arXiv:2601.09155v1 [math.FA] 14 Jan 2026

无限二面体群与灯笼群的谱动力学

CHAO ZU、YIXIN YANG 和 YUFENG LU

摘要。设 A $=(A_0, A1, \cdots, A_n)$ 是巴拿赫代数 B 中的一个元素元组，其射影（联合）谱 p(A) 是满足 A(z) $= z_0A_0 + z_1A_1 + \cdots + z_nA_n$ 不可逆的 z $\in \mathbb{P}^n$ 的集合。若 B 是由 A_0, A_1,...、A_n 生成的离散群 G 的群 C^* 代数，且带有表示 ρ，则 p(A) 是 ρ 的（弱）等价不变量。在 [8], , B. Goldberg 和 R. Yang 证明，无限二面体群 D_∞ 所诱导的有理映射 F 的 Julia 集 $\mathcal{J}$(F)，是射影谱与扩展不定点集的并集。但扩展不定点集 E_F 结构复杂。为更好地建立射影谱与 Julia 集之间的关系，我们将 $A_\pi(z) = z_0 + z_1\pi(a) + z_2\pi(t)$ 替换为扩展铅笔 $A_\pi(z) = z_0 + z_1\pi(a) + z_2\pi(t) + z_3\pi(at)$，其中 π 是 Koopman 表示，并采用算子递归方法，证明 $p(A_\pi) = \mathcal{J}(F)$。此外，我们研究灯笼群 $\mathcal{L}$ 的谱动力学，并证明 $\mathcal{J}(Q) = E_\varrho$，其中 Q 是与 $\mathcal{L}$ 相关联的有理映射。

1. 引言

设 $\mathcal{B}$ 为一个复幺巴拿赫代数，且 $A = (A_0, A_1, \cdots, A_n)$ 是 $\mathcal{B}$ 中一组线性无关元素。多参数铅笔 $A(z) := z_0A_0 + z_1A_1 + \cdots + z_nA_n$ 是众多领域的重要研究课题。R. Yang 于 [22] 引入了射影（联合）谱的概念，定义如下。

定义 1.1. 对于幺巴拿赫代数 $\mathcal{B}$ 中的元素组 $(A_0, A_1, \cdots, A_n)$，其射影（联合）谱定义为

$$P(A) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid A(z) \textit{ is not invertible}\}.$$

射影预解集是指其补集，$P^c(A) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus P(A)$。

射影谱揭示了 $A_0, A1, \cdots$、A_n 的联合行为及其相互作用；一系列论文此前已研究过射影谱的性质，例如 [1, 3–5, 7, 17] 及其中的参考文献。一个有趣的情形是，元组 A 与群 G 相关联，而群 G 有有限生成集 S $= \{g_1, g2, \cdots, g_s\}$，并在复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上有一个酉表示 π。此时，射影谱不仅包含有关 G 的信息，也包含有关该表示的一些更微妙的信息。例如，对于多参数铅笔 $A_\pi(z) = z_0I + z_1\pi(g_1) + \cdots + z_s\pi(g_s)$，文献 [15] 证明，若两个表示 π 和 ρ 弱等价，则 $P(A_\pi) = P(A_\rho)$。群上的谱理论另一项重要研究对象是具有中间增长的群 $\mathcal{G}$，Grigorchuk 及其合作者对此进行了研究（参见 [10–13]）。研究发现，$\mathcal{G}$ 在

2010年数学主题分类。主分类 43A65 47A13；次分类 37F10。关键词和短语：射影谱、无限二面体群、灯笼群、不定性集、Fatou 集、Julia 集。本研究得到国家自然科学基金委员会（编号：12031002，11971086）的资助。本研究还部分得到大连市高层次人才创新项目（资助号 2020RD09）和大连理工大学科研创新团队（DUT2021TB07）的资助。

有根二叉树上有一个自相似表示，这种自相似性在 $\mathcal{G}$ 的某个谱集上诱导出一个有理映射，其动力学性质与 $\mathcal{G}$ 的谱性质紧密相关；这称为谱动力学（参见 [8]）。本文旨在从射影谱的角度研究谱动力学，并将重点关注无限二面体群 D_∞ 和灯笼群 $\mathcal{L}$。

令 $\mathbb{P}^n$ 为维数为n的复射影空间， ϕ 为从 $\mathbb{C}^{n+1}$ 到 $\mathbb{P}^n$的典范投影。令$p(A) = \phi(P(A))$，且$p^c(A) = \phi(P^c(A))$，即，

$$p(A) = \{z \in \mathbb{P}^n \mid A(z) \textit{ is not invertible}\}.$$

对于 $D_\infty =< a, t \mid a^2 = t^2 = 1 >$，B. Goldberg 和 R. Yang 考虑了铅笔 $A_\pi(z) = z_0 I + z_1\pi(a) + z_2\pi(t)$，其中 [8]， π 是 D_∞的 Koopman 表示。利用 π 的自相似性及舒尔补论证，他们定义了一个从 P^2 到 P^2, 的多项式映射 F，该映射保持射影谱 $p(A_\pi)$。通过研究 F 的动力学性质，他们证明 $p(A_\pi) \bigcup E_F = \mathcal{J}(F)$，其中

$$p(A_\pi) = \bigcup_{x\in[-1,1]} \{z \in \mathbb{P}^2 : z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - 2xz_1z_2 = 0\}.$$

然而，与$p(A_\pi)$的简洁表达式相比，扩展不定点集E_F 则较为复杂。本文考虑扩展铅笔$A_\pi(z) = z_0 I + z_1\pi(a) + z_2\pi(t) + z_3\pi(at)$。利用自相似表示 π所诱导的算子递归，我们得到一个多项式映射$F : P^3 \to P^3$, ，并证明射影谱$p(A_\pi)$与 Julia 集 $\mathcal{J}(F)$重合。

定理 A。对于铅笔 $A_\pi(z) = z_0 + z_1\pi(a) + z_2\pi(t) + z_3\pi(at)$,

$$F(z) = [\ z_0^2 - z_1^2 \ :\ z_0z_2 - z_1z_3 \ :\ z_0z_2 - z_1z_3 \ :\ z_2^2 - z_3^2\ ],$$

and

$$\mathcal{J}(F) = \bigcup_{x\in[-1,1]} \{z \in \mathbb{P}^3 : z_0^2 + z_3^2 - z_1^2 - z_2^2 + 2x(z_0z_3 - z_1z_2) = 0\} = p(A_\pi).$$

灯笼群 $\mathcal{L}$ 是群

$$(\bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z} (= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}).$$

它由两个元素 u,v 生成，其中 u 是半直积中 $\mathbb{Z}$ 的生成元，并且

$$v = (\cdots, 0, 0, 1, 0, 0, \cdots) \in \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

其中 1 位于第零位。在 [16], R. Grigorchuk 和 A. Zuk 证明，灯笼群可以实现为二状态自动机群 $G :=< a, b >$，其中 $a = (a, b)\sigma, b = (a, b)$，而 σ 是二阶对称群的生成元，通过同构

$$a \to u$$
$$c = b^{-1}a \to v.$$

对于与某个群及其生成集相对应的马尔可夫算子M ，其谱测度 μM 可分解为绝对连续分量、奇异连续分量和离散分量，即 $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_d$。若谱点$x$ 仅属于离散分量的支集，则称其为纯点；也就是说，存在x 的一个邻域N_x ，使得 $\mu_d(N_x) > 0$， $\mu_{ac}(N_x) = \mu_{sc}(N_x) = 0$。对于灯笼群及其生成集 $\{a,b\}$， R. Grigorchuk 和 A. Zuk [16] 证明，与之对应的马尔可夫算子M 的谱全是纯点。这是首个具有马尔可夫算子纯点谱的群及生成集实例。在 [14], 通过仔细

研究卷积算子单参数族$a+a^{-1}+b+b^{-1}-\mu c$在 $\mathcal{L}$ 上的谱性质（其中 μ 为实参数），R. Grigorchuk 和 B. Simanek 表明，灯笼群 $\mathcal{L}$ 存在一组生成元，使得凯莱图上离散拉普拉斯算子的谱是一个区间与一个可数孤立点集的并集，这些孤立点聚集于该区间之外的某一点。这是首个谱中存在无穷多个谱隙的凯莱图群实例。这些有趣的例子促使我们研究灯笼群 $\mathcal{L}$的谱动力学。

定理 B。对于灯笼群 $\mathcal{L}$ 以及铅笔 $D_\pi(z)=z_0+z_1\pi(c)+z_2(\pi(a)+\pi(b))+z_3(\pi(a^{-1})+\pi(b^{-1}))$，相应的算子递归在 $\mathbb{P}^3$ 上诱导出一个有理映射

$$Q(z)=[\ z_0+z_1-\frac{2z_2z_3}{z_0-z_1}\ :\ \frac{2z_2z_3}{z_0-z_1}\ :\ z_2\ :\ z_3\ ].$$

对于有理映射 Q，Julia 集 $\mathcal{J}(Q)$ 与扩展不定点集 E 重合，

$$\mathcal{J}(Q)=E=\{\ (z_0-z_1)z_1=2z_2z_3\ \}\bigcup\left(\bigcup_{x\in[0,1]}\{\ (z_0+z_1)^2-16xz_2z_3=0\ \}\right)\bigcup\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\Gamma_n\right),$$

其中 Γ_n 是曲线 $\{\ (z_0-z_1)U_n(\tau(z))=\sqrt{4z_2z_3U_{n-1}(\tau(z))}\ \}$，其中 $\tau(z)=z_0+z_2\sqrt{4\frac{1}{z_2z_3}}$ 且 U_n是第二类切比雪夫多项式的 n 次多项式。此外，Julia 集 $\mathcal{J}(Q)$ 严格包含于射影谱 $p(D_\pi)$ 中，

$$\phi(L)\cup\mathcal{J}(Q)\subseteq p(D_\pi),$$

whe其中 L 是超平面 $\{z_0+z_1+2z_2+2z_3=0\}$，而 ϕ 是典范射影 on.

