arXiv:2601.09109v1 [math.DS] 14 Jan 2026

计算与动力复杂性中的对应 I

SAMUEL EVERETT

Abstract. 我们开始构建一种方法，运用计算复杂性理论中的概念来研究动力系统。对于某一类动力系统，我们为其关联一系列称为目的性问题的判定问题。这些判定问题形式化了针对状态空间自然粗粒化的动力学有限时间可达性问题。我们的主要结果表明，复杂性理论下界会带来动力学后果：如果某个系统存在一个目的问题，且每个判定器的运行时间均为 $2^{\Omega(n)}$，那么该系统必具有正的拓扑熵。这一结果及其他结果带来了一些方法，可通过证明求解相关目的问题的算法的运行时间界，或构造来自不同动力系统的目的问题之间的多项式时间归约，来对动力系统进行分类。

Contents

1. 引言1.1. 本文主要结果概述 1.2. 历史背景与研究动机 1.3. 文章结构 致谢 2. 预备知识 2.1. 动力系统背景 2.2. 计算复杂性背景与符号说明 3. 动力系统离散化 3.1. 符号说明 3.2. 状态空间离散化 3.3. 动力系统在实践中的离散化 4. 有限目的问题 4.1. 目的问题与初步结果 4.2. 目的问题的基本性质 4.3. 目的问题之间的归约与变换 5. 轨道结构与计算复杂性 5.1. 初步结果 5.2. 易处理性、传递性与熵之间的关系 5.3. 定理5.45.4. 定理5.76. 伪随机动力系统与进一步发展 6.1. 伪随机动力系统 6.2. 进一步发展的其他方向 参考文献

2
2
4
5
6
6
6
6
8
8
8
10
11
11
13
14
16
16
17
18
19
20
21
21
22

1. Introduction

构成本研究的三篇论文旨在运用计算复杂性理论的思想研究动力系统，反之亦然。我们的研究围绕动力系统内在的一类搜索问题和判定问题展开。我们证明，动力系统的复杂性与其相关问题的易处理性之间存在双向关系。具体而言，可以通过证明求解与该系统相关问题的算法具有运行时间上界，来证明动力系统具备某些性质。反过来，动力系统的结构会限制能够求解其相关搜索问题和判定问题的算法类别。本文以及文集中的第三篇论文 [42] 关注前一种方向，而第二篇论文 [41] 研究后一种方向；本研究的三篇论文可按任意顺序阅读。

1.1. 本文主要结果概述。

本文的主要结果需要用到一些术语，我们现在先非正式地介绍这些术语，正式定义留待后续章节给出。

令 (X,T) 表示一个动力系统，其中 $X \subseteq \mathbb{R}^m$ 是状态空间，$T\colon X \to X$ 是一个变换。我们所说的拓扑动力系统，是指 $X \subset \mathbb{R}^m$ 是紧致的，且 T 是连续的。若存在一台多项式时间图灵机，在输入 $x \in X \cap \mathbb{Q}^m$ 以及用一元编码的正整数 k 和 r 后，返回满足 $\|w - T^k(x)\|_2 \leq 1/2^r$ 的 $w \in X \cap \mathbb{Q}^m$，则称 (X,T) 可高效离散化（定义 3.4）。此外，如果该映射可逆，且其逆映射可高效离散化，我们就称该动力系统可高效逆离散化。许多标准的动力系统示例都可高效离散化，例如刚性圆旋转、逻辑斯蒂映射、H´énon 映射、Chirikov 标准映射，以及更广泛的一大类利普希茨映射（详细讨论见第3节）。

回顾一下，计算复杂性理论中的判定问题是一项计算任务，它要求判断给定输入是否满足某个指定性质，并给出是或否的答案。如果一台图灵机接受正例并拒绝反例，那么它就判定或求解了该判定问题。现在，我们非正式地描述目的性问题，[1] 这是本文所研究的核心判定问题（定义 4.2）。固定一个可高效离散化的动力系统（X,T）。给定一个整数 $n \geq 1$、一个闭球 $B \subset X$的描述，以及一个函数g 的描述：$\{0,1\}^n \to X$ 将长度为 n 的二进制字符串映射到 X 中的点（定义 4.1），由（X,T）导出的目的性问题的一个实例，就是判断是否存在一个 $s \in \{0,1\}^n$，使得 $T^n(g(s)) \in B$。任何可高效离散化的动力系统都对应一类目的性问题，其中每个问题由一族函数 $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 和闭球 $\{B^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$指定。如果存在一台多项式时间图灵机能够判定某个目的性问题，我们就称该问题简单或易处理；否则，就称其困难或难处理。

如下定理表明，动力系统的行为与其相关目的问题的易处理性之间存在密切联系。

定理 1.1 (定理 5.4)。 *设 (X,T) 是一个可有效离散化的拓扑动力系统。若 (X,T) 具有一个目的问题，且该语言的每个判定器的运行时间均为 $2^{\Omega(n)}$，则该系统的拓扑熵为正。*

作为定理 1.1 的推论，我们证明算法下界能力方面的突破为研究动力系统提供了工具。此外，如果（X，T）是一个存在难解的目的性问题的系统，且该问题可在多项式时间内归约为来自另一系统（Y，S）的目的问题，那么根据定理 *1.1*，（Y，S）具有正的拓扑熵。该推论的使用

[1] 这个词 $telic$ 源自希腊语“telos”，意为终点／目标，或“达成目标”，这恰当地概括了所讨论的问题 本文将其视为一类可达性问题。

在于，当判定问题之间存在多项式时间归约时，构造这种归约通常很容易。在 [42] 中，我们在多个示例中应用了这些技术。

若某个状态空间子集 $A \subseteq X$ 满足以下条件，我们就称其中包含一个目的问题：通俗地说，给定由目标集族 $\{B^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 和函数 $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$（其中 $g^{(n)} : \{0,1\}^n \to X$）组成的目的问题，对每个 $n \geq 1$（见定义 5.5），都有 $B^{(n)} \subseteq A$ 且 $\mathrm{Im}(g^{(n)}) \subset A$。如果一个集合中包含的所有目的问题都由在多项式时间内停机的图灵机判定，我们就称该集合是纯的。若对任意两个非空开集 U、$V \subseteq X$，都存在一个 N 使得 $T^N(U) \cap V \neq \emptyset$，则系统 (X,T) 是传递的。

如果一个动力系统是传递的，且存在困难的目的性问题，那么我们会预期困难的目的性问题很常见：也就是说，它们不能包含在零测集中。事实上，我们得到以下二分定理。

定理 1.2（定理 5.7）。设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 是紧致且连通的，并设 $(X,\ T)$ 是一个具有逆映射、可高效离散化且传递的拓扑动力系统。那么，X 要么是纯集，要么每个纯集 $A \subset X$ 都包含于 X的某个开稠密子集的补集中。

下面的定理实质上确立了对目的问题求解的复杂性对于某些系统而言是一种拓扑不变性。

定理 1.3（定理 4.9）。设 $X \subset \mathbb{R}$ 是一个闭区间，并设 $(X,\ T)$ 和 $(X,\ S)$ 是两个可高效离散化的动力系统。设 $\varphi :\ X \to X$ 是这两个系统之间的共轭，且可高效逆离散化。那么，$(X,\ T)$ 存在一个困难目的问题，当且仅当 $(X,\ S)$ 存在一个困难目的问题。

存在一种基于相关目的问题之间对应关系的可高效离散化动力系统分类理论。通过引入动力系统之间归约的概念，可以实现这一点。如果任何来自可高效离散化动力系统 (X,T) 的目的问题，都能在多项式时间内（通过 Karp 归约或图灵归约）归约到某个来自可高效离散化系统 (Y,S) 的目的问题，我们就称 (X,T) 归约到 (Y,S)，并记作 $(X,T) \leq_p (Y,S)$。关系 $\leq_p$ 是在可高效离散化动力系统这一类上的预序。这会导出等价关系 $\sim_p$，使得 $(X,T) \sim_p (Y,S)$ 当且仅当 $(Y,S) \leq_p (X,T)$ 且 $(X,T) \leq_p (Y,S)$。如果 $(X,T) \sim_p (Y,S)$，我们就称这两个系统图灵等价。

目的问题的计算可处理性是图灵等价的不变量。一个核心问题是，是否还存在动力学不变量。

问题 1.4. 如果 (X,T) 和 (Y,S) 是可高效离散化的动力系统，且 $(X,T) \sim_p (Y,S)$，这是否意味着 (X,T) 和 (Y,S) 具有某些非平凡的动力学性质?

肯定的回答将揭示这两门学科之间密切的联系。命题 4.8 断言，非平凡不变量的存在意味着困难目的问题的存在，这说明了该问题的重要性（特别是，这将意味着 $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$；寻求将动力学方法应用于复杂性研究的动力学学者，应从 [41], 着手，因为那里似乎有大量易处理的起点）。

这个问题还与伪随机动力系统的存在密切相关。我们称一个可高效离散化的动力系统为伪随机的，如果它存在一个难解的目的性问题。伪随机性这一性质实质上表明，该系统具有一种“稳定”的随机性形式。也就是说，对系统进行离散化时，尽管连续统所提供的真正随机性会消失，但仍会留下某种产物，驱动计算困难性。伪随机动力系统的存在与计算复杂性理论中的基础性未解问题相关，尤其涉及密码学基础和单向函数的存在问题（参见第6节）。

1.2. **历史背景与动机**。 我们的工作延续了一项实际上已持续数十年的计划，旨在弥合动力系统各领域与计算理论之间的鸿沟。不过，我们论文的精神或许最接近 Freedman、Nabutovsky 和 Weinberger 的深刻研究[43, 44, 87, 67] 他们大致展示了某些拓扑性质与计算性质交织的程度。

动力学与计算理论之间最成功的诸多联系，均出自大量将可计算性理论与动力学联系起来的研究。相比之下，复杂性理论与动力系统之间的研究发展较少，不过近年来这一领域的研究活动有所增加（见下文）。

事实上，从历史上看，研究重点一直是将可计算性理论和算法随机性的工具应用于动力系统，具体而言包括可计算分析 [86] 和柯尔莫哥洛夫复杂性 [62]。这些研究方向取得了许多重要成果，揭示了深层的动力学和物理结构 [28, 53, 30, 31, 92, 15, 58, 6]。文献中另一个值得关注的方向，是研究动力系统中涌现的某些对象的可计算性，例如奇异吸引子，尤其是 Julia集 [49, 18, 16, 17, 75, 10, 50]。这在一定程度上与另一条独立研究路线的发展有关；该路线将动力系统视为计算机，并基于这样一种观点：运动与计算是同一枚硬币的两面。

后来的这一领域通常被认为起源于 Moore [65, 66], ，他提出了一种观点：动力系统可能具有如此强的不可预测性，以至于基本的状态预测问题都不可判定。此后，这一概念引发了对具备计算能力的动力系统的深入探索 [27, 56, 77, 9] ，以及对作为动力系统处理的元胞自动机和图灵机的相关研究 [20, 61, 59, 60]。其中尤为突出的是一系列探讨流是否能够实现通用计算的论文；这些研究部分受到 Tao 的一个巧妙想法启发，即利用通用计算证明纳维-斯托克斯方程的爆破解存在 [25, 23, 22, 83, 84, 24]。

相比之下，针对计算复杂性理论与动力系统之间联系的研究较少，而这方面的成果涵盖范围更广。总体而言，以某种方式将这两个领域联系起来的大多数文献，大致可分为以下几类。

(1) 研究求解某些源自受限类别动力系统的问题所涉及的计算复杂性，例如状态预测问题，以及与计算典型轨道的极限行为相关的问题 [1, 3, 4, 71, 21, 36, 7, 37, 76, 68, 74, 32,75, 13]。(2) 提出混沌的计算复杂性理论度量，或动力系统“复杂性”度量的研究 [29, 63, 51, 26, 38, 78]。(3) 研究动力系统作为计算机时如何求解判定问题 [77, 27, 20, 39, 79, 10]。

上述每篇论文都为发展动力学与复杂性理论之间的关系迈出了重要一步，而上述许多研究 [10, 77, 27, 20, 39, 79, 74] 实际上也出色地阐明了这两个学科之间的基本结构关系。我们还要提到，将统计力学相关文献中的技术引入复杂性理论 [72, 47, 88, 45], 已取得巨大成功；此外，越来越多令人振奋的研究致力于运用随机热力学，更深入地理解计算的能量层面 [6, 89, 54, 64, 69, 90, 57], ，也有研究试图建立复杂性理论与物理学之间更普遍的联系 [33, 34]。

然而，据我们所知，尽管人们长期以来一直在讨论并探究计算可行性程度与动力学复杂性之间显而易见的关系（例如，参见其中提出的讨论和问题），但尚无研究严谨地确立这种关系。

