arXiv:2601.09145v1 [math.FA] 14 Jan 2026

双圆盘上的 Hardy 空间压缩移位算子的几何方法

YUFENG LU、YIXIN YANG 和 CHAO ZU*

摘要。本文通过几何方法研究双圆盘上的 Hardy 空间中的压缩移位算子 S_z。我们计算了由有理内函数诱导的 Beurling 型商模上 S_z 的谱和本质谱，并完整刻画 S_z^* 成为 Cowen-Douglas 算子的条件。随后，我们将 Cowen-Douglas 算子的概念推广为广义 Cowen-Douglas 算子，并证明 S_z^* 是广义 Cowen-Douglas 算子。此外，我们建立了由核空间诱导的厄米全纯向量丛的可约性与广义 Cowen-Douglas 算子的可约性之间的联系。通过几何方法，我们研究了 S_z 在某些多项式商模上的约化子空间。

1. 引言

令 $\mathbb{D}^2 = \{(z, w) : |z| < 1, |w| < 1\}$ 表示 $\mathbb{C}^2$ 中的开单位双圆盘，令 $\mathbb{T}^2 = \{(z,w) : |z| = 1, |w| = 1\}$ 表示 $\mathbb{D}^2$ 的特殊边界。令 $|dz|$ 表示单位圆 $\mathbb{T}$ 上的归一化勒贝格测度，且令 $dm = |dz||dw|$ 表示环面 $\mathbb{T}^2$ 上的乘积测度。双圆盘上的 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 是由 $\mathbb{D}^2$ 上满足以下条件的全纯函数构成的希尔伯特空间

$$\|f\|^2 = \sup_{0\le r<1} \int_{\mathbb{T}^2} |f(rz, rw)|^2 dm < \infty.$$

在 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 上，Toeplitz 算子 T_z 和 T_w 是具有无穷重数的单边移位。若闭子空间 $\mathcal{M} \subset H^2(\mathbb{D}^2)$ 在 T_z 和 T_w 的作用下均保持不变，则称其为子模。商空间 $H^2(\mathbb{D}^2)/\mathcal{M}$ 自然地等同于 $\mathcal{N} = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \mathcal{M}$，并通过以下方式赋予 $\mathbb{C}[z,w]$- 模结构

$$p \cdot f = p(S_z, S_w)f, \quad p \in \mathbb{C}[z, w], \quad f \in \mathcal{N},$$

其中，$S_z = P_N T_z|_{\mathcal{N}}$ 和 $S_w = P_N T_w|_{\mathcal{N}}$ 是作用在 $\mathcal{N}$, $\mathbb{C}[$ 上的压缩移位算子；z、$w]$ 表示两个变量的多项式环，而 $P_{\mathcal{N}}$ 表示从 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 到 $\mathcal{N}$ 的正交投影。在函数模型理论中，商模上移位算子的压缩可作为一大类算子的典范模型。例如，Bergman移位与商模 $H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [z-w]$ 上的 S_z 酉等价。这一思想成功地用于研究Bergman空间[20, 28]上乘法算子的不变子空间和约化子空间。

2010年数学主题分类。主要分类：47B38；次要分类：47A15。关键词和短语：双圆盘上的Hardy空间、压缩移位算子、Cowen-Douglas 算子、约化子空间。 * 通讯作者。 本研究受国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12031002、11971086）。本研究还部分受大连市高层次人才创新项目资助（项目编号：2020RD09）。 1

经典的贝尔林定理 [4] 指出，$H^2(\mathbb{D})$的每个不变子空间都具有形式 $\theta H^2(\mathbb{D})$，其中 θ是 $\mathbb{D}$ 上的某个内函数。过去一个世纪以来，模型空间 $\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}) \ominus \theta H^2(\mathbb{D})$以及作用在 $\mathcal{K}_\theta$ 上的压缩移位算子，在函数论和算子理论的发展中都发挥了重要作用 [3, 27]。然而，$H^2(\mathbb{D}^2)$的子模结构要复杂得多。例如，W. Rudin在 [29], 中展示了两个病态子模：一个秩为无限，另一个不包含任何非零有界全纯函数。过去几十年间，许多研究者关注$H^2(\mathbb{D}^2)$上的算子理论和函数论。请读者参阅 [6, 9, 21, 29, 31–33] 及其中的参考文献。

函数 $\theta \in H^2(\mathbb{D}^2)$ 若满足 $|\theta(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| = 1$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上几乎处处成立，则称其为 $\mathbb{D}^2$ 上的内函数。对于 $\mathbb{D}^2$ 上的每个内函数 $\theta(z,w)$，与之关联的商模

$$\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2)$$

称为希尔伯特模 [12] 框架下的 Beurling 型商模。Beurling 型商模上的压缩移位算子 S_z 及其伴随算子 $S^*_z|\mathcal{K}_\theta$ 构成了一个丰富的分析领域。例如，有理内函数所诱导的 $\mathcal{K}_\theta$ 结构与 Agler 分解及稳定多项式有关（见 [5,6,23]），而代数几何和复几何中的方法对于研究 S_z 至关重要。

设 T 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子。若 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间，且 $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ 和 $T^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$，则称 $\mathcal{M}$ 为 T 的约化子空间。若约化子空间 $\mathcal{M}$ 中包含的约化子空间只有 $\mathcal{M}$ 和 $\{0\}$，则称其为极小约化子空间。若 T 有非平凡约化子空间，则称 T 可约；否则称 T 不可约。各种线性算子类的不变子空间和约化子空间的分类，推动了许多深入研究，也引出了许多有趣的问题。这个问题本身不仅十分重要，解决它所采用的方法也同样值得关注。关于 Bergman 空间上乘法算子的约化子空间，可参见 [14, 15, 20, 35], ；关于截断 Toeplitz 算子的约化子空间，可参见 [17] 和 [25]。

1990年，Agler [1] 证明，单位球中的每个 $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ 都有如下分解:

$$\frac{1 - \overline{\varphi(\lambda,\mu)}\varphi(z,w)}{(1-\bar{\lambda}z)(1-\bar{\mu}w)} = \frac{K_1(z,w,\lambda,\mu)}{1-\bar{\lambda}z} + \frac{K_2(z,w,\lambda,\mu)}{1-\bar{\mu}w},$$

其中 $K_1, K_2 : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$ 是两个正核。对于一个内函数 θ，我们看到 $\mathcal{K}_\theta$可以分解（见 [2]）为

$$\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2,$$

其中 $\mathcal{S}_1 = \mathcal{H}(\frac{1}{1-\bar{\lambda}z})$ 和 $\mathcal{S}_2 = \mathcal{H}(\frac{2}{1-\bar{\mu}w})$ 分别为 T^z-不变子空间和 T_w-不变子空间，而$\mathcal{H}(K)$ 表示再生核为 K 的再生核希尔伯特空间。这类子空间 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 称为 $\mathcal{K}_\theta$的 Agler 子空间。如果 $\mathcal{S}_1$ 也是S_z的约化子空间，我们称其为 S_z的 Agler 约化子空间。若 S_z 存在非平凡的 Agler 约化子空间，则称其为 Agler 可约。

2017年，对于有理内函数 θ，K. Bickel、G. Knese 和 C. Liaw 研究了 [5,6] 中由 Agler 分解得到的 $\mathcal{K}_\theta$，以及 [6] 中 S_z 的 Agler 可约性。他们证明，由有理内函数诱导的 Beurling 型商模 $\mathcal{K}_\theta$ 上的 S_z 是 Agler 可约的，当且仅当 θ 是两个单变量内函数的乘积。在 [36], 中，我们将这一结果推广到任意内函数，并定义了纯等距算子约化子空间。一个等距算子

希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 T 称为纯等距算子，如果 $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n\mathcal{H} = \{0\}$。对于 T，约化子空间 $\mathcal{M}$ 称为纯等距算子约化子空间，如果 $T|_{\mathcal{M}}$ 是纯等距算子。由于子空间 $\mathcal{S}_1$ 是 T_z-不变的，因此 $S_z|_{\mathcal{S}_1} = T_z|_{\mathcal{S}_1}$ 是纯等距算子，于是每个 Agler 约化子空间 $\mathcal{S}_1$ 都是 S_z 的纯等距算子约化子空间。然而，存在内函数 θ，使得 $\mathcal{K}_\theta$ 上的 S_z 有非平凡的纯等距算子约化子空间，却没有非平凡的 Agler 约化子空间。此外，我们证明，对于内函数 θ，$\mathcal{K}_\theta$ 上的 S_z 有非平凡的纯等距算子约化子空间，当且仅当 θ 有一个非常数单变量内因子 $\psi(w)$（见定理 2.1, [36]）。值得注意的是，存在许多内函数，使得 $\mathcal{K}_\theta$ 上的 S_z 可约，却没有非平凡的纯等距算子约化子空间。这引出了以下问题。

问题 1.1. 对于 $\mathbb{D}^2$ 上的内函数 θ，何时 S_z 在 $\mathcal{K}_\theta$ 上可约?

对于多项式 $p(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$，令 $\deg_z p$、$\deg_w p$ 分别表示 p 关于变量 z 和 w 的次数。设 $r(z, w) = q(z,w)\, p(z,w)$ 是一个二元有理函数，其中 p 和 q 没有公因子。定义 $\deg_z r = \max\{\deg_z p, \deg_z q\}$，$\deg_w r = \max\{\deg_w p, \deg_w q\}$，并用有序对 $(\deg_z r, \deg_w r)$ 定义 r(z, w) 的次数。次数为 (m, n) 的有理内函数称为 (m, n)型。在 [34, 36], 中，我们观察到 S_z 的特征函数与解析 Toeplitz 算子密切相关，并由此引入了算子值函数 $\Theta(z)$ 的弱约化子空间这一概念。通过建立特征函数的弱可约性与 S_z 的可约性之间的关系，我们完整刻画了 $\mathcal{K}_\theta$ 上由 (n, 1)型有理内函数诱导的 z 的可约性。然而，这种方法不适用于高次数的有理内函数。即使对于由 (2, 2)型有理内函数诱导的商模 $\mathcal{K}_\theta$，S_z 的约化子空间分类也尚未完全明了。本文是对 [34, 36] 以及一系列相关研究（如 [6, 8, 11, 32, 33]）的延续。我们的目标是通过复几何方法，研究由有理内函数诱导的 Beurling 型商模 $\mathcal{K}_\theta$ 上的压缩移位算子 S_z 的可约性，以及某些多项式商模上的可约性。

首先，我们计算S_z在 $\mathcal{K}_\theta$上的谱和本质谱，并注意到S_z^*具有丰富的点谱。S_z^* 丰富的点谱结构启发我们提出以下问题。

问题 1.2. 何时S_z^* 是 Beurling 型商模$\mathcal{K}_\theta$上的 Cowen-Douglas 算子?

在 [11], 中，已证明 Cowen-Douglas 算子的可约性等价于其关联的核空间向量丛的可约性。特别地，若核空间向量丛是线丛，则该 Cowen-Douglas 算子不可约。在第 3 节中，我们证明，对于 $\mathbb{D}^2$ 中由有理内函数 θ 诱导的 $\mathcal{K}_\theta$，S_z^* 属于 Cowen-Douglas 类，当且仅当 θ 的每个不可约因子的零点集在z平面上的投影在 $\mathbb{D}$ 中是连通的。此外，我们给出两个有趣的例子，其中S_z^* 不属于 Cowen-Douglas 类，但一个是不可约的（见例 3.7），另一个是可约的（见例 4.13）。通过进一步细致的观察，我们发现，对于一般的 Beurling 型商模 $\mathcal{K}_\theta$，与 Cowen-Douglas 算子所诱导的向量丛相比，核空间向量丛$E_{S_z^*}$总是若干厄米全纯向量丛的并。因此，通过对原有

Cowen-Douglas 算子定义稍作修改，我们定义广义 Cowen-Douglas 算子 $B_\alpha(\Omega)$，并将其用于研究 S_z 的可约性。

定义 1.3. 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的一个有界开子集（不一定连通），$\mathcal{H}$ 是可分复希尔伯特空间。假设

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i,$$

对某个 $N \in \mathbb{Z}_+ S\{\infty\}$ 和 Ω_i 是 Ω 的不同连通分支。设 $\alpha = (\alpha_i)^N{}_{i=1}$ 是一个正整数序列。广义 Cowen-Douglas 类 $B_\alpha(\Omega)$ 由满足以下性质的有界线性算子 T （作用于 $\mathcal{H}$ 上）构成:

(1) $Ran(T - w) = \mathcal{H}$ 对任意 w 2 Ω 均成立；(2) W $_{w\in\Omega}$
$Ker(T - w) = \mathcal{H}$；(3) 对任意 w 2 Ω_i 及所有 i,
$\dim Ker(T - w) = \alpha_i$。

特别地，若 $N = 1$，则该定义恰好就是 Cowen-Douglas 算子类。

对于属于 $B_\alpha(\Omega)$ 的算子 T，以及 Ω 的一个连通分支 Ω_i，令 $(E_T(\Omega_i), \pi_i)$ 表示平凡丛 $\Omega_i \times \mathcal{H}$ 的子丛，其定义为

$$E_T(\Omega_i) = \{(w, x) \in \Omega_i \times \mathcal{H} : x \in Ker(T - w)\}$$

以及 $\pi_i(w, x) = w$。则 $E_T(\Omega_i)$ 是 Ω_i 上维数为 α_i （参见 [11]）的厄米全纯向量丛，我们称之为与算子 T 相关联的核空间向量丛。令 (E_T, π) 为所有子丛 $(E_T(\Omega_i), \pi_i)$ 的不交并，记作

$$E_T = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_T(\Omega_i).$$

对于由有理内函数诱导的 $\mathcal{K}_\theta$，我们证明 S_z^* 是广义 Cowen-Douglas 算子，并建立 S_z 的可约性与核空间向量丛 $E^{S_z^*}$ 的可约性之间的联系。

主定理（定理 4.8 和定理 4.10）。设 $\theta(z,w)$ 是一个不含单变量内因子的有理内函数，且 $\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2)$ 是相应的 Beurling 型商模。令

$$\Omega = \sigma(S_z) \setminus \sigma_e(S_z) = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i,$$

其中 Ω_i、$i = 1$、.....、N 是 Ω 的连通分支，则 S_z^* 属于 $B_\alpha(\Omega^*)$，其指标为 $\alpha = \{\alpha_i\}$，其中 $\alpha_i = Z_\theta|_{\Omega_i}$ 是 $\theta(\lambda, \cdot)$ 在 $\mathbb{D}, \lambda \in \Omega_i$ 中的零点数。S_z 可约，当且仅当核空间向量丛 $E^{S_z^*}$ 严格可约（有关“严格可约”的定义，详见第 4 节）。

本文其余部分安排如下。第 2 节研究 Beurling 型商模上的 S_z^* 的谱和本质谱。第 3 节介绍 Cowen-Douglas 算子的基本性质，并完整刻画 S_z^* 何时为 Cowen-Douglas 算子。第 4 节将 Cowen-Douglas 算子的定义推广到广义 Cowen-Douglas 算子，并得到一些基本几何性质及其应用。我们证明，由有理内

函数诱导的 $_z^*$ 上的S是广义 Cowen-Douglas 算子，并且S_z可约当且仅当ES_z^*严格可约。在第 5 节中，我们为多项式定义因子性质，并将结果推广到多项式商模；由此得出，一般多项式商模上的S_z^* 也是广义 Cowen-Douglas 算子，并且S_z 可约当且仅当ES_z^* 严格可约。此外，我们运用复几何方法研究多项式商模上的压缩移位算子$[z^m - w^n]^\perp$ 和 $[(z-w)^n]^\perp$的可约性。

2. 压缩移位算子S_z的谱

本节将研究S_z 在 Beurling 型商模$\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2)$上的谱。为了描述$S_z$的谱，我们先介绍完全非酉压缩算子的特征函数。

对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的完全非酉压缩算子T，可以为其关联两个亏算子$D_T = (I - T^*T)^{1/2}$、$D_{T^*} = (I - TT^*)^{1/2}$，以及两个亏空间 $\mathcal{D}_T$和 $\mathcal{D}_{T^*}$，它们分别是D_T 和D_{T^*} 的值域的闭包。算子值解析函数

$$\Theta_T(\lambda) = [-T + \lambda D_{T^*}(1 - \lambda T^*)^{-1} D_T]|_{\mathcal{D}_T},\ \lambda \in \mathbb{D}$$

称为T的特征函数。在函数模型理论中，亏算子和特征函数是确定压缩算子结构的非常有用的工具（参见 [26]）。

下文中，H_w^2 表示变量w上的 Hardy 空间，可视为$H^2(\mathbb{D}^2)$的一个子空间。对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，左求值算子$L(\lambda) : H^2(\mathbb{D}^2) \to H_w^2$ 定义如下：

$$L(\lambda)h(z,w) = h(\lambda, w),\ h \in H^2(\mathbb{D}^2)$$

将$L(\lambda)$在闭子空间$K \subset H^2(\mathbb{D}^2)$上的限制记为$L_K(\lambda)$。由 [32]，存在常酉算子$U$、$V$、$W$ 使得

$$L(\lambda)|_{M \ominus zM} = (U\Theta_{S_z}(\lambda)V) \oplus W. \tag{2.1}$$

不难看出，$W = 0$ 当且仅当M （或等价地，$M \ominus zM$）不含有仅依赖于w的非零函数。特别地，若$M = \theta H^2(\mathbb{D}^2)$，其中 θ 是内函数，则$W = 0$ 当且仅当 $\theta(z,w)$不是仅依赖于w的内函数。

