arXiv:2601.09154v1 [math.CA] 14 Jan 2026

平方与立方超几何函数的麦克劳林系数的递推关系及应用

ZHONG-XUAN MAO、JING-FENG TIAN*

Abstract. 本文提出并证明，级数展开 $F^2(a,b;\ c;\ z)\ =\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ 和 $F^3(a,b;\ c;\ z)\ =\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$ $(a,b,c,z\ \in\ \mathbb{C}$和$-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\})$中的系数 u_n 和 v_n 分别满足二阶和三阶线性递推关系，其中$F(a,b;\ c;\ x)$表示高斯超几何函数，$\mathbb{C}$表示复平面。我们的结果为复数域中若干经典特殊函数的平方和立方的麦克劳林系数提供了递推关系，这些函数包括零平衡高斯超几何函数、椭圆积分，以及切比雪夫多项式、勒让德多项式、盖根鲍尔多项式和雅可比多项式等经典正交多项式。作为应用，我们首先确立了一个涉及高斯超几何函数的函数的单调性，随后为著名的克劳森公式给出一种新的证明。

Contents

1. 引言 1
2. 高斯超几何函数平方的麦克劳林级数系数递推关系 2
3. 高斯超几何函数立方的麦克劳林级数系数递推关系 7
4. 应用 11
4.1. 涉及高斯超几何函数的函数的单调性 11
4.2. 克劳森公式的新证明 13
参考文献 14

1. Introduction

对于任意 $a,b,c,z\in\mathbb{C}$，高斯超几何函数定义为

$$F(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k\,k!}z^k,\quad c\notin\mathbb{N}\cup\{0\},\quad |z|<1. \tag{1.1}$$

作为最重要的特殊函数之一，它在数学和物理学中发挥着基础性作用，不仅具有理论意义，也有广泛的应用。

得益于级数分析中的成熟工具，级数表示（1.1）为研究高斯超几何函数的解析性质提供了一个便利框架，包括单调性 [4, 6]，绝对单调性 [7, 10]，和不等式 [5, 11]。受这一思想启发，为了以类似方式处理高斯超几何函数的平方和立方

2020 Mathematics Subject Classification. 主要分类号：33C05、33C75；次要分类号：11B37、40A05。
Key words and phrases. 超几何函数；椭圆积分；麦克劳林系数；递推关系。*通讯作者：Jing-Feng Tian（tianjf@ncepu.edu.cn）。

我们也寻求它们的级数表示。一种可能的方法是采用柯西乘积公式，由此可以得到

$$F^2(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(a)_k(a)_{n-k}(b)_k(b)_{n-k}}{(c)_k(c)_{n-k}k!(n-k)!}z^n,\quad c\notin\mathbb{N}\cup\{0\},\quad |z|<1. \tag{1.2}$$

and

$$F^3(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i\,i!}\,\frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j\,j!}\,\frac{(a)_{n-i-j}(b)_{n-i-j}}{(c)_{n-i-j}\,(n-i-j)!}z^n,\quad c\notin\mathbb{N}\cup\{0\},\quad |z|<1. \tag{1.3}$$

另一种方法是使用递推关系。设

$$F^2(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<1,$$

$$F^3(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^n,\quad |z|<1.$$

通过推导 u_n 和 v_n满足的递推关系，我们可以确定 F^2和 F^3的级数表示，从而为分析它们的性质奠定坚实基础。此前，一些研究者采用了第二种方法，并在实数域中取得了一些有趣且重要的结果。2018年，Yang [9] 建立了 $(r')^pK(r)$ 和 $(r')^pE(r)$ 的麦克劳林级数系数的递推关系，其中 $r\in(0,1)$， $K(r)$ 和 $E(r)$ 分别表示第一类和第二类完全椭圆积分。随后，Chen 和 Zhao [2] 研究了 $F^2(a,b;\ c;\ x)$ 的系数递推关系，其中 $a,b,c\in\mathbb{R}$和 $x\in(0,1)$。最近，2025年，Yang [8] 研究了当 $\theta,q,a,b,c\in\mathbb{R}$ 和 $x\in(0,1)$ 时，$(1-\theta x)^{-q}F(a,b;\ c;\ x)$ 的系数递推关系，给出了欧拉线性变换公式的新证明，并证明了一个特定函数的绝对单调性。

鉴于这类方法的重要性，我们建立并证明了 u_n 和 v_n 在复数域中满足的递推关系，它们分别是二阶和三阶线性递推关系。我们的结果为若干经典特殊函数的平方与立方的麦克劳林系数提供了递推关系，这些函数包括零平衡高斯超几何函数、椭圆积分，以及切比雪夫多项式、勒让德多项式、Gegenbauer 多项式和雅可比多项式等经典正交多项式。作为应用，我们首先证明了一个涉及高斯超几何函数的函数具有单调性，随后为著名的克劳森公式给出了一种新的证明。

2. Recurrence relations for the Maclaurin series coefficients of the square of the Gauss hypergeometric function

定理 2.1. 设 $a,b,c,z\in\mathbb{C}$和 $-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$。则有

$$F^2(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$, $u_1=2ab/c$ 和

$$u_{n+1}=\alpha_0(n)u_n+\alpha_1(n)u_{n-1},\quad n\geq 1,$$

其中

$$\alpha_0(n)=\frac{2n^3+3(a+b+c-1)n^2+((a+b)(4c-3)+4ab-c+1)n+2ab(2c-1)}{(n+1)(c+n)(2c+n-1)},$$

and

$$\alpha_1(n) = -\frac{(2a+n-1)(2b+n-1)(a+b+n-1)}{(n+1)(c+n)(2c+n-1)}.$$

证明。设

$$\begin{aligned}
R_{-1}(n) &= (n+1)(c+n)(2c+n-1),\\
R_0(n) &= 2n^3 + 3(a+b+c-1)n^2 + ((a+b)(4c-3) + 4ab - c + 1)n + 2ab(2c-1),\\
R_1(n) &= -(2a+n-1)(2b+n-1)(a+b+n-1).
\end{aligned}$$

