arXiv:2601.09167v1 [math.CO] 14 Jan 2026

图上的全局罗马支配问题的复杂性

Sangam Balchandar Reddy[a]、Arun Kumar Das[a]、Anjeneya Swami Kare[a]、I. Vinod Reddy[b]

[a]海得拉巴大学，海得拉巴，印度[b]印度理工学院比莱分校，赖布尔，印度

摘要

图 $G = (V, E)$ 的罗马支配函数是一种标签函数 $f: V \to \{0, 1, 2\}$，满足：对于每个满足 $f(u) = 0$ 的顶点 $u \in V$，存在一个顶点$v \in N(u)$，使得 $f(v) = 2$。如果罗马支配函数 f 同时是 G 及其补图 G 的罗马支配函数，则称其为全局罗马支配函数。f 的权重是对所有顶点 $u \in V$ 上的 $f(u)$ 求和。全局罗马支配问题的目标是找到一个权重最小的全局罗马支配函数。

本文研究了各种图类上全局罗马支配问题的算法方面，并得到以下结果。

1. 我们通过识别出一些图类，证明罗马支配问题与全局罗马支配问题在计算上并不等价：在这些图类上，其中一个问题可在线性时间内求解，而另一个问题则是NP完全的。2. 我们证明了全局罗马支配问题在分裂图上是NP完全的，从而解决了Panda和Goyal提出的一个未解决问题 [《离散应用数学》 2023]。3. 我们证明了全局罗马支配问题在弦二部图、最大度为五的平面二部图以及圆图上是NP完全的。4. 积极的一面是，我们为余图上的全局罗马支配问题提出了一种线性时间算法。

电子邮箱地址：21mcpc14@uohyd.ac.in（Sangam BalchandarReddy）、arunkumardas@uohyd.ac.in（Arun Kumar Das）、askcs@uohyd.ac.in（Anjeneya Swami Kare）、vinod@iitbhilai.ac.in（I. Vinod Reddy）

关键词：罗马支配、全局罗马支配、复杂性、NP完全、分裂图、余图

---

1. 引言

罗马支配（RD）是图论中一个引人入胜的概念，其灵感源自罗马军团通过战略部署来有效保卫罗马帝国。RD问题由Stewart于1999年提出。给定一个图 $G = (V, E)$，罗马支配函数 $f: V \to \{0, 1, 2\}$ 是对顶点的一种标记，使得每个满足 $f(u)$ 的顶点 $u \in V$ 都存在一个满足 $f(v)$ 的顶点 $v \in N(u)$。罗马支配函数 f 的权重是所有顶点 $u \in V$ 上的 $f(u)$ 之和。图 G 的罗马支配函数的最小权重记作 $\gamma_R(G)$。RD问题的目标是计算 $\gamma_R(G)$。

如果罗马支配函数 f 同时是 G 和 $\overline{G}$ 的罗马支配函数，那么它就是全局罗马支配函数。全局罗马支配函数 f 的最小权重记作 $\gamma_{gR}(G)$。全局罗马支配（GRD）问题的目标是计算 $\gamma_{gR}(G)$。

GRD问题的判定版本正式定义如下。

> 全局罗马支配：
> **输入：** 一个实例 $I = (G, k)$，其中 $G = (V, E)$ 是一个无向图，k 是一个整数。**输出：** 如果存在一个函数 $f: V \to \{0, 1, 2\}$，使得 (1) $\sum_{u \in V} f(u) \leq k$，且 (2) 对于每个满足 $f(u) = 0$ 的顶点 $u \in V$，都存在顶点 $v \in N_G(u)$ 和 $w \in N_{\overline{G}}(u)$，使得 $f(v) = 2$ 且 $f(w) = 2$，则输出“是”；否则输出“否”。

Liu等人 [2] 证明，RD问题在分裂图和二分图上是NP完全的。他们为强弦图提供了一种线性时间算法。对于余图、区间图和团宽有界图，RD问题也存在相应的线性时间算法；对于AT自由图 [3]，则存在多项式时间算法。Fernau [4]在参数化复杂性的框架下研究了RD问题，并证明该问题以权重为参数时是W[2]-难的。他们提供了一种FPT算法，其运行时间为 $\mathcal{O}^*(5^t)$，其中t 是输入图的树宽。此外，对于平面图，他们

证明，RD问题可以在 $\mathcal{O}^*(3.3723^k)$ 时间内求解。已证明，即使在分裂图上，RD问题以权重为参数时也是W[1]-难的 [5]。最近，Ashok等人 [6] 为 $\mathcal{O}^*(4^d)$ 问题提供了一种算法，该问题称为独立罗马支配(IRD)问题，其中 d 是簇顶点删除集数。

已有多项研究探讨了支配集（DS）问题各种变体之间的复杂性差异。Duan等人 [7] 证明，RD问题与IRD问题在复杂性方面存在差异。Chakradhar等人 [8] 表明，DS问题与罗马{3}支配问题在复杂性方面并不等价。Mann等人 [9] 证明，唯一响应罗马支配问题与完美罗马支配问题在复杂性方面存在差异。已有研究证明，DS问题与全罗马{2}支配问题在复杂性方面存在差异 [10]。Chakradhar [11] 证明，DS问题与受限罗马支配问题在复杂性方面并不等价。沿着类似的思路，我们构造了一个图类 $\mathcal{F}$，使得RD问题可在线性时间内求解，而GRD问题是NP完全的。我们还构造了一个图类 $\mathcal{G}$，使得GRD问题可在线性时间内求解，而RD问题是NP完全的。因此，我们得出结论：RD问题与GRD问题并非计算等价。