回顾一下，若算子T满足$RanT$闭，且$KerT$、$KerT^*$均为有限维，则称其为 Fredholm 算子。对于 Fredholm 算子T，定义T的指标为$ind(T) = \dim KerT - \dim KerT^*$。对于一点 λ，若$T - \lambda$不是 Fredholm 算子，则称其为T的本质谱点。由T 的所有本质谱点构成的集合称为T的本质谱 $\sigma_e(T)$。以下引理对于研究S_z的谱和本质谱至关重要。

引理 2.1（ [16],推论 2.3）。若M 是z-不变子空间，且包含于$H^2(\mathbb{D}^2)$，则

$$\sigma(S_z) = \sigma(L),$$

其中， $\sigma(L)$是由点 $\lambda \in \mathbb{D}$ 组成的集合，在这些点处，左求值算子$L(\lambda)$从$M \ominus zM$ 到H_w^2不是有界可逆的；此外还包括那些 $\lambda \in \mathbb{T}$ 不位于 $\mathbb{T}$ 的任何开弧上的点，在这些开弧上，$L(\lambda)$是关于 λ的取算子值的酉解析函数。

此外，对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，$S_z - \lambda$ 是 Fredholm，当且仅当 $L_{M \ominus zM}(\lambda) : M \ominus zM \longrightarrow H_w^2$ 是 Fredholm；在这种情况下，$ind(S_z - \lambda) = ind(L_{M \ominus zM}(\lambda))$。

引理 2.2. 设 $\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2)$ 是 Beurling 型商模。若 $\theta(z,w)$ 是一个不只依赖于变量z的内函数，则

$$\mathbb{T} \subset \sigma(S_z).$$

证明。由于 θ 是内函数，很容易看出，对于子模$M = \theta H^2(\mathbb{D}^2)$，有$M \ominus zM = \theta H^2_w$。若存在 $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ 使得 $\lambda_0 \notin \sigma(S_z)$，那么根据引理 2.1，存在一个$V_{\lambda_0}$的开弧，使得算子值函数$L_{M\ominus zM}(\lambda)$在$V_{\lambda_0}$上有酉解析延拓。

定义两个酉算子如下：

$$\begin{aligned} U : \theta H^2_w &\to H^2_w \\ \theta(z,w) f(w) &\mapsto f(w), \end{aligned}$$

并且$V : H^2_w \to H^2_w$ 取为恒等算子，我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \theta H^2_w & \xrightarrow{L(\lambda)} & H^2_w \\ \mathrm{U}\downarrow & & \mathrm{V}\downarrow \\ H^2_w & \xrightarrow{T_{\theta(\lambda,w)}} & H^2_w. \end{array}$$

不难验证

$$T_{\theta(\lambda,w)} U = VL(\lambda) \tag{2.2}$$

其中 $T_{\theta(\lambda,w)}$ 是 H^2_w上的解析 Toeplitz 算子，这意味着 $T_{\theta(\lambda,w)}$ 在 V_{λ_0}上也有酉解析延拓。根据 Toeplitz 算子的性质，符号函数 $\theta(\lambda, w)$ 的边界值必为模为 1 的常数（依赖于 λ）。结合 Fatou 引理（见 [19]），我们得到径向极限 $\lim_{r\to 1} \theta(r\lambda, w) = c(\lambda)$，其中$|c(\lambda)| = 1$ 对几乎所有 $\lambda \in V_{\lambda_0}$成立。若写作 $\theta(z, w) = P\, a_n(z) w^n$，则这意味着对于所有 $n_{\geq 0}$，$a_n(z)$ 的边界值在 V_λ 上几乎处处为零。由于 $a_n(z)$ 属于 $H^2(\mathbb{D})$，且 V_λ 的 Lebesgue 测度为正，因此对所有 n，$a_n(z)$ 必为零 $\equiv 0 > 0$。这是一个反证，证明了 $\mathbb{T} \subset \sigma(S_z)$。□

有理内函数是同时为有理函数的内函数。根据 [29](W. Rudin，定理 5.2.5)，每个有理内函数 θ 在 $\mathbb{D}^2$ 中都具有如下形式

$$\theta(z,w) = z^k w^l \frac{\widetilde{p}(z,w)}{p(z,w)},$$

其中 p 是一个在 $\mathbb{D}^2$中没有零点的多项式，而 $\widetilde{p}$ 是 p 关于 $\mathbb{T}^2$的反射，其定义为

$$\widetilde{p}(z,w) = z^m w^n \overline{p(1/\bar{z}, 1/\bar{w})},$$

其中 $\deg p = (m, n)$。由于两个多项式 p、q 互素，当且仅当 p、q 的公共零点集是有限集（见 [7]），并且 $|p| = |\widetilde{p}|$ 在 $\mathbb{T}^2$上成立，因此我们总可以假设有理内函数的分母在 $\mathbb{T}^2$上至多有有限个零点。

下面的引理表明，p 在 $(\mathbb{D}\times\mathbb{T}) \cup (\mathbb{T}\times\mathbb{D})$上没有零点。

引理 2.3（ [23], 引理 3.5）。设$q \in \mathbb{C}[z,w]$ 在 $\mathbb{D}^2$上没有零点。若$q(z_0,w_0) = 0$ 对某个（z_0,w_0）$\in \mathbb{T}\times\mathbb{D}$, 成立，则$q(z_0, w) = 0$对所有$w \in \mathbb{C}$都成立，即$z - z_0$整除$q$。特别地，使$q(z_0, \cdot)$在 $\mathbb{D}$中有零点的$z_0 \in \mathbb{T}$ 至多有有限个。

总之， $\mathbb{D}^2$ 中的每个有理内函数 θ 都具有如下形式

$$\theta = z^k w^l \frac{\widetilde{p}}{p},$$

其中 p 在 $\mathbb{D}^2 \setminus \mathbb{T}^2$ 上没有零点，在 $\mathbb{T}^2$上至多只有有限个零点。对于区域 Ω 上的全纯函数 f，我们用 Z_f 表示其在 Ω 中的零点集；对于有理函数 $\theta = q/p$ （ p 、 q 互素），Z_θ 表示其在 $\mathbb{C}^2$ 中的 Z_θ 。

定理 2.4. 假设 $\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2)$ 是一个 Beurling 型商模。若 $\theta(z,w)$ 是一个不只依赖于变量z 的内函数，则

$$\overline{\pi_1(Z_\theta)} \cup \mathbb{T} \subseteq \sigma(S_z),$$

其中， π_1 是由 $\pi_1(z,w) = z$定义的分量投影。此外，若 θ 是一个有理内函数，则

$$\sigma(S_z) = \pi_1(Z_\theta \cap \overline{\mathbb{D}^2}).$$

证明。对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，由 (2.1) 和 (2.2) 可知，$S_z - \lambda$ 不可逆，当且仅当$T_{\theta(\lambda,\cdot)}$不可逆；这等价于 0 2 值域 $\theta(\lambda,\cdot)$，因此 $\pi_1(Z_\theta) \subseteq \sigma(S_z)$，这就证明了定理的第一部分。

现在假设 θ 是有理内函数。由于$\widetilde{p}$ 在 $\mathbb{D}^2 \setminus \mathbb{T}^2$上没有零点，因此对于任意 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\theta(\lambda,\cdot)$ 都属于圆盘代数，故值域 $\theta(\lambda,\cdot)$ = 值域 $\theta(\lambda,\cdot)|_{\mathbb{D}}$。因此，对于$\lambda \in \mathbb{D}$，$S_z - \lambda$ 不可逆，当且仅当 $\theta(\lambda,\cdot)$ 在 $\mathbb{D}$中有零点，即

$$\mathbb{D} \cap \sigma(S_z) = \pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}).$$

对于 $\lambda \in \mathbb{T}$，若 $\theta(z,w)$ 是一个不只依赖变量z的有理内函数，写作$\theta(z) = B(z)\frac{p}{p}$，其中$p$ 没有只依赖变量z 的因子，而$B(z)$ 是有限 Blaschke 乘积。由于p 在 $\mathbb{T} \times \mathbb{D}$, 上没有零点，我们得到，对于每个 $\lambda \in \mathbb{T}$，$p(\lambda,\cdot)$ 在$\mathbb{D}$中没有零点，因此 e$p(\lambda,\cdot)$ 必须在 $\mathbb{D}$中有零点，这意味着

$$\mathbb{T} = \pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{T} \times \overline{\mathbb{D}}).$$

结合引理 2.2，我们得到所需结论。另一方面，若 $\theta(z,w) = B(z)$ 是仅依赖于z的有限 Blaschke 乘积，则$M \ominus zM = B(z)H^2_w$，因此$L_{M \ominus zM}(\lambda)$ 在 $\mathbb{T}$ 上有自然的酉解析延拓，故 $\mathbb{T} \subseteq \rho(S_z)$，其中 $\rho(S_z)$ 表示S_z的预解集。因此我们还有

$$\sigma(S_z) = \pi_1(Z_\theta \cap \overline{\mathbb{D}^2}).$$

□

众所周知，对于$H^2(\mathbb{D}^n)(n > 1)$ 中的函数，内外分解并不总是存在，因此$H^2(\mathbb{D})$ 中许多与内外分解相关的有用技巧无法推广到多变量 Hardy 空间。然而，良好内函数（[29]）发挥了布拉希克积的作用。

若内函数g 属于 $\mathbb{D}^n$ ，且满足$u[g] = 0$，其中$u[g]$ 是 $\mathbb{D}^n$中 $\log|g|$ 的最小n-调和主函数，则称该内函数为良内函数。对于$n = 1$，良内函数恰好是布拉施克乘积。若f_1 和f_2 是 $\mathbb{D}^n$中的全纯函数，则“f_1 和f_2 有相同的零点”意指：“$f_1 = hf_2, h$ 在 $\mathbb{D}^n$中全纯，且h 在 $\mathbb{D}^n$中没有零点”，即，

计入重数。从这个意义上说，良内函数由其在 $\mathbb{D}^n$ 中的零点确定（见 [29]）。特别地，有理内函数是良内函数。

以下因式分解定理将会频繁用到。

引理 2.5（ [29], 定理 5.4.2）。若 $0 < p < \infty$ 且 $f \in H^p(\mathbb{D}^n)$，g 是良内函数，h 在 $\mathbb{D}^n$ 中全纯，并且 $f = gh$，则 $h \in H^p(\mathbb{D}^n)$，且 $\|h\|_p = \|f\|_p$。

为了研究 S_z 的本质谱，我们首先考察 $S_{z-\lambda}$ 的核空间和余核空间。为方便起见，我们用 Ω^* 表示集合 Ω 的复共轭。

定理 2.6。设 $\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2)$ 是一个 Beurling 型商模。假设 $\theta(z, w) = B(z)\phi(z, w)$，其中 $B(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{-\lambda_i}{|\lambda_i|}\frac{\lambda_i - z}{1-\bar{\lambda}_i z}$，且对任意 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\phi(\lambda, \cdot)$ 不恒等于零，则有以下结论。

(1) 对于 $\lambda \in \mathbb{T}$，则

$$KerS_{z-\lambda} = KerS^*_{z-\lambda} = \{0\}.$$

(2) 对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，若 $B(\lambda) \neq 0$，则 $KerS_{z-\lambda} = \{0\}$；若 $B(\lambda) = 0$，则

$$KerS_{z-\lambda} = \left\{ \frac{\theta(z, w)g(w)}{z - \lambda} : \ g(w) \in H^2_w \right\}.$$

(3) 对于 $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$KerS^*_{z-\lambda} = \left\{ \frac{g(w)}{1 - \bar{\lambda}z} : g(w) \in H^2_w \ominus \theta(\lambda, w)H^2_w \right\}.$$

特别地，$\sigma_p(S_z) = \{\lambda_i : i \geq 1\}$, $\pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{D}^2)^* \subseteq \sigma_p(S^*_z)$。

证明。(1) 设 $f \in \mathcal{K}_\theta$，使得 $f \in KerS_{z-\lambda}$，则

$$(z - \lambda)f(z, w) = \theta(z, w)g(z, w)$$

对于某个 $g \in H^2(\mathbb{D}^2)$。

如果 $\lambda \in \mathbb{T}$，那么存在一个多项式序列 $p_n(z)$，使得

$$(z - \lambda)p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 1,$$

因此 $\theta g p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$。注意，$\theta$ 是一个内函数，$\{gp_n\}$ 是 $H^1(\mathbb{D}^2)$ 中的柯西序列，并假设 $gp_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} F$，那么 $f = \theta F$。由于 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$，F 必定属于 $H^2(\mathbb{D}^2)$，因此 $f \in \theta H^2(\mathbb{D}^2)$，这意味着 $f = 0$。这证明了 (1) 的第一部分，而 (1) 的第二部分将在 (3) 的证明中给出。

(2) 假设 $\lambda \in \mathbb{D}$。如果 $B(\lambda) \neq 0$，那么 $\theta(\lambda,w)$ 不恒等于零，因此 $g(\lambda, w) \equiv 0$。由于内因子 $\varphi_\lambda = \frac{-\lambda}{|\lambda|}\frac{\lambda - z}{1-\bar{\lambda}z}$ 是一个良内函数，根据引理 2.5，$h = g/\varphi_\lambda \in H^2(\mathbb{D}^2)$。由此可得 $f = \theta h \frac{1-\bar{\lambda}z}{\lambda - z} \in \theta H^2(\mathbb{D}^2)$，因此必有 $f = 0$。

若 $B(\lambda) = 0$，则 $f = \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}\frac{\theta}{\varphi_\lambda}g$。注意，

$$\langle \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \frac{\theta(z, w)}{\varphi_\lambda(z)} g(\lambda, w), \theta(z, w)h(z, w) \rangle = \langle \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} g(\lambda, w), \varphi_\lambda(z)h(z, w) \rangle = 0$$

对于任意$h2\ H^2(\mathbb{D}^2)$，可得

$$0 = \langle f, \theta h\rangle = \langle \theta\frac{g(z,w)-g(\lambda,w)}{z-\lambda}, \theta h\rangle$$
$$= \langle \frac{g(z,w)-g(\lambda,w)}{z-\lambda}, h\rangle$$

对于任意 $h\,2\,H^2(\mathbb{D}^2)$。这意味着 $g(z,w)\ \equiv g(\lambda,w)$，因此

$$KerS_{z-\lambda} \subseteq \left\{\frac{\theta(z,w)g(w)}{z-\lambda} : g(w) \in H^2_w\right\}.$$

相反的包含关系很容易验证

$$\left\{\frac{\theta(z,w)g(w)}{z-\lambda} : g(w) \in H^2_w\right\} \subseteq KerS_{z-\lambda},$$

从而证明了（2）。

（3）设 $f2\ KerS^{*}{}_{z-\lambda}$，由于 $S^{*}{}_{z}f\ =$~~$f(z,w)-f(0,w)z$~~，我们有

$$f(z,w) = \frac{f(0,w)}{1-\bar{\lambda}z}.$$

对于 $\lambda \in \mathbb{T}$~~$,\ f(0,w)$~~$1-\lambda z$ 平方可积，当且仅当 $f(0,w)\ \equiv 0$，因此 $f\ =\ 0$，这就证明了（1）的第二部分。对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，不难看出，$\frac{f(0,w)}{1-\lambda z} \in \mathcal{K}_\theta$ 当且仅当$f(0,$~~$w)$~~$\perp \theta(\lambda,w)H^2_w$，这就证明了（3）。□

结合定理 2.4 和定理 2.6，可得以下定理 .

定理 2.7. 设 $\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}^2)\ \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2)$ 是一个 Beurling 型商模。若 θ 没有只依赖于 z 的因子，则

$$\sigma_p(S_z) = \emptyset,\ \mathbb{T} \subseteq \sigma_e(S_z).$$

此外，若 θ 是一个有理内函数，则

$$\sigma_p(S^*_z) = \pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{D}^2)^*$$

$$\sigma_e(S_z) = \mathbb{T} \cup \pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{D}\times\mathbb{T}) = \pi_1(Z_\theta \cap \partial\mathbb{D}^2).$$

对于 $\lambda \in \sigma(S_z)\ \setminus \sigma_e(S_z)$，$S^{*}{}_{z-\lambda}$ 是 Fredholm 算子，其指标为

$$ind(S^*_{z-\lambda}) = Z_\theta(\lambda),$$

其中 $Z_\theta(\lambda)$ 表示 $\theta(\lambda,\cdot)$ 在 $\mathbb{D}$ 中的零点个数。

证明。根据定理 2.4，$\mathbb{T}$ 总是包含于 $\sigma(S_z)$ 中。结合对于 $\lambda \in \mathbb{T}$，$KerS_{z-\lambda}$ =$KerS^{*}{}_{z-\lambda}\ =\ \{0\}$ 这一事实，我们得出 $RanS_{z-\lambda}$ 不是闭的，否则 $S_{z-\lambda}$ 将是可逆的。因此 $\mathbb{T} \subset \sigma_e(S_z)$。

若 θ 为有理函数，对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，由 (2.1) 和 (2.2) 可知，$RanS_{z-\lambda}$ 闭当且仅当 $RanT_{\theta(\lambda,\cdot)}$ 闭。这当且仅当 $\theta(\lambda,\cdot)$ 在 $\mathbb{T}$上远离零有界，即 $\theta(\lambda,\cdot)$ 在 T上没有零点。此外，在此情形下，$\theta(\lambda,w)$ 的内因子总是一个有限 Blaschke 乘积，并由 $\theta(\lambda,w)$ 在 $\mathbb{D}$中的零点唯一确定。因此，根据定理 2.6，$KerS^*_{z-\lambda}$总是有限维，且 $ind(S^*_{z-\lambda})\ = Z_\theta(\lambda)$。□

注 2.8。令 $K_\lambda(\cdot) = \frac{1}{1-\bar{\lambda}\cdot}$ 为 $H^2(\mathbb{D})$ 的再生核，其中 θ 为有理内函数，且 $\lambda \in \sigma(S_z) \setminus \sigma_e(S_z)$；令 $\{a_k(\lambda)\}$ 为 $\theta(\lambda,\cdot)$ 在 $\mathbb{D}$ 中的零点，l_k 为 $a_k(\lambda)$ 的对应阶数，则 $KerS^*_{z-\lambda}$ 的典范基具有如下形式

$$\left\{K_\lambda(z)\cdot K^{(j)}_{a_k(\lambda)}(w),\ k\geq 0\ and\ j=0,1,\cdots,l_k-1\right\}.$$

此处 $K^{(l)}_\zeta(w) = \frac{l!\bar{w}^l}{(1-\bar{\zeta}w)^{l+1}}$。

下面的例子是定理 2.4 和定理 2.7 的应用 .