[11], 和 [91] 对这一领域的概念作了很好的综述）。文献中的这一明显空白，在一定程度上促使本论文集展开了当前的研究计划。

我们的方法涵盖了上述第（1）点和第（2）点。与研究如何判定某些源自动力系统的问题的计算复杂性（例如“状态预测”或“可达性问题”）的文献类似，我们从动力系统中推导出一类自然的判定问题。然而，与以往研究判定可达性问题的复杂性的工作不同，我们的方法并不局限于单一动力系统或一小类动力系统。我们也并非主要关注证明源自此类动力系统的判定问题是 NP 或 PSPACE 困难的。相反，我们着重于通过展示以下内容，推动这两个领域之间建立双向联系

（1）复杂性理论工具——即归约以及证明下界的能力——如何为研究和分类动力系统提供新方法；以及（2）呈现某些行为的动力系统如何为解决可从动力学导出的判定问题的算法施加结构，从而为将现有的动力系统分类应用于计算复杂性理论提供切入点。

已有一些文献在探索与我们理念相近的研究方向。特别是，Rojas 和 Sablik 最近发表的一篇优秀论文 [74]展示了可计算分析与动力系统的诸多方面之间的深层联系，为依据计算动力系统吸引子近似的计算可处理性对动力系统进行分类提供了一个通用框架。尽管我们所采用的核心思想与 Rojas 和 Sablik 的理念相近，但我们的技术和结果却截然不同。

此外，也有一些工作在元胞自动机和序列动力系统这一受限领域内追求某种相关目标，主要试图根据解决特定问题的复杂性或可判定性对这类系统进行分类 [4, 1, 21, 80, 81, 82]。然而，这主要归因于元胞自动机和序列动力系统的离散性质，因为它们适合在经典复杂性框架下进行研究。这种限制所牺牲的，是关于连续域上动力系统的丰富理论。事实上，正如我们的工作所表明的那样，将研究限制在那些更明显适合离散分析的动力系统上，不仅没有任何收获，反而会损失很多；而且，我们的结果确实具有非常不同的性质。

1.3. 本文结构。 这是三篇论文中的第一篇，旨在构建一种理论，将计算复杂性与动力系统的各个组成部分联系起来。这三篇论文根据所采用的计算模型以及侧重的领域来划分。本文讨论图灵模型，并着重探讨其在动力系统中的应用。第二部分 [41]讨论代数计算模型，并探讨复杂性理论问题。第三篇论文 [42] 采用与本文相似的基本思想，同样着重探讨其在动力系统中的应用。不过，其计算模型截然不同，摆脱了在布尔框架下研究所面临的困难，因此得出的结果也具有不同的性质。

本文结构如下。在预备知识一节之后，第 3 节提出可高效离散化的动力系统这一关键概念。第 4 节针对图灵计算模型全面介绍目的问题，并给出基本的结构性结果。第 5 节展示如何利用证明下界的能力来证明动力系统具有某些性质，并证明定理1.1 和定理 1.2。最后，第 6 节总结全文并提出开放问题。

致谢。 感谢 David Cash 在本项目漫长的开展过程中与我交流并给予支持。也感谢 Jordan Cotler 对本文想法提出反馈，并感谢 Sam Freedman 对本文写作表达提出意见。最后，感谢 Nicolai Haydn 在本项目早期阶段提供反馈，帮助确定了项目的方向。

作者获得美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划第 2140001 号资助的部分支持。

2. Preliminaries

我们简要回顾本文论述所需的基本概念，并约定记号。由于本文面向跨学科读者，我们介绍了许多专家可以略过的基础概念。有关计算复杂性理论基础的更完整综述，请参阅 [2] 或 [70]。关于动力系统理论的适当论述，我们建议参阅[73],[19],和 [85]。

2.1. 动力系统背景。 在本文中，动力系统，或简称系统，是一个二元组 (X, T)；其中， $X \subseteq \mathbb{R}^m$ 始终为无限集，并带有由欧氏度量 ρ诱导的子空间拓扑，而 $T\colon X \to X$ 是一个变换。定义迭代T^n : 对于每个非负整数 n， $X \to X$是 n重 T复合；如果 T可逆，则 n也可以为负数。当我们称 (X, T) 为拓扑动力系统 （省略拓扑的记号）时，意指 X 是 $\mathbb{R}^d$的紧致且连通的子集，而 T 是连续的。如果 T 也可逆，则将其视为同胚。当我们称 (X, T) 只是一个动力系统时，意指 X 不必是紧致的或连通的，且 T 不必是连续的。

现在我们给出本文所需的若干动力学基本定义。若子集 $A \subseteq X$ 满足 $T(A) = A$，则称其为不变的；若满足 $T(A) \subseteq A$，则称其为正向不变的。若点 $x \in X$ 存在一个整数 $n \geq 1$，使得 $T^n(x) = x$，则称其为周期的。若存在同胚 $h\colon X \to Y$，使得 $h \circ T = S \circ h$，则称两个连续映射 $T\colon X \to X$ 和 $S\colon Y \to Y$ 拓扑共轭，或简称共轭。若 h 连续、满射，且满足 $h \circ T = S \circ h$，则称其为从 T 到 S 的拓扑半共轭；此时称 S 是 T 的一个因子。

若映射 $T\colon X \to X$ 在不变集 Y 上存在一点 p，其正向轨道在 Y 中稠密，则称该映射在 Y 上拓扑传递。特别地，根据比尔科夫传递定理， T 在 Y 上传递，当且仅当对于 Y 中任意两个开集 U 和 V，都存在一个正整数 n，使得 $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$。

最后，我们回顾系统的拓扑熵定义。这里给出 Bowen 和 Dinaburg 的定义 [12, 35]。设 X 为一个紧致度量空间，且 $T\colon X \to X$ 连续。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，定义度量 ρ_n 为

$$\rho_n(x, y) = \max\{\rho(T^i(x), T^i(y)) : 0 \leq i < n\} \text{ for } x, y \in X.$$

对于 $\varepsilon > 0$ 和 $n \geq 1$，如果两点 x， $y \in X$ 的前n 次迭代彼此 ε-接近，则称它们关于度量 ρ_n ε-接近。若集合 $E \subset X$ 中的每一对不同点在度量 ρ_n下至少相距 ε，则称 $E \subset X$ 是$(n,\ \varepsilon)$-分离的。令 $N(n,\ \varepsilon)$表示一个$(n,\ \varepsilon)$-分离集的最大基数。于是，拓扑熵定义为

$$h(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \varepsilon) \right) \geq 0.$$

拓扑熵可以解释为系统中随机性程度的一种度量。对于希望获得更多直观理解的计算机科学家，我们可参考例如 [85]。

2.2. 计算复杂性背景与符号约定。如果 x 是一个有理数，令 $\langle x \rangle$表示 x的标准二进制编码。更一般地， $\langle \cdot \rangle$ 表示一个对象的二进制编码

。令 1^n 表示 n 的一元编码，即由 n 个 1 组成的字符串。令 $\{0,1\}^*$ 表示所有二进制字符串的集合，$\{1\}^*$ 表示所有一元字符串的集合。我们用 $|s|$ 表示二进制字符串 $s \in \{0,1\}^*$的长度。

非正式地说，图灵机 是一个系统，其中包含一组规则，规定如何将系统的一个配置转换为另一个配置。

定义 2.1。 一个图灵机 M 由一个元组(Γ, Q, δ)描述，其中 Γ 是一个有限符号集，M的磁带可以包含这些符号，并指定了“空白”符号和“开始”符号。 Q 是一个有限状态集，M 可以处于其中的状态，并指定了初始状态 q_{start}以及停机状态 q_{accept} 和 q_{reject}。转移函数

$$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$$

描述了M 在执行计算的每一步时所使用的规则。将转移函数视为一张有限 表格很有用，该表格建立了输入符号、工作磁带符号和当前状态与下一步操作之间的对应关系。

如此定义的图灵机也称为确定性图灵机。 图灵机 M 接受的字符串集合称为 M 的语言 ，记作 L_{M}。若一台图灵机在每个输入上都会停机，从而拒绝或接受每个输入字符串，则称它为判定器。如果某台图灵机能够判定某个语言（字符串集合），则称该语言可判定 或可计算 ——该图灵机接受的输入字符串恰好是这个语言中的字符串。判定问题 是一种计算任务，要求针对给定输入是否满足某项特定性质给出简单的是或否答案，因此可以等同于某个语言 $L \subseteq \{0,1\}^*$，该语言恰好是判定器接受的字符串集合。

图灵机 M^f 计算 部分函数 f，如果对于所有 f 有定义的输入 x，M^f($\langle x \rangle$) 都会停机，并在其输出带上输出 $\langle f(x) \rangle$。函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致可计算 的，如果存在一台图灵机 M，使其对任意输入 $\langle n,\ x \rangle$ 都会停机，并在其输出带上输出 $f_n(x)$。

现在我们形式化定义图灵机的运行时间。如果函数 $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 时间可构造，即 $q(n) \geq n$，并且存在一台图灵机能在 $q(n)$ 时间内计算函数 $x \mapsto \langle q(|x|) \rangle$。

定义 2.2. 设 M 是一台图灵机，$f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$，并设 $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为时间可构造的。若 M 在每个输入 x 上的计算至多需要 $q(|x|)$ 步，则称 M 计算 f 在 q-时间内。

对于时间可构造的 $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，集合 DTIME($q(n)$) 是由（确定性）图灵机在 $O(q(n))$ 时间内可解的问题类。高效计算等同于多项式运行时间。复杂性类 P 定义为 $\mathsf{P} = \cup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(n^c)$。

复杂性类 NP 是由可高效验证其解的问题组成的类。也就是说，如果存在一个多项式 $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 以及一个称为 L的验证器 的多项式时间图灵机 N，使得对于每个 $x \in \{0,1\}^*$，则语言（判定问题） $L \subseteq \{0,1\}^*$ 属于 NP，

$$x \in L \iff \exists u \in \{0,1\}^{p(|x|)} \text{ s.t. } \mathsf{N}(x,u) = 1 \text{ (accepts)}.$$

如果 $x \in L$ 和 $u \in \{0,1\}^{p(|x|)}$ 满足 $\mathsf{N}(x,u) = 1$，那么我们称 u 是关于语言 L 和机器 N 的 x 证书 。

设 A 和 B 是判定问题（语言）。从 A 到 B 的多项式时间多对一归约或卡普归约是一个多项式时间算法，它将 x 的实例转换为 A 的实例f（x），使得 $x \in A \iff f$（x） $\in B$。如果存在这样的函数，我们记作 $A \leq_p B$。如果 NP 中的每个问题都可卡普归约到 A，则 NP 中的问题 A称为 NP 完全。

3. Discretizing dynamical systems

本节讨论对具有连续状态空间的动力系统进行离散化所涉及的基本问题。需要指出的是，尽管使用能够直接处理实数的代数计算模型或 Blum-Shub-Smale 机器似乎最为自然，但即使在这些情形下，我们也会很快遇到函数逼近问题，因此留在图灵模型中并不会损失太多。

3.1. **记号**。令 $\mathbb{D}$ 表示二进有理数的集合；也就是说，这些数具有有限二进制展开，因此 $y \in \mathbb{D}$ 的形式为 $y = p/2^q$，其中 p 和 $q \geq 0$是某些整数。二进有理数的二进制展开是其自然的有限表示。更确切地说，令 $s_0, s_1, \ldots, s_u, t_1, \ldots, t_v$为 $\{0,1\}$中的比特。那么字符串 $s_u s_{u-1} \cdots s_0 . t_1 t_2 \cdots t_v$就是（非负）二进有理数

$$y = \sum_{i=0}^{u} s_i \cdot 2^i + \sum_{j=1}^{v} t_j \cdot 2^{-j}.$$

令 $\langle y \rangle$表示 $y \in \mathbb{D}$的二进制表示。本文中，我们会在用分数 $p/2^q$ 表示二进有理数 $y \in \mathbb{D}$ 与其对应的二进制表示之间自由转换。默认情况下，所涉及的图灵机处理的是对应的二进制表示。

每个二进有理数都有无穷多种表示；当我们把二进有理数 $p/2^q$ 视为二进制字符串时，指的是它的最短表示。对于二进有理数 d的每种表示 s，令 $r =$prec(s) 标记该表示的精度，即 s的小数点右侧的比特数。令 $\mathbb{D}_r = \{m \cdot 2^{-r} \colon m \in \mathbb{Z}\}$ 表示精度为 r的二进有理数集合。

选择使用集合 $\mathbb{D}$ 而不是 $\mathbb{Q}$，是因为 $\mathbb{D}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是均匀 稠密的，也就是说，对于任意整数 $r > 0$，精度为 r 的二进有理数在实数轴上均匀分布。这有助于建立以下定义。