Panda等人 [12] 证明，GRD问题在二分图和弦图上是NP完全的。他们还为阈值图提出了一种多项式时间算法。此外，他们提出了一种 $\mathcal{O}(\ln|V|)$-近似算法，并证明除非P $=$ NP，否则对任意 $\epsilon > 0$都不存在$(1-\epsilon)\ln|V|$-近似算法。此外，他们还证明，GRD问题对于有界度图是APX完全的。我们通过证明GRD问题在分裂图上是NP完全的，推进了该问题的复杂性研究，从而解决了Panda等人 [12]提出的一个未解决问题。我们还证明，GRD问题在弦二部图、最大度为五的平面二分图以及圆图上是NP完全的。此外，我们为余图上的GRD问题提出了一种线性时间算法。由于余图是阈值图的超类，我们的结果扩展了已知的阈值图上的解法。

2. 预备知识

设 $G = (V, E)$ 是一个图，其顶点集为 V，边集为 E，且满足 $|V| = n$ 和 $|E| = m$。集合 $N(u) = \{v \in V \mid uv \in E\}$ 和

$N[u] = N(u) \cup \{u\}$ 分别表示图 G 中顶点 u 的开邻域和闭邻域。我们用 $d(u)$ 表示顶点 u 的度，使得$d(u) = |N(u)|$。悬挂顶点 u 的度为 $d(u) = 1$。若图 G 满足 k-正则，即对于每个顶点 $u \in V$，都有 $d(u) = k$。当且仅当 $N(u) = N(v)$ 且 $v \notin N(u)$ 时，顶点 u 和 v 是图 G 中的假孪生顶点。图 G 中的全称顶点是指与图 G 中其他每个顶点都相邻的顶点。我们用 G 表示图 G 的补图。若顶点 $u \in V$ 满足 $f(u) \geq 1$，或者存在两个顶点 $v \in N(u)$ 和 $w \notin N(u)$，使得 $f(v) = f(w) = 2$，则称该顶点被覆盖。

对于顶点 $u \in V$， $f(u)$ 的值也称为 u 的标签。对于集合 T， T 的权重是该集合中所有顶点标签之和，即 $\sum f(u)$。我们用 $f(V)$ 表示函数 f 在 G 上的权重，即 $_{u \in T} f(V) = \sum f(u)$。此外，我们采用 $_{u \in V}$ 中定义的标准记号。

我们将精确 ℓ-覆盖问题定义如下。

> 精确 ℓ-覆盖：
> **输入：** 一个有限集合 X，其中有 $|X| = \ell q$，以及由 X 的 ℓ 元子集构成的集合族 C。**输出：** 如果存在 C 的两两不交子集 q，其并集为 X，则输出“是”；否则输出“否”。

我们建立以下结果，该结果将在本文第 3 节中使用。

引理 1。 精确 4-覆盖问题是 *NP*完全的。

证明。 对于 X3C 问题的一个实例 $(X = \{x_1, x_2, ...x_{3q}\}, C = \{C_1, C_2, ...C_t\})$，我们按如下方式构造 X4C问题实例 (X', C')。我们在 X 中引入额外的 q 个元素 $x_{d_1}, x_{d_2}, ..., x_{d_q}$，以得到 X'。令 C_i^j 为通过向 C_i 添加一个元素 x_{d_j} 得到的 4 元素集合。我们有 $C' = \{C_1^1, C_1^2, ..., C_1^q, C_2^1, C_2^2 ..., C_2^q, ..., C_t^1, C_t^2 ..., C_t^q\}$。至此，$(X', C')$ 的构造完成。

($\Rightarrow$) 设 $C^* \subseteq C$ 是 X 的一个精确 3-覆盖，其中 $|C^*| = q$。我们为每个集合 $C_i \in C^*$ 分配一个唯一的虚拟元素 x_{d_j}。对于每一对这样的元素 (C_i, x_{d_j})，我们构造相应的 4 元素集合 $C_i^j = C_i \cup \{x_{d_j}\} \in C'$。

设 $C'^* = \{C_i^j \mid C_i \in C^*,\ x_{d_j}$ 唯一地分配给 $C_i\}$。

- C_i^j 中的每个 C'^* 恰好覆盖 X 中的 3 个元素，以及 $\{x_{d_1}, \ldots, x_{d_q}\}$中的一个独特元素。

C'^* 中的集合两两不相交，因为原来的 C_i 集合两两不相交，而且x_{d_j}彼此不同。

C'^* 中所有集合的并集为 $X' = X \cup \{x_{d_1}, \ldots, x_{d_q}\}$。

因此， C'^* 是 X'的一个精确 4-覆盖。

（⇐）设 $C'^* \subseteq C'$ 是 X'的一个精确 4-覆盖，其中 $|C'^*| = q$。 C' 中的每个集合都具有 $C_i^j = C_i \cup \{x_{d_j}\}$的形式，因此 C'^* 中每个被选中的集合恰好包含一个虚拟元素x_{d_j} 和 X中的三个元素。 X'中恰有 q 个虚拟元素，而 C'^* 中有 q 个集合，因此每个虚拟元素必须恰好出现在 C'^*中的一个集合里。

令 $C^* = \{C_i \mid C_i^j \in C'^*\}$ 为 X3C 问题实例中对应的集合。

- $|C^*| = q$。
- 每个 $C_i \in C^*$ 恰好覆盖 X 中的 3 个元素，且这些集合两两不相交。

C^* 中所有集合的并集为 X，因为 X' 已被 C'^* 完全覆盖，且所有虚拟元素都被唯一使用。

因此，我们得出结论： C^* 是 X 的一个精确 3-覆盖。 □

3. 罗马支配 **与** 全局罗马支配之间的复杂性差异

在本节中，我们将说明 GRD问题的复杂性与 RD问题不同。我们构造两个图类 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$，以展示这两个问题在复杂性上的差异。