例 2.9。（1）对于 $\theta(z,w) = \frac{z-t}{1-tzw}$，$0<t<1$，注意到 $Z_\theta \cap \mathbb{D}^2 = \{(z,\bar{t}z): t\leq|z|\leq 1\}$，我们有

$$\sigma(S_z) = \{\lambda\in\mathbb{C}: t\leq|\lambda|\leq 1\},$$
$$\sigma_e(S_z) = \mathbb{T}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}: |\lambda| = t\},$$
$$\sigma_p(S_z^*) = \{\lambda\in\mathbb{C}: t<|\lambda|<1\}.$$

（2）对于 $\theta(z,w) = \frac{z-t}{1-\bar{t}z}$，$0<t<1$，注意到 $Z_\theta\cap\mathbb{D}^2 = \{(z, \frac{z-t}{1-\bar{t}z}): |z|\leq 1, |tz|\leq|z-(1-t)|\}$，我们有

$$\sigma(S_z) = \overline{\mathbb{D}}\setminus\left\{\lambda\in\mathbb{C}: \left|\lambda-\frac{1}{1+t}\right|<\frac{t}{1+t}\right\},$$
$$\sigma_e(S_z) = \mathbb{T}\cup\left\{\lambda\in\mathbb{C}: \left|\lambda-\frac{1}{1+t}\right|=\frac{t}{1+t}\right\},$$
$$\sigma_p(S_z^*) = \mathbb{D}\setminus\left\{\lambda\in\mathbb{C}: \left|\lambda-\frac{1}{1+t}\right|\leq\frac{t}{1+t}\right\}.$$

3. 压缩移位算子的几何性质

首先，我们介绍厄米向量丛的必要预备知识，主要摘自 [11] 和 [8]。给定 $\mathbb{C}$中的一个区域 Ω，Ω上的秩为 n 的全纯向量丛是一个复流形 E，配有一个从 E 到 Ω 上的全纯映射 π，使得每个纤维 $E_\lambda = \pi^{-1}(\lambda)$ 都是 $\mathbb{C}^n$ 的一个副本，并且对于 Ω 中的每个 λ_0，都存在一个 λ_0 的邻域 Δ 以及从 Δ到 E 的全纯函数 $s1,\cdots,s_n$，使得 $E_\lambda = W\{s_1(\lambda,\cdots,s_n(\lambda))\}$。函数组 $\{s1,\cdots,s_n\}$称为 Δ上的全纯标架。截面是一个从 Ω 的开子集到 E 的映射 s，满足 $\pi(s(\lambda)) = \lambda$。丛映射是两个 Ω 上的丛 E^1 和 E^2 之间的映射 φ，它是全纯的，并且对 Ω 中的 λ，定义了从 E^1_λ 到 E^2_λ 的线性变换。

Ω 上的厄米全纯向量丛 E 是指这样一种全纯向量丛：其每个纤维 E_λ 都是内积空间。若该丛的度量满足 $\lambda\to\|s(\lambda)\|^2$ 为实解析（或C^∞），则称该丛具有实解析（或C^∞）度量，其中 E的每个全纯截面均满足此性质。若存在从 E^1 到 E^2上的等距全纯丛映射，则称 Ω 上的两个 Hermite 全纯向量丛 E^1 和 E^2 等价。

令 $\mathcal{E}(\Omega)$ 表示 Ω 上的C^∞ 函数代数，令 $\mathcal{E}^p(\Omega)$ 表示 Ω 上次数为p的C^∞ 微分形式。于是有 $\mathcal{E}^0(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$，$\mathcal{E}^1(\Omega) = \{fdz+gd\bar{z}: f, g\in\mathcal{E}(\Omega)\}$以及 $\mathcal{E}^2(\Omega) = \{fdzd\bar{z}: f\in\mathcal{E}(\Omega)\}$。对于 Ω 上的C^∞向量丛E，令 $\mathcal{E}^p(\Omega,E)$ 表示系数取自E、次数为p 的微分形式，则 $\mathcal{E}^0(\Omega,E)$ 就是 Ω 上E 的C^∞ 截面。

一个联络 o　　n E 是一个一阶微分算子D： $\mathcal{E}^0(\Omega,E) \to \mathcal{E}^1(\Omega,E)$，满足

$$D(f\sigma) = df \otimes \sigma + fD(\sigma)$$

对于f 属于 $\mathcal{E}(\Omega)$，且 σ 属于 $\mathcal{E}^0(\Omega,E)$。若联络D 满足以下条件，则称其为保度量的:

$$d\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle = \langle D\sigma_1,\sigma_2\rangle + \langle\sigma_1,D\sigma_2\rangle$$

对于 σ_1,σ_2 属于 $\mathcal{E}^0(\Omega, E)$。

局部地，D 可由一个联络矩阵表示。设$s = \{s_1,\cdots,s_n\}$ 是 Δ上的一个局部标架，则相对于标架 s 的联络矩阵 $\Theta(s) = [\Theta_{ij}]$ 是一个矩阵，其元素为定义在 Δ 上的 1-形式 Θ_{ij}，满足

$$D(s_i) = \Sigma_{j=1}^{n}\Theta_{ij} \otimes s_j.$$

联络D 可扩展为一个微分算子，从 $\mathcal{E}^1(\Omega, E)$映射到 $\mathcal{E}^2(\Omega,E)$，使得

$$D(\sigma \otimes \alpha) = D\sigma \wedge \alpha + \sigma \otimes d\alpha$$

对于 σ 属于 $\mathcal{E}^0(\Omega,E)$，且 α 属于 $\mathcal{E}^1(\Omega)$。众所周知，D^2 是C^∞ 线性的，因此，对于任意 σ 属于$\mathcal{E}^0(\Omega,E)$，有

$$D^2\sigma = \mathcal{K}\sigma dz d\bar{z},$$

其中 $\mathcal{K}$ 是 E 上的一个丛映射，由 D^2 唯一确定。因此，D^2 可与 $\mathcal{K}$ 等同，我们称 $\mathcal{K}$ 为 (E,D) 的曲率。

定义 3.1. 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的一个连通开子集，$\mathcal{H}$ 是一个可分希尔伯特空间。对于正整数 n，Cowen-Douglas 类 $B_n(\Omega)$ 由 $\mathcal{H}$ 上满足以下性质的有界线性算子 T 组成:

(1) 对于w 2 Ω，$Ran(T - w) = \mathcal{H}$；(2)
W $_{w\in\Omega} Ker(T - w) = \mathcal{H}$；(3) 对任意$w$ 2 Ω,
dim$Ker(T - w) = n$。

对于固定点$w_0 \in\Omega$，定义 3.1 中的条件 (2) 等价于

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} Ker(T - w_0)^n = \mathcal{H}.$$

若 Ω_0 是 Ω 的一个连通开子集，则$B_n(\Omega) \subset B_n(\Omega_0)$，因为 W $_{w\in\Omega_0} Ker(T - w)$ =W $_{w\in\Omega}$ $Ker(T - w)$（[11], 推论 1.13）。此外，对于属于 $B_n(\Omega)$ 的T，映射$w \mapsto Ker(T - w)$ 定义了 Ω 上的一个复向量丛E_T。以下引理阐述了T 与E_T 之间的一种联系。

引理 3.2（ [11], 命题 1.18）。$B_n(\Omega)$ 中的算子 T 可约，当且仅当复丛 E_T 作为厄米全纯向量丛是可约的。特别地，$B_1(\Omega)$ 中的算子 T 不可约。

设E 是 $\mathbb{C}$ 中区域 Ω 上秩为n 的C^∞ 厄米向量丛，其联络D 保持度量，曲率为 $\mathcal{K}$。记由曲率 $\mathcal{K}$ 及其各阶协变导数 $\mathcal{K}_{z^i\bar{z}^j}$ 生成的丛映射代数为 $\mathcal{A}$，则代数 $\mathcal{A}$ 是自伴的，因为 $\mathcal{K}$ 是自伴的（参见 [8]）。设<style id='s'>s 是E 在 Ω 的开子集 Δ 上的C^∞ 标准正交标架。对于E 上的丛映射 Φ 以及 Δ中的z，令 $\Phi(z)$ 为其在纤维 E_z 上诱导的纤维映射，令 $\Phi(s)(z)$ 为 $\Phi(z)$ 相对于基$s(z)$ 的矩阵。记 $\mathcal{A}(z)$ 为纤维 E_z 上由 $\mathcal{A}$ 中的丛映射诱导的线性变换集合，并且

$\mathcal{A}(s)(z)$ 为由 $\mathcal{A}$ 中的 Φ 对应的矩阵 $\Phi(s)(z)$ 生成的矩阵代数，则 $\mathcal{A}(s)(z)$ 是$M_n(\mathbb{C})$ 中的自伴矩阵代数，因为s 是正交的。

众所周知，任何自伴矩阵代数都是若干个带重数的全矩阵代数的直和。更准确地说，对于任意自伴矩阵代数，都存在两个正整数元组 $\mathrm{m}=(m_1,\cdots,m_r)$、$\mathrm{n}=(n_1,\cdots,n_r)$，使得该代数由如下形式的矩阵组成

$$A_1\otimes I_{m_1}\oplus A_2\otimes I_{m_2}\oplus\cdots\oplus A_r\otimes I_{m_r},$$

其中，A_i 是任意一个$n_i\times n_i$ 矩阵，在对角线上重复m_i 次；我们将这样的代数记作$M(\mathrm{n},\otimes\mathrm{m})$。

现在我们可以陈述关于联络分块对角化的定理：

定理 3.3 ([8], 定理 4.2)。设E 是开子集 $\Omega\in\mathbb{C}$上的一个秩为n 的C^∞ 厄米向量丛，其联络D保度量。对于 Ω 中不属于某个非稠密子集（合并集，即某个代数 $\mathcal{A}(z)$ 的维数不局部恒定的点集）的任意点z_0，存在两个由r个整数构成的元组 $\mathrm{m}=(m_1,\cdots,m_r)$、$\mathrm{n}=(n_1,\cdots,n_r)$，一个$z_0$ 的邻域 Ω_0，以及 E 在 Ω_0 上的一个C^∞ 标准正交标架s，满足以下性质：

$$\mathcal{A}(s)(z)=M(\mathrm{n},\otimes\mathrm{m})$$

对所有$z\in\Omega_0,$，其中 $\mathcal{A}$ 是由曲率 $\mathcal{K}$及其$\mathcal{K}_{z^iz^j}$ 各阶协变导数生成的丛映射代数。此外，

$$\Theta(s)=\Theta_1\otimes I_{m_1}\oplus\cdots\oplus\Theta_r\otimes I_{m_r}$$

其中 $\Theta(s)$ 是D 相对于标架s 的联络1-形式矩阵，而 Θ_i 是定义在 Ω_0上的、元素为1-形式的$C^\infty n_i\times n_i$ 矩阵。

注 3.4. 定理断言，代数 $\mathcal{A}$(s)(z) 与 Ω_0 中的点 z 无关，且联络矩阵具有块对角形式，因此每个块都对应一个在 D 作用下不变的子丛。具体而言，对于任意 $1\le\mathrm{i}\le\mathrm{r}$，块 $\Theta_i\otimes\mathrm{I}_{m_i}$ 对应 m_i个秩为 n_i的 D不变子丛。我们将这些子丛记为 $\mathrm{E}_{i1},\cdots$、E_{im_i}。此外，若 E 是带有典范联络 D 的全纯厄米向量丛，则 D不变子丛实际上是 E 的约化子丛（参见[24]第 1 章命题 4.18）。因此，我们可以应用上述定理，得到一组互相正交的约化子丛 $\{\mathrm{E}_i\mathrm{j}\},1\le\mathrm{i}\le\mathrm{r}$, $1\le\mathrm{j}\le\mathrm{m}_i$，其秩为 $\mathrm{rank}\mathrm{E}_{ij}=\mathrm{n}_i$，使得

$$E=E_{11}\oplus\cdots\oplus E_{1m_1}\oplus\cdots\oplus E_{r1}\oplus\cdots\oplus E_{rm_r}.$$

此外，若将定理应用于带有典范联络的 Cowen-Douglas 算子 T所对应的丛 $E(T)$，那么 $\{E_{ij}\}$对应于约化子空间 $\{\mathcal{H}_{ij}\}:=\mathrm{W}_{z\in\Omega_0}E^{ij}(z)$，使得

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_{11}\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}_{1m_1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}_{r1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}_{rm_r}.$$

定理 3.5（ [8], 定理 4.4）。设 T 是一个 Cowen-Douglas 算子，且 $E(T)$ 是与之关联的全纯厄米向量丛，其约化子丛 $\{E_{ij}\}$ 由典范联络的分块对角化给出。设 $\{\mathcal{H}_{ij}\}$ 为相应的约化子空间。则：

（1） $\{\mathcal{H}_{ij}\}$ 约化子空间是极小的。（2） $\{\mathcal{H}_{ij}\}$ 与$\{\mathcal{H}_{i'j'}\}$ 酉等价，当且仅当$i=i'$。

此外，我们可以给出冯·诺依曼代数$V^*(T) := \{T, T^*\}'$:的几何刻画。

定理 3.6（ [8], 定理 4.5）。对于一个属于 $B_n(\Omega)$ 的 Cowen-Douglas 算子T ， von Neumann 代数$V^*(T)$ 同构于矩阵代数$M(n, \otimes m)$ 的交换子，其中该矩阵代数位于$M_n(\mathbb{C})$ 中，而$M(n, \otimes m)$ 由E_T 上典范联络的分块对角化给出。特别地，$V^*(T)$ 是阿贝尔的，当且仅当 $m_i = 1$ 对所有i都成立；也就是说，E_T 上典范联络的分块对角化中不存在重数。

回到主题，我们将刻画由有理内函数在 $\mathcal{K}_\theta$ 上诱导的S_z^* 何时是 Cowen-Douglas 算子。

对于一般的有理内函数，下面的例子表明S_z^* 不属于 Cowen-Douglas 类。

例 3.7. 取 $0 < c < 1/8$，定义

$$g(z, w) = \frac{2z^2w - z + c}{2 - zw + cz^2w}.$$

那么 g 2 $A(\mathbb{D}^2)$ 是一个不可约内函数，即 g 不能表示为两个非常数内函数的乘积。然而，g 的零点集 $E = Z_g \cap \mathbb{D}^2$ 是不连通的：E 包含 $(c, 0)$ 和 $(1/2, 1 - 2c)$，但不包含满足 $|z| = 1/4$ 的点；因为若 $|z| = 1/4$ 且 $|w| < 1$，则 $|2z^2w| < 1/8$，而$|z - c| > 1/8$。

确实存在两个内函数 g_1, g_2，定义在 $\mathbb{D}^2$ 上，使得 $Z_{g_i} = E_i$，其中 E_1, E_2 是 E 的各个分支。具体而言，我们将 $2z^2w - z + c$ 分解为

$$2z^2w - z + c = 2w\left(z - \frac{1 - \sqrt{1 - 8cw}}{4w}\right)\left(z - \frac{1 + \sqrt{1 - 8cw}}{4w}\right),$$