3.2. **离散化状态空间**。许多典型的动力系统都具有正的李雅普诺夫指数。这降低了我们在固定精度的经典（有限）计算模型中准确迭代动力系统的能力；在这种模型中，舍入误差会导致点在状态空间中的位置信息呈指数级衰减。这使得对此类系统进行准确的长期模拟变得困难甚至不可能（这是一个经过深入研究的领域，也取得了一些积极成果 [48]）。

然而，本文只关注渐近行为。因此，我们不固定精度，而是允许精度随着动力系统迭代次数的增加趋于无穷。这使得我们能够准确模拟具有正李雅普诺夫指数的系统。我们对动力系统离散化的方法（据我们所知）是新颖的，但应该会让人感觉相对标准。事实上，它在精神上接近于计算的“位模型” [14]，也体现了 Blank [8] 、Ko [55], 以及 Galatolo 在 [46], 中的方法的某些方面；后者研究的是与可高效离散化系统具有相似精神的系统，不过其研究设定放弃了任何关于高效计算的概念。

设 (X, T) 是一个动力系统。回忆一下，$\mathbb{D}_r^d \subset \mathbb{R}^d$ 表示精度为 r 的二进有理数。定义状态空间 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 的 r-离散化 为选取一个子集 $X_r \subseteq \mathbb{D}_r^d$，使得对于每个 $x \in X$，至少存在一个 $x_r \in X_r$ 满足 $\|x - x_r\|_2 \leq 1/2^r$。我们称 r-离散化 的算子为映射 $\mathsf{D}_r \colon X \to X_r$，它将每个点 $x \in X$ 映射到 X_r 中距离最近的点（若有多个这样的点，则选择值最小的点），其中距离按 2-范数计算。若 $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^d$，则 $A_r = \mathsf{D}_r(A)$ 表示 A的 r-离散化。如果能够在关于 r （以一元输入编码）的多项式时间内判定点 $x_r \in \mathbb{D}_r^d$ 是否属于 X_r，我们就称 X 的 r-离散化是可高效离散化的。

如果对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 都有 $X_r \subseteq X$，我们就说空间 X 包含其 r-离散化。此外，若空间 X 带有一个整数下标，则表示该空间以该整数为精度进行离散化。

备注 3.1。 在本文的设定中，算子 D_r 只是舍入算子，它可在多项式时间内计算。◀

在转而定义动力系统的离散化之前，我们先考虑函数的离散化。首先，令

$$X_* = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_r$$

表示状态空间 X的所有离散化的并集。

以下定义较为技术性，因为为了保持精度，必须使用图灵机。尽管如此，其思想很简单：这些定义将一个函数称为可高效离散化，如果存在一台多项式时间图灵机，能够计算该函数任意精度的近似。

定义 *3.2.* 设 X、$Y \subseteq \mathbb{R}^d$ 可高效离散化，且 D_r^X、D_r^Y是这两个空间对应的离散化算子。若存在一个算法（称为其离散化）$Mf: X_* \times \{1\}^* \to Y_*$，可在多项式时间内计算，并且对于 $x \in X_*$，$Mf(\langle x\rangle, 1^l) = D_l^Y(f(y))$，其中 $y = x$当 $x \in X$时，而 $y \in (D_r^X)^{-1}(x)$在其他情况下，则称函数 $f: X \to Y$可高效离散化。

定义 3.3。 如果 $f: X \to X$ 是一个双射，那么当存在一致且可在多项式时间内计算的函数族 $\{\mathsf{M}_f^{(r)}\}_{r=1}^{\infty}$、$\mathsf{M}_f^{(r)}: X_r \to X_r$，以及 $\{\mathsf{M}_{f^{-1}}^{(r)}\}_{r=1}^{\infty}$、$\mathsf{M}_{f^{-1}}^{(r)}: X_r \to X_r$，使得以下条件成立时，我们称该函数是可高效逆离散化的 。[2]

（1） 对所有 $r \geq 1$ 和 $x \in X_r$，都有 $\mathsf{M}_f^{(r)}(\langle x\rangle) = \mathsf{D}_r^X(f(y))$，其中当 $x \in X$ 且 $y \in (\mathsf{D}_r^X)^{-1}(x)$ 时为 $y = x$，否则为 $y = x$；对于每个$\mathsf{M}_{f^{-1}}^{(r)}$，同样作相应处理。

（2） 对所有 $r \geq 1$，都有 $\mathsf{M}_f^{(r)} \circ \mathsf{M}_{f^{-1}}^{(r)} = \mathsf{M}_{f^{-1}}^{(r)} \circ \mathsf{M}_f^{(r)} = \mathrm{Id}$。

固定记号

$$f_r := \mathsf{M}_f^{(r)} \quad and \quad f_r^{-1} := \mathsf{M}_{f^{-1}}^{(r)}.$$

现在，我们给出离散化动力系统的方法。

在讨论目的问题和下文定义的整个过程中，需要牢记的关键思想是：每当我们希望在更长（但有限）的时间内迭代动力学时，就可以通过在 X 的 r 离散化中考虑更大的 r，来提高对状态空间近似的精度。这样，在给定的测量精度下，离散化后的动力学版本便能在给定时间段内准确反映真实动力学。这就好比每当我们希望模拟更长时间的动力学时，便为计算机提高精度。

以下关键定义将形式化描述如何通过对状态空间进行某种粗粒化（即 r 离散化），在有限时间内“准确”且“高效”地模拟动力系统这一概念。

定义 3.4. 设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 可高效离散化。若存在一台多项式时间图灵机，使动力系统 (X, T) 是可高效离散化的，

$$\mathsf{M}_T : X_* \times \{1\}^* \times \{1\}^* \to X_*$$

[2]换言之，存在一个多项式时间图灵机 $\mathrm{M}f(\langle r,\ x\rangle)$，当且仅当 $r \neq |\langle x\rangle|$时，它会拒绝输入 $\langle r,\ x\rangle$；我们使用记号 $\mathrm{M}_f^{(r)}(x) := \mathrm{M}f(\langle r,\ x\rangle)$。

使其在输入 $(x, 1^k, 1^r)$ 时，

$$\mathsf{M}_T(\langle x\rangle, 1^k, 1^r) = \mathsf{D}_r(T^k(y)),$$

其中 $y = x$ 若 X 包含其 r离散化，则为 $y \in \mathsf{D}_r^-(x)$ ，否则为[1]。我们称 M_T 为的离散化。记号如下

$$T_r^k(x) \coloneqq \mathsf{M}_T(\langle x\rangle, 1^k, 1^r) \text{ for } x \in X_*.$$

如果(X, T)是一个动力系统，且 T是一个可高效逆离散化的双射，则称(X, T)是可高效逆离散化的。我们将(X, T)称为带逆映射的拓扑动力系统，意指 X 是紧致的，且 T 是一个带逆映射的可高效离散化同胚。

3.3. **实际中的动力系统离散化**。直观地说，如果固定用于对状态空间 X进行粗粒化的工作精度 r ，则 T 是可高效离散化的，当且仅当存在某种更高精度，使我们能够对动力系统模拟 k 步，从而其在粗粒化划分中的行程与该系统真实的长度为 k 的轨道片段完全相同。若改为定义 $T_r = \mathsf{D}_r \circ T$，我们得到的是在具有有限精度的计算机上对系统的实现，其中的点在每次迭代时都会受到舍入误差的影响。相比之下，在我们的设定中，我们“只在最后一次迭代时进行舍入”。

由此可知，例如，若 T 是圆上的倍增映射 $E_2(x) = 2x \bmod 1$，尽管相邻点之间的距离在每次迭代中都会加倍，但存在适当的精度 $r = r(k) \geq 2k$ ，使得 $\|T^k(x) - T_r^k(x)\|_2 \leq 1/2^{r+1}$对所有 $x \in X_r = I_r$ $(X = [0, 1)$ 都成立（其中包含其 r离散化）。也就是说，离散化 M_T 在精度为 $r = r(k) \geq 2k$ 的情况下迭代 x 次，可持续 k 次迭代；即使每次迭代都出现最坏情况下的舍入误差 k ，我们仍然有

$$\|T^k(x) - T_r^k(x)\|_2 \leq 2^{-k+r} \leq 1/2^{r+1}.$$

由于 k 与 r呈多项式关系，因此可知倍增映射可高效离散化，因为

$$\mathsf{M}_T(\langle x\rangle, 1^k, 1^r) = \mathsf{D}_r(T^k(x))$$

对所有 $x \in X_r$ 均成立。由此可知，许多映射为“良好”利普希茨映射的动力系统都可高效离散化。注意，我们说的是“良好”而不是所有 利普希茨映射，因为一般而言，它们甚至不可计算（在适当的意义上）。

其他可高效离散化系统的基本例子包括刚性圆旋转 R_a（x） $= x + a$模 1 的代数数 $a \in \mathbb{A}$、[3] 帐篷映射 T： $[0, 1] \to [0, 1]$定义为

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1 - x) & \text{if } 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

以及具有有理参数的 H´enon 映射、Baker映射和 Chirikov 标准映射。事实上，我们遇到的“绝大多数”动力系统都将是可高效离散化的，因为那些不可高效离散化的系统往往相当病态（即不可计算的例子）。为完整起见，我们将在下面的引理中分别针对刚性圆旋转和帐篷映射证明这一断言。

引理 3.5。令 R_a： $S^1 \to S^1$ 为圆绕代数数 $a \in \mathbb{A}$进行的刚性旋转，并令 T： $I \to I$ 为帐篷映射。

- 系统（S^1, R_a）是可高效离散化的。
- 系统（I, T）是可高效离散化的。

证明。设定 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，因此将 R_a 视为端点重合的单位区间 I 上的映射。对于每个 $r \in \mathbb{N}$， r 的离散化 I_r 中的点都具有形式 $w/2^r, w = 0, \ldots, 2^r - 1$。注意，对于任意

[3]关于如何高效且有效地运算代数数，已有成熟的文献对此进行了研究，其中讨论了将代数数表示为整数系数多项式的根。参见 [5]。

$x = \frac{w}{2^r} \in I_r$, $R_a^k(x) = w/2^r + ka$ 模 1。不过，当 $a \in \mathbb{A}$ 是代数数时，可以在关于 $r+k$ 的多项式时间内计算 $w/2^r + ka$ 并将其模 1 化简，而 D_r 只是一个舍入操作。

对于系统 (I, T)，再次注意，对于任意 $x \in I_r$, x 都具有 $w/2^r$ 的形式。于是，要么$T(x) = 2w/2^r$，要么 $T(x) = 2^{r+1}/2^r - 2w/2^r = w'/2^r$，且满足 $w' \in [2^r - 1]$。但请注意，如果 $x \in I_r$，那么 $T(x) \in I_r$ 也成立。因此， $T^k(x) \in I_r$，其计算时间关于 $r+k$ 为多项式时间，$\mathsf{D}_r(\cdot)$ 的计算也是如此。□

4. Finite telic problems

4.1. 目的问题与初步结果。我们先给出一个预备定义。直观地说，映射$g: I_i^d \to X_{r_i} \cup \{\perp\}$ 满足邻域保持性质，如果 $g(I_i^d)$ 是 I_i^d 在 X 中的一种扭曲，使 I_i^d 中相邻的点在 X 中仍相邻。

定义 4.1。固定一个可有效离散化空间 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ 和一个整数 d、$1 \le d \le \ell$。令 I_r^d 为 d维立方体 $[0,1]^d \subset \mathbb{R}^d$的 r离散化。令 $\{g^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ 为一组映射序列

$$g^{(i)} : I_i^d \to X_{r_i} \cup \{\perp\},$$

其中 $r_i \ge i$ 是由 $g^{(i)}$确定的值。若对于所有 $i \in \mathbb{N}$，以及每个 $x_0 \in I^d$ 和 $\varepsilon = \sqrt{d}/2^i$，都存在 $\delta > 0$ 和 $y_0 \in X$，使得对于所有 $x \in I_i^d$，$x \in B_\varepsilon(x_0)$ 当且仅当 $g^{(i)}(x) \in B_\delta(y_0) \cup \{\perp\}$，则称这些映射满足邻域保持性质。[4] 此外，若存在一台运行时间为 $O(i^c)$的图灵机 G，$c \in \mathbb{N}$，使得 $G(\langle x\rangle) = \langle g^{(i)}(x)\rangle$，其中 $|\langle x\rangle| = di$，则称映射序列 $\{g^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ 是可有效查询的。

定义中的符号 $\perp$ 应解释为 $g^{(i)}$的“空白”或“垃圾”输出。$g^{(i)}$ 可以解释为从二进制字符串到状态空间的 r 离散化的映射，即 $g^{(i)}: (\{0,1\}^i)^d \to X_{r_i} \cup \{\perp\}$。邻域保持性质相当强，并在下面的目的问题定义中用于确保，判定目的问题的任何困难都源自动力学，而非复杂的函数 $g^{(i)}$。