3.1. 图类： $\mathcal{F}$

在本小节中，我们构造一个图类 $\mathcal{F}$，在该图类上，RD问题可以在线性时间内求解，而 GRD问题则是 NP完全。

$H \in \mathcal{F}$的构造。设 $G = (V, E)$为一个3-正则图。我们创建 G 的三个副本，分别为 $G_1 = (V_1, \overline{E_1})$、 $G_2 = (V_2, E_2)$和 $G_3 = (V_3, E_3)$。顶点 $u \in V(G)$在 G_1、 G_2 和 G_3 中分别记为 u_1 、 u_2 和 u_3 。对于每个顶点 $u_1 \in V_1$，我们令 u_1 与 $N_{G_2}(u_2)$中的每个顶点以及$N_{G_3}(u_3)$中的每个顶点相邻。对于每个顶点 $u_2 \in V_2$，我们令 u_2 与$N_{G_3}(u_3)$中的每个顶点相邻。随后，我们引入三个顶点 v_1、 v_2 和 v_3 ，并使它们分别与 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 中的每个顶点相邻，从而得到所得图 $H \in \mathcal{F}$。形式上，$\mathcal{F} := \{H \mid H$ 由一个3-正则图 G 经过上述过程$\}$得到。我们证明，RD问题在 $\mathcal{F}$ 上可在线性时间内求解，而 $\mathcal{F}$ 上的GRD问题是NP完全的。

引理2. $\gamma_R(H) = 4$ 对每个 $H \in \mathcal{F}$。

证明. 考虑一个图 $H \in \mathcal{F}$。三个顶点 v_1、 v_2 和v_3 中有一个被赋予标签2，另外两个被赋予标签1。在 f中，所有其他顶点都被赋予标签0。每个标签为0的顶点都与标签为2的 v_1 （或 v_2、 v_3）相邻。因此，我们有 $\gamma_R(H) \leq 4$。

为了覆盖 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$中的顶点， $\{v_1, v_2, v_3\}$中有一个顶点应标记为2。由于 v_1、 v_2 和 v_3 不相邻，因此 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 中未被赋予标签2的两个顶点都应标记为1，或者 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 中至少有一个顶点应标记为2。因此，我们有 $\gamma_R(H) \geq 4$。

最后，我们得到 $\gamma_R(H) = 4$。 □

由引理2，我们得到以下结果。

定理3.1。 图类 $\mathcal{F}$ 上的 *RD* 问题可在线性时间内求解。

现在，我们通过从 3-正则图上的 DS 问题进行归约，证明 $\mathcal{F}$ 上的 GRD问题是 NP完全的。给定一个图 $G = (V, E)$，如果每个顶点 $u \in V \setminus S$ 都在集合 S 中有一个邻点，那么集合 $S \subseteq V$ 就是一个支配集。DS 问题的判定版本询问是否存在一个大小至多为 k 的支配集。关于 3-正则图上的 DS 问题的结果如下。

定理 3.2 ([14])。 *3*-正则图上的 *DS* 问题是 *NP*完全的。

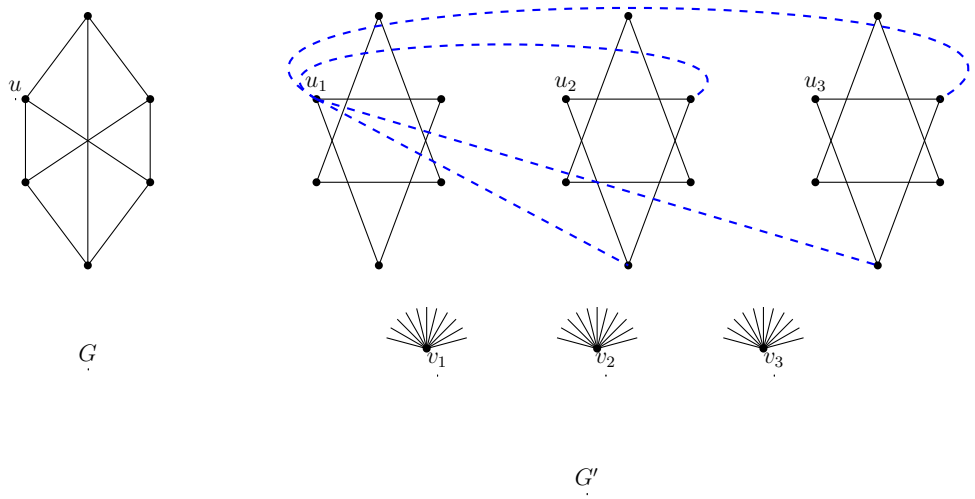


图 1：（左）一个 3-正则图 G；（右）从 G构造 $G' \in \mathcal{F}$。G'中仅显示顶点 $u_1 \in G_1$ 与其在 G_2 和 G_3 中的邻居之间的邻接关系。

构造。设 $I = (G = (V, E)\ k)$ 是 DS 问题的一个实例，其中 G 是一个 3-正则图。我们按如下方式构造 GRD问题的一个实例 $I' = (G', k')$。我们创建 G 的三个副本，分别为 $G_1 = (V_1, E_1)$、$G_2 = (V_2, E_2)$ 和 $G_3 = (V_3, E_3)$。顶点 $u \in V(G)$ 在 G_1 中记作 u_1，在 G_2 中记作 u_2，在 G_3 中记作 u_3。对于每个顶点 $u_1 \in V_1$，我们令 u_1 与 $N_{G_2}(u_2)$ 和 $N_{G_3}(u_3)$ 中的每个顶点相邻。对于每个顶点 $u_2 \in V_2$，我们令 u_2 与 $N_{G_3}(u_3)$ 中的每个顶点相邻。随后，我们引入三个顶点 v_1、v_2 和 v_3，并令它们各自与 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 中的每个顶点相邻，从而得到 G'。容易看出 $G' \in \mathcal{F}$。我们令 $k' = 2k + 2$。至此，I' 的构造完成。更多细节见图 1。

引理 3。 设 f 是 G'的一个最小权全局罗马支配函数。在 v_1、v_2 和 v_3 中，有一个顶点在 f 中被赋予标签 *2*，另外两个则被赋予标签 *0*。

