L^{\vec{r}}$ 时仍成立。

证明。由 [128, 定理 4.19], 的证明可知，所讨论的 $L^{\vec{r}}$ 满足定理 5.10 的所有假设。应用该定理，即可得到所需结论。□

注 7.6。所有符号均与定理 7.5 中相同。于是，定理 3.11 和 4.1 中 $X := L^{\vec{r}}$ 的情形是新的。定理 5.5 中 $X := L^{\vec{r}}$、$k := 1$、$q \in [1, r_-)$ 且 $\Omega := \mathbb{R}^n$ 的情形与 [23,定理 5.6] 一致，其他情形则是新的。定理 5.10 中 $X := L^{\vec{r}}$、$k := 1$ 且 $q \in [1, \frac{n}{n-1}] \cup [1, r_-)$ 的情形可化为 [129, 定理 6.23]，其他情形则是新的。

7.3 变指数 Lebesgue 空间

回顾一下，与函数 $r : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ 相关的变指数 *Lebesgue* 空间 $L^{r(\cdot)}$ 定义为所有满足以下有限准范数的 $f \in \mathscr{M}$ 所组成的集合

$$\|f\|_{L^{r(\cdot)}} := \inf \left\{ \lambda \in (0, \infty) : \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{|f(x)|}{\lambda} \right]^{r(x)} dx \le 1 \right\}.$$

关于变指数 Lebesgue 空间的更多相关结果，请参阅 [22, 28, 69, 96]。

设 $r : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ 为一个可测函数，

$$\widetilde{r}_- := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} r(x), \text{ and } \widetilde{r}_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} r(x).$$

如果存在 $r_\infty \in \mathbb{R}$ 和一个正数常数 C，使得对于任意 x、$y \in \mathbb{R}^n$，则称函数 $r : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ 是全局 log-*H¨older* 连续的，

$$|r(x) - r(y)| \le \frac{C}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})} \text{ and } |r(x) - r_\infty| \le \frac{C}{\log(e + |x|)}.$$

定理 7.7。设 $k \in \mathbb{N}$，$r : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ 为全局 *log-H¨older* 连续，$1 < \widetilde{r}_- \le \widetilde{r}_+ < \infty$，且 $q \in [1, \infty)$ 满足 $n(\frac{1}{\widetilde{r}_-} - \frac{1}{q}) < k$。则定理 *3.11*、*4.1*、*5.5* 和 *5.10* 对 $X := L^{r(\cdot)}$ 成立。

证明。应用 [127, 定理 5.10], 的证明，我们得出所考虑的变指数 Lebesgue 空间 $L^{r(\cdot)}$ 满足定理 5.10 的所有假设。因此，我们得到了所需结果。□

注 7.8。设所有符号均与定理 7.7 中相同。那么，取 $X := L^{r(\cdot)}$ 时，定理 3.11 和 4.1 是新的。取 $X := L^{r(\cdot)}$、$k := 1$、$q \in [1, \widetilde{r}_-)$，且 $\Omega := \mathbb{R}^n$ 时，定理 5.5 与 [23, 定理 5.13] 一致，其他情形则是新的。取 $X := L^{r(\cdot)}$、$k := 1$，且 $q \in [1, \frac{n}{n-1}] \cup [1, \widetilde{r}_-)$ 时，定理 5.10 化为 [129, 定理 6.23]，其他情形则是新的。

7.4 Lorentz 空间

回顾一下，对于任意$r\tau \in (0,\infty)$，由 Lorentz 最初研究的*Lorentz* 空间 $L^{r,\tau}$定义为所有满足下述条件的$f \in \mathscr{M}$ 的集合:

$$\|f\|_{L^{r,\tau}} := \left\{ \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{r}} f^*(t) \right]^\tau \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{\tau}} < \infty,$$

其中 f^* 表示f 的递减重排，也就是说，对于任意$t \in [0,\infty)$,

$$f^*(t) := \inf \left\{ s \in (0,\infty) : \left| \{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s \} \right| \le t \right\}$$

约定 $\inf \emptyset = \infty$。

定理 7.9。设 $k \in \mathbb{N}$、r，$\tau \in (1, \infty)$ 和 $q \in [1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{\min\{r,\tau\}} - \frac{1}{q}) < k$。则定理 *3.11*、*4.1*、*5.5* 和 *5.10* 对 $X := L^{r,\tau}$成立。

证明。利用 [127, 定理 5.18], 的证明，我们很容易发现，定理 5.10 中关于 $X := L^{r,\tau}$ 的所有假设均成立，因此定理 3.11、4.1 和 5.5 的假设也都成立；这进一步推出所需结论，从而完成定理 7.9 的证明。□

注 7.10. 所有符号均与定理 7.9 中相同。取 $X := L^{r,\tau}$ 时，定理 3.11 和 4.1 是新的。取 $X := L^{r,\tau}$、$k := 1$、$q \in [1,\min\{r,\tau\})$，且 $\Omega := \mathbb{R}^n$时，定理 5.24] 与之吻合，其余情形都是新的。取 $X := L^{r,\tau}$、$k := 1$，且 $q \in [1, \frac{n}{n-1}] \cup [1, \min\{r,\tau\})$ 时，定理 5.10 化为 [129, 定理 6.27]，其余情形都是新的。

7.5 Orlicz 空间和 Orlicz 切片空间

回顾一下，非递减函数 $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 称为 Orlicz 函数，若 Φ满足 $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t) \in (0,\infty)$ 对任意 $t \in (0,\infty)$ 成立，且 $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$。若对某个 $r \in \mathbb{R}$，存在一个正数常数 $C^{(r)}$，使得对任意 $t \in [0,\infty)$ 和 $s \in (0,1)$ [（或 $s \in [1,\infty)$]），都有 $\Phi(st) \le C^{(r)} s^r \Phi(t)$，则称 Orlicz 函数$\Phi$ 为下型（或上型）r。本小节中，我们始终假设 Φ 是一个同时具有正下型 r_Φ^- 和正上型 r_Φ^+的 Orlicz 函数。Orlicz 空间 L^Φ 定义为所有满足以下准范数有限的 $f \in \mathscr{M}$ 所构成的集合

$$\|f\|_{L^\Phi} := \inf \left\{ \lambda \in (0,\infty) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \le 1 \right\}.$$