下面给出的目的问题定义必然带有技术性，以确保本文关于计算复杂性理论的论断精确且正确。定义之后我们会给出直观解释。

定义 4.2 (目的问题**)**。固定 $X \subseteq \mathbb{R}^m$，并令 (X, T) 为一个可高效离散化的动力系统，其中 M_T 是 T的离散化。

- 令 $\{g^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ 为一个可有效查询的映射序列，其中
$$g^{(i)} : I_i^d \to X_{r_i} \cup \{\perp\}$$
对于 $d \le m$。设 $H: X \cup \{\perp\} \to X \cup \{\perp\}$ 是一个映射，使得 H 将 $\perp$ 映射到其自身，并且$\hat{}H|_X := H : X \to X$ 是一个可高效离散化的双射，其逆映射与T可交换，因此 $H \circ T = T \circ H$（H 通常是恒等映射）。固定 $\ell \in \mathbb{Z}^+$。设 $\{h^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ 是一族映射，满足 $h^{(i)} = \hat{}H_{r_i}^\ell \circ g^{(i)}$，并设 H 是一个在多项式时间内运行的图灵机，且 $\mathsf{H}(\langle x\rangle) = \langle h^{(i)}(x)\rangle$，对于 $x \in I_i^d$。

- 设 V: $\{1\}^* \to \{1\}^*$ 表示一个多项式时间图灵机，它在输入 1^n 时返回 1^{Cn}，其中 $C \ge 1$是某个整数。设 $v(n) = Cn$ 为一元值$\mathsf{V}(1^n)$的整数表示。[5]

- 令 $\{B_{(i)}\}_{i=1}^\infty$ 为一个集合序列，并将其视为环境空间 $\mathbb{R}^m$ 中的子集，其中$B_{(i)} = \hat{}H^\ell(R_{(i)}) \cap X \ne \emptyset$ 其中 $R_{(i)} \subset \mathbb{R}^m$ 是一个非空的闭有理矩形

[4]直观而言，$g^{(i)}$ 会扭曲 X 中 I_i^d 的结构，但扭曲程度不会太大，因此 I_i^d 中相邻的点在 $\mathrm{Im}(g^{(i)})$ 中仍然相邻。[5]V 是一台假定以多项式时间运行的机器，因此一般而言，它可以返回 n 的任意多项式值的一元编码。不过，在如此一般的层次上讨论对本文并无益处，所以我们暂且不采用这种做法。

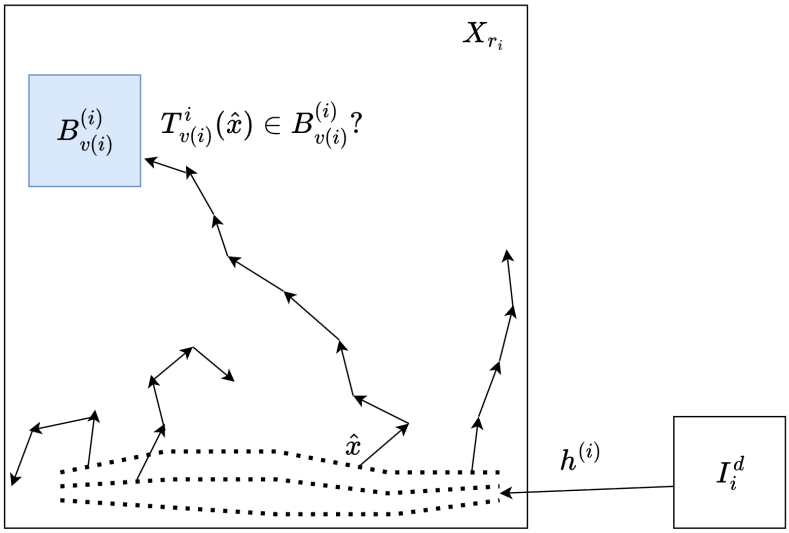


FIGURE 1. 目的性问题核心思想的示意图。映射 $h^{(i)}$ 以有序的方式将单位二进有理数（长度为 i 的二进制字符串元组）中的点映射到状态空间中的点。问题是判断其中某个点——本例中的 $\hat{x}$ ——经过 i 次对该映射的离散化进行迭代后，是否会演化到目标集合 $B^{(i)}_{v\ i}()$附近或其内部的区域。

与 X相交，并且存在一个相应的多项式时间算法 B ，它在输入$x \in X_{v(i)}$时，若 $x \in \mathsf{D}^{v(i)}(B^{(i)})$ 则返回 1 ，否则返回 0 。约定记号 $B^{(i)}_{v\ i}() = \mathsf{D}^{v(i)}(B^{(i)})$。

来自一个可高效离散化的动力系统 目的问题 (X, T)，是判断是否属于以下一元语言的问题：

$$\mathsf{TELIC}_{(X,T)}(\mathsf{V},\mathsf{H},\mathsf{B}) = \left\{1^n : \exists s \in I^d_n \ s.t.\ \mathsf{B}(\mathsf{M}_T(\mathsf{H}(\langle s\rangle), 1^n, \mathsf{V}(1^n))) = 1\right\}.$$

令 $\mathsf{TELIC}^{(X,T)}$ 表示来自 (X, T) 的所有目的性问题构成的类。

本文中，我们通常使用以下记法来表示目的性问题，以便从设定中明确所有变量和对象。

$$\mathsf{TELIC}_{(X,T)}(v, \{h^{(i)}\}, \{B^{(i)}\}) = \left\{1^n : \exists s \in I^d_n \text{ s.t. } T^n_{v(n)}(h^{(n)}(s)) \in B^{(n)}_{v(n)}\right\}.$$

图 1 以图示方式呈现了目的性问题的核心思想。下面说明定义中各项设定的理由。

首先，我们指出，由 $\mathsf{V}(1^n)$ 给出的值 $v(n)$ 用于定义目的问题给定实例 1^n 的“运行精度”。也就是说，它决定了我们希望以何种“分辨率”来测量动力学。最简单的情况是，$\mathsf{V}(1^n) = 1^n$，但当 n 较小时，这样做就不太合理；允许运行精度变化则能提供更大的通用性。

我们允许映射 $g^{(i)}$ 将点映射到更精细的离散化 X_{r_i} ，而不是更粗略的离散化 X_i，原因在于，更高的精度使我们在选择初始点的迭代起点时拥有更大的灵活性。也就是说，如果 $r_i = i$ ，那么 $g^{(i)}$ 可能会将 I^d_i“完全映射到” X_i，这会降低构建目的问题时的灵活性。

在本文中，函数 H 始终取恒等映射或 T。

注意，我们有以下用于 B 的多项式时间算法：由于 H 是一个具有逆映射且可高效离散化的双射，要判定 $B_{v\ i}^{(i)}()$ 中的成员资格，只需检查

$$\hat{H}_{r_i}^{-\ell}(x) \in \hat{H}_{r_i}^{-\ell}(B_{v(i)}^{(i)}),$$

因为 $\hat{H}_{r_i}^{-\ell}(B_{v\ i}^{(i)}())$ 是一个闭矩形的离散化，而判定其成员资格很容易。具体而言，利用 H 与 T 可交换这一条件，使得在应用 H 前后，目的问题的解保持不变，因为

$$H \circ T = T \circ H \implies H \circ T^k = T^k \circ H \text{ for all } k \in \mathbb{N},$$

因此 $T^k(x) \in A \iff T^k(H(x)) \in H(A)$。

注 4.3. 通过改变所考虑的映射 T 的迭代次数，可以自然地进一步推广目的问题。具体而言，定义一个多项式时间图灵机 K：$\{1\}^* \to \{1\}^*$，并判定一元语言中的成员资格

$$\mathsf{TELIC}_{(X,T)}(\mathsf{V},\mathsf{H},\mathsf{B}) = \left\{1^n : \exists s \in I_n^d \text{ s.t. } \mathsf{B}(\mathsf{M}_T(\mathsf{H}(\langle s\rangle),\mathsf{K}(1^n),\mathsf{V}(1^n))) = 1\right\}.$$

不过，为了简化论述中的某些部分，以下所有结果在这个更一般的问题中仍然成立，但我们在此不予讨论。在本工作的第三部分，[42]我们将在这种一般性层面开展研究，并推导出有用的结论。◀

我们给出一个目的问题的简单示例。

示例 4.4。考虑逻辑斯蒂映射 $T(x) = 4x(1-x)$，它将单位区间 I 映射到自身。该变换是可高效离散化的。定义一个目标集序列，使得 $B^{(n)} = R^{(n)} = [a,b] \subset [0,1]$，其中对所有 $n \geq 1$都有 $b - a \leq 1/2^n$。令 $g^{(n)}: I_n \to I_{n^5} \cup \{\perp\}$[6]，使其满足：对所有 $n \in \mathbb{N}$，对于满足 $g^{(n)}(x) \neq \perp$的输入 $x \in I_n$，有$g^{(n)}(x) = x^2$。函数 x^2 是可有效查询的：它在 I上满足邻域保持性质，并且可以由多项式时间图灵机计算。特别地，$g^{(n)}$ 保持了 $[0,1]$ 中长度为 n 的二进制字符串关于 $<$的字典序。给定参数值的逻辑斯蒂映射是“混沌的”，因此可以预期，对于每个 n，判断 $\mathrm{Im}(g^{(n)})$ 中的某个 2^n 点是否演化为 $B^{(n)}$，对于大多数目标集序列 $\{B^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$的选择而言，都是难处理的。◀

目的性问题通常被视为容易或困难：也就是说，如果某个目的问题可以由一台在 $c \in \mathbb{N}$ 上运行于 $O(n^c)$ 时间的图灵机判定，那么它就是容易或易处理的；否则，该问题就是困难或难处理的。如果一个动力系统关联着容易（困难）的目的性问题，我们就说该动力系统具有容易（困难）的目的性问题。

The 下面的评述主要是写给阅读本文的复杂性理论家看的 .

评述4.5。目的性问题是关于一元编码语言的判定问题。因此，在讨论容易和困难的目的性问题是否存在时，我们指的是统一计算模型，因为 TALLY $\subset$P/poly。不过，猜想存在在统一设置下难处理的目的性问题是相当合理的；首先要注意的是，目的性问题之所以属于 P/poly，仅仅是因为能够使用建议字符串，而这通常并不意味着存在高效的图灵机来判定目的性问题的实例。此外，存在属于 NP \P 的稀疏语言，当且仅当 E $\neq$ NE [52]。特别地，如果 E $\neq$ NE，那么就存在一个属于 NP \ P 的一元语言。因此，可以合理地认为可能存在困难的目的性问题——即 NP-中间telic问题。◀

4.2. **目的问题的基本性质**。动力系统的高效离散化能够忠实地捕捉真实动力学，具体如下述命题所述。非正式地说，对系统进行离散化后，迭代该离散化系统会使点接近目标集合 $B_{v\ i}^{(i)}()$，当且仅当真实动力学也

[6]的选择 n^5 是任意的

会在相同的迭代次数内将附近的点带入目标集合的邻域 $B^{(i)}$。这一看似简单却重要的事实，使我们能够正确地运用动力系统理论中的工具来研究目的问题，因为我们可以确信：一个目的问题实例的答案为肯定，当且仅当在进行离散化之前，其底层真实系统对该目的问题的答案也为肯定。

命题 4.6. 设(X,T)是一个可高效离散化的动力系统，其中M_T是其离散化——T，并且 且令

$$\mathsf{TELIC}_{(X,T)}(v,\{h^{(i)}\},\{B^{(i)}\}) \coloneqq \mathsf{TELIC}_{(X,T)}(\mathsf{V},\mathsf{H},\mathsf{B})$$

是来自(X,T)的某个目的问题。那么对于所有 $n\in\mathbb{N}$以及任意 $s\in I_n^d\setminus(h^{(n)})^{-1}(\perp)$，我们有

$$\mathsf{B}(\mathsf{M}_T(\mathsf{H}(\langle s\rangle),1^n,\mathsf{V}(1^n)))=1 \iff \rho(T^n(y),B^{(n)})\le 1/2^{v(n)},$$

对于某个 $y\in\mathsf{D}_n^{-1}(\mathsf{H}(\langle s\rangle))$。

证明。 假设 $\mathsf{B}(\mathsf{M}_T(\mathsf{H}(\langle s\rangle)\ 1^n,\ \mathsf{V}(1^n)))\ =\ 1$。由于 M_T 是 T 的离散化，根据定义可得

$$\mathsf{M}_T(\mathsf{H}(\langle s\rangle),1^n,\mathsf{V}(1^n))=\mathsf{D}_{v(n)}(T^n(y))\in X_{v(n)}$$