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一些基本定义和必要概念。第 3 节研究无限二面体群 D_∞ 的谱动力学，并给出定理 A 的证明。第 4 节研究灯笼群 $\mathcal{L}$ 的谱动力学，并给出定理 B 的证明。

2. Preliminaries

2.1. 关于左正则表示的 D_∞ 射影谱。文献 [15] 证明，D_∞ 的左正则表示 λ 等价于 D_∞ 在 $L^2(\mathbb{T},d_{2\pi}^{\theta})\bigoplus L^2(\mathbb{T},d_{2\pi}^{\theta})$ 上的如下表示 ρ：

$$\rho(a)=\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix},\ \rho(t)=\begin{pmatrix}0&T\\T^*&0\end{pmatrix},\tag{2.1}$$

其中，I 是 $L^2(\mathbb{T},d_{2\pi}^{\theta})$ 上的恒等算子，而 $T\colon L^2(\mathbb{T},d_{2\pi}^{\theta})\to L^2(\mathbb{T},d_{2\pi}^{\theta})$ 是双边移位，即由 $Tf(e^{i\theta})=e^{i\theta}f(e^{i\theta})$ 定义的酉算子。

Let

$$T=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE(e^{i\theta})\tag{2.2}$$

是T的谱分解，并且$A_\rho(z)=z_0+z_1\rho(a)+z_2\rho(t)+z_3\rho(at)$，则将 (2.1) 和 (2.2) 合并可得

$$A_\rho(z)=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}z_0+z_3e^{i\theta}&z_1+z_2e^{i\theta}\\z_1+z_2e^{-i\theta}&z_0+z_3e^{-i\theta}\end{pmatrix}dE(e^{i\theta}).$$

因此，铅笔 $A_\rho(z)$ 不可逆，当且仅当至少存在一个 $\theta\in[0,2\pi$，使得 $(\ z_0+z_3e^{i\theta}\ z_1+z_2e^{i\theta}\ z_1+z_2e^{-i\theta}\ z_0+z_3e^{-i\theta}\ )$ 不可逆。因此我们有

引理 2.1. 设 $\lambda\colon D_\infty \to U(l^2(D_\infty))$ 为左正则表示。则

$$P(A_\lambda) = P(A_\rho) = \bigcup_{x\in[-1,1]} \{z \in \mathbb{C}^4 : z_0^2 + z_3^2 - z_1^2 - z_2^2 + 2x(z_0z_3 - z_1z_2) = 0\}.$$

2.2. 正则根树与自相似群。设X 为一个有限集，通常称为字母表，其大小为k。所有由 X 中字母组成的有限字的集合记为X^*。集合X^* 可以自然地赋予k-正则根树的结构，具体如下。该树的顶点是X^*中的字，根为空字，第n 层X^n 是X上长度为n 的字的集合；对于每个顶点$u \in X^*$ ，其子节点是形如ux的k 个顶点，其中$x \in X$。我们用X^* 表示X上的有限字的集合、上述根树的顶点集合以及该树本身。

由$Aut(X^*)$组成的X^* 的所有自同构构成的群保持树的根及其所有层不变。每个自同构$g \in Aut(X^*)$都会诱导X的一个置换 α_g，该置换定义为 $\alpha_g(x) = g(x)$，称为g的根置换。它表示g 对每个字首字母的作用。对于每个自同构$g \in Aut(X^*)$以及每个顶点$u \in X^*$，都存在唯一的X^* 的树自同构，记为g_u ，使得对于所有字$w \in X^*$，

$$g(uw) = g(u)g_u(w).$$

自同构g_u 称为u处的g 的截面：它表示g 对以u开头的词尾的作用。每个自同构g 都由其根置换 α_g 以及第一层上的k 个截面g_x 唯一确定，其中$x \in X$。事实上，对于每个$x \in X$ 和$w \in X^*$ ，我们有

$$g(xw) = \alpha_g(x)g_x(w).$$

当$X = \{0, 1, \cdots, k-1\}$时，自同构$g \in Aut(X^*)$的一种简洁表示称为缠绕递归，它描述了其根置换及第一层截面，形式如下：

$$g = \alpha_g(g_0, g_1, \cdots, g_{k-1}).$$

除了简洁明了之外，它还有许多其他优点，其中尤为重要的一点是，它突显了$Aut(X^*)$同半直积$Sym(X) \ltimes (Aut(X^*))^X$同构；也就是说，它同置换缠绕积$Sym(X) \wr_X Aut(X^*)$同构，其中$Sym(X)$是$X$的所有置换构成的群。

树自同构集 $S \subset Aut(X^*)$ 若在取截面运算下封闭，则称其为自相似集；也就是说，S 中每个元素的每个截面都属于集合 S。因此，对于任意词 u，每个自同构 $s \in S$ 在以 u 开头的词尾上的作用，恰好如同 S 中某个元素的作用。注意，若集合 S 包含其所有元素的第一层截面，则足以使其成为自相似集。这是因为，对于所有词 u、$v \in X^*$，$g_{uv} = (g_u)_v$ 。

树自同构群$G \leq Aut(X^*)$ 若作为集合是自相似的，则称其为自相似群。由自相似集生成的每个群本身也是自相似的。这是因为 ¡°乘积的截面是截面的乘积¡± ，而 ¡°逆元的截面是截面的逆元¡±。具体而言，对于任意树自同构 g 和 h ，以及任意词 $u \in X^*$，

$$(gh)_u = g_{h(u)}h_u \ , \ (g^{-1})_u = (g_{g^{-1}(u)})^{-1}.$$

2.3. 自相似表示与弱等价。对于可数群G 和酉表示 $\rho\colon G \to U(\mathcal{H})$，其中 $U(\mathcal{H})$ 表示希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上酉算子构成的群。若存在自然数 d 和酉映射 $W\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^d$ ，使得对于每个$g \in G$，$d \times d$ 分块矩阵$X(g) := W\rho(g)W^*$ 的所有元素x_{ij} 要么等于

0，要么属于 $\rho(G)$。由于$X(g)$本身及其每个非零元素x_{ij} 都是酉算子，$X(g)$的每一行或每一列恰有一个非零元素。

当自相似群G 作用于d正则根树上时，总会产生自相似表示。关于自相似群理论的介绍可参见综述 [10–12] 以及 Nekrashevych 的著作 [19]。固定$d \geq 2$ 为一个整数，并令$T = T_d$为d正则根树，其顶点与字母表中有限字（字符串）一一对应，该字母表的基数为d（对于A，一种标准选择是 $\{0, \cdots, d-1\}$，见下方图 1）。树的边界 ∂T 由从根顶点出发并延伸至无穷远的测地路径组成

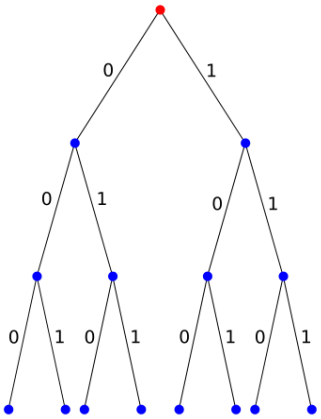

图 1. 二正则根树

其具有自然拓扑，并与康托尔集同胚。 ∂T 上的均匀测度 μ 定义为 $\mu(\partial T_{i_1 \cdots i_p}) = {}^{1}\mathrm{d}^{p}$，其中 $i_k \in \{0, \cdots, d-1\}$ 对每个 k 都成立。换言之,一测度 μ 在每一层的子树上均匀分布。自相似群自然地作用于 d 正则根树上，并且该作用保持树的自相似结构。具体而言，对于每个元素 $g \in G$ 以及顶点 $v \in V(T)$，g_v 在以 v 为根的子树 T_v 上的限制可与 G 中的一个元素等同（通过 T_v 与 T 的标准等同）。定义希尔伯特空间 $\mathcal{H} = L^2(\partial T, \mu)$。令 $\mu_i = d \cdot \mu$，$i = 0, 1, \cdots, d-1$ 为 μ 在子树 $\partial T0, \partial T1, \cdots, \partial T_{d-1}$ 的边界上的归一化限制，并定义 $\mathcal{H}_i = L^2(\partial T_i, \mu_i), i = 0, 1, \cdots, d-1$。于是，每个$\mathcal{H}_i$都可与 $\mathcal{H}$等同，因此 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \bigoplus \mathcal{H}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathcal{H}_{d-1}$ 可通过酉算子 W 与 $\mathcal{H}^d$ 等同。

如果局部紧群 G 在测度空间 (X, μ) 上有保测作用，则 Koopman 表示 $\pi: G \to U(L^2(X, \mu))$ 定义为

$$\pi(g)f(x) = f(g^{-1}x), \ \forall x \in X, \ \forall g \in G.$$

特别地，若 $X = G$ 且 μ 为哈尔测度，则 Koopman 表示恰好是G的左正则表示。

显然，对于自相似群G，其在 ∂T 上的自然作用保持 ∂T上的均匀测度 μ 不变，因此其 Koopman 表示 $\pi: G \to U(L^2(\partial T, \mu))$ 是一个自相似表示。本文主要研究两个群的 Koopman 表示：无限二面体群D_∞ 和灯笼群 $\mathcal{L}$，二者都是作用于二正则根树上的自相似群。