关于 Orlicz 空间的更多相关结果，请参见 [26, 97, 102]。对于任意给定的$t,r \in (0,\infty)$, *Orlicz*切片空间 $(E_\Phi^r)_t$ 定义为由所有满足以下有限准范数的$f \in \mathscr{M}$ 组成的集合

$$\|f\|_{(E_\Phi^r)_t} := \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\|f \mathbf{1}_{B(x,t)}\|_{L^\Phi}}{\|\mathbf{1}_{B(x,t)}\|_{L^\Phi}} \right]^r dx \right\}^{\frac{1}{r}},$$

其中，Φ 是一个具有正下型r_Φ^- 和正上型r_Φ^+的 Orlicz 函数。Orlicz切片空间由 [122] 引入，是切片空间（例如，参见 [2, 3]）和 Wiener混合空间（例如，参见 [49, 54, 66]）的推广。关于 Orlicz切片空间的最新研究，请参见 Ho [50, 51, 52]。

定理7.11。设 $k \in \mathbb{N}$，且 Φ 是一个满足 $1 < r_\Phi^- \le r_\Phi^+ < \infty$的 *Orlicz* 函数，它具有正下型 r_Φ^- 和正上型 r_Φ^+。

(i) 若 $q \in [1,\infty)$满足 $n(\frac{1}{r_\Phi^-} - \frac{1}{q}) < k$，则定理 *3.11*、*4.1*、*5.5* 和 *5.10* 在 $X := L^\Phi$下成立。

(ii) 如果 $t \in (0,\infty)$、$r \in (1,\infty)$ 和 $q \in [1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{\min\{r_\Phi^-, r\}} - \frac{1}{q}) < k$，则定理 *3.11*、*4.1*、*5.5* 和 *5.10* 对 $X := (E_\Phi^r)_t$成立。

证明。 由 [128, 定理 4.25 和 4.27], 的证明可知，所考虑的 Orlicz 空间 L^{Φ} 和 Orlicz切片空间 $(E^r_{\Phi})_t$ 满足定理 5.10 以及定理 3.11、4.1 和 5.5 的所有假设。因此，我们得到了所需的结论。□

注记 7.12. 所有符号均与定理7.11中的相同。

(i) 当 $X := L^{\Phi}$ 时，定理 3.11 和 4.1 是新的。当 $X := L^{\Phi}$、$k := 1$ 且 $q \in [1, n n_{-1}] \cup [1, r^-_{\Phi})$ 时，定理 5.5 和 5.10 化归为 [129, 定理 6.29]，其他情形均为新的。(ii) 当 $X := (E^r_{\Phi})_t$ 时，定理 3.11 和 4.1 是新的。当 $X := (E^r_{\Phi})_t$、$k := 1$ 且 $q \in [1, n n_{-1}] \cup [1, \min\{r^-_{\Phi}, r\})$ 时，定理 ~~5.5~~ 和 5.10 化归为 [129, 定理 6.31]，其他情形均为新的。

7.6 局部和全局广义 Herz 空间

回顾一下，经典Herz空间最初由Herz引入，用于研究关于绝对收敛的傅里叶变换的Bernstein定理。最近，Rafeiro 和 Samko引入了局部和全局广义Herz空间（见定义7.14），分别推广了经典Herz空间和广义Morrey型空间。关于Herz空间的更多研究，请参见 [42, 47, 53, 60, 74, 75, 103, 126]。

为给出上述广义Herz空间的定义，我们先介绍Matuszewska–Orlicz指标如下。这些指标由 [86, 87] 引入，用于刻画函数在原点和无穷远处的增长性质（另见 [75]）。

定义7.13。设 ω 是$(0,\infty)$上的正函数。则 ω 的*Matuszewska–Orlicz*指标 $m_0(\omega)$、$M_0(\omega)$、$m_\infty(\omega)$和$M_\infty(\omega)$分别定义如下：对任意$h \in (0,\infty)$,

$$m_0(\omega) := \sup_{t\in(0,1)} \frac{\log\left[\limsup_{h\to 0^+} \frac{\omega(ht)}{\omega(h)}\right]}{\log t},\ M_0(\omega) := \inf_{t\in(0,1)} \frac{\log\left[\liminf_{h\to 0^+} \frac{\omega(ht)}{\omega(h)}\right]}{\log t},$$

$$m_\infty(\omega) := \sup_{t\in(1,\infty)} \frac{\log\left[\liminf_{h\to \infty} \frac{\omega(ht)}{\omega(h)}\right]}{\log t},\ \text{and}\ M_\infty(\omega) := \inf_{t\in(1,\infty)} \frac{\log\left[\limsup_{h\to \infty} \frac{\omega(ht)}{\omega(h)}\right]}{\log t}.$$

设 $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$，且 ω 是 $\mathbb{R}_+$上的非负函数。若存在常数 $C \in [1,\infty)$，使得对于任意满足 $t \le \tau$ （分别为 $t \ge \tau$）的 $t,\tau \in \mathbb{R}_+$，都有 $\omega(t) \le C\omega(\tau)$，则称函数 ω 在 $\mathbb{R}_+$ 上几乎递增（分别为几乎递减）。函数类 $M(\mathbb{R}_+)$定义为满足以下条件的 $\mathbb{R}_+$ 上的所有正函数 ω 的集合：对于任意 $0 < \delta < N < \infty$，$0 < \inf_{t\in(\delta,N)} \omega(t) \le \sup_{t\in(\delta,N)} \omega(t) < \infty$，并且存在四个常数 α_0、β_0、α_∞、$\beta_\infty \in \mathbb{R}$，使得