我们首先证明，对于所有 $n \geq 1$， $R_{-1}(n)u_{n+1} = R_0(n)u_n + R_1(n)u_{n-1}$ 成立，这等价于证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(R_{-1}(n)u_{n+1} - R_0(n)u_n - R_1(n)u_{n-1}\Big) z^n = 0, \quad |z| < 1. \tag{2.1}$$

为方便起见，我们记 $F = F(a,\ b;\ c;\ z)$。利用恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = F^2,\\
&\sum_{n=0}^{\infty} n u_n z^n = z(F^2)',\\
&\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) u_n z^n = z^2(F^2)'',\\
&\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) u_n z^n = z^3(F^2)''',
\end{aligned}$$

我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_{-1}(n)u_{n+1} z^n = z^2(F^2)''' + 3cz(F^2)'' + (2c^2 - c)(F^2)',$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} R_0(n)u_n z^n =& 2z^3(F^2)''' + 3(a+b+c+1)z^2(F^2)''\\
&+ 2(2a(b+c) + 2bc + c)z(F^2)' + 2ab(2c-1)F^2,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} R_1(n)u_{n-1} z^n =& -z^4(F^2)''' - 3(a+b+1)z^3(F^2)''\\
&- \left(2a^2 + a(8b+3) + 2b^2 + 3b + 1\right) z^2(F^2)' - 4ab(a+b)zF^2.
\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (R_{-1}(n)u_{n+1} - R_0(n)u_n - R_1(n))z^n\\
=&(z^2 - 2z^3 + z^4)(F^2)''' + 3z(-z(a+b+c+1) + z^2(a+b+1) + c)(F^2)''\\
&+ (z^2(2a^2 + a(8b+3) + 2b^2 + 3b + 1) - 2z(2a(b+c) + 2bc + c) + 2c^2 - c)(F^2)'\\
&+ 2ab(2z(a+b) - 2c + 1)F^2.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

由于 F 是超几何方程的一个解，我们有

$$F'' = \frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}F' + \frac{ab}{z(1-z)}F,$$

对其求导可得

$$F''' = \frac{\begin{pmatrix} ab\big(z(a+b+3)-c-1\big)F \\ +\Big(z^2\big(a^2+a(b+3)+b^2+3b+2\big)+abz-2cz(a+b+2)+c^2+c\Big)F' \end{pmatrix}}{z^2(z-1)^2}.$$

应用莱布尼茨公式，可得

$$\begin{aligned}(F^2)'' &= 2F'F' + 2FF'' \\ &= \frac{2ab}{z-z^2}F^2 - \frac{2(c-z(a+b+1))}{z-z^2}FF' + 2F'F',\end{aligned} \tag{2.3}$$

and

$$\begin{aligned}(F^2)''' &= 6F'F'' + 2FF''' \\ &= \frac{2ab(z(a+b+3)-c-1)}{z^2(z-1)^2}F^2 \\ &\quad + \frac{2\left(z^2\left(-2ab+a(a+3)+b^2+3b+2\right)+4abz-2cz(a+b+2)+c^2+c\right)}{z^2(z-1)^2}FF' \\ &\quad - \frac{6(c-z(a+b+1))}{z-z^2}F'F'.\end{aligned} \tag{2.4}$$

将（2.3）和（2.4）代入（2.2）后，我们发现 F^2、 FF' 和 $F'F'$ 的系数均为零，由此证明了（2.1）。

最后，根据柯西乘积公式（1.2），可得 $u_0 = 1$ 和 $u_1 = 2ab/c$。 □

注记 2.1。 $F^2(a,\ b;\ c;\ z)$ 的麦克劳林级数的前几项为

$$\begin{aligned}F^2(a,b;c;z) =& 1 + \frac{2ab}{c}z + \frac{ab(c(2ab+a+b+1)+ab)}{c^2(c+1)}z^2 \\ &+ \frac{2a(a+1)b(b+1)(c(2ab+a+b+2)+3ab)}{3c^2(c+1)(c+2)}z^3 + \cdots.\end{aligned}$$

令 $c = a+b$代入定理2.1，即可得到零平衡高斯超几何函数 $F(a,\ b;\ a+b,\ z)$ 的平方的麦克劳林级数系数的递推关系。

推论2.1。设 a、 b、 $z \in \mathbb{C}$ 和 $-(a+b) \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$。则有

$$F^2(a,b;a+b;z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad |z| < 1,$$

其中 $u_0 = 1$、 $u_1 = 2ab/(a+b)$，且

$$u_{n+1} = \alpha_0(n)u_n + \alpha_1(n)u_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

其中

$$\alpha_0(n) = \frac{(2a+2b+2n-1)(n^2+(2a+2b-1)n+2ab)}{(n+1)(a+b+n)(2(a+b)+n-1)},$$

and

$$\alpha_1(n) = -\frac{(2a+n-1)(2b+n-1)(a+b+n-1)}{(n+1)(a+b+n)(2(a+b)+n-1)}.$$

注记 2.2。 $F^2(a,\ b;\ a+b;\ z)$ 的麦克劳林级数前几项为

$$F^2(a,b;a+b;z) =1+\frac{2ab}{a+b}z+\frac{ab\left(a^2(2b+1)+a(b+1)(2b+1)+b^2+b\right)}{(a+b)^2(a+b+1)}z^2 + \frac{2a(a+1)b(b+1)\left(a^2(2b+1)+a(b+2)(2b+1)+b(b+2)\right)}{3(a+b)^2(a+b+1)(a+b+2)}z^3+\cdots.$$