定义 2.2。设离散群G 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 上分别具有两个酉表示 π 和 ρ。称 π 弱包含于 ρ（记作

by $\pi \prec \rho$），如果对于每个$x \in \mathcal{H}$、每个有限子集$F \subset G$以及每个 $\epsilon > 0$，都存在y_1, y_2、$\cdots$、y_n in $\mathcal{K}$，使得对于所有$g \in F$,

$$|\langle \pi(g)x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \rho(g)y_i, y_i\rangle| < \epsilon.$$

弱包含在可数群的表示论中发挥着重要作用。在 [15], 中，证明了对于离散群 G 和群代数 $\mathbb{C}$[G], 中的铅笔 $A(z) = \sum^{k} i_{=0} z_i g_i$，若 $\pi \prec \rho$，则 $P(A_\pi) \subset P(A_\rho)$。若两个酉表示$\pi$ 和 ρ 满足 $\pi \prec \rho$ 和 $\rho \prec \pi$，则称它们弱等价，并记作$\pi \sim \rho$。因此，射影谱在表示的弱等价下是不变的。特别地，对于无限二面体群 D_∞，设 λ 和 π 分别为 D_∞的左正则表示和 Koopman 表示，R. Yang 和 R. Grigorchuk 证明了它们弱等价（见 [15], 定理 7.2）。因此，对于 D_∞，有 $P(A_\lambda) = P(A_\pi)$；结合引理 2.1，可得定理 A 的一个部分结果:

$$P(A_\pi) = P(A_\lambda) = P(A_\rho) = \bigcup_{x\in[-1,1]} \{z \in \mathbb{C}^4 : z_0^2 + z_3^2 - z_1^2 - z_2^2 + 2x(z_0z_3 - z_1z_2) = 0\}.$$

2.4. 算子递归与谱。由字母表含 d 个字母的自动机定义的群 G，自然地通过自同构作用于 d 正则根树上（见 [12]）。对于二正则根树 T，设 $\xi_n = \{E_w; w \in \{0,1\}^n\}$是边界$\partial$ T 的一个划分，由 2^n 原子构成，其中 E_w 是一个开闭子集，包含所有以字符串 w 开头的路径。设 $\mathcal{H} = L^2(\partial T, \mu)$，且 $\mathcal{H}_n$ 是由划分 ξ_n 中各原子的示性函数张成的子空间。则 $\dim \mathcal{H}_n = 2^n$，且 $\mathcal{H}_n$ 在 Koopman 表示 π下是不变的，因为树的任意自同构都会置换划分 ξ_n中的原子。通过将 $\mathcal{H}_n \simeq \mathcal{H}_{n-1} \bigoplus \mathcal{H}_{n-1}$ 分解为$\xi^0 n_{-1} = \{E_{0w}; w \in \{0,1\}^{n-1}\}$ 和$\xi^1 n_{-1} = \{E_{1w}; w \in \{0,1\}^{n-1}\}$，可得到一个自然同构。

令 $\pi_n = \pi|_{\mathcal{H}_n}$，那么对于群代数中的一个元素 $m \in \mathbb{C}[G]$，显然有

$$\sigma(\pi(m)) \supset \overline{\bigcup \sigma(\pi_n(m))}.$$

自然会问，在什么条件下方程 $\sigma(\pi(m)) = \bigcup_{n\geq 0} \sigma(\pi_n(m))$ 成立？若上述方程~~成立，我们~~便可将射影谱的计算归约到有限维情形。当 $\pi(m)$ 是自伴算子时，上述方程总是成立。正因如此，许多实铅笔得到了广泛研究（参见 [6, 11, 16]）。

作为算子递归的一个具体例子，设 $G = D_\infty =< a,t >$。在固定同构 $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ 后，算子 $\pi(a)$、$\pi(t)$（仍分别记作 a 和 t）满足如下算子递归:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \ t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

这对应于缀加型关系：$a = \sigma, t = (a, t)$。

设 a_n, t_n 是表示 π_n 的生成元所对应的矩阵，$n = 0, 1, \cdots$，也就是说，$\pi_n(a)$、$\pi_n(t)$。那么 $a_0 = b_0 =$ Id</style}，并且

$$a_n = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \ t_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & 0 \\ 0 & t_{n-1} \end{pmatrix}, \ n \geq 1,$$

其中我们要牢记自然同构 $\mathcal{H}_n \simeq \mathcal{H}_{n-1} \bigoplus \mathcal{H}_{n-1}$。这一递推关系将在第 3 节中发挥主要作用。

作为算子递归的另一个具体示例，假设 $G = \mathcal{L} \cong < a,b >$，在固定同构 $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ 后，算子 $\pi(a)$、$\pi(b)$（仍记作a 和b）满足以下算子递归:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

这对应于级加型关系：$a = (a, b)\sigma, b = (a, b)$。

设a_n, b_n 为表示 π_n的生成元对应的矩阵，$n = 0, 1, \cdots$，即 $\pi_n(a), \pi_n(b)$。那么$a_0 = b_0 = Id$，并且

$$a_n = \begin{pmatrix} 0 & a_{n-1} \\ b_{n-1} & 0 \end{pmatrix},\ b_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & 0 \\ 0 & b_{n-1} \end{pmatrix},\ n \geq 1,$$

这里我们要记住自然同构 $\mathcal{H}_n \simeq \mathcal{H}_{n-1} \bigoplus \mathcal{H}_{n-1}$。这一递归关系将在第 4 节中发挥主要作用。

ˆ 2.5. 复动力系统基础知识。设 $\mathbb{C} = \mathbb{C} \bigcup \infty$ 为黎曼球面，ˆ ˆ 对于函数H： $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, 令$H^n$ 表示H的第n次迭代。本文中，这一记号不会与幂函数混淆。复动力系统研究有关序列 $\{H^n\}^{\infty}{}_{n=1}$ 收敛的各种问题。我们将介绍与本文研究相关的一些定义，读者可在 [2, 18, 21]中找到更多相关信息。

ˆ ˆ 定义 2.3. 设非常值有理函数 $H: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其 Fatou 集 $\mathcal{F}(H)$ 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 上使序列 $\{H^n\}^{\infty}{}_{n=1}$ 等度连续的最大开子集，而 Julia 集 $\mathcal{J}(H)$ 是其补集 $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(H)$。

对于 切比雪夫多项式 $T(z) = 2z^2 - 1$，以下定理是已知的（参见 [2] ）.

引理 2.4. 对于 ˆC 上的映射 $T(z) = 2z^2 - 1$，其 Julia 集 $\mathcal{J}(T) = [-1, 1]$，且迭代序列 ˆ $\{T^n\}$ 在 Fatou 集 $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ 上正规收敛到 ∞。此外，迭代序列 $\{T^n\}$ 的零点在 $[-1, 1]$ 中稠密。

此外，我们还考虑复射影空间中的动力学。设 $H: \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ 是由 H(z) = [A(z) : B(z) : C(z) : D(z)], 定义的多项式映射，其中 A、B、C 和 D 是 $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ 中次数相同的齐次多项式，次数为 d ≥ 2。若这类公共零点只有有限个，则称映射 H 为有理映射。若点 z $\in \mathbb{P}^3$ 满足 A(z) = B(z) =C(z) = D(z) = 0，则称其为不定点。H 的所有不定点构成的集合称为 H 的不定集，记作 I(H)；若无歧义，也简记为 I。H 的 n-不定集 I_n 定义为 I(H^n)。下文中，我们总是使用 H 到 $\mathbb{C}^4$ 的典范提升来计算 I_n；在这种情况下，$I_n = \phi(H^{-n}(O))$，其中 H 被视为其到 $\mathbb{C}^4$ 的典范提升。H 的扩展不定点集定义为

$$E_H = \overline{\bigcup_{n \geq 1} I_n} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \phi(H^{-n}(O))}.$$

为方便起见，在不会与映射 H 混淆时，我们将其记作 E 。

定义 2.5. 设H： $\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ 是一个有理映射，且 $\mathbb{P}^3 \setminus E$ 非空。若对每个$p \in \mathbb{P}^3 \setminus E$，存在某个邻域$U$，使得对所有$n$，diam$H^n(U \setminus E) < \epsilon$，则称点$p$ 为法图点；这里 diam 表示关于 $\mathbb{P}^3$ 上的富比尼－施图迪度量的直径。Fatou 集 $\mathcal{F}(H)$是H的法图点集。Julia 集 $\mathcal{J}(H)$是H的补集 $\mathbb{P}^3 \setminus \mathcal{F}$。

文献 [21] 证明了，点p 属于 $\mathcal{F}(H)$，当且仅当存在V的一个邻域，使得序列 $\{H^n\}$ 在V上构成正规族。由正规族论证可知，Fatou 集是开集，而 Julia 集是闭集。扩展不定点集E 显然包含于 Julia 集中。最后，映射H 保持 Julia 集和 Fatou 集不变。

3. 无限二面体群D_∞的谱动力学

本节将使用下面的引理。

引理 3.1（ [16], 引理 7）。设A、B、C 和D 是系数属于复数集的n 阶n 阶矩阵，满足$AC = CA$。则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

证明。不妨设A 是可逆的，则根据舒尔补的论证，有

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det(A)\det(D - CA^{-1}B) \\ &= \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB).\end{aligned}$$

□

无限二面体群D_∞ 在二正则根树T 上的 Koopman 表示由图 2 中的下述自动机实现，其中a 和t 是T 的自同构，满足递归关系$a = \sigma$、$t =$（a、t）。