(i) 对任意 $t \in (0,1]$，$\omega(t)t^{-\alpha_0}$ 几乎递增，且 $\omega(t)t^{-\beta_0}$ 几乎递减；

(ii) 对任意 $t \in [1,\infty)$，$\omega(t)t^{-\alpha_\infty}$ 几乎递增，且 $\omega(t)t^{-\beta_\infty}$ 几乎递减。

以下广义 Herz 空间的概念最初由 Rafeiro 和 Samko 在 [103, 定义2.2] 中引入（另见 [75]）。

定义7.14。设 $p,r \in (0,\infty]$ 和 $\omega \in M(\mathbb{R}_+)$。

(i) 令 $\xi \in \mathbb{R}^n$。局部广义 *Herz* 空间 $\dot{\mathcal{K}}^{p,\ r}_{\omega,\ \xi}$ 定义为所有满足以下条件的 $f \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\})$ 的集合：

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{K}}^{p,r}_{\omega,\xi}} := \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\omega\left(2^k\right)\right]^r \left\|f\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},2^k)\setminus B(\mathbf{0},2^{k-1})}\right\|^r_{L^p}\right\}^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

(ii) 全局广义 *Herz* 空间 $\dot{\mathcal{K}}^{p,\,\omega^r}$ 定义为所有满足以下条件的 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}$ 的集合：$\|f\|_{\dot{\mathcal{K}}^{p,\,\omega^r}} := \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{\dot{\mathcal{K}}^{p,\,r\omega,\,\xi}} < \infty$。

定理 7.15。 设 $k \in \mathbb{N}$，p，$r \in [1,\infty)$，$\mu \in [1,\min\{p,\,r\}]$，$q \in [1,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{q}) < k$，且 $\omega \in M(\mathbb{R}_+)$ 满足

$$-\frac{n}{p} < m_0(\omega) \le M_0(\omega) < n\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{p}\right) \text{ and } -\frac{n}{p} < m_\infty(\omega) \le M_\infty(\omega) < n\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{p}\right).$$

(i) 设 $\xi \in \mathbb{R}^n$。则定理 *3.11* 和 *4.1* 在 $X := \dot{\mathcal{K}}^{p,\,\omega^r,\,\xi}$ 的条件下成立。若 $\mu \in (1,\,\infty)$ 或 $\mu = q = 1$，则定理 *5.5* 在 $X := \dot{\mathcal{K}}^{p,\,\omega^r,\,\xi}$ 的条件下成立。若 $\mu \in (1,\,\infty)$，则定理 *5.10* 在 $X := \dot{\mathcal{K}}p,\,r\,\omega,\,\xi$ 的条件下成立。

(ii) 定理 *3.11* 和 *4.1* 在 $X := \dot{\mathcal{K}}^{p,\,\omega^r}$ 的条件下成立。若 $\mu \in (1,\,\infty)$，则定理 *5.10* 在 $X := \dot{\mathcal{K}}^{p,\,\omega^r}$ 的条件下成立。

证明。 通过采用与 [128, 定理 4.15], 证明中类似的论证，我们可推出 (i)。另一方面，利用 (i) 以及 $\dot{\mathcal{K}}^{p}{}_{,\omega^r}$ 的定义，我们可以轻易得到 (ii)。至此，定理 7.15 的证明完成。□

注 7.16。 所有符号均与定理 7.15 中的相同。

(i) 当 $X := \dot{\mathcal{K}}\mathrm{p,r}\,{}_{\omega,\xi}$ 时，定理 3.11 和 4.1 是新的。当 $X := \dot{\mathcal{K}}\mathrm{p,r}\,{}_{\omega,\xi}$、$\mathrm{k} := 1$、$\mathrm{p,\,r} \in (1,\infty)$ 且 $\mathrm{q} \in [1,\mathrm{n}\,\mathrm{n}_{-1}] \cup [1,\mu]$ 时，定理 5.5 归结为 [129, 定理 6.19]，其他情形都是新的。当 $\mathrm{p,\,r} \in (1,\infty)$ 时，若 $X := \dot{\mathcal{K}}\mathrm{p,r}\,{}_{\omega,\xi}$、$\mathrm{k} := 1$ 且 $\mathrm{q} \in [1,\mathrm{n}\,\mathrm{n}_{-1}] \cup [1,\mu]$，则定理 5.10 归结为 [129, 定理 6.19]，其他情形都是新的。

(ii) 定理 3.11 和 4.1 在 $X := \dot{\mathcal{K}}^{p}{}_{,\omega^r}$ 的情形下是新的。当 p、$r \in (1,\infty)$ 时，定理 5.10 在 $X := \dot{\mathcal{K}}_{p,r\omega}$、$k := 1$ 且 $q \in [1,n\,n_{-1}] \cup [1,\mu)$ 的条件下可化为 [129, 定理 6.21]，其他情形则是新的。

7.7 更多函数空间

在本小节中，我们指出本文的主要结果可应用于更多特定的函数空间。为控制本文篇幅，我们省略细节，但提供一些相关参考文献。

加权奥利兹空间。 设 $A_\infty := \bigcup_{p\in[1,\infty)} A_p$ 且 ω 为一个 A_∞-权重。回顾一下，加权奥利兹空间 L^Φ_ω 定义为由所有具有以下有限 $f \in \mathscr{M}$ 准范数 的函数组成的集合

$$\|f\|_{L^\Phi_\omega} := \inf\left\{\lambda \in (0,\infty) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\omega(x)\,dx \le 1\right\}.$$