第一类完全椭圆积分 $K(z)$ 定义为

$$K(z)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-z^2\sin^2\theta}},\quad |z|<1.$$

它与超几何函数 $F(a,\ b;\ c;\ z)$ 的关系为

$$K(z)=\frac{\pi}{2}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;z^2\right).$$

取 $a=b=\frac{1}{2}$，在推论 2.1中即可得到 $K^2(z)$ 的麦克劳林级数系数的递推关系。

推论 2.2. 设 $z\in\mathbb{C}$。则

$$K^2(z)=\frac{\pi^2}{4}F^2(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;z^2)=\frac{\pi^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^{2n},\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$、$u_1=1/2$ 以及

$$u_{n+1}=\frac{n(n(2n+3)+2)+\frac{1}{2}}{(n+1)^3}u_n-\frac{n^3}{(n+1)^3}u_{n-1},\quad n\geq 1.$$

注记 2.3。 $K^2(z)$ 的麦克劳林级数的前几项为

$$K^2(z)=\frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}z^2+\frac{11}{32}z^4+\frac{17}{64}z^6+\frac{1787}{8192}z^8+\cdots\right).$$

第二类完全椭圆积分 $E(z)$ 定义为

$$E(z)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-z^2\sin^2\theta}\,d\theta,\quad |z|<1.$$

它与超几何函数 $F(a,\ b;\ c;\ z)$ 的联系由下式给出

$$E(z)=\frac{\pi}{2}F\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;z^2\right).$$

取 $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$和 $c=1$于定理 2.1中，我们即可得到 $E^2(z)$ 的麦克劳林级数系数的递推关系。

推论 2.3。设 $z\in\mathbb{C}$。则

$$E^2(z)=\frac{\pi^2}{4}F^2(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;z^2)=\frac{\pi^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^{2n},\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$、$u_1=-1/2$ 和

$$u_{n+1}=\frac{4n^3-2n-1}{2(n+1)^3}u_n-\frac{(n-2)(n-1)n}{(n+1)^3}u_{n-1},\quad n\geq 1.$$

注记 2.4。 $E^2(z)$ 的麦克劳林级数前几项为

$$E^2(z)=\frac{\pi^2}{4}\left(1-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{32}z^4-\frac{1}{64}z^6-\frac{77}{8192}z^8-\cdots\right).$$

取 $a=-m$， $b=m$ 和 $c=\frac{1}{2}$ 代入定理 2.1，我们建立了切比雪夫多项式平方 $T_m(z)$的麦克劳林级数系数的递推关系。

推论 2.4。 设 m 为非负整数，且 $z\in\mathbb{C}$。则

$$T_m^2(1-2z)=F^2(-m,m;\tfrac{1}{2};z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$、 $u_1=-4m^2$ 和

$$u_{n+1}=\frac{-8m^2+4n^2-3n+1}{(2n+1)(n+1)}u_n-\frac{2(n-1)(-2m+n-1)(2m+n-1)}{n(n+1)(2n+1)}u_{n-1},\quad n\geq 1.$$

取 $a=-m$， $b=m+1$ 和 $c=1$ 代入定理 2.1，我们建立了勒让德多项式平方 $P_m(z)$的麦克劳林级数系数的递推关系。

推论 2.5。 设 m 为非负整数，且 $z\in\mathbb{C}$。则

$$P_m^2(1-2z)=F^2(-m,m+1;1;z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$, $u_1=-2m(m+1)$ 以及

$$u_{n+1}=\frac{(2n+1)\left(-2m(m+1)+n^2+n\right)}{(n+1)^3}u_n-\frac{(2m+1)^2n-n^3}{(n+1)^3}u_{n-1},\quad n\geq 1.$$

取 $a=-m, b=m+2\alpha$以及 $c=\alpha+\frac{1}{2}$在定理 2.1中，我们建立了盖根鲍尔多项式平方的麦克劳林级数系数的递推关系 $C_m^{(\alpha)}(z)$.

推论 2.6。 设 m 为非负整数， $\alpha>0$ 且 $z\in\mathbb{C}$。则

$$(C_m^{(\alpha)}(1-2z))^2=\left(\frac{(2\alpha)_n}{n!}\right)^2F^2(-m,\,m+2\alpha;\alpha+\tfrac{1}{2};z)=\left(\frac{(2\alpha)_n}{n!}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$, $u_1=-4m(2\alpha+m)/(2\alpha+1)$ 以及

$$\begin{aligned}u_{n+1}=&\frac{n\left(2\alpha(8\alpha-3)-8m^2-16\alpha m+1\right)-8\alpha m(2\alpha+m)+4n^3+3(6\alpha-1)n^2}{(n+1)(2\alpha+n)(2\alpha+2n+1)}u_n\\&-\frac{2(-2m+n-1)(2\alpha+n-1)(4\alpha+2m+n-1)}{(n+1)(2\alpha+n)(2\alpha+2n+1)}u_{n-1},\quad n\geq 1.\end{aligned}$$

取 $a=-m, b=m+\alpha+\beta+1$以及 $c=\alpha+1$ 在定理 2.1中，我们建立了雅可比多项式平方的麦克劳林级数系数的递推关系 $P_m^{(\alpha,\beta)}(z)$.