证明。 v_1、v_2 和 v_3 中的每个顶点都与 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 中的每个顶点相邻，并且它们在 G' 中的非邻点只有 v_1、v_2 和 v_3中的另外两个顶点。给 f中的 v_1、v_2 和 v_3 赋予标签有两种可能的方式：

- 给其中一个顶点赋予标签 2，给另外两个赋予标签 0，或者

- 给这三个顶点都标上标签 1。

在第二种情况下，给 v_1、 v_2 和 v_3 各赋予标签 1，得到的总权重为 3，但无法覆盖 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 中的任何顶点。相比之下，在第一种情况下，给其中一个顶点赋予标签 2，给另外两个赋予标签 0，得到的总权重为 2，同时还能覆盖 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 中的所有顶点。因此，在 v_1、 v_2 和 v_3 中选一个赋予标签 2、另外两个赋予标签 0 的标记方式是最优的。由此，在 f 中，我们给 v_1、 v_2 和 v_3 中的一个赋予标签 2，另外两个赋予标签 0。我们假设 $f(v_1) = 2$、 $f(v_2) = 0$ 和 $f(v_3) = 0$。

为了作为 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$中顶点的带标签 2 的非邻点， $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 中至少有一个顶点应标记为 2。 v_2 和 v_3被覆盖，因为它们在 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 中有一个带标签 2 的邻点，并且有一个带标签 2 的非邻点 v_1 。因此， G' 中的所有顶点都被覆盖；在 f 中， v_1、 v_2 和 v_3 中至多有一个被赋予标签 2，其余两个被赋予标签 0。 □

不失一般性，在本小节余下部分中，我们假设f（v_1）$= 2$， f（v_2）$= 0$，且 f（v_3）$= 0$。

引理 4. 设 f 是 G'的一个最小权全局罗马支配函数。 G' 中的每个顶点在 f中都被赋予来自 $\{0, 2\}$ 的标签。

证明。每个 $w \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$ with $f(w) = 0$ 都有一个邻点 v_1 with$f(v_1) = 2$。因此，我们只需寻找一个非邻点，并将标签 2 赋给 w 。考虑顶点 u_1、 u_2 和 u_3 ，它们分别是顶点 u 在 G_1、 G_2和 G_3 中的副本。由于 u_1、 u_2 和 u_3 是假孪生顶点，在 f中，它们中至多有一个被赋予标签 2。为了使顶点 u_1、 u_2 和 u_3 被覆盖，要么三个顶点 u_1、 u_2 和 u_3 都应被赋予至少为 1 的标签，要么集合 $(V' \setminus N_{G'}(u_1))$ 中的一个顶点应在 f中被赋予标签 2。假设顶点 u_1 被赋予标签 1，那么为了使 f 达到最小权重， u_2和 u_3 也必须被赋予标签 1。相比之下，我们可以将标签 2 赋给集合 $(V' \setminus N_{G'}(u_1))$ 中的一个顶点，从而覆盖顶点 u_1、 u_2 和 u_3，这比给三个顶点 u_1、 u_2 和 u_3赋予标签 1 的标记更优。因此，我们得出结论，每个 f 都将标签从 $\{0, 2\}$ 赋给 G'中的顶点。

□

引理 5。 G 具有大小至多为 k 的支配集，当且仅当 G' 具有权重至多为 $2k + 2$ 的全局罗马支配函数。

证明。($\Rightarrow$) 设 S 是 G 的一个大小至多为 k的支配集。我们如下得到 G' 的一个全局罗马支配函数 f。

对于每个顶点 $u \in S$，我们在 f 中为 u_1 赋予标签 2，并为 u_2 和u_3 赋予标签 0。G' 中除 v_1、v_2 和 v_3 之外的所有其他顶点均赋予标签 0。最后，顶点 v_1 获得标签 2，而 v_2 和 v_3 均赋予标签 0。

每个具有 $f(u_i) = 0$的顶点 $u_i \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$都有一个具有$f(v_1) = 2$的邻点 $v_1 \in V'$，并且还有一个具有 $f(x_1) = 2$的非邻点 x_1，其中 $x \in N_G(u)$。对于某个 $x \in V(G)$，顶点 v_2 和 v_3 都有一个具有 $f(x_1) = 2$ 的邻点 $x_1 \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$，并且也都有一个具有 $f(v_1) = 2$的非邻点 v_1。G' 中所有其他顶点均被覆盖，因为它们的标签大于 0。因此，我们得出结论：f 是权重至多为$2k + 2$的全局罗马支配函数。

($\Leftarrow$) 设 f是一个权重至多为 $2k+2$的全局罗马支配函数。我们按如下方式得到一个支配集 S。

由引理 3，可得 $f(v_1) = 2, f(v_2) = 0$ 以及 $f(v_3) = 0$。此时，我们已为集合 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 使用了权重 2，而顶点 $2k$ 还可使用 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$。

每个满足 $f(u_i)$ 的顶点 $u_i \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$都有一个满足$f(v_1)$ 的邻点 $v_1 \in V'$。由引理 4 可知，我们不妨假设 V' 中的顶点在 f中均未被赋予标签 1。V' 中每个标签为 0 的顶点都必须有一个标签为 2 的非邻点。我们至多给 $G' \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ 中的 k 个顶点赋予标签 2，其余顶点均赋予标签 0。在 G' 中，赋予标签 2 的、u_i 的非邻点是 G 中属于 S的 u 的邻点。$G' \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ 中在 f 里标记为 2 的k 个顶点，将对应于 G中大小至多为 k 的支配集 S。