由 [115, 注 5.22 (ii)], 可知，具有正下型 r^-_Φ 和正上型 r^+_Φ，且满足 $1 < r^-_\Phi \le r^+_\Phi < \infty$ 的加权 Orlicz 空间是一个 BBF 空间。根据 [102, 第 20 页，定理 13], [68, 定理 2.1.1], 以及绝对连续范数的定义，我们发现加权 Orlicz 空间 L^Φ_ω 满足定理 3.11、4.1、5.5 和 5.10 的所有假设。因此，定理 3.11、4.1、5.5 和 5.10 可应用于 $X := L^\Phi_\omega$，所得结果是新的；细节从略。

混合范数 Herz 空间。 令 $\vec{p} := (p_1,\dots,p_n)$，$\vec{q} := (q_1,\dots,q_n) \in [1,\infty)^n$ 以及 $\vec{\alpha} := (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$。混合范数 *Herz* 空间 $\dot{E}^{\vec{\alpha},\vec{p}}_{\vec{q}}$ 定义为所有具有以下有限准范数的 $f \in \mathscr{M}$ 所组成的集合

$$\|f\|_{\dot{E}^{\vec{\alpha},\vec{p}}_{\vec{q}}} := \left\{\sum_{k_n\in\mathbb{Z}} 2^{k_n p_n \alpha_n}\left[\int_{R_{k_n}} \cdots \left\{\sum_{k_1\in\mathbb{Z}} 2^{k_1 p_1 \alpha_1}\right.\right.\right.$$

$$\times\left[\int_{R_{k_1}}|f(x_1,\dots,x_n)|^{q_1}\,dx_1\right]^{\frac{p_1}{q_1}}\Bigg\}^{\frac{q_2}{p_1}}\cdots\,dx_n\Bigg]^{\frac{p_n}{q_n}}\Bigg\}^{\frac{1}{p_n}},$$

其中，对于任意 $i\in\{1,\dots,n\}$ 和 $k_i\in\mathbb{Z}$，$R_{k_i}:=(-2^{k_i},2^{k_i})\setminus(-2^{k_i-1},2^{k_i-1})$。应用 [126, 命题 2.22],，我们发现，具有 $\alpha_i\in(-\frac{1}{q_i},1-\frac{1}{q_i})$ 的混合范数 Herz 空间 $\dot{E}^{\vec{\alpha},\vec{p}}_{\vec{q}}$ 是一个 BBF 空间。根据 [126, 推论 2.19 和 4.7] 以及绝对连续范数的定义，我们推得混合范数 Herz 空间 $\dot{E}^{\vec{\alpha},\vec{p}}_{\vec{q}}$ 满足定理 3.11、4.1、5.5 和 5.10 的所有假设。因此，定理 3.11、4.1、5.5 和 5.10 可应用于 $X:=\dot{E}^{\vec{\alpha},\vec{p}}_{\vec{q}}$，所得结果是新的；细节从略。

注 7.17。本节关于特定函数空间的所有这些结果能否应用于偏微分方程的研究，这一点颇为有趣。

致谢

作者谨向所有匿名审稿人致以诚挚的谢意，感谢他们仔细审阅本文并提出多条意见，从而改善了本文的呈现方式。作者还要特别感谢 Emiel Lorist 指出了原发表版本中定理 1.1 在$p=1$ 的情形下出现的上述错误（见注 1.10）。

参考文献

[1] D. R. Adams, 《Morrey 空间》, 《应用与数值调和分析讲义》, Birkh¨auser/Springer, Cham, 2015年。 [38▮2] P. Auscher 和 M. Mourgoglou, 《通过一阶系统表示和唯一性研究椭圆边值问题》, Rev. Mat. Iberoam. 35 (2019), 241–315。 [41▮3] P. Auscher 和 C. Prisuelos-Arribas, 《通过外推获得帐篷空间有界性》, Math. Z. 286 (2017), 1575–1604。 [41▮4] P. B´egout 和 A. M. Vargas, 《L^2-临界非线性薛定谔方程的质量集中现象》, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 5257–5282。 [38▮5] A. Benedek 和 R. Panzone, 《具有混合范数的空间L^P》, Duke Math. J. 28 (1961), 301–324。 [40▮6] C. Bennett 和 R. Sharpley, 《算子插值》, Pure Appl. Math. 129, Academic Press, Inc., 波士顿, 1988年。 [17, 18, 28▮7] B. Bojarski、L. Ihnatsyeva 和 J. Kinnunen, 《如何识别高阶 Sobolev 空间中的多项式》, Math. Scand. 112 (2013), 161–181。 [2▮8] J. Bourgain, 《关于$\mathbf{R}^3$, 中的限制与乘子问题》, 载于: 泛函分析的几何方面（1989–90）, 第179–191页, 数学讲义1469, Springer, 柏林, 1991年。 [38▮9] J. Bourgain, 《Strichartz 不等式的改进及其在具有临界非线性的二维非线性薛定谔方程中的应用》, Internat. Math. Res. Notes 1998 (1998), 253–283。 [38▮10] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu, 《重新审视 Sobolev 空间》, 载于: 最优控制与偏微分方程, 第439–455页, IOS Press, 阿姆斯特丹, 2001年。 [2,6▮11] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu, 《当$W^{s,p}$ 且$s\uparrow 1$时的极限嵌入定理及其应用》, J. Anal. Math. 87 (2002), 77–101。 [2▮12] H. Brezis, 《如何识别常函数: 与 Sobolev 空间的联系》, Russian Math. Surveys 57 (2002), 693–708。 [5, 31]