这里我们取负实轴作为函数 $\sqrt{z}$ 的支割线，即，若写作$z = re^{i\theta}, -\pi < \theta \leq \pi$，则 $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$。在这种情况下，对于 $|w| < 1$，则

$$\sqrt{1 - 8cw} = x + iy, x > 0.$$

因此

$$|1 - \sqrt{1 - 8cw}| < |1 + \sqrt{1 - 8cw}|$$

and

$$|1 + \sqrt{1 - 8cw}| > 1,$$

并且这意味着 $\left|\frac{|1+\sqrt{1-8cw}|}{4}\right|_w > 1/4$。注意

$$|1 - \sqrt{1 - 8cw}||1 + \sqrt{1 - 8cw}| = 8c|w|,$$

因此 $\left|\frac{|1-\sqrt{1-8cw}|}{4}\right|_w < 2c < 1/4$。定义

$$h_1(z, w) = \begin{cases} z - \frac{1-\sqrt{1-8cw}}{4w} & if \quad w \neq 0 \\ z - c & if \quad w = 0 \end{cases}$$

$$h_2(z, w) = 2zw - (1 + \sqrt{1 - 8cw})/2.$$

当 $1 - \sqrt{1 - 8cw} \sim 4cw$ 且$w \to 0$ 时，我们看到$h_1, h_2 \in A(\mathbb{D}^2)$。设$E_1 = Z_{h_1} \cap \mathbb{D}^2$，$E_2 = Z_{h_2} \cap \mathbb{D}^2$，则$E_1, E_2$ 恰好是E的两个连通分支。下面的引理说明g_i的存在性。

引理 3.8（ [29], 定理 5.4.5）。设$f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$，$f \not\equiv 0$，$\psi$ 在 $\mathbb{T}^n$上上半连续，且 $|f^*| = \psi$ 几乎处处成立，其中f^* 表示f的边界值。那么f与某个内函数g具有相同的零点。特别地，每个非零的$f \in A(\mathbb{D}^n)$都与某个内函数g具有相同的零点。

值得注意的是，$g/g_i \notin H^2(\mathbb{D}^2)$（请回忆，$g$ 是一个不可约内函数），尽管它在 $\mathbb{D}^2$ 上全纯，并且在 $\mathbb{T}^2$ 上几乎处处有 $|g/g_i| = 1$ 。

我们声称，对于 $\mathcal{K}_g = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus gH^2(\mathbb{D}^2)$，$S^*_z$ 不属于 Cowen-Douglas 类。若 $S^*_z \in B_1(\Omega^*)$，则 $\Omega = \pi_1(E_1) \subseteq \{z \in \mathbb{D} : |z| < 1/4\}$ 或 $\Omega = \pi_1(E_2) \subseteq \{z \in \mathbb{D} : |z| > 1/4\}$。注意，$S^*_z \in B_1(\Omega^*)$ 当且仅当

$$\bigvee_{\lambda\in\Omega} Ker S^*_{z-\lambda} = \bigvee_{\lambda\in\Omega} \left\{ \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} \frac{1}{1-\overline{\eta}w} : g(\lambda,\eta) = 0 \right\} = \mathcal{K}_g.$$

若 $\Omega = \pi_1(E_1)$，令 P_N 为到 $\mathcal{K}_g$ 上的正交投影，并考虑函数 $P_N g_1$。显然，$P_N g_1$ 不为零，因为 $g_1 \notin gH^2(\mathbb{D}^2)$。对于 $\lambda \in \pi_1(E_1)$，$g(\lambda,\eta) = 0$ 当且仅当 $g_1(\lambda,\eta) = 0$，因此

$$\langle P_N g_1, \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} \frac{1}{1-\overline{\eta}w} \rangle = 0.$$

因此 $P_N g_1 \perp \bigvee_{\lambda\in\Omega} Ker\, S^*_{z-\lambda}$，这就构成了反证。对于 $\Omega = \pi_1(E_2)$ 的情形，关于 $P_N g_2$ 也有类似的讨论。

根据 [36], ，对于没有单变量内因子的 $(n, 1)$ 型有理内函数，S_z 是不可约的，因此，对于上述反例，S^*_z 仍然是不可约的，尽管它不属于 B_1。下一节我们将进一步考察这类压缩移位算子。

上述反例表明，零点集投影的连通性至关重要。根据定理 2.7，我们知道

$$\sigma_e(S_z) = \mathbb{T} \cup \pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{D} \times \mathbb{T}).$$

引理 3.9. $\sigma_e(S_z)$ 由单位圆 $\mathbb{T}$ 和 $\mathbb{D}$ 中有限条曲线组成。这些有限条曲线和 $\mathbb{T}$ 将单位圆盘划分为有限个连通分支。

证明. 写作 $\theta = ep/p$，由 [7], 中的定理 12.1，集合 $\{z \in \mathbb{C} : ep(z, e^{it}) = 0 \text{ 对某个 } t \in [0, 2\pi)\}$ 由有限个不同的连续函数组成 $z_1(t)$、$z_2(t)$、$\cdots$、$z_m(t)$。注意，当$z_i(t)$ 离开单位圆盘时，$(z_i(t), e^{it})$ 会从 $\mathbb{T}^2$ 离开闭双圆盘。由于 θ 在 $\mathbb{T}^2$ 上至多只有有限个零点，因此每个 $z_i(t)$ 进入或离开单位圆盘的次数有限。显然，

$$\pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{D} \times \mathbb{T}) = \bigcup \left(\{ z_i(t) \} \bigcap \mathbb{D} \right),$$

因此，$\sigma_e(S_z)$由单位圆 $\mathbb{T}$ 和 $\mathbb{D}$中的有限条曲线组成。此外，如果 $\{z_i(t)\} \cap \mathbb{D}$是连通的，那么它要么完全包含在 $\mathbb{D}$ 中，要么其闭包与 $\mathbb{T}$只有一个交点。如果 $\{z_i(t)\} \cap \mathbb{D}$ 不连通，那么它由有限条相交于 $\mathbb{T}$的连通曲线组成。

显然，单位圆盘被这些有限条曲线和 $\mathbb{T}$ 分割成若干个连通分支。对于每个连通分支 Ω_i，它都是 S^*_z 的 Fredholm 域。由于 $Ker S_z - \lambda$ 始终为 $\{0\}$，且 Fredholm 指数是取整数值的连续函数，因此 $\theta(\lambda, \cdot)$ 的零点数对于 $\lambda \in \Omega_i$ 是常数。

为了证明至多存在有限个连通分支，只需证明对于 i、j，集合 $\{z_i(t)\} \cap \mathbb{D}$ 与集合 $\{z_j(t)\} \cap \mathbb{D}$ 至多有有限个交点。假设并非如此，则存在两个无限序列 $\{(z_n, w_n)\}$ 和 $\{(z_n, w'_n)\}$，其中 $|w_n| = |w'_n| = 1$ 且 $z_n \in \{z_i(t)\} \cap \{z_j(t)\} \cap \mathbb{D}$，使得 $ep(z_n, w_n) = ep(z_n, w'_n) = 0$。用一条连续弧连接点 $\{z_n\}$，记为 $z(t)$。再次根据 [7]，中的定理 12.1，存在有限个互不相同的连续函数 $\{w_k(t)\}$，使得 $ep(z(t), w_k(t)) = 0$。令 $z_n = z(t_n)$，则对于某个 k_n，有 $w_n = w_{k_n}(t_n)$。由于 k_n 的值域是有限集，$\{z_n\}$ 存在一个子序列（为简便起见，仍记作 $\{z_n\}$），使得对于某个 k，有 $w_n = w'_n = w_k(t_n)$。这意味着 $z_i(t) = z_j(t)$ 在 $\mathbb{D}$ 中有无穷多个交点；然而根据隐函数定理，每个 $z_i(t)$ 都是局部全纯的，这与事实 i、j 矛盾。

□

正如我们在引理 3.9 的证明中所示，有限条曲线与 $\mathbb{T}$ 的交点恰好构成集合 $\pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{T}^2)$，它至多是有限集 $\{z_0, z_1, \cdots, z_n\}$（按逆时针方向排列 z_i）。若 $n \geq 1$，令 Ω_i 为对应的连通分支，其边界包含弧 dz_iz_{i+1}，其中弧 $\overset{\frown}{z_nz_{n+1}}$ 表示 dz_nz_0。若 $Z_\theta \cap \mathbb{T}^2$ 是空集或单点集，则令 Ω 为对应的连通分支，其边界包含整个单位圆。于是得到以下引理。

引理 3.10. 假设 $\theta = \prod_j \theta^{k_j}{}_j$ 没有仅依赖于 z 的内因子，其中 $k_j > 0$ 和 $\theta_j = ep_j/p_j$ 是不可约的。那么

$$\Omega_i \subseteq \pi_1(Z_{\theta_j} \cap \mathbb{D}^2)$$

对于每个 i,j。

证明。设

$$\widetilde{p_j}(z, w) = \sum_{n \geq 0} a_n(z) w^n.$$

那么只有有限个 $z \in \mathbb{T}$，记为 $E = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\}$，使得 $ep_j(z, w)$ 在 $\mathbb{C}$ 中没有零点，即

$$\widetilde{p_j}(z, w) = a_0(z), \forall w \in \mathbb{C},$$

否则，存在无限多个 $z \in \mathbb{T}$，使得

$$\widetilde{p_j}(z, w) = a_0(z)$$

对所有 $w \in \mathbb{C}$ 都成立，这意味着对于 $8w \in \mathbb{C}$，多项式 $ep_j(z, w) - a_0(z)$ 在 $\mathbb{T}$ 中有无限多个零点，因此我们得到

$$\widetilde{p_j}(z, w) \equiv a_0(z),$$

这就构成了反证法。因此，对于任意 $e^{it} \in dz_iz_{i+1} \setminus E$，$ep_j(e^{it}, w)$ 在 $\mathbb{C}$ 中确实有零点。由于 ep_j 在 $\mathbb{T} \times \mathbb{E}$, 中没有零点，其中 $\mathbb{E} = \{z : |z| > 1\}$，因此 $ep_j(e^{it}, w)$ 的零点必定全部位于 $\mathbb{D}$。由此可知，当 $r > 0$ 充分小时，只要 z 在以 e^{it} 为中心、半径为 r 的球 $B(e^{it}, r)$ 中变化，$ep_j(z, w)$ 的零点也都位于 $\mathbb{D}$，从而得到

$$B(e^{it}, r) \cap \mathbb{D} \subset \pi_1(Z_{\theta_j} \cap \mathbb{D}^2).$$

注意到

$$\pi_1(Z_{\theta_j} \cap \mathbb{D} \times \mathbb{T}) \subseteq \pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{D} \times \mathbb{T}),$$

因此， $\mathbb{D}$ 被 $\pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{D}\times\mathbb{T}) \cup \mathbb{T}$ 分割出的每个连通分支，都包含于 $\mathbb{D}$ 被 $\pi_1(Z_{\theta_j} \cap \mathbb{D}\times\mathbb{T}) \cup \mathbb{T}$ 分割出的某个连通分支中。因此

$$\Omega_i \subseteq \pi_1(Z_{\theta_j} \cap \mathbb{D}^2).$$

□

根据引理 3.10，对于不含仅依赖于 z 的内因子的有理内函数 θ，每个 $\Omega_i \times \mathbb{D}$ 都与 Z_θ 的零点集的每个代数分支有非空交集。

定理 3.11. 假设 $\theta = \prod_j \theta_j^{k_j}$ 是一个不含仅依赖于 z 的内因子的有理内函数，其中 $k_j > 0$，且 $\theta_j = e_{p_j}/p_j$ 是不可约内因子。若每个 θ_j 的零点集在 $\mathbb{D}$ 中到 z-平面的投影都是连通的，也就是说， $\pi_1(Z_{\theta_j} \cap \mathbb{D}^2)$ 是连通的，那么对于某个区域，S^*_z 是 Cowen-Douglas 算子。此外，连通性条件也是必要的。

证明. 假设每个 $\pi_1(Z_{\theta_j} \cap \mathbb{D}^2)$ 都是连通的。取 Ω 为任意一个 Ω_i，则 $\Omega \times \mathbb{D}$ 与每个 Z^{θ_j} 都有非空交集。为了证明 S^*_z 在 Ω^* 上是 Cowen-Douglas 算子，只需证明

$$\bigvee_{\lambda\in\Omega} KerS^*_{z-\lambda} = \mathcal{K}_\theta.$$

假设 $f \in \mathcal{K}_\theta$ 与.....正交

$$\bigvee_{\lambda\in\Omega} KerS^*_{z-\lambda} = \left\{ \frac{g(w)}{1-\overline{\lambda}z} : \ g(w) \in H^2_w \ominus \theta(\lambda, w)H^2_w \right\},$$

那么对每个 θ_j，f/θ_j 在 $\Omega \times \mathbb{D}$ 上全纯。事实上，由于 θ_j 不可约，使得满足 $\theta_j(\lambda, w) = \frac{\partial\theta_j}{\partial\lambda}(\lambda, w) = 0$ 的 $\mathbb{D}^2$ 中点 (λ, w) 至多只有有限个，因此~~$\theta_j(\cdot, w)$~~ 除了对有限个 w 之外，只有单零点。因此，除有限个 w 外，$f(\cdot, w)/\theta_j(\cdot, w)$ 在 Ω 中全纯；显然，$f(\lambda, \cdot)/\theta_j(\lambda, \cdot)$ 在 $\mathbb{D}$ 中全纯，所以根据 Hartogs 定理，f/θ_j 在 $\Omega \times \mathbb{D}$ 上全纯。因此，对于每个 θ_j，$f = 0$ 在 $Z_{\theta_j} \cap \Omega \times \mathbb{D}$ 上。根据代数函数值的延拓（参见 [7], 第 2 章），即，

$$f(z, \rho_i(z)) = 0 \ for \ all \ z \in \Omega \ and \ i = 1, \cdots, N_j,$$

其中 $\{\rho_i(z)\}$ 是由 $\theta_j(z, w) = 0$ 定义的代数函数的解析分支。由于 $\pi_1(Z_{\theta_j} \cap \mathbb{D}^2)(\supset \Omega)$ 是连通的，根据解析延拓唯一性，我们有 $f = 0$ 在 $\pi_1(Z_{\theta_j} \cap \mathbb{D}^2)$ 上成立，因此 f/θ_j 在 $\mathbb{D}^2$ 上全纯。对 f/θ_j 重复上述讨论，可得 $f/\theta^{k_j}_j$ 在 $\mathbb{D}^2$ 上全纯。因此，f/θ 在 $\mathbb{D}^2$ 上全纯。由于 θ 是良内函数，我们得到 $f \in \theta H^2(\mathbb{D}^2)$，由此可知 f 必为零。这就完成了定理第一部分的证明。

现在假设，对于某个不可约因子 θ_j， $\pi_1(Z^{\theta_j})$ 在 $\mathbb{D}$ 中不连通。由于投影映射是连续的，因此 Z^{θ_j} 在 $\mathbb{D}^2$ 中有互不相交的解析分支。这意味着 θ_j 的分子（记作 q_j）在 $\mathbb{D}^2$ 中有互不相交的解析分支；若将 $\pi_1(Z^{\theta_j})$ 划分为互不相交的分支 Ω_i，则对于每个分支 Ω_i，必定存在有限个 q^j 的解析分支（尽可能多地取），使得 Ω_i 恰好是这些解析分支的投影之并。因此，根据引理 3.8，对于每个分支 Ω_i，存在

一个内函数 g_i，使得 $\pi_1(Z_{g_i}) = \Omega_i$，并且 g_i 在 $\Omega_i \times \mathbb{D}$ 上与 θ_j 有相同的零点。注意，$\theta g_i / \theta_j \notin \theta H^2(\mathbb{D}^2)$，且

$$\frac{\theta g_i}{\theta_j} \perp \bigvee_{\lambda \in \Omega_i} \left\{ \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \frac{1}{1-\overline{\eta} w} : \theta(\lambda, \eta) = 0 \right\}.$$

由此可得

$$\bigvee_{\lambda \in \Omega_i} Ker\, S^*_{z-\lambda} = \bigvee_{\lambda \in \Omega_i} \{ \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \frac{1}{1-\overline{\eta} w} : \theta(\lambda, \eta) = 0 \} \neq \mathcal{K}_\theta,$$

因此 S_z^*不是 Ω_i^* 上的 Cowen-Douglas 算子。证明完毕 . □

4. The Generalized Cowen-Douglas Operator

本节研究广义 Cowen-Douglas 算子的基本几何性质，并证明由有理内函数在 $\mathcal{K}_\theta$ 上诱导的 S_z^* 是广义 Cowen-Douglas 算子，且 S_z 可约当且仅当 ES_z^* 严格可约。回顾一下，对于算子 $T \in B_\alpha(\Omega)$，以及 Ω 的一个连通分支 Ω_i，$(E_T(\Omega_i), \pi_i)$ 是 Ω_i 上维数为 α_i 的厄米全纯向量丛，并且

$$E_T = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_T(\Omega_i).$$

定义 4.1. 若存在非平凡的（不等于 $\{0\}$ 或 E_T）E^1 和E^2，使得

$$E^1 = \bigsqcup_{i=1}^{N} E^1(\Omega_i),\ E^2 = \bigsqcup_{i=1}^{N} E^2(\Omega_i)$$

使得

(1)（可约性条件）$E^1(\Omega_i) \oplus E^2(\Omega_i) = E_T(\Omega_i)$ 对所有$i = 1, \cdots, N$均成立。

(2)（正交性条件）$E^1(\Omega_i) \perp E^2(\Omega_j)$ 对任意i、$j = 1, \cdots, N$均成立，其中 i s,

$$\bigvee_{w \in \Omega_i} E^1(w) \perp \bigvee_{w \in \Omega_j} E^2(w).$$

在这种情况下，我们将其记为

$$E_T = E^1 \oplus E^2.$$

值得注意的是，对于某些i，$E^1(\Omega_i)$ 可能是零丛，因为我们只要求E^1 非平凡。下面的例子给出了一个广义 Cowen-Douglas 算子T，使得E_T 可约，然而，每个$E_T(\Omega_i)$作为厄米全纯丛都是不可约的。