推论 2.7. 设 m 为非负整数， α、 $\beta>0$ 和 $z\in\mathbb{C}$。则

$$\begin{aligned}(P_m^{(\alpha,\beta)}(1-2z))^2&=\left(\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right)^2F^2(-m,m+\alpha+\beta+1;\alpha+1;z)\\&=\left(\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<1,\end{aligned}$$

其中 $u_0=1$、 $u_1=-2m(m+\alpha+\beta+1)/(\alpha+1)$ 以及

$$u_{n+1}=\frac{\left(\begin{array}{l}-2m^2(2\alpha+2n+1)-2m(\alpha+\beta+1)(2\alpha+2n+1)\\ \quad+n\left(4\alpha(\alpha+\beta+1)+\beta+2n^2+3n(2\alpha+\beta+1)+1\right)\end{array}\right)}{(n+1)(\alpha+n+1)(2\alpha+n+1)}u_n$$
$$+\frac{(2m-n+1)(\alpha+\beta+n)(2\alpha+2\beta+2m+n+1)}{(n+1)(\alpha+n+1)(2\alpha+n+1)}u_{n-1},\quad n\geq 1.$$

在定理 $a=\frac{1+\alpha}{2}$, $b=\frac{1-\alpha}{2}$ 和 $c=\frac{3}{2}$ 中取 2.1，可得以下推论。

推论 2.8. 设 $\alpha,z\in\mathbb{C}$。则

$$\sin^2(\alpha\arcsin z)=\alpha^2z^2F^2(\tfrac{1+\alpha}{2},\tfrac{1-\alpha}{2};\tfrac{3}{2};z^2)=\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^{2n+2},\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$, $u_1=(1-\alpha^2)/3$ 和

$$u_{n+1}=\frac{-2\alpha^2+4n^2+5n+2}{2n^2+7n+6}u_n-\frac{2n(n-\alpha)(\alpha+n)}{(n+1)(n+2)(2n+3)}u_{n-1},\quad n\geq 1.$$

在定理 $a=\frac{\alpha}{2}$, $b=-\frac{\alpha}{2}$ 和 $c=\frac{1}{2}$ 中取 2.1，可得以下推论。

推论 2.9. 设 $\alpha,z\in\mathbb{C}$。则

$$\cos^2(\alpha\arcsin z)=F^2(\tfrac{\alpha}{2},-\tfrac{\alpha}{2};\tfrac{1}{2};z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^{2n},\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$, $u_1=-\alpha^2$ 和

$$u_{n+1}=\frac{-2\alpha^2+4n^2-3n+1}{2n^2+3n+1}u_n-\frac{2(n-1)(-\alpha+n-1)(\alpha+n-1)}{n(n+1)(2n+1)}u_{n-1},\quad n\geq 1.$$

对于任意整数 n_1, n_2, n_3，函数 $F(a+n_1,\ b+n_2;\ c+n_3;\ z)$ 称为 $F(a,\ b;\ c;\ z)$ 的相邻函数。高斯证明，任意三个相邻超几何函数之间都存在线性关系，由此得到总共 15 个独立的线性关系，称为高斯相邻关系。根据定理2.1，我们给出 $F(a,\ b;\ c;\ z)$ 的幂级数表示，以及其一个相邻函数的幂级数表示。

推论 2.10。设 $a,b,c,z\in\mathbb{C}$ 和 $-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$。则有

$$F(a,b;c;z)F(a+1,b+1;c+1;z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$, $u_1=\frac{ab}{c}\pm\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}$，并且

$$\frac{u_n}{n+1}=\alpha_0(n)\frac{u_{n-1}}{n}+\alpha_1(n)\frac{u_{n-2}}{n-1},\quad n\geq 2,$$

其中 $\alpha_0(n)$ 和 $\alpha_1(n)$ 定义见定理2.1。

3. Recurrence relations for the Maclaurin series coefficients of the cube of the Gauss hypergeometric function

定理 3.1。设 a、 b、 c、 $z\in\mathbb{C}$ 和 $-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$。则有

$$F^3(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $v_0=1$、 $v_1=3ab/c$、 $v_2=\frac{3a^2b^2}{c^2}+\frac{3a}{2c}\frac{(a+1)_1(b+1)_1}{(c+1)_1}$以及

$$v_{n+1}=\beta_0(n)v_n+\beta_1(n)v_{n-1}+\beta_2(n)v_{n-2},\quad n\geq 1,$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta_0(n)&=\frac{\left(\begin{array}{l}3n^4+6(a+b+2c-2)n^3+(2a(5b+11c-9)+11c(2b+c)-18b-26c+15)n^2\\ \quad+\left(c^2(18a+18b-7)+c(a(30b-29)-29b+13)+4a(3-5b)+12b-6\right)n\\ \quad+3ab(c(6c-7)+2)\end{array}\right)}{(n+1)(c+n)(2c+n-1)(3c+n-2)},\\
\beta_1(n)&=-\frac{\left(\begin{array}{l}3n^4+6(2a+2b+c-3)n^3\\ \quad+\left(11a^2+42ab+22ac-54a+11b^2+22bc-54b-22c+40\right)n^2\\ \quad+3\left(10a^2b+6a^2c-11a^2+10ab^2+22abc-42ab-17ac+26a\right)n\\ \quad+3\left(6b^2c-11b^2-17bc+26b+9c-13\right)n\\ \quad+9a^2b^2+36a^2bc-45a^2b-18a^2c+22a^2+36ab^2c-45ab^2-72abc\\ \quad+87ab+29ac-36a-18b^2c+22b^2+29bc-36b-11c+14\end{array}\right)}{(n+1)(c+n)(2c+n-1)(3c+n-2)},\\
\beta_2(n)&=\frac{(3a+n-2)(3b+n-2)(2a+b+n-2)(a+2b+n-2)}{(n+1)(c+n)(2c+n-1)(3c+n-2)}.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

证明。 证明与定理2.1的证明类似，故略去。 □

取 $a=b=\frac{1}{2}$ 和 $\epsilon=1$ 代入定理 2.1，即可得到完全第一类椭圆积分三次幂的麦克劳林级数系数的递推关系$K(z)$, $z\in\mathbb{C}$。

推论 3.1. 设 $z\in\mathbb{C}$。则

$$K^3(z)=\frac{\pi^3}{8}F^3(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;z^2)=\frac{\pi^3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^{3n},\quad |z|<1,$$