[13] H. Brezis, 《泛函分析、Sobolev 空间与偏微分方程》, Univer- sitext, Springer, 纽约, 2011年。 [9][14] H. Brezis 和 P. Mironescu, 《Gagliardo–Nirenberg 不等式与非不等式：完整论述》, Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire 35 (2018), 1355–1376。 [5][15] H. Brezis 和 P. Mironescu, 《Sobolev 与 Gagliardo–Nirenberg 的交互》, J. Funct. Anal. 277 (2019), 2839–2864。 [5][16] H.-Q. Bui, 《加权 Besov 空间与 Triebel 空间：实方法插值》, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 581–605。 [14][17] S.-K. Chua, 《加权 Sobolev 空间的延拓定理》, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 1027–1076。 [20][18] A. Claros, 《通过分数阶积分得到退化的 Poincar´e–Sobolev 不等式》, J. Funct. Anal. 289 (2025), Paper No. 111000, 28 pp. [8, 37, 38][19] G. Cleanthous 和 A. G. Georgiadis, 《混合范数 α-调制空间》, Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), 3323–3356。 [40][20] G. Cleanthous、A. G. Georgiadis 和 M. Nielsen, 《各向异性混合范数 Hardy 空间》, 《几何分析杂志》27 (2017), 2758–2787。 [40][21] G. Cleanthous、A. G. Georgiadis 和 M. Nielsen, 《各向异性齐次混合范数空间的分子分解及其在算子有界性中的应用》, Appl. Comput. Harmon. Anal. 47 (2019), 447–480。 [40][22] D. V. Cruz-Uribe 和 A. Fiorenza, 《变指数 Lebesgue 空间》, 《应用与数值调和分析》, Birkh¨auser/Springer, 海德堡, 2013年。 [40][23] F. Dai、L. Grafakos、Z. Pan、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang, 《球 Banach 函数空间上的 Bourgain–Brezis–Mironescu 公式》, Math. Ann. 388 (2024), 1691–1768。[18, 21, 29, 30, 31, 39, 40, 41] [24] F. Dai、X. Lin、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang, 《球 Banach 函数空间中的 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式及其在分数阶 Sobolev 不等式和 Gagliardo–Nirenberg 不等式中的应用》, Calc. Var. Partial Differential Equations 62 (2023), Paper No. 56, 73 pp. [15, 19, 21][25] J. D´avila, 《关于有界变差函数的一个未决问题》, Calc. Var. Partial Differential Equations 15 (2002), 519–527。 [2][26] R. del Campo、A. Fern´andez、F. Mayoral 和 F. Naranjo, 《与拟 Banach 函数空间相关的 Orlicz 空间：向量测度与插值的应用》, Collect. Math. 72 (2021), 481–499。 [41] [27] L. Diening、P. Harjulehto、P. H¨ast¨o 和 M. R˚uˇziˇcka, 《变指数 Lebesgue 与 Sobolev 空间》, 数学讲义2017, Springer, 海德堡, 2011年。 [8][28] L. Diening、P. H¨ast¨o 和 S. Roudenko, 《变光滑度与可积性的函数空间》, J. Funct. Anal. 256 (2009), 1731–1768。 [40][29] E. Di Nezza、G. Palatucci 和 E. Valdinoci, 《分数阶 Sobolev 空间指南》, Bull. Sci. Math. 136 (2012), 521–573。 [2][30] O. Dom´ınguez、Y. Li、S. Tikhonov、D. Yang 和 W. Yuan, 《通过 K-泛函统一研究自我改进性质》, Calc. Var. Partial Differential Equations 63 (2024), Paper No. 231, 50 pp. [2][31] O. Dom´ınguez、Y. Li、S. Tikhonov、D. Yang 和 W. Yuan, 《通过 Besov 极投影体研究仿射 Moser–Trudinger 不等式的新方法》, Math. Ann. 392 (2025), 3319–3366。 [2][32]O. Dom´ınguez 和 M. Milman, 《通过插值与外推得到分数阶 Sobolev 空间的 Bourgain–Brezis–Mironescu–Maz'ya–Shaposhnikova 极限公式》, Calc. Var. Partial Differential Equations 62 (2023), Paper No. 43, 37 pp. [2] [33] I. Drelichman 和 R. G. Dur´an, 《任意有界区域上的 Bourgain–Br´ezis–Mironescu 公式》, Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2022), 701–708。 [2]