□

根据 $G' \in \mathcal{F}$，借助定理 3.2 和引理 5，我们得到以下定理。

定理 3.3。 $\mathcal{F}$ 图类上的*GRD*问题是*NP*完全的。

3.2. 图类：$\mathcal{G}$

在本小节中，我们构造了一个图类 $\mathcal{G}$，在该图类上，GRD问题可以在线性时间内求解，而RD问题是NP完全的。

构造 $H \in \mathcal{G}$。我们考虑一个包含 $|X| = 4l$ 的精确 4-覆盖（X4C）问题实例。对于 X4C 问题中的每个元素 x_i

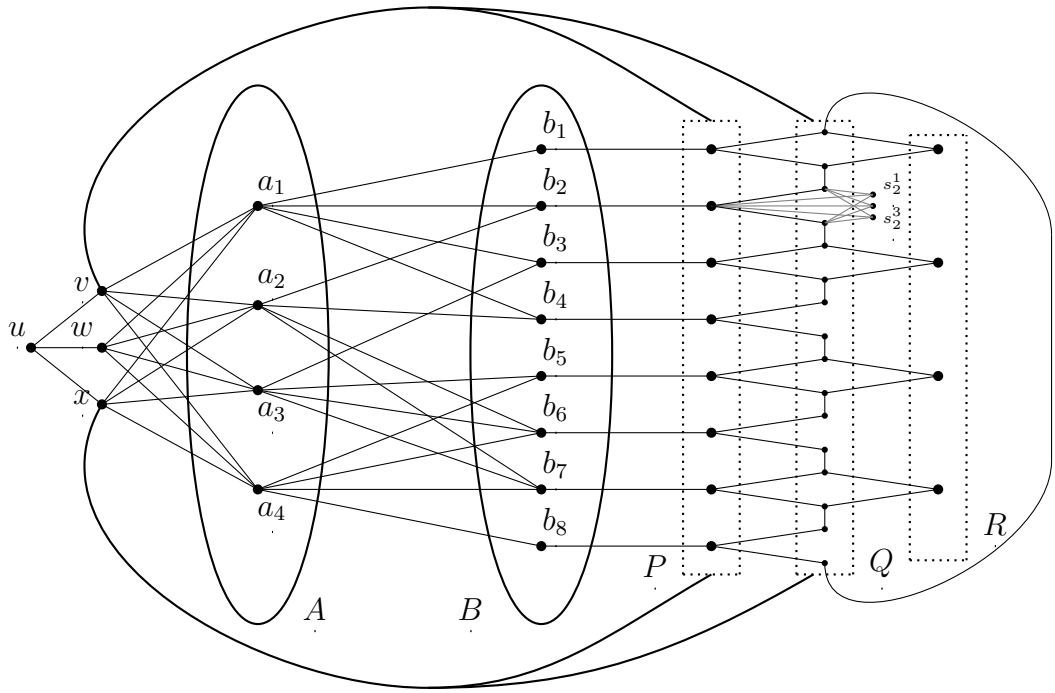


图 2：由 X4C 问题实例构造的图 $G' \in \mathcal{G}$ ：$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 和 $C = \{C_1 = \{1,2,3,4\}, C_2 = \{2,4,6,7\}, C_3 = \{3,5,6,7\}$ 以及$C_4 = \{5,6,7,8\}\}$。顶点 v 与集合 Y之间的粗边表示 v 与集合 Y中的每个顶点都相邻。图中未显示集合 A 中顶点之间的边。由于空间限制，图中未显示集合 S 中的所有顶点。

实例，我们在 $\mathcal{G}$ 中创建一个顶点 b_i 。类似地，对于 X4C 问题实例中的每个集合 C_j ，我们在 $\mathcal{G}$ 中创建一个顶点 a_j 。

设 $A = \bigcup_{j\in[m]} a_j$ 和 $B = \bigcup_{i\in[4l]} b_i$。我们构造一个分裂图，其中 A 构成一个大小为 m 的团， B 构成一个大小为 $4l$的独立集。对于每个$i \in [4l]$ 和 $j \in [m]$，当且仅当给定的 X4C 问题实例中 $x_i \in C_j$ 时，我们在 $b_i \in B$ 和 $a_j \in A$ 之间添加一条边。

我们有以下与 A 相邻的构件。我们创建三个顶点 v， w和 x ，并使它们各自与 A 中的每个顶点相邻。我们还创建一个顶点 u，它与 v、 w 和 x 相邻。

我们构造如下与 B 相邻的构件。对于每个 $i \in [4l]$，我们创建一个顶点集 $\{p_i, q_i^1, q_i^2, s_i^1, s_i^2, s_i^3\}$。我们使 b_i 与 p_i 相邻。我们将使顶点 p_i 同时与 q_i^1 和 q_i^2 相邻。集合 $\{s_i^1, s_i^2, s_i^3\}$ 中的顶点分别与 p_i、 q_i^1 和 q_i^2 中的每个顶点相邻。对于 $i \in [4l]$ 和 i

（模 2）$\equiv 1$，我们创建一个顶点 r_i，并使其与 q_i^1 和 q_i^2 相邻。对于每个 $i \in [4l-1]$，我们还使 q_i^2 与 q_{i+1}^1 相邻。我们使顶点 q_{4l}^2 和 q_1^1 相邻。设 $P = \bigcup_{i\in[4l]} p_i$、$Q = \bigcup_{i\in[4l]} \{q_i^1, q_i^2\}$、$R = \bigcup_{i\in\{1,3,\ldots,4l-1\}} r_i$ 和 $S = \bigcup_{i\in[4l]} \{s_i^1, s_i^2, s_i^3\}$。

我们还使顶点 v 和 x 与 $P \cup Q$中的每个顶点都相邻。

至此，基于给定的 X4C 问题实例构造图 $H \in \mathcal{G}$ 的过程就完成了。示意见图 2 。

思路。我们证明，对于图类 $\mathcal{G}$，存在权重为 $10l+1$ 的罗马支配函数，当且仅当底层 X4C 问题实例的答案为 YES。但根据引理 1，X4C 问题是 NP 完全的。因此，我们得到图类 $\mathcal{G}$ 上的 RD 问题是 NP 完全的。对于 GRD 问题，我们证明全局罗马支配函数的最小权重固定为 $10l+2$，且不取决于底层 X4C 问题实例。因此，图类 $\mathcal{G}$上的 GRD 问题可在线性时间内求解。