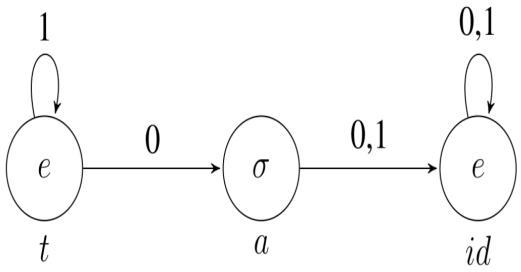

图 2. 群D_∞的自动机

F为方便起见，我们将 $\pi_n(a), \pi_n(b)$ 简记为 a_n, b_n，于是 $a_0 = t_0 = Id$，并且

$$a_n = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix},\ t_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & 0 \\ 0 & t_{n-1} \end{pmatrix},\ a_n t_n = \begin{pmatrix} 0 & t_{n-1} \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

那么，对于 $A_{\pi_n}(z) = z_0 + z_1 a_n + z_2 t_n + z_3 a_n t_n$，有

$$\begin{aligned}\det(A_{\pi_{n+1}}(z)) &= \det\begin{pmatrix} z_0 + z_2 a_n & z_1 + z_3 t_n \\ z_1 + z_3 a_n & z_0 + z_2 t_n \end{pmatrix} \\ &= \det\left((z_0 + z_2 a_n)(z_0 + z_2 t_n) - (z_1 + z_3 a_n)(z_1 + z_3 t_n)\right) \\ &= \det\left((z_0^2 - z_1^2) + (z_0 z_2 - z_1 z_3)a_n + (z_0 z_2 - z_1 z_3)t_n + (z_1^2 - z_3^2)a_n t_n\right) \\ &= \det\left(A_{\pi_n}(F(z))\right),\end{aligned}$$

其中，$F:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ 是由下式定义的齐次多项式映射

$$F(z_0,z_1,z_2,z_3)=(\ z_0^2-z_1^2\ ,\ z_0z_2-z_1z_3\ ,\ z_0z_2-z_1z_3\ ,\ z_2^2-z_3^2\ ). \tag{3.1}$$

因此，$\det(A_{\pi_{n+1}}(z))=\det(A_{\pi_0}(F^{n+1}(z)))$，从而 $\det(A_{\pi_{n+1}}(z))=0$ 当且仅当 $F^{n+1}(z)\in L$，其中L 是超平面 $\{z\in\mathbb{C}^4:z_0+z_1+z_2+z_3=0\}$。因此我们有$P(A_\pi)\supset\bigcup_{n\geq0}F^{-n}(L)$。

下面的引理给出了F的扩展不定点集。

引理 3.2. 对于$F(z)=[\ z_0^2-z_1^2:z_0z_2-z_1z_3:z_0z_2-z_1z_3:z_2^2-z_3^2\ ]$, 不定集

$$I_1=\{[1:1:\zeta:\zeta],[1:-1:\zeta:-\zeta]\mid\zeta\in\hat{\mathbb{C}}\},$$

$$I_3=I_2=I_1\cup\{[1:\zeta:1:\zeta],[1:\zeta,-1:-\zeta]\mid\zeta\in\hat{\mathbb{C}}\},$$

因此，扩展不定点集

$$E=I_2=\{[1:1:\zeta:\zeta],[1:-1:\zeta:-\zeta],[1:\zeta:1:\zeta],[1:\zeta,-1:-\zeta]\mid\zeta\in\hat{\mathbb{C}}\}.$$

证明。对于 $z\in I_1$,，根据定义，$z_0^2-z_1^2=z_0z_2-z_1z_3=z_2^2-z_3^2=0$，因此 $z_0=z_1,z_2=z_3$ 或 $z_0=-z_1,z_2=-z_3$。这是 $[1:1:\zeta:\zeta]$ 或 $[1:-1:\zeta:-\zeta]$。

由于 $I_2=\{z\in P^3\mid F(z)\in I_1\}$，我们必须考虑 I_1 中每个点关于 F 的原像。若 $F(z)=[1:1:\zeta:\zeta]$，则 $\zeta=1$，因此 $z_0^2-z_1^2=z_0z_2-z_1z_3=z_2^2-z_3^2$,，并且有 $z_0^2-z_1^2+z_2^2-z_3^2=2(z_0z_2-z_1z_3)$，这意味着 $(z_0-z_2)^2=(z_1-z_3)^2$,。若 $z_0=z_2$,，则 $z_1=z_3$,，这意味着 $z=[1:\zeta:1:\zeta]$；若 $z_0\neq z_2$,，则 $z_0-z_2=\pm(z_1-z_3)$，0，结合 $z_0^2-z_1^2=z_2^2-z_3^2$,，可得 $z_0+z_2=\pm(z_1+z_3)$，这意味着 $z_0=\pm z_1,z_2=\pm z_3$,，即 $z\in I_1$。若 $F(z)=[1:-1:\zeta:-\zeta]$，则 $\zeta=-1$，因此 $z_0^2-z_1^2=-(z_0z_2-z_1z_3)=z_2^2-z_3^2$,。类似的讨论表明，$z\in I_1$ 或 $z=[1:\zeta:-1:-\zeta]$。

对于 I_3,，我们只需考虑以下情形：$F(z)=[1:\zeta:1:\zeta]$，或 $F(z)=[1:\zeta:-1:-\zeta]$；但这意味着 $\zeta=1$ 或 $\zeta=-1$，因此 $z\in I_2$。所以我们有 $I_3=I_2$, 以及 $E=I_2$。□

引理 3.3. 设 $z'=(z_0',z_1',z_2',z_3')=F(z)$，则

$$z_0'^2-z_1'^2=(z_0^2-z_1^2)(z_0^2-z_1^2+z_3^2-z_2^2)-(z_1z_2-z_0z_3)^2 \tag{3.2}$$

$$z_3'^2-z_2'^2=(z_3^2-z_2^2)(z_0^2-z_1^2+z_3^2-z_2^2)-(z_1z_2-z_0z_3)^2 \tag{3.3}$$

$$z_0'^2-z_1'^2+z_3'^2-z_2'^2=(z_0^2-z_1^2+z_3^2-z_2^2)^2-2(z_1z_2-z_0z_3)^2 \tag{3.4}$$

$$z_0'z_2'-z_1'z_3'=(z_0z_2-z_1z_3)(z_0^2-z_1^2+z_3^2-z_2^2) \tag{3.5}$$

$$z'_1z'_2-z_0'z_3'=(z_1z_2-z_0z_3)^2. \tag{3.6}$$

证明。这可通过直接计算并利用代数恒等式得到 :

$$(z_0^2-z_1^2)(z_2^2-z_3^2)=(z_0z_2-z_1z_3)^2-(z_1z_2-z_0z_3)^2.$$

□

注记。值得注意的是，我们可以将 E 写成

$$\{\ [z_0:z_1:z_2:z_3]\mid z_0z_3-z_1z_2=z_0^2+z_3^2-z_1^2-z_2^2=0\ \}.$$

回顾一下，ϕ 表示从 $\mathbb{C}^{n+1}$ 到 $\mathbb{P}^n$的典范投影，并令S 为集合$\{z\in\mathbb{C}^4:z_0z_3-z_1z_2=z_0^2+z_3^2-z_1^2-z_2^2=0\}$，那么我们断言$E=\phi(S)$。事实上，根据引理 3.2，容易验证$E\subset\phi(S)$；对于逆命题，根据引理 3.3，我们有$F^2(S)=O$，因此 $\phi(S)\subset E$。

接下来我们将考察F的动力学性质。核心思路是半共轭方法。更确切地说，如果我们能找到一个半共轭函数 $\varphi:\ \mathbb{P}^n \to \hat{\mathbb{C}}$ 和一个多项式函数$f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$，使得

$$\varphi(F(z_0,z_1,\cdots,z_n)) = f(\varphi(z_0,z_1,\cdots,z_n)),$$

那么我们将得到

$$\varphi(F^n(z_0,z_1,\cdots,z_n)) = f^n(\varphi(z_0,z_1,\cdots,z_n)).$$

因此　研究单变量函数f的动力学性质就足够了。

对于$z\notin S$，设$x = \frac{z_0^2+z_3^2-z_1^2}{2zzz(z_1z_2-z_0z_3)}$，$x' = \frac{z_0'^2+z_3'^2-z_1'^2}{2zzz(zzz_0'z_3')}$（根据上述注记，$x$、$x'$均有定义），那么结合引理 3.3 的公式（3.4）和（3.6），可得

$$x' = 2x^2 - 1.$$

设$T(z) = 2z^2-1$为切比雪夫多项式，$\tau(z) = \frac{z_0^2+z_3^2-z_1^2}{2zzz(z_1z_2-z_0z_3)}$对于$z\notin S$，那么有

$$\tau(F(z)) = T(\tau(z)),\ z\notin S. \tag{3.7}$$

注意到 τ 是零次齐次的，且 $\phi(S) = E$，因此可将其视为从 $\mathbb{P}^3\setminus E$ 到$\hat{\mathbb{C}}$的映射。由此得到以下命题：

命题 3.4. 对于 $k\geq 1$，以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3\setminus E & \xrightarrow{F^k} & \mathbb{P}^3\setminus E \\ \downarrow\tau & & \downarrow\tau \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{T^k} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

其中，$\tau:\ \mathbb{P}^3\setminus E\to\hat{\mathbb{C}}$ 由 $\tau(z) = \frac{z_0^2+z_3^2-z_1^2}{2zzz(z_1z_2-z_0z_3)}$定义，$F:\ \mathbb{P}^3\setminus E\to\mathbb{P}^3\setminus E$ 定义为

$$F(z_0,z_1,z_2,z_3) = [\ z_0^2-z_1^2\ :\ z_0z_2-z_1z_3\ :\ z_0z_2-z_1z_3\ :\ z_2^2-z_3^2\ ], \tag{3.8}$$