[34] R. Duarte 和 J. Drumond Silva，加权 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式，J. Funct. Anal. 285 (2023)，论文编号 110009，共 49 页。 [5][35] J. Duoandikoetxea，傅里叶分析，数学研究生丛书 29，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。 [4, 8, 34][36] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy，《测度论与函数的精细性质》，修订版，数学教材，CRC 出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2015年。 [12, 28, 35][37] R. Hurri-Syrj¨anen、J. C. Mart´ınez-Perales、C. P´erez 和 A. V¨ah¨akangas，关于 Gagliardo 半范数与 Sobolev 半范数之间的加权不等式，《以色列数学杂志》，2025年，DOI：10.1007/s11856-025-2834-y。 [4, 5][38] R. Ferreira、C. Kreisbeck 和 A. Ribeiro，借助涉及差商的泛函刻画多项式与高阶 Sobolev 空间，《非线性分析》112 (2015)，199–214。 [28][39] A. Fiorenza、M. R. Formica、T. Roskovec 和 F. Soudsk´y，重排不变 Banach 函数空间中的 Gagliardo–Nirenberg 不等式，Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. 30 (2019)，847–864。 [5][40] L. Grafakos，《经典傅里叶分析》，第三版，数学研究生教材 249，Springer，纽约，2014年。 [7, 8, 9, 10, 26, 35, 37, 38][41] L. Grafakos，《现代傅里叶分析》，第三版，数学研究生教材 250，Springer，纽约，2014年。 [14, 16][42] L. Grafakos、X. Li 和 D. Yang，Herz 型 Hardy 空间上的双线性算子，Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998)，1249–1275。 [42][43] P. Hajłasz 和 A. Kałamajska，Sobolev 函数的多项式渐近性与逼近，《数学研究》113 (1995)，55–64。 [13][44] B. Han，分数阶 Sobolev 半范数的渐近行为：一种几何方法，J. Funct. Anal. 287 (2024)，论文编号 110608，共 25 页。 [2][45] D. Hashimoto 、 Y. Sawano 和 T. Shimomura，拟度量测度空间上 Musielak–Orlicz 空间中函数的广义黎斯势的 Gagliardo–Nirenberg 不等式，《数学汇刊》161 (2020)，51–66。 [5][46] N. Hatano、T. Nogayama、Y. Sawano 和 D. I. Hakim，Bourgain–Morrey 空间及其在算子有界性中的应用，J. Funct. Anal. 284 (2023)，论文编号 109720，共 52 页。 [38, 39][47] E. Hern´andez 和 D. Yang，Herz 空间的插值及其应用，Math. Nachr. 205 (1999)，69–87。 [42][48] C. S. Herz，Lipschitz 空间与绝对收敛的傅里叶变换的 Bernstein 定理，J. Math. Mech. 18 (1968/69)，283–323。 [42][49] K.-P. Ho，混合空间 (L^p, l^q) 上的伸缩算子与积分算子，Ric. Mat. 68 (2019)，661–677。 [41][50] K.-P. Ho，Orlicz 切片空间与 Orlicz 切片 Hardy 空间上的算子，J. Math. Anal. Appl. 503 (2021)，论文编号 125279，共 18 页。 [41][51] K.-P. Ho，Orlicz 切片 Hardy 空间上的分数阶积分算子，Fract. Calc. Appl. Anal. 25 (2022)，1294–1305。 [41][52] K.-P. Ho，球拟 Banach 函数空间相关 Hardy 空间上的强奇异 Calder´on–Zygmund 算子，Anal. Math. Phys. 13 (2023)，论文编号 67，共 22 页。 [41][53] K.-P. Ho 和 Y. Sawano，Morrey–Herz 空间及 Morrey–Herz–Hardy 空间的新刻画及其在线性算子中的应用，《数学学报（英文版）》41 (2025)，327–354。 [42][54] F. Holland，L^p 与 l^q的混合空间上的调和分析，J. London Math. Soc. (2) 10 (1975)，295–305。 [41][55] L. H¨ormander，L^p 空间中平移不变算子的估计，Acta Math. 104 (1960)，93–140。 [40]

[56] P. Hu、Y. Li 和 D. Yang，Bourgain–Morrey 空间与 Triebel–Lizorkin 空间结构的交汇，Math. Z. 304 (2023)，论文编号 19，共 49 页。 [38, 39][57] P. Hu、Y. Li、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，球 Banach 函数空间中高阶梯度的锐 Brezis–Seeger–Van Schaftingen–Yung 公式，J. Geom. Anal. 35 (2025)，论文编号 388，共 76 页。 [22, 28][58] L. Huang、D.-C. Chang 和 D. Yang，与球拟 Banach 函数空间相关的 Hardy 空间的傅里叶变换，《应用分析》101 (2022)，3825–3840。 [4][59] L. Huang 和 D. Yang，关于具有混合范数的函数空间——综述，J. Math. Study 54 (2021)，262–336。 [40][60] L. Huang、F. Weisz、D. Yang 和 W. Yuan，通过相关 Herz 空间研究混合范数 Lebesgue 空间上的傅里叶变换可求和性，《Analysis and Applications》21 (2023)，279–328。 [42][61] M. Izuki 和 Y. Sawano，通过球 Banach 函数空间刻画 BMO，Vestn. St.-Peterbg. Univ. Mat. Mekh. Astron. 4 (62) (2017)，78–86。 [4][62] B. Jawerth 和 M. Milman，外推理论及其应用，Mem. Amer. Math. Soc. 89 (1991)，第 440 号，iv+82页。 [5][63] P. W. Jones，拟共形映射与 Sobolev 空间中函数的可延拓性，Acta Math. 147 (1981)，71–88。 [28][64] G. E. Karadzhov、M. Milman 和 J. Xiao，高阶 Besov 空间的极限与锐重迭定理，J. Funct. Anal. 221 (2005)，323–339。 [2][65] C. E. Kenig、G. Ponce 和 L. Vega，关于在 L^2, 中临界的广义 KdV 方程爆破解的集中现象，载于：非线性波动方程（罗得岛州普罗维登斯，1998），第 131–156 页，当代数学 263，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000年。 [38][66] N. Kikuchi、E. Nakai、N. Tomita、K. Yabuta 和 T. Yoneda，混合空间及离散情形下的 Calder´on–Zygmund 算子，J. Math. Anal. Appl. 335 (2007)，198–212。 [41][67] J. Kinnunen、J. Lehrb¨ack 和 A. V¨ah¨akangas，《Sobolev 空间的极大函数方法》，数学调查专著 257，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2021年。 [5][68] V. Kokilashvili 和 M. Krbec，《Lorentz 空间与 Orlicz 空间中的加权不等式》，世界科学出版公司，新泽西州里弗埃奇，1991年。xii +233 页。 [43][69] O. Kov´aˇcik 和 J. R´akosn´ık，关于空间 $L^{p(x)}$ 和 $W^{k,p(x)}$，Czechoslovak Math. J. 41 (116) (1991)，592–618。 [40][70] O. Lehto 和 K. I. Virtanen，《平面上的拟共形映射》，第二版，施普林格出版社，纽约–海德堡，1973年。 [28][71] G. Leoni，《Sobolev 空间入门》，第二版，数学研究生丛书 181，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。 [23][72] G. Leoni，《分数阶 Sobolev 空间入门》，数学研究生丛书 229，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2023年。 [2][73] K. Le´snik、T. Roskovec 和 F. Soudsk´y，通过新的逐点估计得到 Gagliardo–Nirenberg 不等式，J. Funct. Anal. 289 (2025)，论文编号 110996，共 26 页。 [5][74] X. Li 和 D. Yang，Herz 空间上一些次线性算子的有界性，《伊利诺伊数学杂志》40 (1996)，484–501。 [42][75] Y. Li、D. Yang 和 L. Huang，《Rafeiro 和 Samko 广义 Herz 空间相关 Hardy 空间的实变函数理论》，数学讲义 2320，Springer，新加坡，2022年。 [4, 18, 42][76] Y. Li、D. Yang、W. Yuan、Y. Zhang 和 Y. Zhao，锐加权 Cohen–Dahmen–Daubechies–DeVore 不等式及其在（加权）临界 Sobolev 空间、Gagliardo–Nirenberg 不等式和 Muckenhoupt 权重中的应用，已投稿。
[4, 16, 17, 22, 39][77] G. G. Lorentz，一些新的函数空间，Ann. of Math. (2) 51 (1950)，37–55。 [41][78] G. G. Lorentz，关于空间 Λ的理论，Pacific J. Math. 1 (1951)，411–429。 [41]