引理 6。在 $\{u, v, w, x\}$上的罗马支配函数 f 的权重至少为1。

证明。由于顶点 u 仅与 v，w 和 x相邻，因此要么给 u 赋予标签 1，要么至少给 v，w 和 x 中的一个赋予标签 2。因此，f 在 $\{u, v, w, x\}$ 上的权重至少为 1。□

引理 7。罗马支配函数 f 在 $P \cup Q \cup S$ 上的权重至少为 $8l$。

证明。对于每个 $i \in [4l]$: 顶点 p_i，q_i^1 和 q_i^2 分别与三个不同的顶点 s_i^1，s_i^2和 s_i^3 相邻。考虑集合 $\{p_i, q_i^1, q_i^2, s_i^1, s_i^2, s_i^3\}$。我们要么给 p_i，q_i^1和 q_i^2中的至少一个顶点赋予标签 2，要么给 $\{s_i^1, s_i^2, s_i^3\}$中的每个顶点赋予至少 1。因此，$\{p_i, q_i^1, q_i^2, s_i^1, s_i^2, s_i^3\}$ 的权重至少为 2。由此，$P \cup Q \cup S$ 在 f 中的权重至少为 $8l$。□

引理 8。$A \cup B \cup P$上的罗马支配函数 f 的权重至少为 $2l$。

证明。为了覆盖 B 的顶点，要么可以将 A 中的 l 个顶点标记为 2，要么可以为 $B \cup P$ 中的一个顶点子集赋予非零标签。将 A 中的 l 个顶点标记为 2 的函数，其权重为 $2l$，作用于

$A \cup B \cup P$。而将非零标签赋予 $B \cup P$ 中一个顶点子集的函数，其权重会大于 $2l$。这是因为 A 中的一个顶点可以覆盖 B 中的四个顶点，所需权重为二。但是，如果将 B 中的这四个顶点标记为 1，或由它们在 P 中的邻点覆盖，则所需权重为四。因此，我们得到，f 在 $A \cup B \cup P$ 上的权重至少为 $2l$。 □

引理 9. 考虑罗马支配函数 f，使得对于顶点$y \in \bigcup q_i^1$，$f(y) = 2$。函数 f 具有最小权重，当且仅当 $_{i\in[4l]}$ 对于每个顶点 $z \in \bigcup q_i^1$，$f(z) = 2._{i\in[4l]}$

证明。根据引理 8，我们知道，最小加权罗马支配函数 f 将标签 2 分配给 $\bigcup a_j$ 中的顶点，其中 C' 是 $_{C_j\in C'}$X4C 问题实例的一个精确覆盖。

令 $y \in \bigcup q_i^1$，使得 $f(y) = 2$。为导出矛盾，我们$_{i\in[4l]}$假设，对于某个 $i \in [4l]$，$f(q_i^1) \leq 1$。为了覆盖$\{p_i, q_i^2, s_i^1, s_i^2, s_i^3\}$中的顶点，我们必须将标签 2 赋给 p_i 或 q_i^2，但 q_{i-1}^2 仍未被覆盖，因此 f 的权重至少增加 1。以下是涉及 $\bigcup q_i^1$ 中四个顶点的三种情形，这些顶点的标签小于 $_{i\in[4l]}$

2. 考虑四个顶点的原因是 $\bigcup_{i\in[4l]} q_i^1$ 这是因为我们正在处理 X4C问题实例，而 $\bigcup_{i\in[4l]} b_i^1$ 可以被恰好一个来自.....的顶点覆盖 $\bigcup_{j\in[m]} a_j$.

情形 1： 我们考虑四个顶点 q_{t+1}^1，q_{t+2}^1，q_{t+3}^1 和 q_{t+4}^1，它们的索引连续，且满足 b_{t+1}、b_{t+2}、b_{t+3} 和 b_{t+4} 可以被 A 中的一个顶点覆盖，并将它们标记为 0。对于每个标记为 0 的顶点 q_i^1，q_i^2 和 p_i 中必须有一个被赋予标签 2。因此，我们有以下子情况。

情形 1a： 我们将顶点 p_{t+1}，p_{t+2}，p_{t+3} 和 p_{t+4} 标记为 2。由于存在一个来自 A 的顶点（例如 a_j）可以覆盖 b_{t+1}，b_{t+2}，b_{t+3} 和 b_{t+4}，我们可以将 a_j 标记为 0。由于 R 的顶点需要被覆盖，我们将 R 的两个顶点标记为 1。这会用掉我们从 a_j 获得的权重 2。不过，我们仍需要额外的权重 1 来覆盖 q_{t-1}^2。因此，这会导致更大的权重。

情形 1b： 我们将顶点 q^2_{t+1}，q^2_{t+2}，q^2_{t+3} 和 q^2_{t+4} 标记为 2。我们仍需要为 q^2_t 额外增加权重 1。因此，这会导致更大的权重。

情形 1c： 我们将 q^2_{t+1}、q^2_{t+2}、q^2_{t+3} 和 q^2_{t+4} 中的一个顶点子集标记为 2，并将 p_{t+1}、p_{t+2}、p_{t+3} 和 p_{t+4} 中的一个顶点子集标记为 2。显然，权重至少与前两种情形之一一样大。

情形 2： 我们考虑四个顶点 $q^1_{t_w}$、$q^1_{t_x}$、$q^1_{t_y}$ 和 $q^1_{t_z}$，使得 $\{t_w, t_x, t_y, t_z\}$ 中任意两个索引都不连续，并且 b_{t_w}、b_{t_x}、b_{t_y} 和 b_{t_z} 可以被 A 中的一个顶点覆盖。如果将这四个顶点 $q^1_{t_w}$、$q^1_{t_x}$、$q^1_{t_y}$ 和 $q^1_{t_z}$ 全部标记为 0，显然权重严格较大。