其中，要么 $y=\mathsf{H}(\langle s\rangle)$，要么 $y\in\mathsf{D}_{v\ n()}^{-1}(\mathsf{H}(\langle s\rangle))$。因此，$\mathsf{B}(\mathsf{M}_T(\mathsf{H}(\langle s\rangle)\ 1^n,\ \mathsf{V}(1^n)))\ =1$ 意味着 $\mathsf{D}^{v(n)}(T^n(y))\in B_{v\ n()}^{(n)}$。于是，根据算子 D^r 的定义，$\rho(T^n(y))\ B^{(n)})\ \le 1/2^{v(n)}$，特别是$T^n(y)\ \in \mathsf{D}_{v\ n()}^{-1}(B_{v\ n()}^{(n)})$。

反向推论同样容易得到。 □

引理 4.7。 目的性问题包含于 NP。

证明。 设 (X,T) 是一个可高效离散化的动力系统，M_T 是 T 的离散化，并设 $\mathsf{TELIC}^{(X,T)}(v,\{h^{(i)}\},\{B^{(i)}\})$ 是一个源自 (X,T) 的目的问题。给定一个实例 1^n，我们有

$$1^n\in\mathsf{TELIC}_{(X,T)}(v,\{h^{(i)}\},\{B^{(i)}\}) \iff \exists s\in I_n^d$$

使得 $\mathsf{B}(\mathsf{M}_T(\mathsf{H}(\langle s\rangle)\ 1^n,\mathsf{V}(1^n)))\ =1$。

但请注意，H、M_T 和 B 的运行时间都关于其输入长度呈多项式级，而这些输入长度至多关于 n呈多项式级。因此，它们的复合运算也满足这一性质。由此， s 是有效的证书，且

$$\mathsf{TELIC}_{(X,T)}(v,\{h^{(i)}\},\{B^{(i)}\})\in\mathsf{NP}.$$

□

正如注释 4.5中所指出的，本文定义的目的问题并非 NP-完全问题，除非$\mathsf{P}=\mathsf{NP}$。尽管如此，这一事实并不排除存在困难的目的性问题。此外，可以轻松定义目的问题的变体，使其成为 NP-完全问题；但若要将计算复杂性理论应用于动力系统，考虑这些更复杂的问题几乎没有益处。

4.3. 目的问题之间的归约与变换。 当我们谈到目的问题之间的归约时，指的是卡普归约（多项式时间映射归约），不过图灵归约也同样适用。如果目的问题 $\mathsf{T}^{(X,T)}\coloneqq\mathsf{TELIC}^{(X,T)}$(V、H、B) 来自 (X,T)，并且归约到来自 $(Y,\ S)$ 的目的问题 $\mathsf{T}^{(Y,S)}\coloneqq\mathsf{TELIC}^{(Y,S)}$(V′、H′、B′)，我们就记作 $\mathsf{T}_{(X,T)}\le_p\mathsf{T}^{(Y,S)}$。具体而言，假设目的问题 $\mathsf{T}^{(X,T)}$ 在多项式时间内归约到 $\mathsf{T}^{(Y,S)}$，且 $\mathsf{T}^{(Y,S)}$存在多项式时间解。那么 $\mathsf{T}^{(X,T)}$ 就能在多项式时间内求解。而且，如果 $\mathsf{T}^{(X,T)}$ 是困难的，那么 $\mathsf{T}^{(Y,S)}$ 也是困难的。

回顾引言中的内容，若 (X,T) 和 (Y,S) 是可有效离散化的拓扑动力系统，且所有由 (X,T) 导出的目的问题都归约到一个目的问题

（该问题）来自 (Y,S)，则称 (X,T) 归约到 (Y,S)，并记作 $(X,T)\ \leq_p (Y,S)$。若 $(X,T)\ \leq_p (Y,S)$ 且 $(Y,S)\ \leq_p (X,T)$，则称 (X,T) 和 (Y,S) 图灵等价，记作 $(X,T)\sim_p (Y,S)$。

本文提出的一个主要问题是确定图灵等价的不变量；如果两个可高效离散化的动力系统图灵等价，那么它们有哪些共同性质？[7]如果存在合适的不变量，那么确定它便基本上能够证明困难目的问题的存在，因为所有只允许简单目的问题的动力系统必然都彼此图灵等价。

因此，我们将重点放在目的问题之间的归约，以及目的问题之间的多项式时间归约在多大程度上意味着相关动力系统具有某些共同性质。我们认为，拓扑熵为正可能是一种不变量。以下命题将这些想法综合起来，说明理解动力系统的行为与相关目的问题之间的联系，如何关联到 P 与 NP 问题。

命题 4.8。假设拓扑熵为正是图灵等价的不变量，即$h(T)>0$ 当且仅当 $h(S)>0$ 只要$(X,T)\sim_p (Y,S)$成立。那么就存在困难的目的性问题，特别是，P 类 $\neq$NP。

证明。令 $T\colon I\to I$ 为帐篷映射，$R_\alpha\colon S^1\to S^1$ 为圆上的刚性旋转，其中 $\alpha\in\mathbb{A}$。则 $h(T)=\log 2$，且 $h(R_\alpha)=0$。此外，命题 5.1 表明，(S^1,R_α) 不存在困难的目的性问题。因此，假设前件成立，就存在一个目的问题 $\mathsf{T}_{(X,T)}$，它不能卡普可归约到任何源自 (S^1,R_α) 的目的问题。但由于 (S^1,R_α) 存在非平凡的目的问题，这意味着 $\mathsf{T}_{(I,T)}\notin$ P 类。□

一般而言，命题 4.8 断言：如果一个具有正拓扑熵的系统只能在多项式时间内归约到其他具有正熵的系统，那么就存在困难的目的性问题。

要理解归约与动力学性质保持之间的关系，首先需要理解它与共轭的联系，因为动力系统的拓扑共轭会保持拓扑不变量，例如熵。鉴于目的问题与动力学之间联系紧密，我们可以预期，在某些情况下，共轭可以充当归约。下述定理表明，事实确实如此。回顾一下，可高效离散化的状态空间 X 包含其 r-离散化，当且仅当对于所有 $r\in\mathbb{N}$，$X_r\subset X$。

定理 4.9。设 $X\subset\mathbb{R}$ 为一个闭区间，并设 $(X、T)$ 和 $(X、S)$ 是两个可高效离散化的动力系统。假设 $\varphi:\ X\to X$ 是这两个系统的共轭，且可高效逆离散化。那么，$(X、T)$ 存在困难目的问题，当且仅当 $(X、S)$ 存在困难目的问题。

证明。由于 φ 是这些动力系统的共轭，因此它是一个同胚，并且 $\varphi\circ T=S\circ\varphi$。此外，$\varphi$ 被假设为可高效逆离散化。因此，根据定义 3.2、定义 3.4 以及 X 包含其 r-离散化这一假设，我们得出 $\varphi_r\circ T_r=S_r\circ\varphi_r$。

通过置 $\hat{}\varphi:\ X\cup\{\perp\}\to X\cup\{\perp\}$ 来扩展 φ，使得对于所有 $x\in X$，$\hat{}\varphi(x)=\varphi(x)$，并且 $\hat{}\varphi(\perp)=\perp$。

给定一个来自（X、T）的目的问题 $\mathsf{TELIC}_{(X,T)}(v、\{h^{(i)}\}、\{B^{(i)}\})$ 实例，该实例可以转换为一个目的问题

$$\mathsf{TELIC}_{(X,S)}(v,\{f_i\},\{A^{(i)}\})=\mathsf{TELIC}_{(X,S)}(v,\{\hat{\varphi}_{r_i}\circ h^{(i)}\},\{\varphi_i\left(B^{(i)}_{v(i)}\right)\})$$

[7]请注意，如果需要，可以用范畴论语言来表述其中许多问题；对象是目的问题，态射是卡普归约。由此自然会引出这样的问题：这些范畴与动力系统范畴之间是否存在结构上的对应关系。

来自（X、S）。注意，由于对于某个 $\hat{}H$ 有 $h^{(i)} = \hat{}H^{\ell}_{r_i} \circ g^{(i)}$，且其在 X 上的限制是区间 X 的一个同胚，而 $\hat{}\varphi$ 在限制于 X 时也是一个（可高效离散化的）同胚，因此可知函数 $\hat{}\varphi_{r_i} \circ h^{(i)}$ 满足可行可查询映射的定义。此外，$\varphi_i\left(B^{(i)}_{v\ i}\ (\ )\right) \subset X$ 是一个区间。因此，TELIC$^{(X,S)}$(v、$\{f_i\}$、$\{A^{(i)}\}$) 构成一个有效的目的问题。

由于 $\varphi_r \circ T_r = S_r \circ \varphi_r$，可得 $T^n_{v(n)}(h^{(n)}(s)) \in B^{(n)}_{v\ n}()$ 当且仅当 $S^n_{v(n)}(f_n(s)) \in A^{(n)}_{v\ n}()$对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，我们得到了一个多项式时间归约，将来自 (X,T) 的目的问题归约为来自 (X,S) 的目的问题。反方向可用相同的论证得出。□

备注 4.10。稍作调整后，我们也可以取两个系统 (X,T) 和 (Y,S)，其中$X \neq Y$和 $X,Y \subset \mathbb{R}$ 为闭区间，从而得到相同的结论。类似地，稍微改变目的问题的定义后，该定理对更一般的空间 $X \subset \mathbb{R}^d$ 也成立。为使论述更简洁，我们不证明这些结论。◀

以下推论是定理 4.9 的直接结果。

推论 4.11。在定理*4.9*的条件下，若 φ 是一个可高效离散化的半共轭，且 (X,S) 是 (X,T)的因子，那么，如果 (X,S) 存在困难目的问题，则(X,T)也存在。

若（X,T）存在困难目的问题，而（Y,S）不存在，那么这两个系统就不共轭；若能证明这一点，将十分理想。然而，目前我们只能得出结论：这两个系统之间不存在可高效离散化的共轭。第 6 节提出的一个问题是，所有可高效离散化的动力系统之间的共轭是否也都可高效离散化（问题 6.7）。若这些问题得到肯定回答，将揭示不同学科之间深刻而令人惊讶的联系。

5. Orbit structure and computational complexity

本节开始揭示动力系统的行为与解决其相关目的问题的复杂性之间的关系。这种关系构建了一套理论，可通过证明相关目的问题的下界来对拓扑动力系统进行分类。此外，它还指出动力系统与复杂性理论之间存在根本联系，并进一步通过描述复杂性理论，延伸至数理逻辑和可定义性理论。

5.1. **初步结果**。我们首先给出以下命题，指出拓扑传递性并不足以成为动力系统具有困难目的问题的充分条件。证明可以轻松仿照，从而证明其他简单系统（例如非扩张系统）也只能具有属于 P 类的目的问题。这表明，若某个系统产生的目的问题不属于 P 类，则该系统应当具有诸如对初始条件的敏感性之类的性质，尽管这一点尚未解决（参见第 6节）。

命题 5.1. 存在一个可高效离散化且拓扑传递的动力系统，它不具有困难的目的性问题。

B在证明该陈述之前，我们先给出本节中将用到的两个简单引理 .

引理5.2. 设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 可高效离散化，且 $B \subset X$ 是由若干闭有理矩形构成的并集。那么，对于所有 $r \in \mathbb{N}$ 和 $x \in X_r \setminus \mathsf{D}_r(B)$，距离 $\rho(x,\mathsf{D}_r(B))$（表示为代数数）可在 $\mathrm{poly}(r)$ 时间内计算。

证明。如果 B 只是一个有理矩形，那么对于 $x \in X_r \setminus \mathsf{D}_r(B)$，$\rho(x,\ \mathsf{D}_r(B))$ 可在多项式时间内计算：计算 x（其长度为 r）与构成 B 的面之间的距离即可。

因此，假设 B 是以下 q 个互不相同的有理闭矩形 $B = \cup_i B^{(i)}$的并集。然后，对每个$B^{(i)}$，计算 $\rho(x, \mathsf{D}_r($ $B^{(i)})$（作为一个代数数，见 [5]），并返回这些值中的最小值。由于 q 是固定的，该算法的运行时间为 poly(r)。□

引理 5.3。设 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个可有效离散化空间，且 $\{g^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个可有效查询映射的序列，其中 $g^{(i)}$: $I_i^d \to X_{r_i} \cup \{\perp\}$。对于由有限个有理闭矩形之并构成的任意子集 $A \subset X$，以及任意 $n \in \mathbb{N}$，存在一个算法，在输入 1^n 时返回一个 $s \in I_n^d$，使得对于 $r \geq n$有 $g^{(n)}(s) \in \mathsf{D}_r(A)$，否则 $\perp$；该算法的运行时间为poly($n + |\langle A \rangle|$)。

证明。由于每个映射 $g^{(i)}$ 都是可有效查询的，因此也满足邻域保持性质（参见定义4.1）。

将 I^d 划分为 $k = 2^d$ 个立方体 C_j, $j = 1, \ldots, k$，其中心由二进有理数 a_i 标记，$a_j \in I_i$,$i \geq k+1$。给定输入 1^n, $n \geq k+1$，我们要进行一次 k叉搜索，以判定是否存在一个$s \in I_n^d$ 使得 $g^{(n)}(s) \in \mathsf{D}_r(A)$。这很简单：计算所有变换后的 k立方体中心 $g^{(n)}(a_j)$到$\mathsf{D}_r(A)$的距离（根据引理5.2，这是一个多项式时间操作）。选择中心 $g^{(n)}(a_j)$最接近$\mathsf{D}_r(A)$的立方体，然后递归地将立方体 C_j 再划分为 k 个立方体：这一步能够正确完成，原因是可有效查询映射 $\{g^{(n)}\}$满足邻域保持条件，该条件保证对于所有 $n \in \mathbb{N}$，对于每个 $x_i \in I^d$ 和$\varepsilon = \sqrt{d}/2^n$，都存在一个 $\delta > 0$ 和一个 $y_i \in X$，使得对于所有 $x \in I_n^d$，$x \in B_\varepsilon(x_0)$当且仅当$g^{(n)}(x) \in B_\delta(y_0) \cup \{\perp\}$。

每次迭代，候选解的数量都会乘以因子 $1/k$, $k \geq 2$。因此，算法的运行时间关于 n 以及 A的描述长度是多项式的。□

We n现在证明命题5.1，展示传递性与可处理性之间关系的一个方面 y.