[79] E. Lorist 和 Z. Nieraeth，恰当构建 Banach 函数空间，Indag. Math. (N.S.) 35 (2024年), 247–268. [17, 18, 28][80] E. Lorist 和 Z. Nieraeth，Banach 函数空间上紧性的外推，J. Fourier Anal. Appl. 30 (2024年), 第 30 号论文，25 页。 [19][81] S. Lu，《实 H^p 空间四讲》，世界科学出版公司，新泽西州里弗埃奇，1995年。 [22, 24][82] M. Ludwig，各向异性分数阶Sobolev范数，Adv. Math. 252 (2014), 150–157. [2][83] S. Masaki，质量次临界非散射解的两个极小化问题，arXiv: 1605.09234。 [38][84] S. Masaki 和 J. Segata，质量次临界广义 Korteweg–de Vries 方程的最小非散射解的存在性，Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire 35 (2018), 283–326. [38][85] S. Masaki 和 J. Segata，非对角情形下 Airy 方程的 Strichartz估计改进及其应用，SIAM J. Math. Anal. 50 (2018), 2839–2866. [38][86] W. Matuszewska 和 W. Orlicz，关于 φ- 函数的某些性质，Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 439–443. [42][87] W. Matuszewska 和 W. Orlicz，关于按增长阶分类的若干函数类，Studia Math. 26 (1965), 11–24. [42][88] V. Maz'ya 和 T. Shaposhnikova，关于 Bourgain、Brezis 和 Mironescu 关于分数阶 Sobolev 空间极限嵌入的定理，J. Funct. Anal. 195 (2002年), 230–238.[5][89] M. Milman，关于 Sobolev 空间的极限与插值尺度连续性的注记，Trans. Amer. Math. Soc. 357 (9) (2005) 3425–3442. [5][90] Y. Mizuta、E. Nakai、Y. Sawano 和 T. Shimomura，Musielak–Orlicz 空间中函数的广义 Riesz 位势的 Gagliardo–Nirenberg 不等式，Arch. Math. (Basel) 98 (2012), 253–263. [5][91] Y. Mizuta、E. Nakai、Y. Sawano 和 T. Shimomura，变指数Lebesgue空间的Littlewood–Paley理论及Riesz势的 Gagliardo–Nirenberg 不等式，J. Math. Soc. Japan 65 (2013), 633–670. [5][92] K. Mohanta，任意区域中 $W^{s,p}_q$, -空间的 Bourgain–Brezis–Mironescu 公式，Calc. Var. Partial Differential Equations 63 (2024年), 第 31 号论文，17 页。 [2, 6, 9, 13][93] C. B. Morrey，拟线性椭圆偏微分方程的解，Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126–166. [38][94] A. Moyua、A. Vargas 和 L. Vega，$\mathbb{R}^3$中与振荡积分相关的限制定理和极大算子，Duke Math. J. 96 (1999), 547–574. [38][95] C. Muscalu、T. Tao 和 C. Thiele，由奇异乘子定义的多线性算子，J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 469–496. [22][96] E. Nakai 和 Y. Sawano，变指数 Hardy 空间与广义Campanato空间，J. Funct. Anal. 262 (2012), 3665–3748. [40][97] E. Nakai 和 Y. Sawano，Orlicz–Hardy空间及其对偶，Sci. China Math. 57 (2014), 903–962. [41][98] Z. Nieraeth，一般拟 Banach 函数空间中的外推，J. Funct. Anal. 285 (2023), 第 110130 号论文，109 页。 [17, 19][99] Z. Pan、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，球拟 Banach 函数空间范数的 Gagliardo表示，J. Funct. Anal. 286 (2024年), 第 110205 号论文，78 页。 [6, 21][100] C. P´erez 和 E. Rela，退化的 Poincar´e–Sobolev 不等式，Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019), 6087–6133. [9][101] A. C. Ponce，一种具有 Poincar´e 不等式精神的估计，J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 6 (2004), 1–15. [2][102] M. M. Rao 和 Z. D. Ren，《Orlicz空间的应用》，数学专著与教材丛书 Pure Appl. Math. 250，Marcel Dekker, Inc.，纽约，2002年。 [41, 43]