其中 $v_0=1$、 $v_1=3/4$、 $v_2=39/64$ 和

$$v_{n+1}=\frac{2n(n+1)(6n(n+1)+7)+3}{4(n+1)^4}v_n-\frac{48n^4+32n^2+1}{16(n+1)^4}v_{n-1}+\frac{(1-2n)^4}{16(n+1)^4}v_{n-2},\quad n\geq 2.$$

取 $a=-\frac{1}{2}$、 $b=\frac{1}{2}$和$c=1$代入定理 2.1，即可得到第二类完全椭圆积分三次幂的麦克劳林级数系数的递推关系 $E(z)$, $z\in\mathbb{C}$。

推论 3.2。令 $z\in\mathbb{C}$。则

$$E^3(z)=\frac{\pi^3}{8}F^3(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;z^2)=\frac{\pi^3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^{3n},\quad |z|<1,$$

其中 $v_0=1$、 $v_1=-3/4$、 $v_2=3/64$ 和

$$\begin{aligned}
v_{n+1}=&\frac{2n\left(6n^3-5n-5\right)-3}{4(n+1)^4}v_n-\frac{8n(2n(3(n-4)n+13)-9)+29}{16(n+1)^4}v_{n-1}\\
&+\frac{(2n-7)(2n-5)(2n-3)(2n-1)}{16(n+1)^4}v_{n-2},\quad n\geq 2.
\end{aligned}$$

取 $a=-m$、 $b=m$ 和 $c=\frac{1}{2}$ 定理3.1，我们建立了切比雪夫多项式三次幂的麦克劳林级数系数的递推关系 $T_m(z)$。

推论 3.3。 设 m 为非负整数且 $z\in\mathbb{C}$。则

$$T_m^3(1-2z)=F^3(-m,m;\tfrac{1}{2};z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $v_0=1$、 $v_1=-6m^2$、 $v_2=2(7m^4-m^2)$ 且

$$\begin{aligned}v_{n+1}=&\frac{-20m^2+6n^2-9n+5}{2n^2+3n+1}v_n\\&+\frac{-36m^4+20m^2(n-1)(4n-5)-2(n-1)(2n(3(n-4)n+17)-17)}{n(n+1)(2n-1)(2n+1)}v_{n-1}\\&+\frac{4\left(9m^4-10m^2(n-2)^2+(n-2)^4\right)}{n(n+1)(2n-1)(2n+1)}v_{n-2},\quad n\geq 1.\end{aligned}$$

取 $a=-m$、 $b=m+1$ 和 $c=1$ 代入定理 3.1，我们得到勒让德多项式的三次幂 $P_m(z)$ $z\in\mathbb{C}$ 的麦克劳林级数系数的递推关系。

推论 3.4。 设 m 为非负整数且 $z\in\mathbb{C}$。则

$$P_m^3(1-2z)=F^3(-m,m+1;1;z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $v_0=1$、 $v_1=-3m(m+1)$、 $v_2=\frac{3}{4}(5m^4+10m^3+3m^2-2m)$ 且

$$\begin{aligned}&v_{n+1}\\=&\frac{3(n+1)(2n-1)-20m(m+1)}{(n+1)(2n+1)}v_n\\&+\frac{4\left((20m(m+1)+3)n^2-3(5m(m+1)+1)n-m(m+1)(3m+1)(3m+2)-3n^4+3n^3\right)}{n(n+1)(2n-1)(2n+1)}v_{n-1}\\&+\frac{4(m-n+1)(3m-n+2)(m+n)(3m+n+1)}{n(n+1)(2n-1)(2n+1)}v_{n-2},\quad n\geq 1.\end{aligned}$$

取 $a=-m$、 $b=m+2\alpha$ 和 $c=\alpha+\frac{1}{2}$ 代入定理 2.1，我们得到盖根鲍尔多项式的三次幂 $C_m^{(\alpha)}(z)$ $z\in\mathbb{C}$ 的麦克劳林级数系数的递推关系。

推论 3.5. 设 m 为非负整数， $\alpha>0$ 且 $z\in\mathbb{C}$。那么

$$(C_m^{(\alpha)}(1-2z))^3=\left(\frac{(2\alpha)_n}{n!}\right)^3F^3(-m,\,m+2\alpha;\alpha+\tfrac{1}{2};z)=\left(\frac{(2\alpha)_n}{n!}\right)^3\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $v_0=1$, $v_1=-5m(2\alpha+m)/(2\alpha+1)$, $v_2=\frac{3m^2}{(2\alpha+m)^2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}+\frac{6(m-1)m(2\alpha+m+1)(2\alpha+m)}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)}$ 以及

$$
\begin{aligned}
v_{n+1}=&\frac{\left(\begin{array}{l}12n^4+24(4\alpha-1)n^3+(4\alpha(55\alpha-29)-40m^2-80\alpha m+19)n^2\\ \quad+\left((4\alpha-1)(4\alpha(9\alpha-5)+5)+20(1-6\alpha)m^2+40\alpha(1-6\alpha)m\right)n\\ \quad-12\alpha(6\alpha-1)m(2\alpha+m)\end{array}\right)}{(n+1)(2\alpha+n)(2\alpha+2n+1)(6\alpha+2n-1)}v_n\\
&+\frac{\left(\begin{array}{l}-12n^4+(60-120\alpha)n^3+4(-88\alpha^2+108\alpha+20m^2+40\alpha m-29)n^2\\ \quad6(2\alpha-1)(-24\alpha^2+54\alpha+30m^2+60\alpha m-17)n\\ \quad+288\alpha^3-440\alpha^2+216\alpha-36m^4-144\alpha m^3+144\alpha^2m^2-360\alpha m^2\\ \quad+100m^2+576\alpha^3m-720\alpha^2m+200\alpha m-34\end{array}\right)}{(n+1)(2\alpha+n)(2\alpha+2n+1)(6\alpha+2n-1)}v_{n-1}\\
&+\frac{4(3m-n+2)(-2\alpha+m-n+2)(4\alpha+m+n-2)(6\alpha+3m+n-2)}{(n+1)(2\alpha+n)(2\alpha+2n+1)(6\alpha+2n-1)}v_{n-2},\quad n\geq 2.
\end{aligned}
$$