且扩展不定点集 $E = \{z\in\mathbb{P}^3:\ z_0z_3-z_1z_2 = z_0^2+z_3^2-z_1^2-z_2^2 = 0\}$。

下面的命题给出了F^n的显式形式。

命题 3.5. 令$F_i^n(z)$表示$F^n(z)$的第i个分量，则对于$z\notin\{z_1z_2-z_0z_3=0\}$，有

$$F_0^{n+2}(z) = (z_1z_2-z_0z_3)^{2^{n+1}}\cdot\left(2^{n+1}\prod_{k=0}^{n}T^k(\tau(z))\right)\left(\frac{z_0^2-z_1^2}{z_1z_2-z_0z_3}-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k\prod_{j=0}^{k-1}T^j(\tau(z))}\right), \tag{3.9}$$

$$F_1^{n+2}(z) = F_2^{n+2}(z) = (z_1z_2-z_0z_3)^{2^{n+1}}\cdot\left(2^{n+1}\prod_{k=0}^{n}T^k(\tau(z))\right)\cdot\frac{z_0z_2-z_1z_3}{z_1z_2-z_0z_3}, \tag{3.10}$$

$$F_3^{n+2}(z) = (z_1z_2-z_0z_3)^{2^{n+1}}\cdot\left(2^{n+1}\prod_{k=0}^{n}T^k(\tau(z))\right)\left(\frac{z_2^2-z_3^2}{z_1z_2-z_0z_3}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k\prod_{j=0}^{k-1}T^j(\tau(z))}\right). \tag{3.11}$$

对于 $z\in\{z_1z_2-z_0z_3=0\}$，有

$$\begin{aligned} F_0^{n+2}(z) &= (z_0^2-z_1^2)(z_0^2-z_1^2+z_3^2-z_2^2)^{2^{n+1}-1}, \\ F_1^{n+2}(z) &= F_2^{n+2}(z) = (z_0z_2-z_1z_3)(z_0^2-z_1^2+z_3^2-z_2^2)^{2^{n+1}-1}, \\ F_3^{n+2}(z) &= (z_2^2-z_3^2)(z_0^2-z_1^2+z_3^2-z_2^2)^{2^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

证明。为方便起见，将 $F^n(z) = (F_0^n(z), F_1^n(z), F_2^n(z), F_3^n(z))$ 记为 $z^{(n)} = (z_0^{(n)}, z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)})$。我们对 n 使用归纳法证明该命题。首先，容易看出，当 $n = 0$ 时，该命题正是引理 3.3。对于 $z \in \{z \in 复数集^4 \mid z_1z_2 - z_0z_3 = 0\}$ 的情形，根据引理 3.3，对于所有 $n \geq 0$，我们有 $z_1^{(n)} z_2^{(n)} - z_0^{(n)} z_3^{(n)} = 0$，进而通过简单的递归计算即可得出结论。

对于 $z \notin \{z \in 复数集^4 \mid z_1z_2 - z_0z_3 = 0\}$ 的情形，由公式（3.6），我们有

$$z_1^{(n)} z_2^{(n)} - z_0^{(n)} z_3^{(n)} = (z_1z_2 - z_0z_3)^{2^n} \ for\ all\ n \geq 0.$$

假设该命题对 $k = n$ 成立，即公式（3.9）、（3.10）、（3.11）对$k = n$ 成立，那么对于 $k = n + 1$，由公式（3.2）和（3.7），我们有

$$\begin{aligned}
z_0^{(n+1+2)} &= (z_0^{(n+2)})^2 - (z_1^{(n+2)})^2 \\
&= \left((z_0^{(n+1)})^2 - (z_1^{(n+1)})^2\right)\left((z_0^{(n+1)})^2 - (z_1^{(n+1)})^2 + (z_3^{(n+1)})^2 - (z_2^{(n+1)})^2\right) - \left(z_1^{(n+1)} z_2^{(n+1)} - z_0^{(n+1)} z_3^{(n+1)}\right)^2 \\
&= z_0^{(n+2)}\left(z_1^{(n+1)} z_2^{(n+1)} - z_0^{(n+1)} z_3^{(n+1)}\right) \cdot 2\tau(z^{(n+1)}) - \left(z_1^{(n+1)} z_2^{(n+1)} - z_0^{(n+1)} z_3^{(n+1)}\right)^2 \\
&= (z_1z_2 - z_0z_3)^{2^{n+1}} \cdot \left(z_0^{(n+2)} \cdot 2\tau(z^{(n+1)}) - (z_1z_2 - z_0z_3)^{2^{n+1}}\right) \\
&= (z_1z_2 - z_0z_3)^{2^{n+1}} \cdot \left(z_0^{(n+2)} \cdot 2T^{n+1}(\tau(z)) - (z_1z_2 - z_0z_3)^{2^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

由归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{z_0^{(n+1+2)}}{(z_1z_2 - z_0z_3)^{2^{n+2}}} &= \frac{z_0^{(n+2)}}{(z_1z_2 - z_0z_3)^{2^{n+1}}} \cdot 2T^{n+1}(\tau(z)) - 1 \\
&= \left(2^{n+1}\prod_{k=0}^{n} T^k(\tau(z))\right)\left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{z_1z_2 - z_0z_3} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k\prod_{j=0}^{k-1} T^j(\tau(z))}\right) \cdot 2T^{n+1}(\tau(z)) - 1 \\
&= \left(2^{n+2}\prod_{k=0}^{n+1} T^k(\tau(z))\right)\left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{z_1z_2 - z_0z_3} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k\prod_{j=0}^{k-1} T^j(\tau(z))}\right) - 1 \\
&= \left(2^{n+2}\prod_{k=0}^{n+1} T^k(\tau(z))\right)\left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{z_1z_2 - z_0z_3} - \sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{2^k\prod_{j=0}^{k-1} T^j(\tau(z))}\right).
\end{aligned}$$

也就是说，（3.9）对 $k = n + 1$ 成立。用类似的方法，考察 $z^{(n+1+2)}{}_i$、$i = 1$、2、3，可证明（3.10）、（3.11）对 $k = n + 1$ 也成立。因此，证明完毕。□

命题 3.5 表明，点 $z \in F^{-(n+2)}(L)$ 当且仅当

$$z_1z_2 - z_0z_3 \neq 0 \ and\ (z_0^2 - z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 2(z_0z_2 - z_1z_3))\prod_{k=0}^{n} T^k(\tau(z)) = 0$$

or

$$z_1z_2 - z_0z_3 = 0 \ and\ z_0^2 - z_1^2 + z_3^2 - z_2^2 = 0.$$

注意，$z_0^2 - z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 2(z_0z_2 - z_1z_3) = (z_0 + z_2 + z_1 + z_3)(z_0 + z_2 - z_1 - z_3)$ 并且

$$z_0^2 - z_1^2 + z_3^2 - z_2^2 - 2(z_1z_2 - z_0z_3) = (z_0 + z_3 + z_1 + z_2)(z_0 + z_3 - z_1 - z_2),$$

$$z_0^2 - z_1^2 + z_3^2 - z_2^2 + 2(z_1z_2 - z_0z_3) = (z_0 - z_3 + z_1 - z_2)(z_0 - z_3 - z_1 + z_2),$$

因此，曲线 $z_0^2 - z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 2(z_0z_2 - z_1z_3) = 0$ 包含于 $\cup_{x\in[-1,1]}\{z \in \mathbb{C}^4 : z_0^2 + z_3^2 - z_1^2 - z_2^2 + 2x(z_0z_3 - z_1z_2) = 0\}$。由于 $\cup_{n=1}^{\infty} Z(T^n)$ 在 $[-1, 1]$ 中稠密，其中 $Z(T^n)$ 表示 T^n 的零点集，我们有

$$\overline{\bigcup_{n\geq 0} F^{-n}(L)} = \bigcup_{x\in[-1,1]}\{z \in \mathbb{C}^4 : z_0^2 + z_3^2 - z_1^2 - z_2^2 + 2x(z_0z_3 - z_1z_2) = 0\} = P(A_\pi).$$

现在我们已经可以描述F 在复射影空间上的动力学性质。

定理 3.6. 对于D_∞ 以及式（3.8）中定义的关联映射F ，有 $\mathcal{J}(F) = p(A_\pi)$。

证明。容易看出，$z \in p^c(A_\pi)$当且仅当 $\tau(z) \notin [-1,1]$。假设 $\tau(z) \notin [-1,1]$，则由引理 2.4，$T^n(\tau(z)) \notin [-1,1]$ 对所有$n \geq 1$均成立。由命题 3.5，可写为

$$F^{n+2}(z) = [\frac{z_0^2 - z_1^2}{z_1 z_2 - z_0 z_3} - f_n(z) : \frac{z_0 z_2 - z_1 z_3}{(z_1 z_2 - z_0 z_3)} : \frac{z_0 z_2 - z_1 z_3}{(z_1 z_2 - z_0 z_3)} : \frac{z_2^2 - z_3^2}{z_1 z_2 - z_0 z_3} + f_n], \tag{3.12}$$

其中

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k \prod_{j=0}^{k-1} T^j(\tau(z))} \ , \ n \geq 0 \ , \ z \in p^c(A_\pi). \tag{3.13}$$

ˆ 由于迭代序列 $\{T^n\}$在 Fatou 集上的正常收敛于 ∞，我们得到f_n 在$p^c(A_\pi)$上正常收敛于某个f ，因此F^n 在$p^c(A_\pi)$上正常收敛，即$p(A_\pi) \supset \mathcal{J}(F)$。事实上，若记 $\tau(z) = \cos w$，其中$w \notin \mathbb{R}$，由于$T^k(\cos w) = \cos(2^k w)$，则极限函数具有如下表达式：