例 4.2。设 $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D}) \oplus H^2(\mathbb{D})$，且$M_z$ 是$H^2(\mathbb{D})$上的移位算子。设$T = M_z^* \oplus M^*_{z+2}$,2Ω $_1 = \mathbb{D}, \Omega_2 = 2 + \mathbb{D}, \Omega = \mathbb{D}$ S2 + $\mathbb{D}$ = S Ω_i，则$_{i=1}$

$$Ker(T - \bar{w}) = \begin{cases} \mathbb{C} \begin{pmatrix} K_w \\ 0 \end{pmatrix} & if \quad w \in \Omega_1 \\ \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ K_{w-2} \end{pmatrix} & if \quad w \in \Omega_2. \end{cases}$$

显然，T 2 $B_\alpha(\Omega^*)$ 且 $\alpha = (1, 1)$。

Take

$$E^1(\Omega_1) = \left\{ \mathbb{C}\begin{pmatrix} K_w \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad E^1(\Omega_2) = \{0\},$$

$$E^2(\Omega_1) = \{0\} \qquad E^2(\Omega_2) = \left\{ \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ K_{w-2} \end{pmatrix} \right\}.$$

显然，$E_T = E^1 \mathrm{L} E^2,$，因此它是可约的。

下面我们将介绍广义 Cowen-Douglas 算子的一些基本几何性质。

我们称 w_0 是 T 的稳定点，如果 $T - w_0$ 是 Fredholm 算子，且 dim 核$(T - w)$ 在 w_0 的某个邻域内保持不变。显然，对于 $\mathrm{B}_\alpha(\Omega)$ 中的算子 T，Ω 中的任意点w 都是 T 的稳定点。

引理 4.3（[11], 命题1.11）。若 w_0 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中 T 的稳定点，则存在定义在 w_0 某个邻域 Δ 上的全纯 $\mathcal{H}$-值函数 $\{e_i(w)\}^n{}_{i=1}$，使得 $\{e_1(w)、e_2(w)、\cdots、e_n(w)\}$ 构成 核$(T - w)$ 的一组基，其中 w 属于 Δ。

由引理 4.3 可得以下命题。

命题 4.4。对于算子 $T \in \mathrm{B}_\alpha(\Omega)$，设 Ω_i 是 Ω 的一个连通分支，令 Δ 为 Ω_i的一个连通开子集，则

$$\bigvee_{w\in\Delta} Ker(T - w) = \bigvee_{w\in\Omega_i} Ker(T - w).$$

此外，根据张成性质（参见[11],第 1.7 节），对于任意 $w_0 \in \Omega_i$，有

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} Ker(T - w_0)^k = \bigvee_{w\in\Omega_i} Ker(T - w).$$

证明。设 x $\in$ $\mathcal{H}$，且对于 w $\in$ Δ，x 与 Ker(T –w) 正交。若 w_0 是 Λ = 内部的边界点，且 w 2 Ω : x ⊥ Ker(T –w)} ∈ Ω（显然，$\Delta \subset \Lambda$，因此 Λ 非空），则根据引理 4.3，存在 Ω 的一个包含 w_0 的开集 Λ_0，以及定义在 Λ_0 上的全纯函数{e_1(w)、e_2(w)、⋯、e_n(w)}，它们对每个 w $\in$ Λ_0都构成 Ker(T –w) 的一组基。由于全纯函数 ⟨e_i(w)、x⟩ 对于 i = 1、2、⋯、n 在 Λ上为零，它们恒等于零，因此 Λ_0 包含于 Λ。于是 $\Lambda = \Omega$，从而完成证明。□

Cowen-Douglas 算子的许多性质都可以推广到广义 Cowen-Douglas 算子，其证明与原证明类似。为方便读者，我们给出原始参考文献以及类似的证明。

命题 4.5（[11], 命题1.21）。设T 属于广义 Cowen-Douglas 类 $\mathrm{B}_\alpha(\Omega)$，令$E_T$上的有界自同态构成的集合为$H^\infty_{\mathcal{L}(E_T)}(\Omega)$。则存在一个压缩单射 Γ_T，将T的交换子 $\{T\}'$映入$H^\infty_{\mathcal{L}(E_T)}(\Omega)$。

证明。若$XT = TX$，则对 Ω 中的w，有$XKer(T - w) \subseteq$ 核$(T - w)$。此外，若w处的$e(w)$是E_T的局部全纯截面，那么w处的$Xe(w)$也是如此。因此，X 定义了E_T上的全纯丛映射 $\Gamma_T X$，其定义为 $(\Gamma_T X)(w) = X|_{Ker(T-w)}$。由于

$$\|(\Gamma_T X)(w)\| = \|X|_{Ker(T-w)}\| \le \|X\|,$$

我们看到 $\Gamma_T X$属于$H^{\infty}_{\mathcal{L}(E_T)}(\Omega)$，且 Γ_T是压缩算子。 Γ_T是同态这一点显然成立；它是一一映射，因为 $\bigvee_{w\in\Omega}$核$(T-w)=\mathcal{H}$。□

一般而言， Γ_T 不是满射。例如，当T 是狄利克雷算子时（参见 [30]）， Γ_T不是满射。此外，类似于 [8], 中推论 3.7 的证明，我们可以证明：对于广义 Cowen-Douglas 算子T，若 Ω 只有有限个连通分支，则其冯·诺依曼代数$V^*(T)$是有限维的。

命题 4.6（ [8], 推论 3.7）。设 Ω 上的广义 Cowen-Douglas 算子T 满足 Ω 只有有限个连通分支，则其冯·诺依曼代数$V^*(T)$是有限维的。

证明。假设

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i,\ N<\infty.$$

对于$w_i\in\Omega_i$，由于$Ker(T-w_i)$是有限维的，只需证明：对于算子$S\in V^*(T)$，S完全由其在 $\bigvee_{i=1}^{N}Ker(T-w_i)$上的作用所确定。也就是说，若$S\in V^*(T)$且$S|_{\bigvee_{i=1}^{N}Ker(T-w_i)}=0$，则$S=0$。

对于任意i，由于值域$(T-w_i)^*$ 是闭的，且 $\mathcal{H}=$核$(T-w_i)\oplus$值域$(T-w_i)^*$，我们有

$$S\mathcal{H}=S(T-w_i)^*\mathcal{H}=(T-w_i)^*S\mathcal{H}=(T-w_i)^*S(T-w_i)^*\mathcal{H}$$
$$=[(T-w_i)^*]^2S\mathcal{H}=\cdots\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}Ran[(T-w_i)^*]^k.$$

因此

$$S\mathcal{H}\subset\bigcap_{j=1}^{N}\bigcap_{k=1}^{\infty}Ran[(T-w_i)^*]^k=\left(\bigvee_{i=1}^{N}\bigvee_{i=1}^{\infty}Ker(T-w_i)^k\right)^{\perp}.$$

由张成性质以及 $\bigvee_{i=1}^{N}\bigvee_{w\in\Omega_i}$核$(T-w)=\mathcal{H}$，我们有$S\mathcal{H}=0$，证毕。□

定理 4.7（ [11], 命题 1.18）。算子T 属于 $B_\alpha(\Omega)$，当且仅当E_T可约。

证明。设 $\mathcal{H}=\mathcal{M}\oplus\mathcal{N},$，其中 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{N}$约化T。令x属于核$(T-w)$，写$x=x_1\oplus x_2$，其中$x_1\in\mathcal{M}$ 和 x_2 属于 $\mathcal{N}$。于是

$$Tx_1\oplus Tx_2=wx=wx_1\oplus wx_2,$$

因此，x_1 和x_2 都属于核$(T-w)$。由此可知，核$(T-w)$可分解为

$$\{Ker(T-w)\cap\mathcal{M}\}\oplus\{Ker(T-w)\cap\mathcal{N}\},$$

因此$T_1=T|_{\mathcal{M}}$属于 $B_\beta(\Omega)$，且$T_2=T|_{\mathcal{N}}$属于 $B_\gamma(\Omega)$，其中 $\alpha=\beta+\gamma$，即对于$i=1,\ 2$，有 $\alpha_i=\beta_i+\gamma_i$。因此$E_T=E_{T_1}\oplus E_{T_2}$ 是可约的。

现在假设 $E_T=E^1\oplus E^2$ 是 E_T的一个约化。对每个 i，固定 w_i 属于 Ω_i，并令 Δ_i 为 Ω_i 中 w_i的一个邻域，在该邻域上 $E_T(\Omega_i)$存在一个平凡化 $e_1(w),\cdots,e_{\alpha_i}(w)$，其中 $e_1(w),\cdots,e_{\beta_i}(w)$张成 $E^1(\Omega_i)$，而 $e_{\beta_i+1}(w),\cdots,e_{\alpha_i}(w)$张成 $E^2(\Omega_i)$。要证明 T 可约，只需证明对每个 i，$\bigvee_{w\in\Delta_i}\{e_1(w),\cdots,e_{\beta_i}(w)\}$与 $\bigvee_{w\in\Delta_i}\{e_{\beta_i+1}(w),\cdots,e_{\alpha_i}(w)\}$正交。

彼此正交。由于 $\langle e_s(w), e_t(w)\rangle = 0$ 对于 $1 \le s \le \beta_i < t \le \alpha_i$ 成立，并对w 求导（将变量w 和 $\bar{w}$的函数视为函数），我们得到

$$0 = \frac{\partial}{\partial w}\langle e_s(w), e_t(w)\rangle = \langle e_s'(w), e_t(w)\rangle.$$

类似地，我们有 $\langle e_s^{(k)}(w), e_t(w)\rangle = 0$ 对于$k = 0, 1, 2, \cdots$因此

$$\langle e_s(w), e_t(w_i)\rangle = \langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_s^{(k)}(w_i)}{k!}(w - w_i)^k, e_t(w_i)\rangle = 0$$

当 $|w - w_i|$充分小时。回顾 $\bigvee_{w\in\Delta_i} \ker(T - w) = \bigvee_{w\in\Omega_i} \ker(T - w)$，由此我们证明了 $e_t(w_i)$ 与 $\bigvee_{w\in\Delta_i}\{e_1(w), \cdots, e_{\beta_i}(w)\}$正交。由于 w_i 是任意的，并且再次利用 $\bigvee_{w\in\Delta_i} \ker(T - w) = \bigvee_{w\in\Omega_i} \ker(T - w)$ 这一事实，我们完成了证明。□

以下定理是本节的主要定理，它表明S_z^*是一个广义 Cowen-Douglas 算子。

定理 4.8. 假设 $\theta(z,w)$ 是一个有理内函数，且不含仅依赖于变量 z 的内因子，并且 $\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2)$ 是 Beurling 型商模。令

$$\Omega = \sigma(S_z) \setminus \sigma_e(S_z) = \bigcup_i \Omega_i,$$

其中 Ω_i、$i = 1$、. . .、N 是 Ω 的连通分支，则 S_z^* 属于 $B_\alpha(\Omega^*)$，其中$\alpha_i = Z_\theta|_{\Omega_i}$ 是 $\theta(\lambda, \cdot)$ 在 $\mathbb{D}$, $\lambda \in \Omega_i$ 中的零点数。

证明. 根据定理 2.6 和推论 2.7，我们看到，对于 $\lambda \in \Omega_i$，$Ran(S_{z-\lambda}^*) = \mathcal{K}_\theta$，且 $\ker S_{z-\lambda}^*$ 的维数等于 n_i，这是一个常数。为证明 $S_z^* \in B_n(\Omega^*)$，假设$f \in \mathcal{K}_\theta$ 且 f 与.....正交

$$\bigvee_{\lambda\in\Omega} \ker S_{z-\lambda}^* = \left\{\frac{g(w)}{1 - \bar{\lambda}z} : g(w) \in H_w^2 \ominus \theta(\lambda, w)H_w^2\right\},$$

那么，通过类似于定理 3.11 证明的论证，我们可以得到 f/θ 在 $\mathbb{D}^2$ 中全纯。由于 θ 是良内函数，根据引理 2.5，我们知道 $f \in \mathcal{K}_\theta$，因此 $f = 0$。因此

$$\bigvee_{\lambda\in\Omega} \ker S_{z-\lambda}^* = \mathcal{K}_\theta,$$

由此可得 $S_z^* \in B_n(\Omega^*)$。证明完毕。 □

根据定理 4.7 和 4.8，S_z 可约，当且仅当 ES_z^* 可约。如例 4.2 所示，存在一个广义 Cowen-Douglas 算子 T，使得每个 $E_T(\Omega_i)$ 作为厄米全纯丛都是不可约的，而 T 是可约的。不过，在 θ 没有单变量内因子的情况下，我们稍后将看到，若对于某个 i，$E^{S_z^*}(\Omega_i)$ 不可约，则 S_z 不可约。

定义 4.9. 设 T 是一个广义 Cowen-Douglas 算子。若 E_T 是严格可约的，则称其为严格可约；也就是说，E_T 是可约的，并且对于每个可约分解 $E_T = E^1 \oplus E^2$, $E^1(\Omega_i)$，任意 i对应的 $E^1(\Omega_i)$ 都是非平凡的，即 $E^1(\Omega_i)$ 既不是 $\{0\}$，也不是 $E_T(\Omega_i)$。特别地，如果 E_T 是严格可约的，那么每个 $E_T(\Omega_i)$ 也是可约的。

定理 4.10. 设 $\theta(z,w)$ 是一个不含单变量内因子的有理内函数，且 $\mathcal{K}_\theta = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2)$ 是相应的 Beurling 型商模。则 S_z 可约，当且仅当 $E^{S_z^*}$ 严格可约。

证明。只需证明：如果$E_{S_z^*}$不是严格可约的，那么S_z就是不可约的。如果 Ω_N是连通的，根据引理 3.2，结论显然成立。现在假设 $\Omega = \mathrm{S}\,\Omega_i$ 至少有两个连通分支，其中 Ω_i、$i = 1$、2 .. .、N是 Ω 的连通分支，$N \geq 2$。为方便起见，我们讨论$E^{S_z^*}$的复共轭，并记作

$$E_{S_z^*} = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_{S_z^*}(\Omega_i),$$

其中$E^{S_z^*}(\Omega_i) = \mathrm{n}(\lambda,\ x)\ 2\ \Omega_i \times \mathcal{K}_\theta$：$x 2\ Ker S^*_{z-\lambda}$o 是 Ω_i上的厄米反全纯丛。接下来我们将通过反证法证明$E_{S_z^*}$是不可约的，从而得到S_z是不可约的。

假设 $E^{S_z^*}$可约，且$E^{S^*_z} = E^1 \oplus E^2$,由于$E^{S^*_z}$不是严格可约的，因此存在某个$i$，使得$E^1(\Omega_i)$或$E^2(\Omega_i)$等于 {0}。不失一般性，假设$E^1(\Omega_1) = \{0\}$，$E^2(\Omega_1) = E^{S_z^*}(\Omega_1)$，并且

$$E_{S_z^*}(\Omega_i) = E^1(\Omega_i) \oplus E^2(\Omega_i),$$

其中$E^1(\Omega_i) \perp E^2(\Omega j)$，对$i$、$j$成立。对于 $\lambda \in \Omega_i$，$KerS^*_{z-\lambda}$有如下形式的自然基:

$$\begin{gathered}
K_\lambda(z)K_{a_1(\lambda)}(w),\ K_\lambda(z)K'_{a_1(\lambda)}(w),\ \cdots,\ K_\lambda(z)K^{(k_1)}_{a_1(\lambda)}(w)\\
K_\lambda(z)K_{a_2(\lambda)}(w),\ K_\lambda(z)K'_{a_2(\lambda)}(w),\ \cdots,\ K_\lambda(z)K^{(k_2)}_{a_2(\lambda)}(w)\\
\vdots\\
K_\lambda(z)K_{a_r(\lambda)}(w),\ K_\lambda(z)K'_{a_r(\lambda)}(w),\ \cdots,\ K_\lambda(z)K^{(k_r)}_{a_r(\lambda)}(w)
\end{gathered}$$

其中 $\{\mathrm{a}_k(\lambda)\}$是局部反全纯函数，且$\mathrm{K}^{(l)}_\zeta(\mathrm{w}) = \mathrm{l!w}^l(1-\bar{\zeta}\mathrm{w})^{l+1}$。假设~~$\{\mathrm{e}_1(\lambda)$~~、$\cdots$、$\mathrm{e}_{m_i}(\lambda)\}$是$\mathrm{E}^1(\Omega_i)$的局部反全纯标架，则每个$\mathrm{e}_j(\lambda)$都可以表示为上述自然基的线性组合，其系数为$\mathrm{f}^j\ \mathrm{kl}(\lambda)$，其中$\mathrm{f}^j\ \mathrm{kl}$在$\Omega_i$的某个开集内是反全纯的。对于任意 $\zeta \in \Omega_1$，，存在 Δ 的一个邻域以及一些在 Δ 内全纯的函数ρ_n，使得 $\theta(\zeta, \rho_n(\zeta)) = 0$ 在 Δ上成立。由于 θ 没有单变量内因子，每个函数 $\rho_n(\zeta)$都不是常值函数。注意到$\mathrm{K}_\zeta(\mathrm{z})\mathrm{K}_{\rho_n}(\zeta)(\mathrm{w})\ 2\ \mathrm{KerS}^*_{z-\zeta}$且$\mathrm{E}^1(\Omega_i) \perp \mathrm{E}^2(\Omega_1)$，可得

$$0 = \langle e_j(\lambda), K_\zeta(z)K_{\rho_n(\zeta)}(w)\rangle = \sum_{k,l} f^j_{kl}(\lambda)K_\lambda(\zeta)K^{(l)}_{a_k(\lambda)}(\rho_n(\zeta))$$