取 $a=-m$、 $b=m+\alpha+\beta+1$ 和 $c=\alpha+1$ 定理 2.1中的结果，我们为雅可比多项式 $P_m^{(\alpha,\beta)}(z)$ 的三次幂的麦克劳林级数系数建立了一个递推关系 $z\in\mathbb{C}$。**推论 3.6**。 设 m 为非负整数， α， $\beta>0$ 且 $z\in\mathbb{C}$。则

$$
\begin{aligned}
(P_m^{(\alpha,\beta)}(1-2z))^3&=\left(\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right)^3F^3(-m,m+\alpha+\beta+1;\alpha+1;z)\\
&=\left(\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right)^3\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^n,\quad |z|<1,
\end{aligned}
$$

其中 $v_0=1$, $u_1=-3m(m+\alpha+\beta+1)/(\alpha+1)$, $u_2=\frac{3m^2}{(\alpha+\beta+m+1)^2\,(\alpha+1)}+\frac{3(m-1)m(\alpha+\beta+m+2)(\alpha+\beta+m+1)}{2\;\alpha+1\quad\alpha+2}$ 以及

$$
\begin{aligned}
&v_{n+1}\\
&=\frac{\left(\begin{array}{l}3n^4+6(3\alpha+\beta+1)n^3+\\ \quad+\left(11\alpha(3\alpha+2\beta+2)+4(\beta+1)-10m^2-10m(\alpha+\beta+1)\right)n^2\\ \quad+\left(18\alpha^3+18\alpha^2(\beta+1)+7\alpha(\beta+1)+\beta\right)n\\ \quad-\left(10(3\alpha+1)m^2+10(3\alpha+1)m(\alpha+\beta+1)-1\right)n\\ \quad-3\left(6\alpha^2+5\alpha+1\right)m(\alpha+\beta+m+1)\end{array}\right)}{(n+1)(\alpha+n+1)(2\alpha+n+1)(3\alpha+n+1)}v_n\\
&+\frac{\left(\begin{array}{l}-3n^4-6(3\alpha+2\beta)n^3+\\ \quad+(-33\alpha^2+\alpha(10-44\beta)-11\beta^2+10\beta+20m^2+20m(\alpha+\beta+1)+3)n^2\\ \quad3(-6\alpha^3+\alpha(-6\beta^2+15\beta+20m^2+10(3\beta+2)m+3))n\\ \quad+3(\beta\left(5\beta+10m^2+10(\beta+1)m+1\right)+2\alpha^2(-6\beta+10m+5))n\\ \quad+(\alpha+\beta)(3\alpha(6\alpha+6\beta+1)-4\beta-1)-9m^4-18m^3(\alpha+\beta+1)\\ \quad+m^2(27\alpha^2+9\alpha(2\beta-3)-9\beta(\beta+3)-11)\\ \quad+m(\alpha+\beta+1)(9\alpha(4\alpha+4\beta-1)-9\beta-2)\end{array}\right)}{(n+1)(\alpha+n+1)(2\alpha+n+1)(3\alpha+n+1)}v_{n-1}\\
&+\frac{(-3m+n-2)(\alpha+\beta-m+n-2)(3\alpha+3\beta+3m+n-2)(2(\alpha+\beta-1)+m+n)}{(n+1)(\alpha+n+1)(2\alpha+n+1)(3\alpha+n+1)}v_{n-2},\quad n\geq 2.
\end{aligned}
$$

取 $a=\frac{1+\alpha}{2}$, $b=\frac{1-\alpha}{2}$ 和 $c=\frac{3}{2}$ 在定理 2.1中，我们有以下推论。**推论 3.7**。 设 α, $z\in\mathbb{C}$。则

$$\sin^3(\alpha\arcsin z)=\alpha^3z^3F^3(\tfrac{1+\alpha}{2},\tfrac{1-\alpha}{2};\tfrac{3}{2};z^2)=\alpha^3\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^{2n+3},\quad |z|<1,$$

其中 $v_0=0$, $v_1=(1-\alpha^2)/2$, $v_2=(13\alpha^4-50\alpha^2+37)/120$ 和

$$\begin{aligned}v_{n+1}=&\frac{-5\alpha^2+6n^2+9n+5}{2n^2+9n+10}v_n\\&+\frac{-9\alpha^4+10\alpha^2+20\alpha^2n(4n+3)-4n(4n(3n(n+1)+2)+3)-1}{4(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+5)}v_{n-1}\\&+\frac{9\alpha^4-10\alpha^2(1-2n)^2+(1-2n)^4}{4(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+5)}v_{n-2},\quad n\geq 2.\end{aligned}$$

取 $a=\frac{\alpha}{2}$, $b=-\frac{\alpha}{2}$ 和 $c=\frac{1}{2}$ 定理 2.1，可得以下推论。

推论 3.8。设 $\alpha,z\in\mathbb{C}$。则

$$\cos^3(\alpha\arcsin z)=F^3(\tfrac{\alpha}{2},-\tfrac{\alpha}{2};\tfrac{1}{2};z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^{2n},\quad |z|<1,$$

其中 $v_0=0$, $v_1=-3\alpha^2/2$, $v_2=(7\alpha^4-4\alpha^2)/8$ 和

$$\begin{aligned}v_{n+1}=&\frac{-5\alpha^2+6n^2-9n+5}{2n^2+3n+1}v_n\\&+\frac{-9\alpha^4+20\alpha^2(n-1)(4n-5)-8(n-1)(2n(3(n-4)n+17)-17)}{4n(n+1)(2n-1)(2n+1)}v_{n-1}\\&+\frac{9\alpha^4-40\alpha^2(n-2)^2+16(n-2)^4}{4n(n+1)(2n-1)(2n+1)}v_{n-2},\quad n\geq 2.\end{aligned}$$