命题*5.1*的证明。设$(S^1, R_\alpha$是圆上的刚性旋转，其旋转角为无理代数数 $\alpha \in \mathbb{A}$（关于高效且有效的代数数运算的参考资料，可从 [5] 入手）。引理3.5 说明该系统可高效离散化，而圆上的无理旋转是拓扑传递的。特别要注意，逆映射R_α^{-1}也有一种高效离散化。

设 TELIC$_{(S^1, R_\alpha)}(v, \{h^{(i)}\}, \{B^{(i)}\})$ 是该系统产生的任意目的问题。我们将 S^1视为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，即将单位区间 I 的 1 与 0 视为同一点。因此，由于 $g^{(i)}$ 可有效查询，因而具有邻域保持性，精度为 i 时 I_i 中的二进有理数会被映射到 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 中，并保持其相对于通常序 $\leq$的顺序。此外，注意到由于 $h^{(i)} = \hat{} H_{r_i}^m \circ g^{(i)}$ 且$\hat{}$ $H^m|_I$ 是同胚，$h^{(i)}$ 也会将 I_i 中的二进有理数映射到 I 中，同时保持其顺序（并具有邻域保持性）。

解决这个目的问题的一种方法是使用引理5.2有效地执行二分搜索。我们采用另一种方法：输入 1^n 后，找出目标集合 $B_{v\ n\ ()}^{(n)}$ 的端点 x_0, x_1。令

$$x_0' = \mathsf{M}_{R_\alpha^{-1}}(x_0, 1^n, \mathsf{V}(1^n)) \in I_n \quad \text{and} \quad x_1' = \mathsf{M}_{R_\alpha^{-1}}(x_1, 1^n, \mathsf{V}(1^n)) \in I_n.$$

Put

$$\hat{B}_{v(n)}^{(n)} = [\hat{H}_{r_i}^{-m}(x_0'), \hat{H}_{r_i}^{-m}(x_1')].$$

根据引理 5.3，检查是否存在一个 $s \in I_n$，使得 $g^{(n)}(s) \in \hat{} B_{v\ n\ ()}^{(n)}$。相应地作出回应。□

5.2. **易处理性、传递性与熵之间的关系**。以下定理断言：如果一个动力系统存在一个目的问题，且该问题的任意判定器都在时间 $2^{\Omega(n)}$ 内运行，那么该系统具有正的拓扑熵。

定理 5.4. 设 (X, T) 是一个可有效离散化的拓扑动力系统。若 (X, T)具有一个目的问题，且该语言的每个判定器运行时间均为 $2^{\Omega(n)}$，则该系统的拓扑熵为正。

为强调这一结果的元数学意味，定理5.4 实质上断言，动力系统的复杂性与寻找关于动力系统某些基本命题（这些命题的形式为“在 $g^{(n)}(I_n^d)$ 中不存在任何点，其初始轨道片段会演化成 $B^{(n)}$”）的证明或反驳的难度之间存在某种关系。

该定理的一个新颖应用是运用计算技术（例如归约）来证明系统具有正熵。也就是说，定理5.4的一个推论是，若 (X,T) 存在一个判定器运行时间为指数时间的目的问题，且 $(X,T)\leq_p(Y,S)$ 对任意可高效离散化的系统 (Y,S)，则 $h(S)>0$。

我们通过以下包含关系的概念来组织目的问题；这使我们能够讨论源自动力系统的“典型”目的问题。

定义 5.5。 固定一个可高效离散化的动力系统 (X,T)。我们称一个子集$A\subseteq X$ 包含 一个目的问题

$$\mathsf{TELIC}_{(X,T)}(v,\{h^{(i)}\},\{B^{(i)}\})$$

若 $h^{(i)}\colon\{0,1\}^i\to A_{m(i)}\cup\{\perp\}$，且对所有 $i\in\mathbb{N}$， $B^{(i)}\subseteq A_{m(i)}$，其中 $m(i)=\min\{r_i,v(i)\}$。令$\mathrm{Tel}(A)^{(X,T)}$ 表示包含于 A 中的所有目的问题构成的类。[8]

注记 5.6。 我们指出，如果对于所有足够大的 $i\leq N$， $B^{(i)}=\emptyset$ 和 $h^{(i)}(I_i^d)=\{\perp\}$，那么“小集合”可以包含这些目的问题；这些目的问题“最终是非平凡的”，并且可以包含在体积很小的集合中。◀

如果状态空间 X 的子集 A 中包含的每个目的问题都能在多项式时间内解决，即 $\mathsf{Tel}(A)_{(X,T)}\subset\mathsf{P}$，那么称该子集为纯 集。如果集合 A 不是纯集，则称其为非纯 集，且 $\mathsf{Tel}(A)_{(X,T)}\not\subset\mathsf{P}$。这样的命名旨在表明，纯集具有一种特殊性质：其中包含的任何目的问题都可在多项式时间内求解；而非纯集则必定同时包含容易和困难的目的问题。

定理 5.7 （二分定理）。 设 $X\subset\mathbb{R}^d$ 是紧致且连通的，并设 (X,T) 是一个可高效离散化且具有逆映射的传递拓扑动力系统。那么， X 要么是纯集，要么每个纯集 $A\subset X$ 都包含在 X 的某个开稠密子集的补集中。

我们将在以下小节中证明定理 5.4 和定理5.7 。

5.3. **定理 5.4 的证明**。 该定理可以通过多种相当初等的方法证明；我们通过给（n,ε）-分离集的大小作下界来证明该定理。对数均以 2 为底。

定理 *5.4* 的证明。 设 $X\subset\mathbb{R}^\ell$ 是紧致度量空间，且 $T\colon X\to X$ 连续，并且系统（X,T）可高效离散化。为导出矛盾，假设存在一个目的问题

$$\mathsf{TELIC}_{(X,T)}\left(v,\{g^{(i)}\},\{B^{(i)}\}\right)$$

其所有求解器均在时间 $2^{\Omega(n)}$ 内停机，而 $h(T):=h_{\mathrm{top}}(T)=0$。

对于证明的目的，我们假设 $v(n)=n$，因为对于某个常数 C， $v(n)=Cn$，并且所有常数 已吸收到此处使用的渐近论证中。

令 $Y_n:=\{g^{(n)}(s)\colon s\in I_n^d,\ g^{(n)}(s)\neq\perp\}\subseteq X_n$. 设 $x_s=g^{(n)}(s)\in Y_n$. 令 $\rho_n(x,y):=\max_{0\leq j<n}\rho(T^j(x)\ T^j(y))$ 为通常的 Bowen 度量。对于 $\varepsilon>0$，令 $N(n,\varepsilon)$ 表示 X 的 (n,ε)-分离子集的最大基数。回忆一下，(X,T) 的拓扑熵定义为

$$h(T)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(n,\varepsilon)\right)\geq0.$$

[8]注意， A 不必在 T下保持不变，事实上也不必是可计算的：我们并未固定一个定义目的问题的集合 *and then*，使得 $g^{(i)}\colon I_i^d\to A$，且 $B^{(i)}\subseteq A$。

Let

$$\Phi_n(x) = \mathsf{B}(\mathsf{M}_T(\langle x\rangle, 1^n, 1^n)),$$

对于 $x \in X_{r_i}$，注意 M_T 在工作分辨率 $v(n) = n$ 下返回值，而该值包含于 X_n 中。因此，对于 $\varepsilon = 1/2^{n+1}$，存在一个 n_0，使得对于所有 $n \geq n_0$，$\rho_n(x,\ y) \leq \varepsilon$ 蕴含 $\Phi_n(x) = \Phi_n(y)$。

根据假设，任何判定目的问题的机器，其运行时间至少为 $2^{\alpha n}$ 对于某个 $\alpha > 0$以及充分大的 n。此外，映射序列 $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 可有效查询，因此，利用邻域保持性质和引理5.3，两点 $s,\ s' \in I_n^d$ 相邻（在格 I_n^d中相邻）当且仅当 $x_s,\ x_{s'}$ 在 X中相邻。此外，检查 $\Phi_n(x_s) = 1$所需时间为 $\mathsf{poly}(n)$。

根据这些观察，任何判定器的运行时间意味着至少有 $2^{\alpha' n} \geq 2^{\alpha n}$ 对相邻点 $x_s,\ x_{s'} \in Y_n$满足 $\rho_n(T(x_s)\ T(x_{s'})) \geq \varepsilon$。否则，事实 $\rho_n(x,\ y) \leq \varepsilon$意味着 $\Phi_n(x) = \Phi_n(y)$，并且$s,\ s'$ 相邻意味着 $x_s,\ x_{s'}$ 相邻（根据邻域保持性），因此可以利用这一性质避免同时检查 x_s和 $x_{s'}$。由此得到下界：$2^{\alpha' n} \leq N(n,\ \varepsilon_n)$，其中某个$\alpha' > 0$ 和 $\varepsilon_n = 1/2^{n+1}$。

令

$$h(\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \varepsilon),$$

且 $h_{\mathrm{top}}(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon)$，注意，对于固定的 $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k = 2^{-k}$,

$$h(\varepsilon_k) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \varepsilon_k) \geq \frac{1}{k} N(k, \varepsilon_k).$$

利用下界 $2^{\alpha' k} \leq N(k, \varepsilon_k)$,

$$h(\varepsilon_k) \geq \frac{1}{k} \log(2^{\alpha' k}) = \alpha' \log 2.$$

这对每个 k 都成立，因此沿着序列 $\varepsilon_k \downarrow 0$,

$$h_{\mathrm{top}}(T) \geq \limsup_{k\to\infty} h(\varepsilon_k) \geq \alpha' \log 2 > 0.$$

□

5.4. **定理 5.7 的证明**。我们先给出一些引理。

引理 5.8. 设 (X, T) 是一个具有逆映射的可高效离散化拓扑动力系统。如果(X, T) 存在一个困难目的问题，那么它必定存在一个困难目的问题，且该问题不能包含在内部为空的集合中。

证明。假设 (X, T) 存在一个困难目的问题 $\mathsf{T} = \mathsf{TELIC}_{(X,T)}\left(v, \{h^{(i)}\}, \{B^{(i)}\}\right)$ 它包含在一个内部非空的集合中。那么对所有 $i \in \mathbb{N}$, $B^{(i)} = \emptyset$，或者对某个点 $b \in X$（不一定在 $X_{v(i)}$ 中），都有 $B^{(i)} = b$。首先注意到，$B^{(i)}$ 可以扩充为一个小开球 $U^{(i)} \supset B^{(i)}$，使得 $\mathsf{D}^{v(i)}(U^{(i)}) = \mathsf{D}^{v(i)}(B^{(i)})$。根据我们的定义，这就证明了该定理。

下面我们给出一个更直观的构造，该构造利用了 T 可高效逆离散化这一假设。

利用 T 定义一个新的目的问题

$$\mathsf{T}' = \mathsf{TELIC}_{(X,T)}(v, \{h^{(i)}\}, \{A^{(i)}\}),$$

它在所有参数上都与 T 相同，除了目标集：对于每个 $i \in \mathbb{N}$, $A^{(i)} \supset B^{(i)}$，我们取包含 $B^{(i)}$ 的最小开球，使得 $\mathsf{D}^{v(i)}(A^{(i)})$ 包含距离 $\mathsf{D}^{v(i)}(B^{(i)})$ 最近的 $X_{v(i)}$中 $2d$ 个点中的 p，$1 \leq p \leq 2d$，回顾 $g^{(i)}$：$I_i^d \to X_{r_i} \cup \{\perp\}$。