对于任意 $\lambda \in \Omega_i$ 和 $\zeta \in \Delta$。由于 ρ_n 的值域也是一个开集，因此这意味着

$$\sum_{k,l} f^j_{kl}(\lambda)K^{(l)}_{a_k(\lambda)}(w) = 0$$

对于某个 $\mathbb{D}$ 的开集中的任意 $\lambda \in \Omega_i$ 和 w，该结论均成立。但请注意，对于每个给定的 $\lambda \in \Omega_i$，函数 $\{K^{(l)}{}_{a_k(\lambda)}(w)\}$ 是线性无关的，因此对于任意 k、l 和 $\lambda \in \Omega_i$，$f_{j\,kl}(\lambda) = 0$，这意味着 $e_j(\lambda) \equiv 0$。因此，所有 $E^1(\Omega_i)$ 都是零向量丛。这是一个反证法。

因此，$E^{S_z^*}$ 是不可约的。根据定理 4.7，我们得到 S_z 是不可约的，证明完毕。□

注：事实上，当 θ 具有形如 $\phi(w)$ 的内因子时，S_z^* 是一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的 Cowen-Douglas 算子与一个广义 Cowen-Douglas 算子的直和。例如，设 $\theta(z, w) = b_{w_0}(w)\varphi(z, w)$，其中 φ 是一个没有单变量内因子的 $(n, 1)$ 型有理内函数。那么我们有

$$H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}^2) = \left(H^2(\mathbb{D}^2) \ominus b_{w_0}(w)H^2(\mathbb{D}^2)\right) \bigoplus b_{w_0}(w)\left(H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \varphi H^2(\mathbb{D}^2)\right).$$

因此，S^{θ}_z 酉等价于 $S^{b_{w_0}}_z \mathrm{L}\, S^{\varphi}_z$（这里 S^{θ}_z 表示商模 $\mathcal{K}_\theta$ 上的压缩移位算子S_z）。假设 $(\mathrm{L}\, S^{\varphi}_z)^*$ 的广义 Cowen-Douglas 域为 Ω，则 $(S^{\theta}_z)^*$ 是 Ω 上的广义 Cowen-Douglas 算子，并且 $E^{(S^{\theta}_z)^*}$ 有如下分解：

$$E^1(\Omega) = span\{\ K_{w_0}(w_0)\cdot K_\lambda K_{a(\lambda)} - K_{a(\lambda)}(w_0)\cdot K_\lambda K_{w_0}\ \} \qquad E^1(\mathbb{D}\setminus\overline{\Omega}) = \{0\},$$
$$E^2(\Omega) = span\{\ K_\lambda K_{w_0}\ \} \qquad E^2(\mathbb{D}\setminus\overline{\Omega}) = span\{\ K_\lambda K_{w_0}\ \}.$$

根据定理 4.10，如果零点计数函数 Z_θ 在 Ω 的某个连通分支上恒为 1，那么 S_z 是不可约的。因此，对于由满足定理 4.10 中条件的 $(n, 1)$ 型有理内函数 θ 所诱导的商模，S^*_z 是不可约的；这一结论曾在 [36] 中通过另一种方法得到。下面的例子是定理 4.10 的另一个应用。

例 4.11. 设 $\theta(z, w) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z - w_i}{1 - \overline{w_i} z}$ 是一个有理内函数，且满足 $0 < t_1 < t_2 \le t_3 \le \cdots \le t_n < t_{n+1} = 1$。那么我们有

$$\sigma(S_z) \setminus \sigma_e(S_z) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda \in \mathbb{C} : t_i < |\lambda| < t_{i+1}\}.$$

由于 $Z_\theta(\lambda) = 1$ 在 $\{\lambda \in \mathbb{C}$ 上：$t_1 < |\lambda| < t_2\}$，由定理 4.8，S_z 在 $\mathcal{K}_\theta$ 上不可约.

不难看出，定理 4.10 的证明同样适用于多项式商模 $H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [p]$，使得 S_z^* 是广义 Cowen-Douglas 算子。因此，自然会提出以下问题。

问题 4.12. 假设 $p(z, w)$ 是一个不含单变量因子的多项式，那么 S_z^*何时是 $H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [p]$ 上的广义 Cowen-Douglas 算子?

这个问题等价于询问多项式子模 $[p]$ 是否由其在 $\mathbb{D}^2$ 中的零点（按重数计算）所确定? 对于任意多项式，答案似乎都是肯定的，但我们目前还无法给出证明。若确实如此，则 S_z^* 是 Ω 上指标为 $\alpha_i = Z_p(\lambda)$ 的广义 Cowen-Douglas 算子，$\lambda \in \Omega_i$，其中 $\Omega = \sigma(S_z) \setminus \sigma_e(S_z) = \mathrm{S}\, i\, \Omega_i$。在这种情况下，$S_z$ 可约，当且仅当 $E_{S_z^*}$ 严格可约。下一节我们将进一步讨论某些多项式。

我们以一个具体例子结束本节，该例说明S_z^*（不是 Cowen-Douglas 算子）是可约的。它只是对例 3.7 的一个修改。

例 4.13。取 $0 < c < 1/8$，定义

$$\theta(z,w) = \frac{2z^2w^2 - z + c}{2 - zw^2 + cz^2w^2}.$$

Let

$$h_1(z,w) = \begin{cases} z - \frac{1-\sqrt{1-8cw^2}}{4w^2} & if \quad w \neq 0 \\ z - c & if \quad w = 0 \end{cases}$$

$$h_2(z,w) = 2zw^2 - (1 + \sqrt{1-8cw^2})/2,$$

then

$$\Omega = \pi_1(Z_\theta \cap \mathbb{D}^2) = \Omega_1 \cup \Omega_2 = \pi_1(Z_{h_1} \cap \mathbb{D}^2) \cup \pi_1(Z_{h_2} \cap \mathbb{D}^2),$$

且S^*_z的指标为 (2, 2)。令 $\rho(\lambda) = \sqrt{\lambda - c^2\lambda^2}$，则

$$Ker(S^*_{z-\lambda}) = \begin{cases} span\ \{K_\lambda(z)K_{\rho(\lambda)}(w), K_\lambda(z)K_{-\rho(\lambda)}(w)\ \} & if \quad \lambda \in \Omega, \lambda \neq c \\ span\ \{K_\lambda(z), K_\lambda(z)w\} & if \quad \lambda = c \end{cases}$$

不难验证

$$(\lambda, K_\lambda(z)K_{\rho(\lambda)}(w) + K_\lambda(z)K_{-\rho(\lambda)}(w))$$

and

$$\left(\lambda, \frac{1}{2\rho(\lambda)}[K_\lambda(z)K_{\rho(\lambda)}(w) - K_\lambda(z)K_{-\rho(\lambda)}(w))]\right)$$

给出了$E^{S^*_z}$的一个可约分解，因此由定理 4.10，S_z是可约的。

5. 多项式商模 $[z^m - w^n]^\perp$ 和 $[(z-w)^n]^\perp$

本节将运用几何方法研究某些多项式商模上的压缩移位算子。

定义 5.1. 设$p(z,w)$是一个多项式。若对于任意$f \in H^2(\mathbb{D}^2)$，只要f/p 在 $\mathbb{D}^2$中全纯，就有p 在$H^2(\mathbb{D}^2)$上具有因子性质，即$f \in [p]$，则称p 在$H^2(\mathbb{D}^2)$上具有因子性质。

若p 没有仅依赖变量z的因子，则当且仅当p 具有因子性质时，S^*_z 是商模$H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [p]$上的广义 Cowen-Douglas 算子。在单位圆盘的情形下，由于内外分解的存在，每个$p(z)$对$H^2(\mathbb{D})$都具有因子性质，因此该定义是平凡的。对于双圆盘，正如我们所见，有理内函数的分子具有因子性质。对于一般多项式，[13]中的以下定理给出了肯定的答案。

定理 5.2（ [13], 定理2.1）。设A^2_β 是 $\beta > -1$ 时圆盘上的经典加权伯格曼空间，而A^2_{-1} 表示 Hardy 空间。假设 φ 在 $\mathbb{D}^n$的某个邻域内全纯。那么

$$[\varphi]_n = \{\ \varphi f \in A^2_{\vec{\beta},n} : f\ is\ holomorphic\ in\ \mathbb{D}^n\ \}.$$

这里，$\vec{\beta} = (\beta_i)^n{}_{i=1}$ 其中 $\beta_i \geq -1$，$A^2_{\vec{\beta},\,n} = \otimes_{n\ i=1} A^2_{\beta_i}$，且 $[\varphi]_n$ 是$A^2_{\vec{\beta},\,n}$ 中由 φ生成的子模。

根据上述定理，取 $n = 2$ 和 $\vec{\beta} = (-1,-1)$，我们得出每个多项式$p(z,w)$都具有因子性质。

已知，对于多项式q，若$Z_q \cap \mathbb{D}^2 = \emptyset$，则 $[q] = H^2(\mathbb{D}^2)$（参见 [9], 命题 2.2.13）。因此，我们总是假设p 的每个代数分支都与 $\mathbb{D}^2$有非空交点。下面的定理是定理 2.6 的推广，证明类似，故略去。

定理 5.3. 设p 是一个不含仅依赖z 的因子的多项式，且$M = [p]$。则有以下结论。

(1) 对于 $\lambda \in \mathbb{T}$，则

$$KerS_{z-\lambda} = KerS^*_{z-\lambda} = \{0\}.$$

(2) 对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，我们有

$$KerS_{z-\lambda} = \{0\}$$

and

$$KerS^*_{z-\lambda} = \left\{ \frac{g(w)}{1-\overline{\lambda}z} : g(w) \in H^2 \ominus p(\lambda, w)H^2 \right\}.$$

(3) $S_{z-\lambda}$的值域是闭的，当且仅当$p(\lambda,\cdot)$在 $\mathbb{T}$上没有零点。因此，对于 $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \pi_1(Z_p \cap \mathbb{D} \times \mathbb{T})$，$S_{z-\lambda}$ 是 Fredholm 算子，且

$$ind(S^*_{z-\lambda}) = Z_p(\lambda),$$

其中，$Z_p(\lambda)$表示$p(\lambda,\cdot)$在 $\mathbb{D}$中的零点个数。

类似于定理 4.8 和定理 4.10 的证明，我们有如下推论。

定理 5.4. 设 p 是一个不含单变量因子的多项式，则商模 $[p]^\perp$ 上的压缩移位算子S^*_z是一个在 $\mathbb{D} \setminus \pi_1(Z_p \cap \mathbb{D} \times \mathbb{T})$ 上的广义 Cowen-Douglas 算子。此外，S_z可约当且仅当$E S^*_z$ 严格可约。

根据定理 5.4，对于多项式$z^m - w^n$和 $(z-w)^n$，相应的压缩移位算子总是广义 Cowen-Douglas 算子。此外，根据定理 5.3，容易验证，在这两种情形下，$\sigma(S_z) = \mathbb{D}$，$\sigma_e(S_z) = \mathbb{T}$，因此可立即得到以下推论。

推论 5.5. 设$p(z,w)$是多项式$z^m - w^n$或 $(z-w)^n$，则商模 $[p]^\perp$ 上的S^*_z是一个在 $\mathbb{D}$上的 Cowen-Douglas 算子。

接下来，我们采用几何方法研究商模 $\mathcal{N} = [z^m - w^n]^\perp$ 和 $\mathcal{N} = [(z-w)^n]^\perp$ 上 S_z 的约化子空间。为方便起见，我们将 Ω^* 上的厄米全纯向量丛视为 Ω 上的厄米反全纯向量丛。对于 Ω 上的反全纯截面 $e(\lambda)$，$e^{(k)}(\lambda)$ 表示 $\frac{\partial^k}{\partial\overline{\lambda}^k} e(\lambda)$。我们取负实轴作为函数 $z^{\frac{1}{n}}$ 的支割线，即若写作 $z = re^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi$，则 $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\theta/n}$。对于 $j = 0, 1, \ldots, n-1$，定义

$$e_j(\lambda) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} \frac{w^j}{1-\overline{\lambda}^m w^n} = \frac{1}{n\overline{\lambda}^{\frac{jm}{n}}} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{jk} K_{\lambda,\, \lambda^{\frac{m}{n}}\zeta^k},$$

其中，$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是n次单位根，$K_{\lambda,\mu} = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} \frac{1}{1-\overline{\mu}w}$ 是$H^2(\mathbb{D}^2)$的再生核。于是得到以下定理。

定理 5.6. 对于商模 $\mathcal{N}=[z^m-w^n]^\perp$，$S_z^*$是一个指标为$n$的Cowen-Douglas 算子$\mathbb{D}$，且 $\{e_j(\lambda)\}_{j=0}^{n-1}$是$E^{S_z^*}$在 $\mathbb{D}$上的正交反全纯标架。因此，它给出了S_z 的极小约化子空间分解：

$$\mathcal{N}=\bigoplus_{j=0}^{n-1}\mathcal{H}_j,$$

其中 $\mathcal{H}_j=\bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}}e_j(\lambda)$。此外，$E^{S_z^*}$ 上典范联络的分块对角化为 $M(1,\otimes n)$，因此由定理 3.6，$V^*(S_z)$ 与 $M_n(\mathbb{C})$ 同构。

证明。对于 λ，0，由定理 5.3，$\{K_{\lambda,\lambda^{\frac{m}{n}}\zeta^k}\}_{k=0}^{n-1}$ 是纤维 $KerS_{z-\lambda}^*$ 的一组基。注意

$$\begin{pmatrix} e_0(\lambda)\\ e_1(\lambda)\\ \vdots\\ e_{n-1}(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{n\bar\lambda^{\frac{m}{n}}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n\bar\lambda^{\frac{m(n-1)}{n}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \zeta^{n-1} & \cdots & \zeta^{(n-1)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{\lambda,\lambda^{\frac{m}{n}}}\\ K_{\lambda,\lambda^{\frac{m}{n}}\zeta}\\ \vdots\\ K_{\lambda,\lambda^{\frac{m}{n}}\zeta^{n-1}}\end{pmatrix},$$

因此 $\{e_j(\lambda)\}$ 也是 $KerS_{z-\lambda}^*$ 的一组基。

由于 $e_j(\lambda)$ 关于变量 w 的傅里叶系数除 $k\equiv j \bmod n$ 外均为零，我们有

$$\langle e_i(\lambda),e_j(\lambda)\rangle=0$$

对于 i、j。也不难验证

$$\langle e_j(\lambda),e_j(\lambda)\rangle=\frac{1}{1-|\lambda|^2}\langle\sum_{k=0}^{\infty}(\bar\lambda^m w^n)^k,\sum_{k=0}^{\infty}(\bar\lambda^m w^n)^k\rangle=\frac{1}{1-|\lambda|^2}\frac{1}{1-|\lambda|^{2m}}.$$

因此，对于标架 $\{e_j(\lambda)\}$，度量矩阵

$$G=(\langle e_i(\lambda),e_j(\lambda)\rangle)=\frac{1}{1-|\lambda|^2}\frac{1}{1-|\lambda|^{2m}}I_n.$$

因此，联络矩阵

$$\Theta=\bar\partial G\cdot G^{-1}=\left(\frac{\lambda}{1-|\lambda|^2}+\frac{m\lambda|\lambda|^{2(m-1)}}{1-|\lambda|^{2m}}\right)\cdot I_n.$$

因此，根据定理 3.3，$\mathcal{A}(s)(\lambda)=M(1,\otimes n)$ 对所有 λ , 0 都成立。根据定理 3.5 和定理 3.6，证明完毕。□

注：注意，$w^ie_j(\lambda)=w_je_i(\lambda)$，因此 $w^i\mathcal{H}_j=w_j\mathcal{H}_i$。令 $[z^m-w^n]^\perp=\bigvee_{j=0}^{n-1}\mathcal{H}_j$，则中的算子$V^*(S_z)$具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}\bar wI & a_{13}\bar w^2I & \cdots & a_{1n}\bar w^{n-1}I\\ a_{21}wI & a_{22}I & a_{23}\bar wI & \cdots & a_{2n}\bar w^{n-2}I\\ a_{31}w^2I & a_{32}wI & a_{33}I & \cdots & a_{3n}\bar w^{n-3}I\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}w^{n-1}I & a_{n2}w^{n-2}I & a_{n3}w^{n-3}I & \cdots & a_{nn}I\end{pmatrix},\tag{5.1}$$

其中a_{ij}、i、$j=1,\cdots$、n 是任意复常数。因此，a_ia_j所对应的每个秩一投影都对应于$a_iw^ia_j\bar{}w^jI$中的一个极小投影。这一事实意味着S_z 有无穷多个极小约化子空间，且它们彼此酉等价。