情形 3： 我们考虑四个顶点 $q^1_{t_w}$、$q^1_{t_x}$、$q^1_{t_y}$ 和 $q^1_{t_z}$，使得 $\{t_w, t_x, t_y, t_z\}$ 中的一个索引子集连续，并且 b_{t_w}、b_{t_x}、b_{t_y} 和 b_{t_z} 可以被 A 中的一个顶点覆盖。如果将这四个顶点 $q^1_{t_w}$、$q^1_{t_x}$、$q^1_{t_y}$ 和 $q^1_{t_z}$ 全部标记为 0，显然权重严格较大。

当 $\bigcup_{i\in[4l]} q^1_i$ 中恰有四个顶点的标签小于 2 时，权重会增加；这类顶点数量更多时，权重也会增加。因此，当且仅当对每个顶点 $z \in \bigcup_{i\in[4l]} q^1_i$，函数 f 取得最小权重

$$f(z) = 2.$$

引理 9 对集合 $\bigcup_{i\in[4l]} q^2_i$ 中的顶点也成立。□

引理 10. *设 f 是一个最小加权罗马支配函数。对于每个 $i \in [4l]$，q^1_i 和 q^2_i 中至多一个顶点被赋予标签 2，另一个则在 f 中被赋予标签 0。*

证明。 由于 q^1_i 和 q^2_i 在 $P \cup S \cup R$ 中具有相同的邻域，它们中至多一个可以标记为 2，而另一个应赋予标签 0。这是因为 q^1_i（或 q^2_i）的所有邻居都被 q^1_i 和 q^2_i 中被赋予标签 2 的顶点覆盖。q^1_i 和 q^2_i 中被赋予标签 0 的顶点将由其在 Q 中的邻点覆盖。因此，在 q^1_i 和 q^2_i 中至多一个顶点被赋予标签 2，另一个则在 f 中被赋予标签 0。□

对于某个固定的 $i \in [4l]$，如果 q^1_i 和 q^2_i 中有一个要标记为 2，那么在本节余下部分，我们假设将 q^1_i 标记为 2，并将 q^2_i 标记为 0。

如果存在一个顶点 $y \in Q$，使得 $f(y) = 2$，那么根据引理 9和 10，我们可以得到，对于每个顶点 $z \in \bigcup_{i\in[4l]} q_i^1$，$f(z) = 2$。

引理 11。存在一个最小加权罗马支配函数f，使得 $f(p_i) = 0$ 对每个 $i \in [4l]$ 都成立。

证明。设 f' 是一个最小加权罗马支配函数，且对某个 $i \in [4l]$有$f'(p_i) > 0$。我们证明，可以将其调整为另一个最小加权罗马支配函数 f，使得 $f(p_i) = 0$，从而证明存在一个最小加权罗马支配函数，使得对所有 $i \in [4l]$，$f(p_i) = 0$。根据 $f'(p_i)$ 的取值，分以下情形讨论。

情形 1： $f'(p_i) = 2$。

在这种情形下，p_i覆盖 $\{b_i, q_i^1, q_i^2, s_i^1, s_i^2, s_i^3\}$。我们在 f中将 $f'(p_i)$ 从 2 改为 0，并在 f 中将 $f'(q_i^1)$ 从 0 改为 2。如果 i为奇数，则在f中将 $f'(r_i)$ 从 1 改为 0，并在 f中将 $f'(a_j)$ 从 0 改为 2。其余所有顶点上的 f' 保持不变。

我们有，f是一个权重为 $f(V) = f'(V)$ 的罗马支配函数，并且具有 $f(p_i) = 0$。

情形 2： $f'(p_i) = 1$。

在这种情况下，我们只需令 $f(p_i) = 0$，而其他所有标签保持不变。由于 p_i 仍被覆盖，且没有产生未被覆盖的顶点，因此 f'仍然有效，并且 $f(V) = f'(V) - 1 < f'(V)$，这与 f'的最小性矛盾。因此，赋予 $f'(p_i) = 1$是次优的。

在这两种情形下，都存在一个最小权重罗马支配函数 f，满足 $f(p_i) = 0$。对每个满足$f'(p_i) \neq 0$ 的 $i \in [4l]$ 重复这一变换，即可得到所需的结论。

□

引理 12。图 $H \in \mathcal{G}$ 上的罗马支配函数 f 的权重至少为 $10l + 1$。

证明。根据引理 11，可知存在一个最小权重的 f使得 $f(p_i) = 0$ 对每个 $i \in [4l]$都成立。重新考察引理 6、7 和 8，令 $p_i = 0$ 对每个 $i \in [4l]$成立，可得 f 在 $H \in \mathcal{G}$ 上的权重至少为 $10l + 1$。

□

引理 13. 对于图 $H \in \mathcal{G}$，*X4C* 问题是一个是实例，当且仅当存在一个权重恰为 $10l + 1$ 的罗马支配函数。

证明。 $[\Rightarrow]$ 令 $C' \subseteq C$ 为 X4C问题实例的一个解。罗马支配函数 f 定义如下。

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{if } z \in \left(\{v, w, x\} \cup \bigcup_{C_j \notin C'} a_j \cup B \cup P \cup \bigcup_{i \in [4l]} \{q_i^2\} \cup R \cup S \right), \\ 1, & \text{if } z \in (\{u\}), \\ 2, & \text{if } z \in \left(\bigcup_{C_j \in C'} \{a_j\} \cup \bigcup_{i \in [4l]} \{q_i^1\} \right) \end{cases}$$

f 的权重为 $10l + 1$，且每个标签为 0 的顶点都有一个标签为 2 的邻点。因此，我们得出结论： f 是一个权重为 $10l + 1$ 的罗马支配函数。

$[\Leftarrow]$ 令 f 为一个罗马支配函数。根据引理 9，我们知道，要么 Q 中没有顶点的标签为 2，要么 $4l$ 中的顶点 $\bigcup_{i \in [4l]} q_i^1$ 具有标签 2。我们来分析这两种情形。