我们断言，如果 T 是困难问题，则 T′ 无法在多项式时间内判定：考虑从 T 到 T′ 的以下简单归约。给定 T 的一个实例 1^n，针对同一实例求解 T′。如果没有解，

则返回 0。否则，检查唯一的证书 $s \in I_n^d$ 是否满足 $T^n_{v(n)}(h^{(n)}(s)) = \mathrm{D}^{v(n)}(B^{(n)})$（证书是唯一的，因为 T 是双射）。如果不满足，则重新定义 T，使得 $h^{(n)}(s) = \perp$，然后再次求解该问题。此过程最多重复 p 次，并返回 T 的正确解。□

给定一类目的问题 $\mathsf{Tel}(A)^{(X,T)}$，自然会问 $\mathsf{Tel}(A)^{(X,T)}$ 中最困难的目的问题具有怎样的复杂性。令 $\sim$ 表示$\mathcal{P}(X)$的幂集上的等价关系，其中 $A \sim B$ 当且仅当 A 和 B 要么都只包含简单的目的问题，要么各自都包含一个困难目的问题。[9] 这在这些集合上诱导出一种自然的预序，依据它们是否包含困难目的问题来定义：若 B 包含困难目的问题，则称 $A \preceq B$。令 $[A]$ 表示 $A \subseteq X$的等价类。该预序可提升为偏序，因此若 B包含困难目的问题，而 A 不包含，则记作 $[A] < [B]$。

引理 5.9. 令 (X, T) 为一个具有逆映射的可有效离散化的拓扑动力系统。对于每个 $A \subseteq X$, $[A] = [T^l(A)]$，对所有 $l \in \mathbb{N}$。

证明。我们证明 $[A] \geq [T^l(A)],$，而 $[A] \leq [T^l(A)]$ 的情形可用完全相同的论证证明，因为 T 是一个可高效离散化且具有逆映射的映射。

固定一个目的问题

$$\mathsf{T}_1 = \mathsf{TELIC}_{(X,T)}(v, \{g^{(i)}\}, \{B^{(i)}\})$$

包含于 $\mathsf{Tel}(T^l(A))^{(X,T)}$ 中。注意，由于 T 是双射，T_1 与另一个目的问题相对应

$$\mathsf{T}_2 = \mathsf{TELIC}_{(X,T)}(v, \{T^{-l}_{r_i} \circ g^{(i)}\}, \{T^{-l}(B^{(i)})\}) \in \mathrm{Tel}(A)_{(X,T)},$$

注意到 T 与自身可交换，因此 $\{T^{-l} \circ g^{(i)}\}$ 和 $\{T^{-l}(B^{(i)})\}$ 构成有效的函数序列和目标集序列。

因此，T_1 的任意实例都可以转换为 T_2 的一个实例，只需对目标集合 $B^{(i)}$ 和函数 $h^{(i)}$ 将 T^{-1} 复合 l 次即可。又由于 l 是固定的，且 T^{-1} 可高效离散化并且是双射，因此 $\mathsf{Tel}(A)_{(X,T)} \subseteq$ 属于 P 类，当且仅当 $\mathsf{Tel}(T^l(A))_{(X,T)} \subseteq$ 属于 P 类。□

现在我们证明二分定理定理 5.7。

定理的证明 *5.7.* 假设 (X, T) 存在一个困难目的问题。根据引理 5.9 如果 $U \subset X$ 是非纯的，那么 $T(U)$ 也是非纯的。而且 $U \cup T(U)$ 也同样是非纯的。此外，根据引理 5.8，存在一个困难目的问题，它不能被包含在零测集中，也不能最终被包含在零测集中。设 U 是一个包含此类困难目的问题的开集。定义

$$D \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U).$$

每个 $T^n(U)$ 都是开集，因此 D是开集，特别地，D是非纯的。为了证明 D是稠密的，取非空开集 $V \subset X$。根据拓扑传递性，存在一个 $n \geq 0$，使得 $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$。但是$T^n(U) \subset D$，因此 $V \cap D \neq \emptyset$。所以 D是 X的一个非纯开稠密子集。□

6. Pseudorandom dynamical systems & further development

现在，我们汇集了一些猜想和问题，它们的解决将极大地推动动力学与计算理论之间联系的发展。

[9]同样，我们在这里并不关注这些集合的可计算性。

6.1. **伪随机动力系统**。本文提出的一个更有趣的问题是，是否存在伪随机动力系统。回顾引言中的定义：如果一个可高效离散化的动力系统存在一个难解的目的性问题，我们就称它是伪随机的。

研究这一问题的动机源于这样一个事实：如果一个动力系统是伪随机的，它就必须拥有一个不变子集，其随机性具有一种“稳定”的形式：对系统进行离散化，并不会迫使系统在所有时刻都以无法与随机行为区分的方式运行。相反，在较短的时间范围内，可以利用动力学获得比特序列，使其在计算上无法与随机序列区分，方法是利用难解的目的性问题来构造单向函数或伪随机生成器（假设满足某些平均情形复杂性条件，参见下文的猜想6.1 ）。这立刻让人想到理论密码学中的一些问题；在提出一个猜想之前，我们先回顾几个基本概念。

概率多项式时间图灵机（PPT）是一种能够访问随机比特流的图灵机（通俗地说，就是这种图灵机“可以抛硬币”）。如果对于每个多项式 $p(\cdot)$，都存在某个 n_0，使得对于所有 $n > n_0$， $\mu(n) \leq 1/p(n)$，那么称函数 $\mu(\cdot)$ 为可忽略的。设 $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ 是一个多项式时间可计算函数。若对于每个概率多项式时间算法 A，都存在一个可忽略函数 μ，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，则称 f 为单向函数，

$$\mathbb{P}[x \leftarrow \{0,1\}^n; y = f(x) : A(1^n, y) \in f^{-1}(f(x))] \leq \mu(n).$$

我们再给出一个相关定义。分布问题 是一个二元组（$L, \mathcal{D}$），其中 $L \subseteq \{0,1\}^*$，且 $\mathcal{D}$ 是一个 PPT。我们称分布问题（$L, \mathcal{D}$）是几乎处处 δ 平均情况下困难 的，若对于所有 PPT A 以及无穷多个 $n \in \mathbb{N}$，

$$\mathbb{P}[x \leftarrow \mathcal{D}(1^n) : A(1^n, x) = L(x)] \leq 1 - \delta.$$

二分定理及其推论实质上指出，如果一个动力系统存在困难的目的性问题，那么这类问题就极为普遍。这类困难目的性问题（如果存在）的普遍性自然引出了一个问题：这是否意味着单向函数的存在？而单向函数的存在必然与平均情况下困难的分布问题的存在密切相关。下面的猜想将探讨这个问题。

回顾一下，若拓扑动力系统 system（X, T）满足以下条件，则称其为拓扑精确 ： 对于每个非空开集 $U \subset X$，都存在一个 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $T^{n_0}(U) = X$。

猜想 6.1. 设 (X, T) 表示一个可有效离散化的拓扑动力系统。如果 T 是拓扑精确的，且该系统具有一个困难的目的性问题，那么就存在一个几乎处处困难的平均情形目的性问题，该问题源自这个动力系统。

这一猜想为证明可以从具有困难目的问题的特定动力系统构造单向函数铺平了道路（相关讨论另见 [40]）。

6.2. **进一步发展的其他方向**。我们从以下问题开始

问题 6.2. 假设只要 (X, T) 具有正熵，且 $(X, T) \leq_p (Y, S)$，那么 (Y, S) 也具有正熵。在此假设下，能否证明 Chirikov 标准映射在某些参数值下具有正熵?

当我们转而询问：如果系统所产生的任一目的问题的最优判定器仅以超多项式时间 运行，而非指数时间，我们能对原系统得出什么结论时，研究有限计算与具有无限状态空间的动力系统之间的交汇便很快遇到困难。换言之，要对目的问题属于 P 类的系统进行分类并不容易；例如，对于非扩张系统，这一点很容易证明，但对于更复杂的系统（如等度连续系统），其复杂性仍极为微妙。我们就此提出一些猜想。

猜想 6.3。 如果 $(X,\ T)$ 是一个高效可离散化的莫尔斯–斯梅尔系统，那么该系统产生的每个目的问题都属于 P 类。

猜想 6.4。 如果 (X,T) 是等度连续的可高效离散化系统，那么该系统产生的每个目的问题都属于 P 类。

猜想 6.5。 设 (X,T) 是一个可有效离散化的拓扑动力系统。如果 (X,T) 存在一个难解的目的性问题，那么存在一个闭子集 $E \subset X$，系统在该子集上对初始条件具有敏感性。

猜想 6.6。 设 (X,T) 是一个可有效离散化的拓扑动力系统。如果 (X,T) 是传递的且存在一个难解的目的性问题，那么该系统是拓扑混合的。

一个需要解决的重要问题，是找出划分动力系统的“可行性分界线”：一边是仅存在简单目的问题的系统，另一边是存在困难目的问题的系统。目前尚不清楚，存在难处理的目的问题是否意味着系统具有正熵（定理1.1表明，如果任何判定器都必须以 指数时间运行，那么结论成立；但对于超多项式时间，情况仍不明朗）。

问题6.7。如果两个可高效离散化的动力系统（X,T）和（Y,S）共轭，那么这种共轭是否必定可高效离散化?

问题6.7 若能得到肯定的答案，实际上将揭示一个深刻的结果：可高效离散化的动力系统之间的共轭必定在计算上简单。由此可推得，如果一个系统存在难处理的目的问题，而另一个系统不存在，那么二者便不共轭。因此，回答这一问题将极有助于确定我们可以期待目的问题之间的归约采取何种形式，而这本身也有助于判断是否存在困难的目的性问题。

一个相关问题是

问题6.8。如果两个可高效离散化的动力系统（X,T）和（Y,S）共轭（其中共轭不必可高效离散化），这是否意味着，来自（X,T）的每个目的问题都能在多项式时间内归约到来自（Y,S）的某个目的问题，反之亦然?

对这些问题答案的任何洞见都将十分有趣，并揭示动力学与计算之间密切的联系。

References

[1] B. Applebaum、Y. Ishai 和 E. Kushilevitz。通过元胞自动机实现密码学，或复杂性在自然界中能够以多快的速度涌现? 载于 *ICS*，第 1–19 页，2010 年。[2] S. Arora 和 B. Barak。 *Computational complexity: a modern approach*。剑桥大学出版社，2009 年。[3] C. Barrett、H.B. Hunt III、M. V. Marathe、S. Ravi、D. J. Rosenkrantz、R. E. Stearns 和 M. Thakur。有限离散动力系统的前驱存在性问题。 *Theoretical Computer Science*，386(1-2)：3–37，2007 年。[4] C. L. Barrett、H. B. Hunt III、M. V. Marathe、S. Ravi、D. J. Rosenkrantz 和 R. E. Stearns。有限离散动力系统可达性问题的复杂性。 *Journal of Computer and System Sciences*，72(8)：1317–1345，2006 年。[5] S. Basu、R. Pollack 和 M.-F. Roy。 *Algorithms in real algebraic geometry*。施普林格，2006 年。[6] C. H. Bennett。计算热力学——综述。 *International Journal of Theoretical Physics*，21：905–940，1982 年。[7] I. Binder、M. Braverman 和 M. Yampolsky。关于 Siegel Julia 集的计算复杂性。 *Communicationsin mathematical physics*，264(2)：317–334，2006 年。[8] M. L. Blank。 *Discreteness and continuity in problems of chaotic dynamics*，第 161 卷。美国数学学会，1997 年。[9] O. Bournez、D. S. Gra¸ca 和 E. Hainry。受扰动力系统中的计算。 *Journal of Computer and System Sciences*，79(5)：714–724，2013 年。