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin w}{\sin(2^k w)}. \tag{3.14}$$

此外，在 [8], 中已证明$f(z) = \tau(z) - i\sqrt{1-\tau(z)^2}, \tau(\overline{z}) \notin [-1,1]$。

反过来，假设 $\tau(z) = \cos w$，其中某个实数 w 满足 $w\pi$ 是非二进分数, –即 $w\pi$ 不是 $q2^p$ 的形式，则有 —

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k \prod_{j=0}^{k-1} T^j(\tau(z))} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin w}{\sin(2^k w)} \\ &= \sin w \left(\sum_{k=1}^{n+1} \cot(2^{k-1} w) - \cot(2^k w) \right) \\ &= \cos w - \sin w \cot(2^{n+1} w). \end{aligned}$$

由于 $\{ 2^k w \bmod \pi \mid k = 0, 1, \cdots \}$ 在 $[0,\pi]$ 中稠密，并且所有满足 $w\pi$ 为非二进分数的实数之并在 $\mathbb{R}$ 中也稠密，因此不存在子序列 $\{\cos w - \sin w \cot(2^{n+1}w)\}$ 能在 $w \in \mathbb{R}$ 的某个邻域上收敛。这意味着不存在子序列 $\{f_n\}$ 能在 $z \in \tau^{-1}([-1,1]) \setminus E$ 的某个邻域上收敛，因为 $\tau(z)$ 在 $\mathbb{P}^3 \setminus E$ 上连续。因此可得 $\{z \in \mathbb{P}^3 \setminus E : \tau(z) \in [-1,1]\}$ 包含于 $\mathcal{J}(F)$。结合扩展不定点集 E，可得 $p(A_\pi) \subset \mathcal{J}(F)$。□

4. 灯笼群的谱动力学 $\mathcal{L}$

4.1. 第二类切比雪夫多项式的一些性质。设 $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为由下式定义的第n个第二类切比雪夫多项式序列

$$U_{n+1}(z) = 2zU_n(z) - U_{n-1}(z), \ U_1(z) = 2z, \ U_0(z) = 1. \tag{4.1}$$

它具有以下众所周知的性质：

$$U_n(\cos z) = \frac{\sin(n+1)z}{\sin z}, \ U_n(1) = n+1, \ U_n(-1) = (-1)^n(n+1), \tag{4.2}$$

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2z)^{n-2k}, \tag{4.3}$$

且 $\{U_n(x)\}$ 是与测度 $\sqrt{1-x^2}dx$相关的 $[-1,1]$ 上的正交多项式，也就是说

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \delta_{mn}. \tag{4.4}$$

根据正交多项式理论（更多详情请参见 [20]），我们知道，U_n在区间 $[-1,1]$内恰有n 个简单零点，并且U_n与U_{n+1} 的零点严格交错。

下面的引理对我们将有所帮助。

引理 4.1. 对于$z \notin [-1,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n(z)}{U_{n+1}(z)} = z - \sqrt{z^2-1}. \tag{4.5}$$

此外，若将$z = \cos w$，其中$Im(w) > 0$，那么我们可以用一种简洁优雅的方式写出上述极限性质:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n(\cos w)}{U_{n+1}(\cos w)} = e^{iw}. \tag{4.6}$$

证明。令$w = x + iy$，$y > 0$，则通过直接计算可得:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{U_n(\cos w)}{U_{n+1}(\cos w)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nw}{\sin(n+1)w} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{in(x+iy)} - e^{-in(x+iy)}}{e^{i(n+1)(x+iy)} - e^{-i(n+1)(x+iy)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-ny}e^{inx} - e^{ny}e^{-inx}}{e^{-(n+1)y}e^{i(n+1)x} - e^{(n+1)y}e^{-i(n+1)x}} \\
&= e^{iw}.
\end{aligned}$$

□

4.2. 灯笼群的行列式递推 $\mathcal{L}$。对于灯笼群$\mathcal{L}$，我们有以下算子递归:

$$c = a^{-1}b = b^{-1}a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b^{-1} \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix},\ b^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}.$$

因此，对于铅笔 $D\pi_n(z) = z_0 + z_1c_n + z_2(a_n + b_n) + z_3(a_n^{-1} + b_n^{-1})$，我们有

$$\begin{aligned}
\det(D_{\pi_{n+1}}(z)) &= \det\begin{pmatrix} z_0 + z_2a_n + z_3a_n^{-1} & z_1 + z_2a_n + z_3b_n^{-1} \\ z_1 + z_2b_n + z_3a_n^{-1} & z_0 + z_2b_n + z_3b_n^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} z_0 - z_1 + z_3(a_n^{-1} - b_n^{-1}) & z_1 + z_2a_n + z_3b_n^{-1} \\ z_1 - z_0 + z_3(a_n^{-1} - b_n^{-1}) & z_0 + z_2b_n + z_3b_n^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 2(z_0 - z_1) & z_1 - z_0 + z_2(a_n - b_n) \\ z_1 - z_0 + z_3(a_n^{-1} - b_n^{-1}) & z_0 + z_2b_n + z_3b_n^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \det\Big(2(z_0 - z_1)(z_0 + z_2b_n + z_3b_n^{-1}) - (z_1 - z_0 + z_3(a_n^{-1} - b_n^{-1}))(z_1 - z_0 + z_2(a_n - b_n))\Big) \\
&= \det\Big((z_0^2 - z_1^2 - 2z_2z_3) + 2z_2z_3c_n + z_2(z_0 - z_1)(a_n + b_n) + z_3(z_0 - z_1)(a_n^{-1} + b_n^{-1})\Big) \\
&= \det\left(D_{\pi_n}(F(z))\right) = \cdots = \det\Big(D_{\pi_0}(F^{n+1}(z))\Big),
\end{aligned}$$

其中，$F : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ 是由下式定义的齐次多项式映射

$$F(z_0, z_1, z_2, z_3) = (\ z_0^2 - z_1^2 - 2z_2z_3\ ,\ 2z_2z_3\ ,\ z_2(z_0 - z_1)\ ,\ z_3(z_0 - z_1)\ ).$$

因此，$\det(D_{\pi_{n+1}}(z)) = 0$ 当且仅当$F^{n+1}(z) \in L$，其中L 是超平面 $\{z \in \mathbb{C}^4 : z_0 + z_1 + 2z_2 + 2z_3 = 0\}$。这意味着$P(D_\pi) \supset \bigcup_{n\geq 0} F^{-n}(L)$。

引理 4.2。

$$\overline{\bigcup_{n\geq 0} F^{-n}(L)} = \overline{\bigcup_{n\geq 0} F^{-n}(\{z_0 - z_1 = 0\})} \bigcup L = L \bigcup \phi^{-1}(E),$$

其中E 是F 的不定集，ϕ 是从 $\mathbb{C}^4$ 到 $\mathbb{P}^3$的典范投影。

证明。首先，容易看出，$F(z) \in L$ 当且仅当$z_0 - z_1 = 0$ 或$z \in L$，即$F^{-1}(L) = L \cup \{z \in \mathbb{C}^4 | z_0 - z_1 = 0\}$。令$X = \{z \in \mathbb{C}^4 | z_0 - z_1 = 0\}$，则

$$F^{-n}(L) = F^{-(n-1)}(L \cup X) = F^{-(n-1)}(X) \cup F^{-(n-1)}(L) = \cdots = \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} F^{-i}(X)\right) \bigcup L.$$

接下来，注意到 $F^2(X) = O$，我们有 $F^{-n}(X) \subset \phi^{-1}(I_{n+2})$，因此

$$\overline{\bigcup_{n\geq 0} F^{-n}(L)} = \overline{\bigcup_{n\geq 0} F^{-n}(X)} \bigcup L \subset \overline{\bigcup_{n\geq 0} \phi^{-1}(I_{n+2})} \bigcup L = L \bigcup \phi^{-1}(E).$$

对于逆命题，回忆一下

$$\phi^{-1}(E) = \overline{\bigcup_{n\geq 0} F^{-n}(O)}.$$

□

事实上，我们已经证明了

$$\phi^{-1}(E) = \overline{\bigcup_{n\geq 0} F^{-n}(X)}.$$

为了进一步计算不定集，令 Q 为与 F相关联的有理映射，即

$$Q(z) = [\ z_0 + z_1 - \frac{2z_2z_3}{z_0 - z_1}\ :\ \frac{2z_2z_3}{z_0 - z_1}\ :\ z_2\ :\ z_3\ ],$$

为简便起见，记 $z^{(n)} = (z_0^{(n)}, z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)}) = Q^n$(z</style)。

由于对所有n都有$z_2^{(n)} = z_2, z_3^{(n)} = z_3, z_0^{(n)} + z_1^{(n)} = z_0 + z_1$，因此

$$z_0^{(n+1)} - z_1^{(n+1)} = z_0 + z_1 - \frac{4z_2z_3}{z_0^{(n)} - z_1^{(n)}}. \tag{4.7}$$

若设

$$z_0^{(n)} - z_1^{(n)} = \frac{G_n(z)}{H_n(z)},\ n \geq 0 \tag{4.8}$$

由 $G_0(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_0 - z_1, H_0(z_0,z_1,z_2,z_3) = 1$，根据（4.7），我们得到以下递归关系：

$$\begin{pmatrix} G_{n+1} \\ H_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 + z_1 & -4z_2z_3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_n \\ H_n \end{pmatrix},\ n \geq 0. \tag{4.9}$$