此外，根据张成性质 $\mathcal{H}_0 = \mathsf{W}_{\lambda\in\mathbb{D}} e_0(\lambda) = \mathsf{W}_{\infty\ k=0} e_0^{(k)}(0)$，我们可以给出 $\mathcal{H}_0$的一组正交基。注意，$(\frac{1}{1-\bar{\lambda}z})^{(k)}(0) = k!z^k$，如果我们写成

$$\frac{1}{1-\bar{\lambda}^m w^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{\lambda}^m w^n)^k,$$

then

$$(\frac{1}{1-\bar{\lambda}^m w^n})^{(N)}(0) = \begin{cases} (mk)!w^{nk} & if \quad N = mk \\ 0 & others. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} e_0^{(N)}(0) &= \sum_{k=0}^{k=[\frac{N}{m}]} \binom{N}{mk} (mk)!w^{nk}(N-mk)!z^{N-mk} \\ &= N! \sum_{k=0}^{k=[\frac{N}{m}]} z^{N-mk}w^{nk}, \end{aligned}$$

其中 $[\cdot]$ 表示下取整函数。由于$e_0^{(N)}(0)$是次数为N的齐次函数，$\{e_0^{(N)}(0)\}$是 $\mathcal{H}_0$的正交基，而 $\{w_j e_0^{(N)}(0)\}$是 $\mathcal{H}_j$的正交基。因此我们得到以下推论。

推论 5.7. $\mathfrak{n} w_j e_0^{(N)}(0)/\|e_0^{(N)}(0)\|\mathfrak{o}_{\infty,n-1\ N=0,j=0}$是商模 $[z^m - w^n]^{\perp}$的标准正交基。此外，S_z 是重数为 n 的加权移位，其权重为

$$\left\{ \frac{\sqrt{[\frac{N}{m}]+1}}{\sqrt{[\frac{N+1}{m}]+1}} \right\}_{N=0}^{\infty}$$

证明。注意到 $\|e_0^{(N)}(0)\| = N!\ \mathfrak{q}\ [\frac{N}{m}] + 1$ 且

$$\langle S_z e_0^{(N)}(0), e_0^{(k)}(0)\rangle = \begin{cases} (N+1)!N!([\frac{N}{m}]+1) & if \quad k = N+1 \\ 0 & others \end{cases}$$

So

$$S_z \frac{e_0^{(N)}(0)}{\|e_0^{(N)}(0)\|} = \frac{\sqrt{[\frac{N}{m}]+1}}{\sqrt{[\frac{N+1}{m}]+1}} \frac{e_0^{(N+1)}(0)}{\|e_0^{(N+1)}(0)\|}.$$

□

与定理 5.6 的证明类似，可以看出，若$p(z, w) = q(z, w^n)$，其中q 是某个多项式，且$n \geq 2$为整数，则S_z^* 的核空间向量丛是可约的。因此我们有以下定理。

定理 5.8. 假设$p(z, w) \in \mathbb{C}[z,w]$ 没有仅依赖于z 的因子，且p 具有因子性质。若$p(z, w) = q(z, w^n)$，其中q 是某个多项式，$n \geq 2$是整数，则S_z 在$\mathcal{N} = [p]^{\perp}$ 上的限制可约，且冯·诺依曼代数$V^*(S_z)$的维数至少为n^2。

证明. 令 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$为$n$次单位根。由于$p$ 具有$q(z, w^n)$的形式，根据注 2.8，对于 $\lambda \in \Omega = \sigma(S_z) \setminus \sigma_e(S_z)$，$Ker S^*_{z-\lambda}$的自然基具有如下形式

$$\left\{K_\lambda(z) \cdot K^{(l)}_{\zeta^i a_k(\lambda)}(w),\ i = 0, \cdots, n-1 \text{ and } k \geq 0, 0 \leq l \leq l_k - 1\right\}.$$

其中，$\{a_k(\lambda)\}$ 是$q(\lambda, \cdot)$在 $\mathbb{D}$ 中的零点，l_k 是$a_k(\lambda)$对应的阶数。定义

$$E^i_\lambda = span\left\{\frac{1}{n\ \overline{a_k(\lambda)}^i} \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{ij} K_\lambda(z) \cdot K^{(l)}_{\zeta^j a_k(\lambda)}(w),\ k \geq 0, 0 \leq l \leq l_k - 1\right\}$$

并且$E^i = \{(\lambda, x) \in \Omega \times \mathcal{N} \mid x \in E^i_\lambda\}$。只需证明

$$E_{S^*_z} = E^0 \oplus E^1 \oplus \cdots \oplus E^{n-1}. \tag{5.2}$$

通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n\ \overline{a_k(\lambda)}^i} \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{ij} \cdot K_{\zeta^j a_k(\lambda)}(w) &= \frac{1}{n\ \overline{a_k(\lambda)}^i} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s \geq 0} \zeta^{ij} \cdot \bar{\zeta}^{sj}\ \overline{a_k(\lambda)}^s\ w^s \\
&= \frac{1}{n\ \overline{a_k(\lambda)}^i} \sum_{s \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{(i-s)j}\right) \overline{a_k(\lambda)}^s\ w^s \\
&= \frac{1}{\overline{a_k(\lambda)}^i} \sum_{t \geq 0} \overline{a_k(\lambda)}^{nt+i}\ w^{nt+i} \\
&= \frac{w^i}{1 - \overline{a_k(\lambda)}^n w^n}
\end{aligned}$$

类似地，我们可以得到

$$\frac{1}{n\ \overline{a_k(\lambda)}^i} \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{ij} \cdot K^{(l)}_{\zeta^j a_k(\lambda)}(w) = \frac{l! w^{nl+i}}{(1 - \overline{a_k(\lambda)}^n w^n)^{l+1}}$$

观察可知，对于E^i中的元素，关于变量w 的傅里叶系数除$k \equiv i$ 模n外均为零，这意味着 (5.2) 成立。此外，设 $\mathcal{H}_i$ 为由E^i诱导的约化子空间，则 $\mathcal{H}_i$ 和 $\mathcal{H}_{i'}$ 酉等价，因为E^i 与$E^{i'}$ 酉等价。因此，容易看出，具有 (5.1) 形式的算子属于$V^*(S_z)$。所以其维数至少为n^2。□

注：事实上，上述定理适用于任意形如$p(z, B_n(w))$的多项式，其中$B_n(w)$是阶数为$n \geq 2$的布拉施克乘积。

接下来我们将考察商模 $\mathcal{N} = [(z-w)^n]^\perp$。主要结果如下定理所述。

定理 5.9. 对于商模 $\mathcal{N} = [(z - w)^n]^\perp$，$S_z$ 是不可约的 .

为了证明该定理，我们需要以下关于广义特征空间的一组基的结果。引理5.10（ [10], 引理1.22）。若$e_1, \cdots, e_n$ 是 Ω 上的向量值全纯函数，且对每个$w \in \Omega$，$e_1(w), \cdots, e_n(w)$构成核$(T - w)$的一组基，则

(1) 对所有k和$i = 1, 2, \cdots, n$，$(T - w)e^{(k)}{}_i(w) = ke^{(k-1)}{}_i(w)$。 (2) $e_1(w), \cdots, e_n(w), \cdots, e_1^{(k-1)}(w), \cdots, e_n^{(k-1)}(w)$对$k \geq 1$和$w \in \Omega$构成核$(T - w)^k$的一组基。

现在设 Φ 是 $H^\infty_{\mathcal{L}(E_T)}(\Omega)$ 中的一个元素，且存在有界算子X属于 $\{T\}'$，使得 $\Gamma_T X = \Phi$（回想一下， Γ_T是从 T的交换子 $\{T\}'$到 $H^\infty_{\mathcal{L}(E_T)}(\Omega)$ 的压缩单射，见命题 4.5）。若 $e_1(w)$、 $\cdots$、$e_n(w)$ 是 E_T 的一组局部全纯截面基，则通过求导可得

$$\begin{aligned} Xe_i'(w) &= (Xe_i(w))' = \Phi(w)e_i'(w) + \Phi'(w)e_i(w) \\ Xe_i''(w) &= (Xe_i(w))'' = \Phi(w)e_i''(w) + 2\Phi'(w)e_i'(w) + \Phi''(w)e_i(w) \\ &\vdots \\ Xe_i^{(N)}(w) &= (Xe_i(w))^{(N)} = \Phi(w)e_i^{(N)}(w) + N\Phi'(w)e_i^{(N-1)}(w) + \cdots + \Phi^{(N)}(w)_{e_i(w)} \end{aligned}$$

换言之，$X|_{Ker(T-w)^{N+1}}$ 相对于基 $\{e^{(j)}{}_i(w)\}^n{}_{i=1\ N\ j=0}$ 的分块矩阵为

$$\begin{pmatrix} \Phi(w) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi'(w) & \Phi(w) & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi''(w) & 2\Phi'(w) & \Phi(w) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi^{(N)}(w) & N\Phi^{(N-1)}(w) & \binom{N}{2}\Phi^{N-2}(w) & \cdots & \Phi(w) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

或者等价地，

$$\left[\binom{i}{j}\Phi^{(i-j)}(w))\right],\ here\ \binom{i}{j} = 0\ if\ i > j.$$

定理 5.9 的证明。当$n = 1$时，众所周知，S_z 与 Bergman移位酉等价，因此是不可约的。因此我们假设$n \geq 2$。由定理 5.3 和定理 5.2，对于商模 $\mathcal{N} = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [(z - w)^n]$，$S_z^*$ 属于 $\mathrm{B}_n(\mathbb{D})$。设P 是$V^*(S_z)$ 中的一个投影，且 $\Phi = \Gamma_{S_z^*}P$，我们将通过证明P只能是 0 或 I</style}来证明定理。取

$$e_i(\lambda) = K_\lambda(z)K_\lambda^{(i)}(w) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}\frac{i!w^i}{(1 - \bar{\lambda}w)^{i+1}},\ i = 0, 1, \cdots, n-1$$

作为$E^{S_z^*}$的反全纯标架，则$P|_{Ker(S_{z-\lambda}^*)^{N+1}}$相对于基 $\{e^{(j)}{}_i(\lambda)\}^{n-1}{}_{i=0\ N\ j=0}$ 的分块矩阵具有形式（5.3）。

注意，对于 $0 \leq i \leq n - 2$，我们有

$$\begin{aligned} e_i'(\lambda) &= (K_\lambda(z)K_\lambda^{(i)}(w))' = K_\lambda'(z)K_\lambda^{(i)}(w) + K_\lambda(z)K_\lambda^{(i+1)}(w) \\ &= \frac{z}{1 - \bar{\lambda}z}e_i(\lambda) + e_{i+1}(\lambda). \end{aligned}$$

由于 $e_i'(\lambda)$ 和 $e_{i+1}(\lambda)$ 属于商模，因此对于 $_{z1-\bar{\lambda}z}e_i(\lambda) \in \mathcal{N}$当~~$i \leq n - 2$~~时，这意味着

$$S_z(1 - \bar{\lambda}S_z)^{-1}e_i(\lambda) = \frac{z}{1 - \bar{\lambda}z}e_i(\lambda),\ 0 \leq i \leq n - 2.$$

设 $\Phi(\lambda) = [a_{kl}(\lambda)]^{n-1}{}_{k,l=0}$，其中 $a_{kl}(\lambda)$ 在 $\mathbb{D}$ 中为反全纯函数。于是有

$$P\begin{pmatrix} e_0(\lambda) \\ e_1(\lambda) \\ \vdots \\ e_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix} = [a_{kl}(\lambda)] \cdot \begin{pmatrix} e_0(\lambda) \\ e_1(\lambda) \\ \vdots \\ e_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

and

$$P\begin{pmatrix} e_0'(\lambda) \\ e_1'(\lambda) \\ \vdots \\ e_{n-1}'(\lambda) \end{pmatrix} = [a_{kl}(\lambda)] \cdot \begin{pmatrix} e_0'(\lambda) \\ e_1'(\lambda) \\ \vdots \\ e_{n-1}'(\lambda) \end{pmatrix} + [a_{kl}'(\lambda)] \cdot \begin{pmatrix} e_0(\lambda) \\ e_1(\lambda) \\ \vdots \\ e_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

因此，对于 $0 \le i \le n-2$,

$$Pe_i'(\lambda) = \sum_{l=0}^{n-1} a_{il}(\lambda)e_l'(\lambda) + a_{il}'(\lambda)e_l(\lambda). \tag{5.4}$$

由 $PS_z = S_z P$ 可得

$$\begin{aligned} Pe_i'(\lambda) &= P\left(S_z(1-\bar{\lambda}S_z)^{-1}e_i(\lambda) + e_{i+1}(\lambda)\right) \\ &= S_z(1-\bar{\lambda}S_z)^{-1}Pe_i(\lambda) + Pe_{i+1}(\lambda) \\ &= S_z(1-\bar{\lambda}S_z)^{-1}\left(\sum_{l=0}^{n-1} a_{il}(\lambda)e_l(\lambda)\right) + \sum_{l=0}^{n-1} a_{i+1,l}(\lambda)e_l(\lambda). \end{aligned} \tag{5.5}$$

因此，由 (5.4) 可得

(5.6)

$$\begin{aligned} \langle Pe_i'(\lambda), K_{\mu,\mu}\rangle &= \sum_{l=0}^{n-1} a_{il}(\lambda)\frac{l!\mu^{l+1}}{(1-\bar{\lambda}\mu)^{l+3}} + \sum_{l=0}^{n-1} a_{i+1,l}(\lambda)\frac{l!\mu^l}{(1-\bar{\lambda}\mu)^{l+2}} \\ &= a_{i+1,0}(\lambda)\frac{1}{(1-\bar{\lambda}\mu)^2} + \sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{1}{l}a_{i,l-1}(\lambda) + a_{i+1,l}(\lambda)\right)\frac{l!\mu^l}{(1-\bar{\lambda}\mu)^{l+2}} + a_{i,n-1}(\lambda)\frac{(n-1)!\mu^n}{(1-\bar{\lambda}\mu)^{n+2}}, \end{aligned}$$

并且由 (5.5)，我们有

(5.7)

$$\begin{aligned} \langle Pe_i'(\lambda), K_{\mu,\mu}\rangle &= \sum_{l=0}^{n-1} a_{il}(\lambda)\frac{l!\cdot(l+2)\mu^{l+1}}{(1-\bar{\lambda}\mu)^{l+3}} + a_{il}'(\lambda)\frac{l!\mu^l}{(1-\bar{\lambda}\mu)^{l+2}} \\ &= a_{i,0}'(\lambda)\frac{1}{(1-\bar{\lambda}\mu)^2} + \sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{l+1}{l}a_{i,l-1}(\lambda) + a_{i,l}'(\lambda)\right)\frac{l!\mu^l}{(1-\bar{\lambda}\mu)^{l+2}} + a_{i,n-1}(\lambda)\frac{n!\mu^n}{(1-\bar{\lambda}\mu)^{n+2}}. \end{aligned}$$

由于 $\{\frac{1}{l!}\bar{\mu}^l(1-\bar{\lambda}\mu)^{l+2}\}_{l=0}^{n}$ 线性无关，由 (5.6) 和 (5.7)，我们得到：对于 $i = 0, 1, \cdots, n-2$, $l = 1, \cdots, n-1$,

$$\begin{aligned} a_{i+1,0}(\lambda) &= a'_{i,0}(\lambda), \\ a_{i,l-1}(\lambda) &= a_{i+1,l}(\lambda) - a'_{i,l}(\lambda), \\ a_{i,n-1}(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

对于第二个公式，令 $l = n-1$，我们得到对于 $i \le n-3$，$a_{i,n-2}(\lambda) = 0$ 和 $a_{n-2,n-2}(\lambda) = a_{n-1,n-1}(\lambda)$。继续这一过程，得到 $a_{00}(\lambda) = \cdots = a_{n-1,n-1}(\lambda)$ 和 $a_{kl}(\lambda) = 0$，其中 $k < l$。因此 $[a_{kl}]$ 是一个下三角矩阵。由于 P 是一个投影，$[a_{kl}]$ 应当是幂等元，因此对角元素 a_{ii} 恒为 0 或 1。如果它们恒为 0，简单计算可知，对角元素为零的下三角矩阵是幂等矩阵，当且仅当它是零矩阵。如果它们恒为 1，那么 $I - [a_{kl}(\lambda)]$应当为零，因此 $\Phi(\lambda)$ 是 0 或 I。也就是说，包含在 $V^*(S_z)$ 中的投影要么是 0，要么是 I，即 S_z 是不可约的。□

我们以对次数为二的齐次多项式商模上的S_z^* 的可约性作出完整刻画，作为本文的结尾。以下技术引理（命题 1, [18]）将在证明中用到。

引理5.11. 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的一个区域，且$f(z, w)$是定义在 $\Omega\times\Omega$ 上的函数，它关于z 全纯，关于w反全纯。那么

$$f(z, z) = 0$$

对所有$z \in \Omega$ 均成立，当且仅当f 在 $\Omega \times \Omega$ 上恒等于零。

定理 5.12. 设$p = (z-w)(z-\zeta w)(\zeta, 0)$，则$S_z^*$ 在 $\mathcal{N} = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [p]$ 上可约，当且仅当 $\zeta = -1$。