[10] O. Bournez、D. S. Gra¸ca 和 A. Pouly。多项式时间等价于多项式长度的多项式常微分方程的解。 *Journal of the ACM (JACM)*，64(6)：1–76，2017 年。[11] O. Bournez、D. S. Gra¸ca、A. Pouly 和 N. Zhong。非线性动力系统演化的可计算性与计算复杂性。载于 *The Nature of Computation. Logic, Algorithms, Applications: 9th Conferenceon Computability in Europe, CiE 2013, Milan, Italy, July 1-5, 2013. Proceedings 9*，第 12–21 页。施普林格，2013 年。[12] R. Bowen。群自同态和齐性空间的熵。 *Transactions of the American MathematicalSociety*，153：401–414，1971 年。[13] L. Boyer、M. Delacourt、V. Poupet、M. Sablik 和 G. Theyssier。元胞自动机的 μ极限集：从计算复杂性的视角看。 *Journal of Computer and System Sciences*，81(8)：1623–1647，2015 年。[14] M. Braverman 和 S. Cook。实数上的计算：科学计算基础。 *Notices of the AMS*，53(3)：318–329，2006 年。[15] M. Braverman、J. Schneider 和 C. Rojas。空间受限丘奇-图灵论题与封闭系统的计算可处理性。 *Physical review letters*，115(9)：098701，2015 年。[16] M. Braverman 和 M. Yampolsky。不可计算的 Julia集。 *Journal of the American Mathematical Society*，第 551–578 页，2006 年。[17] M. Braverman 和 M. Yampolsky。 *Computability of Julia sets*，第 23 卷。施普林格，2009 年。[18] M. Braverman 和 M. Yampolsky。构造局部连通的不可计算 Julia集。 *Communications inMathematical Physics*，291(2)：513–532，2009 年。[19] M. Brin 和 G. Stuck。 *Introduction to dynamical systems*。剑桥大学出版社，2002 年。[20] R. Bruera、R. Cardona、E. Miranda 和 D. Peralta-Salas。图灵完备动力系统的拓扑熵。 *arXiv preprint arXiv:2404.07288*，2024 年。[21] S. Buss、C. H. Papadimitriou 和 N. Tsitsiklis。关于耦合自动机的可预测性：一个有关混沌的寓言。载于 *Proceedings [1990] 31st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*，第 788–793 页。电气电子工程师学会，1990 年。[22] R. Cardona。带辅助信息的流体力学与符号计算模型。 *Revista Matemática Iberoamericana*，2024 年。[23] R. Cardona、E. Miranda 和 D. Peralta-Salas。不可压缩欧拉方程的图灵普适性与 Moore 的一个猜想。 *International Mathematics Research Notices*，2022(22)：18092–18109，2022 年。[24] R. Cardona、E. Miranda 和 D. Peralta-Salas。迈向流体计算机。 *Foundations of Computational Mathematics*，第 1–17 页，2025 年。[25] R. Cardona、E. Miranda、D. Peralta-Salas 和 F. Presas。构造三维图灵完备欧拉流。 *Proceedings of the National Academy of Sciences*，118(19)：e2026818118，2021 年。[26] F. Cecconi、M. Falcioni 和 A. Vulpiani。通过可预测性刻画动力系统的复杂性。*arXiv preprint nlin/0307013*，2003 年。[27] J. Cotler 和 S. Rezchikov。计算动力系统。载于 *2024 IEEE 65th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*，第 166–202 页。电气电子工程师学会，2024 年。[28] A. Crisanti、M. Falcioni、G. Mantica 和 A. Vulpiani。应用算法复杂性定义复杂系统运动中的混沌。 *Physical Review E*，50(3)：1959，1994 年。[29] J. P. Crutchfield 和 K. Young。推断统计复杂性。 *Physical review letters*，63(2)：105，1989 年。[30] N. C. da Costa 和 F. A. Doria。经典力学中的不可判定性与不完备性。 *International Journalof Theoretical Physics*，30：1041–1073，1991 年。[31] N. C. da Costa 和 F. A. Doria。具有不可判定不动点的不可判定 Hopf分岔。 *International Journalof Theoretical Physics*，33：1885–1903，1994 年。[32] B. H. De Menibus 和 M. Sablik。元胞自动机在随机构型上迭代所得极限测度集合的刻画。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*，38(2)：601–650，2018 年。[33] F. Denef 和 M. R. Douglas。景观的计算复杂性：第一部分。 *Annals of Physics*，322(5)：1096– 1142，2007 年。[34] F. Denef、M. R. Douglas、B. Greene 和 C. Zukowski。景观的计算复杂性 II——宇宙学考量。 *Annals of Physics*，392：93–127，2018 年。[35] E. I. Dinaburg。拓扑熵与度量熵之间的相关性。载于 *Doklady Akademii Nauk*，第 190 卷，第 19–22 页。俄罗斯科学院，1970 年。[36] A. Dudko 和 M. Yampolsky。费根鲍姆朱利亚集的多项式时间可计算性。 *Ergodic Theory and DynamicalSystems*，36(8)：2441–2462，2016 年。[37] P. A. Dufort 和 C. Lumsden。动力学、复杂性与计算。 *Physical Theory in Biology. Singapore:World Scientific*，第 69–106 页，1997 年。[38] J.-P. Eckmann 和 D. Ruelle。混沌与奇异吸引子的遍历理论。 *Reviews of modern physics*，57(3)：617，1985 年。

[39] M. Ercsey-Ravasz 和 Z. Toroczkai。将约束满足的模拟方法中的优化问题困难性视为瞬态混沌。 *Nature Physics*, 7(12):966–970，2011。[40] S. Everett。论动力系统在密码学中的应用。 *Chaos*， *Solitons & Fractals*，183:114952，2024。[41] S. Everett。计算与动力复杂性中的对应 II：强迫复杂归约。2026。[42] S. Everett。计算与动力复杂性中的对应 III：可行性与拓扑熵。2026。[43] M. Freedman。关于计算复杂性的拓扑观点。 *Documenta Mathematica-Extra Volume ICM*，第453–464页，1998。[44] M. H. Freedman。作为数学公理的复杂性类。 *Annals of mathematics*，第995–1002页，2009。[45] A. Galanis。 *Phase transitions in the complexity of counting*。博士论文，佐治亚理工学院，2014。[46] S. Galatolo。动力系统中的复杂性、初始条件敏感性、维数与弱混沌。 *Nonlinearity*，16(4):1219，2003。[47] S. Gogioso。计算复杂性中的统计物理学若干方面。 *arXiv preprint arXiv:1405.3558*，2014。[48] P. G´ora 和 A. Boyarsky。为什么计算机偏爱勒贝格测度。 *Computers & Mathematics with Applications*，16(4):321–329，1988。[49] D. Gra¸ca、C. Rojas 和 N. Zhong。以任意精度计算几何洛伦兹吸引子。 *Transactionsof the American Mathematical Society*，370(4):2955–2970，2018。[50] D. S. Gra¸ca 和 N. Zhong。动力系统的稳健不可计算性与稳健动力系统的可计算性。 *Logical Methods in Computer Science*，20，2024。[51] P. Grassberger。动力系统中的复杂性与预测。载于 *Measures of Complexity: Proceedings of the Conference*， *Held in Rome September 30–October 2*，1987，第1–21页。施普林格，2005。[52] J. Hartmanis、V. Sewelson 和 N. Immerman。NP-P 中的稀疏集：EXPTIME 与 NEXPTIME。载于 *Proceedings of the fifteenth annual ACM symposium on Theory of computing*，第382–391页，1983。[53] K. Hiura 和 S.-i. Sasa。微观可逆性与宏观不可逆性：从算法随机性的角度看。 *Journal of Statistical Physics*，177:727–751，2019。[54] G. Karde¸s 和 D. Wolpert。计算机器的包容性热力学。 *arXiv preprint arXiv:2206.01165*，2022。[55] K. Ko。 *Complexity theory of real functions*。施普林格科学与商业媒体，2012。[56] P. Koiran 和 C. Moore。一维和二维的闭式解析映射可以模拟通用图灵机。 *Theoretical Computer Science*，210(1):217–223，1999。[57] A. Kolchinsky 和 D. H. Wolpert。图灵机的热力学成本。 *Phys. Rev. Res.*，2:033312，2020年8月。[58] V. Kreinovich 和 A. M. Finkelstein。将计算复杂性应用于物理学基础。*Journal of Mathematical Sciences*，134:2358–2382，2006。[59] P. K˚urka。元胞自动机中的语言、等度连续性与吸引子。 *Ergodic theory and dynamical systems*，17(2):417–433，1997。[60] P. K˚urka。论图灵机的拓扑动力学。 *Theoretical Computer Science*，174(1-2):203–216，1997。[61] P. K˚urka。元胞自动机的拓扑动力学。载于 *Codes*， *Systems*， *and Graphical Models*，第447–485页。施普林格，2001。[62] M. Li、P. Vit´anyi 等。 *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*，第3卷。施普林格，2008。[63] S. Lloyd 和 H. Pagels。作为热力学深度的复杂性。 *Annals of physics*，188(1):186–213，1988。[64] G. Manzano、G. Karde¸s、 ´E. Rold´an 和 D. H. Wolpert。具有绝对不可逆性、单向跃迁和随机计算时间的计算热力学。 *Physical Review X*，14(2):021026，2024。[65] C. Moore。动力系统中的不可预测性与不可判定性。 *Physical Review Letters*，64(20):2354，1990。[66] C. Moore。广义移位：动力系统中的不可预测性与不可判定性。 *Nonlinearity*，4(2):199，1991。[67] A. Nabutovsky 和 S. Weinberger。多维结平凡性问题的算法不可解性。*Commentarii Mathematici Helvetici*，71:426–434，1996。[68] M. Ogihara 和 K. Uchizawa。有向图上同步布尔有限动力系统的计算复杂性研究。 *Information and Computation*，256:226–236，2017。[69] T. E. Ouldridge 和 D. H. Wolpert。局部且周期运行的确定性有限自动机的热力学。 *New Journal of Physics*，25(12):123013，2023。[70] C. Papadimitriou。 *Computational complexity*。Addison-Wesley，1994。[71] C. H. Papadimitriou 和 N. K. Vishnoi。论动力系统中极限环的计算复杂性。载于 *Proceedings of the 2016 ACM Conference on Innovations in Theoretical Computer Science*，第403–403页，2016。[72] A. Percus、G. Istrate 和 C. Moore。 *Computational complexity and statistical physics*。牛津大学出版社美国分社，2006。[73] C. Robinson。 *Dynamical systems: stability , symbolic dynamics, and chaos*. CRC出版社 , 1998。

[74] C. Rojas 和 M. Sablik。拓扑动力学中吸引子的算法描述复杂性。 *ErgodicTheory and Dynamical Systems*，第 1–28 页，2025 年。[75] C. Rojas 和 M. Yampolsky。实二次族中吸引子的计算不可处理性。 *Advances inMathematics*，349：941–958，2019 年。[76] D. J. Rosenkrantz、M. V. Marathe、S. Ravi 和 R. E. Stearns。有向无环图上的同步动力系统：复杂性与算法。 *ACM Transactions on Computation Theory*，16(2)：1–34，2024 年。[77] H. T. Siegelmann、A. Ben-Hur 和 S. Fishman。连续时间动力学的计算复杂性。 *Phys.Rev. Lett.*，83：1463–1466，1999 年 8 月。[78] R. Stoop、N. Stoop 和 L. Bunimovich。动力学的复杂性即为可预测性的变异性。 *Journal ofstatistical physics*，114：1127–1137，2004 年。[79] I. Sudoku。数独中的混沌。 *SCIENTIFIC REPORTS*，2(725)：1，2012 年。[80] K. Sutner。元胞自动机的计算复杂性。载于 J. Csirik、J. Demetrovics 和 F. G´ecseg 编，
Fundamentals of Computation Theory，第 451–459 页，柏林、海德堡，1989 年。施普林格柏林海德堡。[81] K. Sutner。论有限元胞自动机的计算复杂性。 *Journal of Computer and System Sciences*，50(1)：87–97，1995 年。[82] K. Sutner。元胞自动机的计算分类。 *International Journal of General Systems*，41(6)：595–607，2012 年。[83] T. Tao。平均化三维纳维–斯托克斯方程的有限时间爆破解。 *Journal of the AmericanMathematical Society*，29(3)：601–674，2016 年。[84] T. Tao。论势阱动力学的普适性。 *Dyamics of partial differential equations*，14：219—238，2017 年。[85] P. Walters。 *An introduction to ergodic theory*，第 79 卷。施普林格科学与商业媒体，2000 年。[86] K. Weihrauch。 *Computable analysis: an introduction*。施普林格科学与商业媒体，2012 年。[87] S. Weinberger。 *Computers, Rigidity, and Moduli: The Large-Scale Fractal Geometry of Riemannian Moduli Space*。普林斯顿大学出版社，2020 年。[88] D. J. Welsh。统计物理学中若干经典问题的计算复杂性，1990 年。[89] D. H. Wolpert。计算的随机热力学。 *Journal of Physics A: Mathematical andTheoretical*，52(19)：193001，2019 年。[90] D. H. Wolpert、J. Korbel、C. W. Lynn、F. Tasnim、J. A. Grochow、G. Karde̲s、J. B. Aimone、V. Balasubramanian、E. De Giuli、D. Doty 等。随机热力学是否是理解计算能量成本的关键？ *Proceedings of the National Academy of Sciences*，121(45)：e2321112121，2024 年。[91] M. Yampolsky。迈向理解动力系统数值建模的理论挑战。
New Zealand Journal of Mathematics，52：453–467，2021 年。[92] W. H. Zurek。算法随机性与物理熵。
Physical Review A，40(8)：4731，1989 年。

University of Chicago
Email address: same@uchicago.edu