推论 3.9。 设 $a,b,c,z\in\mathbb{C}$ 和 $-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$。则有

$$F^2(a,b;c;z)F(a+1,b+1;c+1;z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $v_0=1$, $v_1=\frac{2ab}{c}+\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}$, $v_2=\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{3a}{c}\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}+\frac{(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}{2(c+1)(c+2)}$ 和

$$\frac{v_n}{n+1}=\beta_0(n)\frac{v_{n-1}}{n}+\beta_1(n)\frac{v_{n-2}}{n-1}+\beta_2(n)\frac{v_{n-3}}{n-2},\quad n\geq 3,$$

其中 $\beta_0(n)$、 $\beta_1(n)$ 和 $\beta_2(n)$ 定义见定理 3.1。

4. Applications

4.1. 涉及高斯超几何函数的函数的单调性。

定理 4.1. 设 a、 b、 $c>0$ 和 $(c-a)(c-b)\geq 0$。则函数

$$x\mapsto\frac{F^2(a,b;c;x)}{F(2a,2b;2c;x)}\tag{4.1}$$

在$(0,1)$上递增。此外，对于所有 $x\in(0,1$，我们有 $F^2(a,b;c;x)\geq F(2a,2b;2c;x)$).

证明。 设数列 $\{u_n\}_{n\geq 0}$ 由以下初始值和递推关系确定： $u_0 = 1$、 $u_1 = 2ab/c$，以及

$$u_{n+1} = \alpha_0(n)u_n + \alpha_1(n)u_{n-1},$$

其中 $\alpha_0(n)$ 和 $\alpha_1(n$由定理 2.1给出，并设数列 $\{v_n\}_{n\geq 0}$ 定义为 b y

$$v_n = \frac{(2a)_n(2b)_n}{(2c)_n\, n!}.$$

于是有

$$\frac{F^2(a,b;c;x)}{F(2a,2b;2c;x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n}.$$

我们将证明数列 $\{u_n/v_n\}_{n\geq 0}$ 递增。由于

$$\frac{u_1}{v_1} - \frac{u_0}{v_0} = 0 \geq 0,$$

我们假设 $\{u_k/v_k\}$ 在 $k = n-1$上递增，即 $\frac{u_n}{v_n} \geq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}$。根据数学归纳法，只需证明

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \geq \frac{u_n}{v_n}.$$

由于当 $a,b,c>0$ 时， u_n 和 v_n 均为非负数，因此这等价于证明

$$\frac{\alpha_0(n)u_n + \alpha_1(n)u_{n-1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

确实，

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_0(n)u_n + \alpha_1(n)u_{n-1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} &\geq \alpha_0(n) + \alpha_1(n)\frac{v_{n-1}}{v_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \\ &= \frac{2n(a-c)(b-c)}{(n+1)(c+n)(2c+n-1)(2c+n)} \geq 0.\end{aligned}$$

根据 [1, 引理 1], ，我们得到函数（4.2）是递增的。 □

由定理4.1，可得以下推论。

推论 4.1。 令 a、 $b>0$ 和 $c>$最大值$\{a,b,0\}$。则有

$$1 < \frac{F^2(a,b;c;x)}{F(2a,2b;2c;x)} < \frac{\Gamma^2(c)\,\Gamma^2(c-a-b)\,\Gamma(2c-2a)\,\Gamma(2c-2b)}{\Gamma^2(c-a)\,\Gamma^2(c-b)\,\Gamma(2c)\,\Gamma(2c-2a-2b)}, \quad x\in(0,1).$$

证明。 由定理4.1，我们知道函数（4.2）在（0，1）上递增，且

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F^2(a,b;c;x)}{F(2a,2b;2c;x)} = 1,$$

and

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{F^2(a,b;c;x)}{F(2a,2b;2c;x)} = \frac{\Gamma^2(c)\,\Gamma^2(c-a-b)\,\Gamma(2c-2a)\,\Gamma(2c-2b)}{\Gamma^2(c-a)\,\Gamma^2(c-b)\,\Gamma(2c)\,\Gamma(2c-2a-2b)}, \quad x\in(0,1).$$

□

在定理 $c=a+b$ 中取4.1，可得以下推论。

推论 4.2。 设 a、 $b>0$ 和 $a+b>\frac{1}{2}$。则函数

$$x \mapsto \frac{F^2(a,b;a+b;x)}{F(2a,2b;2(a+b);x)} \tag{4.2}$$

在(0,1) 上递增，并映射到$(1,\infty)$。

由 $a=b=\frac{1}{2}$ 推论4.2，可得以下推论。

推论 4.3。由此可得

$$x\mapsto\frac{xK^2(x)}{\log(1-x)}$$

从 $(0,\ 1)$ 递减至 $(-\infty,-\frac{\pi^2}{4})$。 —

4.2. **克劳森公式的新证明**。克劳森公式 [3]表示为

$$F^2(a,b;a+b+\tfrac{1}{2})={}_3F_2(2a,2b,a+b;a+b+\tfrac{1}{2},2a+2b;x),$$

下面将给出其新的证明。

证明。设

$$w_n=\frac{(2a)_n(2b)_n(a+b)_n}{n!\left(a+b+\frac{1}{2}\right)_n(2a+2b)_n}.$$

Then

$${}_3F_2(2a,2b,a+b;a+b+\tfrac{1}{2},2a+2b;x)=\sum_{n=0}^{\infty}w_nx^n.$$

注意到 $w_0=1=u_0$ 和 $w_1=2ab/(a+b+\frac{1}{2})=u_1$。为证明 $w_n=u_n$，只需证明 w_n 也满足递推关系

$$w_{n+1}=\alpha_0(n)w_n+\alpha_1(n)w_{n-1}. \tag{4.3}$$

事实上，注意到

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{2(2a+n)(2b+n)(a+b+n)}{(n+1)(2(a+b)+n)(2a+2b+2n+1)},$$