由于 $H_n = G_{n-1}$，$n \geq 1$，数列 G_n 满足三项递推关系

$$G_{n+1}(z) = (z_0 + z_1)G_n(z) - 4z_2z_3G_{n-1}(z). \tag{4.10}$$

以下引理的灵感来源于参考文献 [14] 以及正交多项式与上述三项递推方程之间的密切联系。

引理 4.3。对于 $z \notin \{z_2z_3 = z_0 + z_1 = 0\}$，有

$$G_k(z) = (z_0 - z_1)(\sqrt{4z_2z_3})^k U_k(\frac{z_0 + z_1}{2\sqrt{4z_2z_3}}) - (\sqrt{4z_2z_3})^{k+1} U_{k-1}(\frac{z_0 + z_1}{2\sqrt{4z_2z_3}}) \tag{4.11}$$

对于所有 $k \geq 0$，其中我们假设 $U_{-1} = 0$。

证明。容易验证，当 $k = 0$ 时，该结论成立；由归纳法以及 G_n 和 U_n 的递归关系，我们得到

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(z) &= (z_0 + z_1)G_n(z) - 4z_2z_3G_{n-1}(z) \\
&= (z_0 + z_1)\left((z_0 - z_1)(\sqrt{4z_2z_3})^n U_n(\frac{z_0 + z_1}{2\sqrt{4z_2z_3}}) - (\sqrt{4z_2z_3})^{n+1} U_{n-1}(\frac{z_0 + z_1}{2\sqrt{4z_2z_3}})\right) \\
&- 4z_2z_3\left((z_0 - z_1)(\sqrt{4z_2z_3})^{n-1} U_{n-1}(\frac{z_0 + z_1}{2\sqrt{4z_2z_3}}) - (\sqrt{4z_2z_3})^n U_{n-2}(\frac{z_0 + z_1}{2\sqrt{4z_2z_3}})\right) \\
&= (z_0 - z_1)(\sqrt{4z_2z_3})^{n+1} U_{n+1}(\frac{z_0 + z_1}{2\sqrt{4z_2z_3}}) - (\sqrt{4z_2z_3})^{n+2} U_n(\frac{z_0 + z_1}{2\sqrt{4z_2z_3}}),
\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

值得注意的是，函数 $(\sqrt{4z_2z_3})^n U_n(\frac{z_0+z_2}{2\sqrt{4z_2z_3}})$ 与根函数主值分支的选取无关。事实上，由 (4.3) 可得

$$\begin{aligned}
(\sqrt{4z_2z_3})^n U_n(\frac{z_0 + z_1}{2\sqrt{4z_2z_3}}) &= (\sqrt{4z_2z_3})^n \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (\frac{z_0 + z_1}{\sqrt{4z_2z_3}})^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (z_0 + z_1)^{n-2k} (4z_2z_3)^k.
\end{aligned}$$

Let

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} x^{n-2k} y^k = (\sqrt{y})^n U_n(\frac{x}{2\sqrt{y}}), \tag{4.12}$$

于是我们可以将 G_n 写成

$$G_n(z) = (z_0 - z_1)P_n(z_0 + z_1, 4z_2z_3) - 4z_2z_3P_{n-1}(z_0 + z_1, 4z_2z_3). \tag{4.13}$$

下面的引理对 P_n 给出了更精确的描述。

引理 4.4。

$$P_n(\alpha+\beta,\alpha\beta)=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, \tag{4.14}$$

此外，它还蕴含一个恒等式：

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{k}{n-k}(x+y)^{n-2k}(xy)^k=\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}.$$

证明。令 $A=\begin{pmatrix} z_0+z_1 & -4z_2z_3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则由 (4.9) 可得

$$\begin{pmatrix} G_n \\ H_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} G_0 \\ H_0 \end{pmatrix}.$$

设 α,β 为矩阵 A 的两个特征值，则 $\alpha+\beta=z_0+z_1,\alpha\beta=4z_2z_3$。对于 2×2 矩阵 A 的第 n 次幂，有一个众所周知的简洁形式（参见 [18]）：

$$A^n=\alpha^n\left(\frac{A-\beta I}{\alpha-\beta}\right)+\beta^n\left(\frac{A-\alpha I}{\beta-\alpha}\right).$$

因此，我们有

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\beta}{\alpha-\beta} \\ \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta} \end{pmatrix}.$$

这表明

$$G_n(z)=(z_0-z_1)\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}-4z_2z_3\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}. \tag{4.15}$$

结合 (4.13) 以及 $P_n(\alpha+\beta,\alpha\beta)$ 是关于 n 的齐次多项式这一事实，可得 (4.14)。□

回到我们对 $\phi^{-1}(E)$ 的研究，回想一下，$z^{(n)}=Q^n(z)$。通过归纳法，不难验证

$$F^n(z)=\prod_{i=0}^{n-1}(z_0^{(i)}-z_1^{(i)})^{2^{n-i}}\cdot Q^n(z).$$

结合（4.8）以及$H_n=G_{n-1}$这一事实，我们有$F^n(z)\in X$ 当且仅当

$$0=\prod_{i=0}^{n}(z_0^{(i)}-z_1^{(i)})^{2^{n-i}}=\prod_{i=0}^{n}(\frac{G_i}{G_{i-1}})^{2^{n-i}}=\prod_{i=0}^{n-1}G_i^{2^{n-1-i}}.$$

因此我们有

$$\phi^{-1}(E)=\overline{\bigcup_{n\geq 0}\{z\in\mathbb{C}^4\mid G_n(z)=0\}}.$$

令 Γ_n 为由G_n定义的代数簇，即

$$\Gamma_n:=\{z\in\mathbb{C}^4\mid (z_0-z_1)U_n(\tau(z))=\sqrt{4z_2z_3}U_{n-1}(\tau(z))\}, \tag{4.16}$$

其中 $\tau(z)=\frac{z_0+z_2}{\sqrt{4z_2z_3}}$，并令 Γ 表示 $\bigcup\Gamma_n$ 的闭包。对于代数簇 Γ_n，有一个自然的问题：

问题 4.5. 对于任意n，Γ_n 是否不可约?

接下来，我们希望对集合 Γ 给出明确的刻画。自然地，可以考虑两种情况： $\tau(z) \notin [-1,1]$ 和 $\tau(z) \in [-1,1]$（即 $\bigcup_{x\in[0,1]}\{(z_0+z_1)^2-16xz_2z_3=0\}$）。

情形 1： $\tau(z) \notin [-1,1]$。

在此情形下，由引理 4.1，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n(\tau(z))}{U_{n+1}(\tau(z))}=\tau(z)-\sqrt{\tau(z)^2-1},$$

这意味着 Γ_n 收敛到临界簇

$$\frac{z_0-z_1}{\sqrt{4z_2z_3}}=\tau(z)-\sqrt{\tau(z)^2-1},$$

也就是说，

$$(z_0-z_1)z_1=2z_2z_3.$$

情形 2： $\tau(z) \in [-1,1]$。

在此情形下，我们将证明 $\{\tau(z)\in[-1,1]\}\subset\Gamma$。只需证明，对于几乎所有的 $x \in$ 实数集，集合 $\{\tau(z)=\cos x\}$ 包含于 Γ。特别地，我们取 x 为 π 的任意无理数倍。固定 $z_2, z_3,$，即 $z_2=a$，$z_3=b$，其中 a、~~b~~为某些常数，则 $z \in \{\tau(z)=\cos x\}$ 当且仅当 $z_0+z_1=2\sqrt{4z_2z_3}\cos x$（它是一条复直线）。对于 $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，定义

$$\Gamma_{n,y}:=\Gamma_n\bigcap\{z_2=a,z_3=b,\tau(z)=\cos(x+iy)\}.$$

事实上，它是满足$z_0+z_1=2\sqrt{4ab}\cos(x+iy$的一个点，并且

$$\frac{2(z_0-z_1)}{z_0+z_1}=\frac{\sin nw}{\cos w\sin(n+1)w}=1-\tan w\cot(n+1)w,$$

其中$w=x+iy$。

引理 4.6。对于任意 $\epsilon>0$，定义集合

$$B_\epsilon:=\bigcup_{n\geq 0,0<|y|<\epsilon}\Gamma_{n,y},$$

那么复直线 $\{z_0+z_1=2\sqrt{4z_2z_3}\cos x\}$ 包含在B_ϵ的闭包中，因此$\{\tau(z)\in[-1,1]\}\subset\Gamma$。

证明。由于 x 是 π 的任意无理数倍，因此数列 $\{nx \bmod \pi\}$ 在 $[0,\pi]$ 中稠密。由于 y 与 n 无关，因此集合 $\{\cot(nx+iny), n\geq 0, 0<|y|<\epsilon\}$ 在复数集 C 中稠密。这意味着我们可以选取点列 $\{(z_0^{n_y},,z^n,_1{}^y,a,b)\in\Gamma_{n,y}\}$，使得 $z_0^{n_y}+,z^n,_1{}^y$ 收敛到 $z_0+z_1,$，且 $z_0^{n_y}-,z^n,_1{}^y z_0^{n_y}+,z^n,_1{}^y$ 收敛到 $z_0-z_1\,z_0+z_1,$；也就是说，复直线上的任意点都可以由 B_ϵ 的~~点~~列逼近，因此证明完成。□

根据以上讨论，我们得到

定理 4.7。

$$\phi^{-1}(E)=\Gamma=\{(z_0-z_1)z_1=2z_2z_3\}\bigcup\left(\bigcup_{x\in[0,1]}\{(z_0+z_1)^2-16xz_2z_3=0\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\right)$$

and

$$L\cup\Gamma\subset P(D_\pi),$$

其中 L 是超平面 $\{z\in\mathbb{C}^4: z_0+z_1+2z_2+2z_3=0\}$。

4.3. Q的动力学性质。将Q 视为定义在 $\mathbb{P}^3$ 上的有理映射 b y

$$Q(z) = [\ z_0 + z_1 - \frac{2z_2z_3}{z_0 - z_1}\ :\ \frac{2z_2z_3}{z_0 - z_1}\ :\ z_2\ :\ z_3\ ].$$