证明. 若 $\zeta = 1$，我们已知S_z^* 不可约，因此假设 $\zeta \neq 1$。若 $|\zeta| < 1$，根据解析函数的局部性质，有 $W_{|\lambda|<|\zeta|}\{K_{\lambda,\lambda}\} = W_{|\lambda|<1}\{K_{\lambda,\lambda}\}$，故$S_z^*$ 是定义在 $\{z : |z| < |\zeta|\}$上的 Cowen-Douglas 算子。若 $|\zeta| \ge 1$，则 $\pi_1(Z_p \cap \mathbb{D}\times\mathbb{T})$是空集，故$S_z^*$是定义在 $\mathbb{D}$上的 Cowen-Douglas 算子。因此我们可以假设S_z^* 是定义在包含 0 的某个小圆盘上的 Cowen-Douglas 算子。由于S_z^* 可约，其核空间向量丛也可约。设$e_1(\lambda)$,$e_2(\lambda)$是在 0 的某个邻域（记为 Ω）上的局部正交标架。不失一般性，假设

$$e_1(0)(z, w) = \cos t + \sin t \cdot w, \ e_2(0)(z, w) = -\sin t + \cos t \cdot w$$

对于某个$t \in [0, \pi/2)$。注意，$K_{\lambda,\ \lambda}$、$K_{\lambda,\ \zeta\lambda}$是 $\Omega \setminus \{0\}$的自然基，于是我们可以写成

$$e_1(\lambda) = a(\lambda)K_{\lambda,\lambda} + b(\lambda)K_{\lambda,\zeta\lambda}$$

$$e_2(\lambda) = c(\lambda)K_{\lambda,\lambda} + d(\lambda)K_{\lambda,\zeta\lambda}$$

其中系数$a(\lambda)$、$b(\lambda)$、$c(\lambda)$、$d(\lambda)$在 $\Omega \setminus \{0\}$上是反全纯的。

由于 $e_1(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处连续，因此我们有

$$\lim_{\bar{\lambda}\to 0} a(\lambda)K_{\lambda,\lambda} + b(\lambda)K_{\lambda,\zeta\lambda} = \cos t + \sin t \cdot w,$$

也就是说,

$$\lim_{\bar{\lambda}\to 0}\frac{1}{1-\bar{\lambda}z}[a(\lambda)\frac{1}{1-\bar{\lambda}w}+b(\lambda)\frac{1}{1-\overline{\zeta\lambda}w}]=\cos t+\sin t\cdot w.$$

由此可得

$$\lim_{\bar{\lambda}\to 0}\sum_{n\geq 0}[a(\lambda)+\bar{\zeta}^n b(\lambda)]\cdot\bar{\lambda}^n w^n=\cos t+\sin t\cdot w.$$

这意味着，对于所有$n\geq 0$，$\lambda\to 0$，极限 $\lim [a(\lambda)+\zeta^n b(\lambda)]\lambda^n$ 都存在

$$\lim_{\bar{\lambda}\to 0}[a(\lambda)+b(\lambda)]=\cos t, \tag{5.8}$$

$$\lim_{\bar{\lambda}\to 0}[a(\lambda)+\bar{\zeta}b(\lambda)]\bar{\lambda}=\sin t, \tag{5.9}$$

$$\lim_{\bar{\lambda}\to 0}[a(\lambda)+\bar{\zeta}^n b(\lambda)]\bar{\lambda}^n=0\ for\ all\ n\geq 2. \tag{5.10}$$

将 (5.9) 乘以 $\bar{\lambda}^{n-1}$，再减去 (5.10)，可得

$$\lim_{\bar{\lambda}\to 0}(1-\bar{\zeta})\bar{\zeta}^{n-1}b(\lambda)\bar{\lambda}^n=0,\ for\ all\ n\geq 2.$$

这意味着 $\lambda=0$ 至多是$b(\lambda)$的一个简单极点。类似地，对于$a(\lambda)$、$c(\lambda)$ 和$d(\lambda)$，结论也成立。设

$$a(\lambda)=\sum_{i\geq -1}a_i\bar{\lambda}^i,\ \ b(\lambda)=\sum_{i\geq -1}b_i\bar{\lambda}^i$$
$$c(\lambda)=\sum_{i\geq -1}c_i\bar{\lambda}^i,\ \ d(\lambda)=\sum_{i\geq -1}d_i\bar{\lambda}^i$$

be $a(\lambda)$、$b(\lambda)$、$c(\lambda)$、$d(\lambda)$的洛朗级数。则 (5.8) 和 (5.9) 意味着 th at

$$a_0+b_0=\cos t,\ a_{-1}+b_{-1}=0,\ a_{-1}+\bar{\zeta}b_{-1}=\sin t.$$

对$c(\lambda)$、$d(\lambda)$进行类似计算可得

$$c_0+d_0=-\sin t,\ c_{-1}+d_{-1}=0,\ c_{-1}+\bar{\zeta}d_{-1}=\cos t.$$

由于$e_1(\lambda)\perp e_2(\lambda)$，我们有

$$\frac{a(\lambda)\overline{c(\lambda)}}{1-|\lambda|^2}+\frac{b(\lambda)\overline{d(\lambda)}}{1-|\zeta|^2|\lambda|^2}+\frac{a(\lambda)\overline{d(\lambda)}}{1-\zeta|\lambda|^2}+\frac{b(\lambda)\overline{c(\lambda)}}{1-\bar{\zeta}|\lambda|^2}=0 \tag{5.11}$$

对任意 $\lambda\in\Omega\setminus\{0\}$均成立。由引理5.11可得

$$\frac{a(\lambda)\overline{c(\mu)}}{1-\bar{\lambda}\mu}+\frac{b(\lambda)\overline{d(\mu)}}{1-|\zeta|^2\bar{\lambda}\mu}+\frac{a(\lambda)\overline{d(\mu)}}{1-\zeta\bar{\lambda}\mu}+\frac{b(\lambda)\overline{c(\mu)}}{1-\bar{\zeta}\bar{\lambda}\mu}=0,\ \lambda,\mu\in\Omega\setminus\{0\} \tag{5.12}$$

由此可得

$$\sum_{n\geq 0}(a(\lambda)+\bar{\zeta}^n b(\lambda))(\overline{c(\mu)+\bar{\zeta}^n d(\mu)})\cdot(\bar{\lambda}\mu)^n=0. \tag{5.13}$$

代入$a(\lambda)$、$b(\lambda)$、$c(\lambda)$、$d(\lambda)$的洛朗级数，得到

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{i,j\geq -1}(a_i+\bar{\zeta}^n b_i)\overline{(c_j+\bar{\zeta}^n d_j)}\cdot\bar{\lambda}^{n+i}\mu^{n+j}$$

$$=\sum_{k,l\geq -1}\left(\sum_{n\geq 0}(a_{k-n}+\bar{\zeta}^n b_{k-n})\overline{(c_{l-n}+\bar{\zeta}^n d_{l-n})}\right)\bar{\lambda}^k\mu^l=0.$$

因此

$$\sum_{n\geq 0}(a_{k-n}+\bar{\zeta}^n b_{k-n})\overline{(c_{l-n}+\bar{\zeta}^n d_{l-n})}=0$$

对所有k、$l\geq -1$均成立。令$k=0$，得到

$$\cos t\cdot(c_l+d_l)+\sin t\cdot(c_{l-1}+\bar{\zeta}d_{l-1})=0\ for\ all\ l\geq -1. \tag{5.14}$$

对称地，令$l=0$，得到

$$-\sin t\cdot(a_k+b_k)+\cos t\cdot(a_{k-1}+\bar{\zeta}b_{k-1})=0\ for\ all\ k\geq -1. \tag{5.15}$$

由（5.14）和（5.15），有

$$\cos t\cdot(c(\mu)+d(\mu))+\sin t\cdot\bar{\mu}\ (c(\mu)+\bar{\zeta}d(\mu))=0$$

$$-\sin t\cdot(a(\lambda)+b(\lambda))+\cos t\cdot\bar{\lambda}\ (a(\lambda)+\bar{\zeta}b(\lambda))=0$$

即,

$$a(\lambda)=\frac{\sin t-\bar{\zeta}\bar{\lambda}}{-\sin t+\bar{\lambda}\cos t}b(\lambda),\ c(\mu)=\frac{\cos t+\bar{\zeta}\bar{\mu}\sin t}{\cos t+\bar{\mu}\sin t}d(\mu). \tag{5.16}$$

结合（5.13），得到

$$\sum_{n\geq 0}\left((1-\bar{\zeta}^n)\sin t+(\bar{\zeta}^n-\bar{\zeta})\bar{\lambda}\cos t\right)\overline{\left((1-\bar{\zeta}^n)\cos t-(\bar{\zeta}^n-\bar{\zeta})\bar{\mu}\sin t\right)}\cdot(\bar{\lambda}\mu)^n=0,$$

考虑 $(\lambda\mu)^n$ 的系数，我们得到

$$\left(|1-\bar{\zeta}^n|^2-|\bar{\zeta}^{n-1}-\bar{\zeta}|^2\right)\sin t\cos t=0$$

对所有 $n\geq 1$ 均成立。回忆 $t\in[0,\frac{\pi}{2})$，我们得到 $\sin t=0$。由 (5.16)，于是 $a(\lambda)=-\bar{\zeta}b(\lambda)$，$c(\mu)=-d(\mu)$。结合 (5.12)，我们有

$$\frac{\bar{\zeta}}{1-|\lambda|^2}+\frac{1}{1-|\zeta|^2|\lambda|^2}-\frac{\bar{\zeta}}{1-\zeta|\lambda|^2}-\frac{1}{1-\bar{\zeta}|\lambda|^2}=0,\ \lambda\in\Omega\setminus\{0\},$$

这表明 $\zeta=-1$。

反过来，由定理 5.6，对于商模 $[z^2-w^2]^\perp$，S_z^* 是可约的。证明完毕。□

推论 5.13。假设 $p=(z-\alpha w)(z-\beta w),\alpha,\beta,0$ 是一个齐次多项式。那么在商模 $[p]^\perp$ 上，S_z 可约当且仅当 $\alpha+\beta=0$。

证明。若 α，β，注意到存在反全纯函数 $a(\lambda),b(\lambda),c(\lambda),d(\lambda)$，使得

$$\langle a(\lambda)K_{\lambda,\alpha\lambda}+b(\lambda)K_{\lambda,\beta\lambda},c(\lambda)K_{\lambda,\alpha\lambda}+d(\lambda)K_{\lambda,\beta\lambda}\rangle=0$$

等价于说，存在反全纯函数 $a_1(\lambda), b_1(\lambda), c_1(\lambda), d_1(\lambda)$，使得

$$\langle a_1(\lambda)K_{\lambda,\lambda} + b_1(\lambda)K_{\lambda,\frac{\beta}{\alpha}\lambda}, c_1(\lambda)K_{\lambda,\lambda} + d_1(\lambda)K_{\lambda,\frac{\beta}{\alpha}\lambda}\rangle = 0.$$

这意味着，当且仅当 S_z^* 在 $[(z-\alpha w)(z-\beta w)]^\perp$ 上的核空间向量丛可约时，S^*_z 在 $[(z-w)(z-\frac{\beta}{\alpha}w)]^\perp$ 上的核空间向量丛也可约。因此，由定理 5.12，S_z 可约当且仅当 $\alpha+\beta=0$。

若 $\alpha=\beta$，通过类似的讨论，S_z^* 在 $[(z-\alpha w)^2]^\perp$ 上的核空间向量丛可约，当且仅当 S_z^* 在 $[(z-w)^2]^\perp$ 上的核空间向量丛可约。由定理 5.9，在这种情况下，S_z 是不可约的。证明完毕。□

参考文献

[1] J. Agler，《论定义在多圆盘上的某些全纯函数的表示》, 收录于《算子理论专题：恩斯特·D. 海林格纪念文集》，《算子理论进展与应用》48，Birkhäuser，巴塞尔，1990年，47-66.[2] J. A. Ball、C. Sadosky 和 V. Vinnikov，具有多个演化过程的散射系统与多维输入／状态／输出系统，《积分方程与算子理论》52（2005），第3期，323-393.[3] H. Bercovici，《希尔伯特空间算子的算子理论与算术》，收录于H^∞，《数学调查与专著》第26卷，A.M.S.，1988年，普罗维登斯，罗德岛州.[4] A. Beurling，论希尔伯特空间中线性变换的两个问题，《数学学报》81（1949），239-255.[5] K. Bickel 和 G. Knese，双圆盘上的内函数及其相关希尔伯特空间，《Journal of Functional Analysis》265（2013），第11期，2753-2790.[6] K. Bickel 和 C. Liaw，通过 Agler 分解研究 Beurling 型子模的性质，《Journal of Functional Analysis》272（2017），第1期，83-111.[7] G. A. Bliss，《代数函数》，Dover 出版社（2004）.[8] L. Chen、R. G. Douglas 和 K. Guo，论 Cowen-Douglas 算子的双交换子，《Journal of Functional Analysis》260（2011），1925-1943.[9] X. Chen 和 K. Guo，《解析希尔伯特模》，Chapman Hall/CRC 数学研究札记第433卷，Chapman Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2003年.[10] M. J. Cowen 和 R. G. Douglas，联络的等价性，《Adv. Math.》56（1985），39-61.[11] M. J. Cowen 和 R. G. Douglas，复几何与算子理论，《数学学报》141（1978），187-261.[12] R. G. Douglas 和 V. I. Paulsen，函数代数上的希尔伯特模，Pitman 数学研究札记第217卷，1989年.[13] Hui Dan、Kunyu Guo 和 Jiaqi Ni，无穷多个变量的加权 Bergman 空间的不变子空间。预印本，2021年 https://arxiv.org/abs/2103.04145.[14] R. G. Douglas、M. Putinar 和 K. Wang，Bergman 空间解析乘子的约化子空间。《Journal of Functional Analysis》263（2012），第6期，1744-1765.[15] R. G. Douglas、S. Sun 和 D. Zheng，通过解析延拓研究 Bergman 空间上的乘法算子，《Adv. Math.》226（2011），541-583.[16] R. G. Douglas 和 R. Yang，双圆盘上的Hardy空间中的算子理论，《积分方程与算子理论》38（2）（2000），207-221.[17] R. G. Douglas 和 C. Foias，《论一个$C_0(1)$ 算子的平方结构》，收录于《现代算子理论与应用》，《算子理论进展与应用》170，Birkhäuser，巴塞尔，2007年，75-84.[18] M. Englis，Bergman 空间上由 Toeplitz 算子生成的代数的稠密性，《Ark. Mat.》30（1992），227-243.[19] J. B. Garnett，《有界解析函数》，《数学研究生文本》第236卷，Springer，纽约，2007年.[20] K. Guo 和 H. Huang，《Bergman 空间上的乘法算子》，Springer Berlin Heidelberg，2015年。

[21] K. Guo 和 K. Wang，双圆盘上的 Beurling 型商模与边界表示，《Journal of Functional Analysis》257（2009），第10期，3218-3238.[22] K. Guo，由多项式生成的 Hardy 子模的等价性，《Journal of Functional Analysis》178（2000），343-371.[23] G. Knese，双圆盘上没有零点的多项式，《Anal. PDE》3（2010），第2期，109-149.[24]S. Kobayashi，《复向量丛微分几何》，普林斯顿大学出版社与岩波书店，1987年.[25] Y. Li、Y. Yang 和 Y. Lu，模型空间上一类截断 Toeplitz 算子的可约性与酉等价，《New York Journal of Mathematics》24（2018），929-946.[26] B. Sz.-Nagy、C. Foias、H. Bercovici 和 L. Kérchy，《希尔伯特空间算子的调和分析》，第2版，修订增补版。Universitext。Springer，纽约，2010年.[27] N. K. Nikolskii，《移位算子论》，《数学综合研究》系列第273卷，Springer-Verlag，1986年.[28] S. Richter，论解析函数巴拿赫空间上乘法算子的不变子空间，博士论文，密歇根大学，1986年.[29] W. Rudin，《多圆盘上的函数论》，本杰明出版社，纽约，1969年.[30] G. D. Taylor，D_α上的乘子，《Trans. Amer. Math. Soc.》123（1966），229-240.[31] R. Yang，双圆盘上的Hardy空间中的算子理论。III，《Journal of Functional Analysis》186（2）（2001），521-545.[32] R. Yang，双圆盘上的Hardy空间中的算子理论。II，《积分方程与算子理论》42（1）（2002），99-124.[33] R. Yang，$H^2(\mathbb{D}^2)$ 中算子理论的简要综述。《解析算子理论手册》，223-258，CRC Press/Chapman Hall Handb. Math. Ser.，CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2019年.[34] Y. Yang、S. Zhu 和 Y. Lu，双圆盘上一类商模上的压缩移位算子的可约性，《Ann. Funct. Anal.》10（2019），第4期，447-459.[35] K. Zhu，一类乘法算子的约化子空间，《伦敦数学会杂志》（第2辑）62（2000），第2期，553-568.[36] S. Zhu、Y. Yang 和 Y. Lu，双圆盘上的 Beurling 型商模上的压缩移位算子的可约性。《Journal of Functional Analysis》278（2020），第1期，108304，共40页。大连理工大学数学科学学院，中国辽宁省大连市，116024。工业装备结构分析国家重点实验室，中国辽宁省大连市，116024。电子邮箱：lyfdlut@dlut.edu.cn 大连理工大学数学科学学院，中国辽宁省大连市，116024。电子邮箱：yangyixin@dlut.edu.cn 大连理工大学数学科学学院，中国辽宁省大连市，116024。电子邮箱：zuchao@mail.dlut.edu.cn