[103] H. Rafeiro 和 S. Samko，Herz 空间与 Morrey 型空间及互补 Morrey 型空间相遇，J. Fourier Anal. Appl. 26 (2020), 第 74 号论文，14 页。 [42][104] W. Rudin，《实分析与复分析》，第三版，麦格劳-希尔图书公司，纽约，1987年。 [36][105] W. Rudin，《泛函分析》，第二版，国际纯粹与应用数学丛书，McGraw-Hill, Inc.，纽约，1991年。 [35][106] Y. Sawano、G. Di Fazio 和 D. I. Hakim，《Morrey 空间——积分算子与偏微分方程导论及应用》，第一卷，数学研究专著与笔记丛书，CRC 出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2020年。 [38][107] Y. Sawano、G. Di Fazio 和 D. I. Hakim，《Morrey 空间——积分算子与偏微分方程导论及应用》，第二卷，数学研究专著与笔记丛书，CRC 出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2020年。 [38][108] Y. Sawano、K.-P. Ho、D. Yang 和 S. Yang，与球拟 Banach 函数空间相关的 Hardy 空间，《数学论文集》525 (2017), 1–102. [4, 17, 18, 21][109] Y. Sawano 和 H. Wadade，临界 Sobolev–Morrey 空间中的 Gagliardo–Nirenberg 型不等式，J. Fourier Anal. Appl. 19 (2013), 20–47. [5][110] M. Taibleson 和 G. Weiss，某些 Hardy 空间的分子刻画，载于：《Hardy 空间的表示定理》，Ast´erisque 77，第 67–149 页，法国数学会，巴黎，1980年。 [22][111] J. Tao、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，球 Banach 函数空间上交换子的紧性刻画，《位势分析》58 (2023), 645–679. [4, 19][112] H. Triebel，《温和齐次函数空间》，欧洲数学学会数学讲义丛书，欧洲数学学会（EMS），Z¨urich，2015年。 [2][113] B. O. Turesson，《非线性位势理论与加权 Sobolev 空间》，数学讲义 1736，施普林格出版社，柏林，2000年。 [12][114] F. Wang、D. Yang 和 S. Yang，与球拟 Banach 函数空间相关的 Hardy 空间的应用，《数学成果》75 (2020), 第 26 号论文，58 页。 [4, 28] [115] S. Wang、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，与球拟 Banach 函数空间相关的弱 Hardy 型空间 II：Littlewood–Paley 刻画与实插值，《几何分析杂志》31 (2021), 631–696. [4, 43][116] X. Yan、Z. He、D. Yang 和 W. Yuan，齐次型空间上与球拟 Banach 函数空间相关的 Hardy 空间：Littlewood–Paley 刻画及其在 Calder´on–Zygmund 算子有界性中的应用，《数学学报（英文版）》38 (2022), 1133–1184. [4, 17][117] X. Yan、Z. He、D. Yang 和 W. Yuan，齐次型空间上与球拟 Banach 函数空间相关的 Hardy 空间：极大函数刻画、分解及对偶空间，《数学新闻》296 (2023), 3056–3116. [4][118] X. Yan、D. Yang 和 W. Yuan，与球拟 Banach 函数空间相关的 Hardy 空间的内在平方函数刻画，《中国数学前沿》15 (2020), 769–806.[4][119] X. Yao 和 Z. Zhang，从复分析视角研究分数阶 Sobolev 空间，J. Funct. Anal. 279 (2020), 第 108651 号论文，27 页。 [5][120] W. Yuan、W. Sickel 和 D. Yang，《Morrey 与 Campanato 邂逅 Besov、Lizorkin 和 Triebel》，数学讲义 2005，施普林格出版社，柏林，2010年。 [38][121] Y. Zhang、L. Huang、D. Yang 和 W. Yuan，新型球 Campanato 型函数空间及其应用，《几何分析杂志》32 (2022), 第 99 号论文，42 页。 [4][122] Y. Zhang、D. Yang、W. Yuan 和 S. Wang，Orlicz 切片 Hardy 空间的实变刻画，Anal. Appl. (Singap.) 17 (2019), 597–664. [41][123] Y. Zhang、D. Yang、W. Yuan 和 S. Wang，与球拟 Banach 函数空间相关的弱 Hardy 型空间 I：用于有界性研究的分解及其在 Calder´on–Zygmund 算子有界性中的应用，《中国科学：数学》64 (2021), 2007–2064. [4, 18]

[124] Y. Zhao、Y. Li、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，《Muckenhoupt 权重和齐次球 Banach Sobolev 空间的广义 Frank 刻画》，Adv. Math. 458 (2024年)，论文编号 109957，共 63 页。 [4, 28][125] Y. Zhao、Y. Sawano、J. Tao、D. Yang 和 W. Yuan，《与 Besov 空间结构相结合的 Bourgain–Morrey 空间》，《Steklov 数学研究所学报》323 (2023年)，244–295。 [38, 39][126] Y. Zhao、D. Yang 和 Y. Zhang，《混合范数 Herz 空间及其在相关 Hardy 空间中的应用》，《Analysis and Applications》21 (2023年)，1131–1222。 [42, 44] [127] C. Zhu、D. Yang 和 W. Yuan，《广义 Brezis–Seeger–Van Schaftingen–Yung 公式及其在球 Banach Sobolev 空间中的应用》，Calc. Var. Partial Differential Equa- tions 62 (2023年)，论文编号 234，共 76 页。 [40, 41][128] C. Zhu、D. Yang 和 W. Yuan，《齐次球 Banach Sobolev 空间的 Brezis–Seeger–Van Schaftingen–Yung 型刻画及其应用》，《Communications in Contemporary Mathematics》26 (2024年)，论文编号 2350041，共 48 页。 [17, 34, 39, 40, 42, 43][129] C. Zhu、D. Yang 和 W. Yuan，《延拓域上非齐次球 Banach Sobolev 空间的 Bourgain–Brezis–Mironescu 型刻画》，《几何分析杂志》34 (2024年)，论文编号 295，共 70 页。 [18, 28, 29, 31, 34, 35, 39, 40, 41, 42, 43]

Pingxu Hu、Yinqin Li、Dachun Yang（通讯作者）和 Wen Yuan。

数学与复杂系统实验室（中国教育部），数学科学学院，北京师范大学，北京 100875，中华人民共和国电子邮箱：pingxuhu@mail.bnu.edu.cn（P. Hu）
yinqli@mail.bnu.edu.cn（Y.Li） dcyang@bnu.edu.cn（D. Yang）
wenyuan@bnu.edu.cn（W. Yuan）