注意到，根据 (4.7)，我们可以写成

$$Q^n(z) = [\ \frac{z_0 + z_1}{2} + \frac{z_0^{(n)} - z_1^{(n)}}{2}\ :\ \frac{z_0 + z_1}{2} - \frac{z_0^{(n)} - z_1^{(n)}}{2}\ :\ z_2\ :\ z_3\ ],$$

因此，Q 的动力学性质由$z_0^{(n)} - z_1^{(n)}$ 决定，即根据 (4.9) 和 (4.8)，$G^n \cancel{G_{n-1}}$

$$G_n(z_0, z_1) = (z_0 - z_1)(\sqrt{4z_2z_3})^n U_n(\tau(z)) - (\sqrt{4z_2z_3})^{n+1} U_{n-1}(\tau(z)),$$

其中 $\tau(z) = z_0 + z_2 \cancel{\sqrt{4\frac{1}{2}z_2z_3}}$，因此我们有

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{(\sqrt{4z_2z_3})^{n+2} U_{n+1} \cdot \left(\frac{z_0 - z_1}{\sqrt{4z_2z_3}} - \frac{U_n}{U_{n+1}}\right)}{(\sqrt{4z_2z_3})^{n+1} U_n \cdot \left(\frac{z_0 - z_1}{\sqrt{4z_2z_3}} - \frac{U_{n-1}}{U_n}\right)}.$$

对于 $\tau(z) \notin [-1, 1]$，由引理 4.1，$\cancel{G_{n+1}}\ G_n$ 正规收敛到

$$\sqrt{4z_2z_3})(\tau(z) + \sqrt{\tau(z)^2 - 1}) = \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + \sqrt{(z_0 + z_1)^2 - 16z_2z_3}),$$

and 由于 $\{\tau(z) \in [-1, 1]\}$ 包含于扩展不定点集，因此我们有

定理 4.8。对于有理映射 $Q(z) = [\ z_0 + z_1 - {}^2 z_2z_3\ z_0 - z_1 :\ \cancel{{}^2 z_2z_3}\ z_0 - z_1 \cancel{: z_2} : z_3\ ]$ ，

$$\mathcal{J}(Q) = E,\ \phi(L) \cup E \subset p(D_\pi).$$

总之，我们完成了定理 B 的证明。值得注意的是，$\phi(L)$ 并不包含在扩展不定点集 E 中。事实上，令 $z \in \{z_2 = 0\}$，由 (4.13) 和 (4.14)，在这种情况下，$G_n(z) = (z_0 - z_1)(z_0 + z_1)^n$。那么，点 $[1 : 3 : 0 : -2]$ 属于 $\phi(L)$，但根据定理 4.7，它不属于 E。因此，对于铅笔 D_π，Julia 集 $\mathcal{J}(Q)$ 严格包含于 $p(D_\pi)$ 中。不过，二者或许唯一的区别只是 L，而它取决于群的生成集的选择。

猜想 4.9。

$$\phi(L) \cup \mathcal{J}(Q) = p(D_\pi).$$

致谢。作者谨向审稿人表示感谢，感谢其认真审阅本文并提出宝贵建议。

参考文献

[1] J. P. Bannon、P. Cade 和 R. Yang，《Banach代数值整函数的谱》，《Illinois数学杂志》55 (2011)，第 4 期，1455–1465（2013）。MR3082878http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1373636693[2] Alan F. Beardon，《有理函数的迭代》，《数学研究生教材》第 132 卷，Springer-Verlag，纽约，1991。复解析动力系统。MR1128089https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4422-6[3] Patrick Cade 和 Rongwei Yang，《射影谱与循环上同调》，《泛函分析杂志》265 (2013)，第 9 期，1916–1933，DOI 10.1016/j.jfa.2013.07.010。MR3084492https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.07.010[4] Isaak Chagouel、Michael Stessin 和 Kehe Zhu，《紧算子的几何谱理论》，《美国数学学会汇刊》368 (2016)，第 3 期，1559–1582，DOI 10.1090/tran/6588。MR3449218https://doi.org/10.1090/tran/6588

[5] Ronald G. Douglas 和 Rongwei Yang，预解集上的 Hermite 几何，《算子理论、算子代数与矩阵理论》，《算子理论进展与应用》第 267 卷，Birkhäuser/Springer，Cham，2018，第 167–183 页。MR3837636[6] Artem Dudko 和 Rostislav Grigorchuk，弱分支群的 Koopman 表示与准正则表示的不可约性和不相交性，《动力系统现代理论》，《当代数学》第 692 卷，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2017，第 51–66 页，DOI 10.1090/conm/692。MR3666066 https://doi.org/10.1090/conm/692[7] Bryan Goldberg 和 Rongwei Yang，无限二面体群上的 Hermite度量，《斯捷克洛夫数学研究所通讯》304 (2019)，第 1 期，136–145，DOI 10.1134/s0081543819010097。俄文版发表于《斯捷克洛夫数学研究所论文集》304 (2019)，149–158。MR3973318 https://doi.org/10.1134/s0081543819010097[8] ，自相似性与谱动力学，《算子理论杂志》87 (2022)，第 2 期，355–388，DOI 10.7900/jot。MR4396939 https://doi.org/10.7900/jot[9] R. I. Grigorčuk，关于周期群的 Burnside问题，《泛函分析及其应用》14 (1980)，第 1 期，53–54（俄文）。MR565099[10] Rostislav Grigorchuk 和 Volodymyr Nekrashevych，自相似群、算子代数与舒尔补，《现代动力学杂志》1 (2007)，第 3 期，323–370，DOI 10.3934/jmd.2007.1.323。MR2318495 https://doi.org/10.3934/jmd.2007.1.323[11]Rostislav Grigorchuk、Volodymyr Nekrashevych 和 Zoran Šunić，从自相似群到自相似集与谱，《分形几何与随机性 V》，《概率论进展》第 70 卷，Birkhäuser/Springer，Cham，2015，第 175–207 页，DOI 10.1007/978-3-319-18660-3 11。MR3558157 https://doi.org/10.1007/978-3-319-18660-3 11[12] R. I. Grigorchuk、V. V. Nekrashevich 和 V. I. Sushchanskiĭ，自动机、动力系统与群，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》231 (2000)，第 Din. Sist., Avtom. i Beskon. Gruppy 期，134–214（俄文，附俄文摘要）；英文译本发表于《斯捷克洛夫数学研究所通讯》4(231) (2000)，128–203。MR1841755[13] Rostislav Grigorchuk 和 Zoran Šunić，三柱河内塔群的 Schreier谱，《图上的分析及其应用》，《纯粹数学研讨会论文集》第 77 卷，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2008，第 183–198 页，DOI 10.1090/pspum/077/2459869。MR2459869 https://doi.org/10.1090/pspum/077/2459869[14]Rostislav Grigorchuk 和 Brian Simanek，灯笼群的凯莱图的谱与随机薛定谔算子，《美国数学学会汇刊》374 (2021)，第 4 期，2421–2445，DOI 10.1090/tran/8156。MR4223021 https://doi.org/10.1090/tran/8156[15]R. I. Grigorchuk 和 R. Yang，联合谱与无限二面体群，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》297 (2017)，第 Poryadok i Khaos v Dinamicheskikh Sistemakh 期，165–200，DOI 10.1134/S0371968517020091（俄文，附俄文摘要）。英文版发表于《斯捷克洛夫数学研究所通讯》297 (2017)，第 1 期，145–178。MR3695412 https://doi.org/10.1134/S0371968517020091[16]Rostislav I. Grigorchuk 和 Andrzej Żuk，作为由二状态自动机生成的群的灯笼群及其谱，《几何专题》87 (2001)，第 1–3 期，209–244，DOI 10.1023/A:1012061801279。MR1866850 https://doi.org/10.1023/A:1012061801279[17] Wei He、Xiaofeng Wang 和 Rongwei Yang，射影谱与核丛 II，《算子理论杂志》78 (2017)，第 2 期，417–433，DOI 10.7900/jot。MR3725512 https://doi.org/10.7900/jot[18] J. Mc Laughlin，由 2×2 矩阵的 n 次幂导出的组合恒等式，《整数》4 (2004)，A19，15。MR2116004 https://www.researchgate.net/publication/237302841[19] Volodymyr Nekrashevych，自相似群，《数学调查与专著》第 117 卷，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2005。MR2162164 https://doi.org/10.1090/surv/117[20] Barry Simon，《单位圆上的正交多项式》第二部分，美国数学会专题讲座出版物第 54 卷，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2005。谱理论。MR2105089

https://doi.org/10.1090/coll/054.2/01[21] Tetsuo Ueda，射影空间上的复动力系统中的 Fatou 集，《日本数学会杂志》46（1994），第 3 期，545–555，DOI 10.2969/jmsj/04630545。MR1276837https://doi.org/10.2969/jmsj/04630545[22] Rongwei Yang，巴拿赫代数中的射影谱，《拓扑与分析杂志》1（2009），第 3 期，289–306，DOI 10.1142/S1793525309000126。MR2574027https://doi.org/10.1142/S1793525309000126中华人民共和国辽宁省大连市大连理工大学数学科学系，邮编 116024。电子邮箱：zuchao@mail.dlut.edu.cn 中华人民共和国辽宁省大连市大连理工大学数学科学系，邮编 116024。电子邮箱：yangyixin@dlut.edu.cn 中华人民共和国辽宁省大连市大连理工大学数学科学系，邮编 116024。电子邮箱：lyfdlut@dlut.edu.cn