我们有

$$\begin{aligned}
&w_{n+1}-\alpha_0(n)w_n-\alpha_1(n)w_{n-1}\\
=&\frac{4(2a+n-1)(2a+n)(2b+n-1)(2b+n)(a+b+n-1)(a+b+n)}{n(n+1)(2a+2b+n-1)(2(a+b)+n)(2a+2b+2n-1)(2a+2b+2n+1)}w_{n-1}\\
&-\alpha_0(n)\frac{2(2a+n-1)(2b+n-1)(a+b+n-1)}{n(2a+2b+n-1)(2a+2b+2n-1)}w_{n-1}-\alpha_1(n)w_{n-1}\\
=&0.
\end{aligned}$$

□

以下恒等式称为拉马努金–普里斯公式。该公式最初由
by 拉马努金在未给出证明的情况下陈述，后来由普里斯严格证明

$$M(a,c;x)\,M(a,c;-x)={}_2F_3\left(a,\ c-a;\ c,\ \tfrac{c}{2},\ \tfrac{c+1}{2};\ \tfrac{x^2}{4}\right).$$

证明。按照与定理3.1类似的论证，我们得到

$$M(a,c;x)\,M(a,c;-x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n,$$

其中系数 u_n 满足 $u_0=1$、 $u_1=0$ 以及

$$u_{n+1}=-\frac{(2a+n-1)(2a-2c-n+1)}{(n+1)(c+n-1)(c+n)(2c+n-1)}\,u_{n-1},$$

这意味着

$$u_{2n}=-\frac{(a+n-1)(a-c-n+1)}{n(c+n-1)(c+2n-2)(c+2n-1)}\,u_{2n-2}.$$

另一方面，注意到

$$ {}_2F_3\Big(a,\, c-a;\, c,\, \tfrac{c}{2},\, \tfrac{c+1}{2};\, \tfrac{x^2}{4}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{2n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(c-a)_n}{(c)_n\left(\frac{c}{2}\right)_n\left(\frac{c+1}{2}\right)_n}\frac{1}{4^n n!}x^{2n}, $$

其中， w_n 定义为

$$ w_{2n} = \frac{(a)_n(c-a)_n}{(c)_n\left(\frac{c}{2}\right)_n\left(\frac{c+1}{2}\right)_n}\frac{1}{4^n n!} $$

满足 $w_0 = 1$ 和

$$ w_{2n} = \frac{(a+n-1)(-a+c+n-1)}{n(c+n-1)(c+2n-2)(c+2n-1)}\, w_{2n-2}. $$

因此， $u_n = w_n$，这正是所需的结论。 □

References

[1] M. Biernacki 和 J. Krzy˙z. 关于解析函数理论中某些泛函的单调性。*Ann. Univ. Mariae Curie-Sk-lodowska Sect. A*, 9:135–147, 1955年。[2] Y.-J. Chen 和 T.-H. Zhao. 关于广义第一类椭圆积分的单调性与凸性。*Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 116(2):1–21, Paper No. 77, 2022年。[3] T. Clausen. 关于级数为¨形的情形，其中该级数 $y = \cdots$ 等等是 $z = \cdots$ 等等形式的平方。*J. Reine Angew. Math.*, 1828(3):89–91, 1828年。[4] Z.-X. Mao 和 J.-F. Tian. 两个任意高斯超几何函数之比的单调性。*Math. Slovaca*, 75(4):821–836, 2025年。[5] S.-Y. Tan、T.-R. Huang 和 Y.-M. Chu. 高斯超几何函数与广义第一类椭圆积分的函数不等式。*Math. Slovaca*, 71(3):667–682, 2021。[6] M.-K. Wang、T.-H. Zhao、X.-J. Ren、Y.-M. Chu 和 Z.-Y. He. 高斯超几何函数的单调性与凹性及其应用。*Indian J. Pure Appl. Math.*, 54(4):1105–1124, 2023年。[7] J. Wu 和 T. Zhao. 关于高斯超几何函数对数的绝对单调性。*Bull. Iranian Math. Soc.*, 50(3):Paper No. 42, 28, 2024年。[8] Z.-H. Yang. 涉及超几何函数的麦克劳林级数系数的递推关系及其应用。*Proc. Amer. Math. Soc.*, 153(8):3513–3527, 2025年。[9] Z.-H. Yang、W.-M. Qian、Y.-M. Chu 和 W. Zhang. 关于算术-几何平均数与完全第一类椭圆积分的逼近。*J. Math. Anal. Appl.*, 462(2):1714–1726, 2018年。[10] T. Zhao. 与高斯超几何函数相关的函数具有绝对单调性的充要条件。2025年。20页。[11] T.-H. Zhao、M.-K. Wang、G.-J. Hai 和 Y.-M. Chu. 高斯超几何函数的兰登不等式。*Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 116(1):1–23, Paper No. 53, 2022年。

Zhong-Xuan Mao, Hebei Key Laboratory of Physics and Energy Technology, Department of Math-ematics and Physics, North China Electric Power University, Yonghua Street 619, 071003, Baoding,P. R. China *E*

*mail add*ress: mao*z*hongxuan000@gmail.com

Jing-Feng Tian, Hebei Key Laboratory of Physics and Energy Technology, Department of Math-ematics and Physics, North China Electric Power University, Yonghua Street 619, 071003, Baoding,P. R. China*Email address*: tianjf@ncepu.edu.cn