情形 1： $f(y) = 0$，对每个顶点 $y \in Q$均成立。

由于对每个顶点 $y \in Q$， $f(y) = 0$，因此对每个顶点$z \in P$， $f(z) = 2$。我们还有，对每个顶点 $z \in R$， $f(z) = 1$。B 中的顶点由其在 P 中的邻居覆盖。顶点 x 和 v 由 Q中的顶点覆盖。在 $B \cup P \cup Q \cup R \cup S$ 上使用的权重为 $10l$。剩余权重为 1 时，无法覆盖顶点 $\{u, w\} \cup A$。因此，我们得出结论：这种情形不能得到权重为 $10l + 1$ 的罗马支配函数。

情形 2： $f(y) = 2$，对于每个顶点 $y \in \bigcup_{i \in [4l} q_i^1.]$

顶点 $\{v, x\} \cup P \cup Q \cup R \cup S$ 已被覆盖。在 Q 上使用的权重为 $8l$，还剩下 $2l + 1$。我们需要将 A 中的一个顶点子集标记为 2；否则，就需要将 B 中的所有 $4l$ 个顶点都标记为 1，这将超出可用权重。由于 A 是一个团，顶点集 $\{w\} \cup A$ 将由 A 中一个标签为 2 的邻点覆盖。顶点 u 被标记为 1。要用剩余权重 $2l$ 覆盖顶点集 B，唯一的办法是将 A 中的 l 个顶点设为标签 2。如果存在这样一些 l 个顶点，能够覆盖 B 的所有 $4l$ 个顶点，那么我们就得到一个权重为 $10l + 1$ 的罗马支配函数。如果不存在这样一些 l 个顶点，那么我们就无法计算出权重为 $10l + 1$ 的罗马支配函数。 A 中覆盖顶点集 B 的 l 个顶点，对应于那些恰好覆盖 X4C 问题实例中所有元素一次的集合。 □

根据引理 12和 13，要计算 $\gamma_R(H)$ 对于$H \in \mathcal{G}$，我们必须求解 X4C问题实例。根据引理 1，X4C 问题是 NP完全。因此，我们得到以下结果。

定理3.4。 $\mathcal{G}$ 图类上的*RD*问题是*NP*完全的。

现在，我们分析 $\mathcal{G}$图类上GRD问题的复杂性。

引理14。 设 f 是一个最小权重的全局罗马支配函数。对于每个 $y \in B \cup R \cup S$, $f(y) \neq 2$。

证明。 考虑一个顶点 $s_i^1 \in S$。通过为 s_i^1赋予标签2，顶点s_i^2 和 s_i^3 在 G中未被覆盖。 s_i^1 在 G' 中覆盖的所有顶点，都被其他带有标签2的顶点覆盖。因此， f 的权重恰好增加了二。

考虑一个顶点 $r_i \in R$。即使我们为 r_i赋予标签2，也必须在 p_i、 q_i^1和 q_i^2中的一个顶点上赋予标签2。 r_i 在 G'中覆盖的所有顶点，都被其他带有标签2的顶点覆盖。因此，这导致权重至少增加一。

考虑一个顶点 $b_i \in B$。它在 A 中的每个邻点，要么被 $\{v, w, x\}$ 中的一个顶点覆盖，要么被 A 中的某个顶点覆盖。顶点 p_i 也要么被 p_i 自身覆盖，要么被 q_i^1 和 q_i^2 中的一个顶点覆盖。 b_i 在 G' 中覆盖的所有顶点，都被其他标签为 2 的顶点覆盖。因此，将标签 2 分配给 b_i 会使 f 的权重至少增加 1。

□

引理 15. f 在 $\{u, v, w, x\}$ 上的全局罗马支配函数的最小权重至少为 2。

证明。 由引理 14，我们知道顶点 v 和 x 都没有标签为 2 的非邻点。因此，必须给这两个顶点中的一个分配标签 2，这样另一个顶点才能有一个标签为 2 的非邻点。在 v 和 x 中被分配标签 2 的顶点也会覆盖 u。

□

引理 16. f 在 $H \in \mathcal{G}$ 上的全局罗马支配函数的权重至少为 $10l + 2$。

证明。 需要指出的是，引理 7、8、9、10 和11 对于全局罗马支配函数也成立。由引理 11，可得 $f(p_i) = 0$ 对每个 $i \in [4l]$均成立。重新考察引理 7、8和15 ，令 $p_i = 0$ 对每个$i \in [4l]$成立，可得图 f上的 $H \in \mathcal{G}$ 全局罗马支配函数的权重至少为 $10l + 2$。

□

引理 17。 对于图类 $\mathcal{G}$，存在一个权重恰为 $10l+2$ 的最小权全局罗马支配函数。

证明。 设 X4C 问题是一个是实例:
最小加权罗马支配函数 f 如下所示。

$$f(z)=\begin{cases}0, & \text{if } z\in\left(\{u,v,x\}\cup\bigcup\limits_{C_j\notin C'}\{a_j\}\cup B\cup P\cup\bigcup\limits_{i\in[4l]}\{q_i^2\}\cup R\cup S\right),\\ 1, & \text{if } z\in\emptyset,\\ 2, & \text{if } z\in\left(\{w\}\cup\bigcup\limits_{C_j\in C'}\{a_j\}\cup\bigcup\limits_{i\in[4l]}\{q_i^1\}\right)\end{cases}$$

f 的权重为 $10l+2$。每个标签为 0 的顶点都有一个邻点和一个标签为 2 的非邻点。因此，我们得出结论： f 是一个权重为 $10l+2$的全局罗马支配函数。

设 X4C 问题是一个否实例:
最小加权罗马支配函数 f 如下所示。

$$f(z)=\begin{cases}0, & \text{if } z\in(\{u,v,x\}\cup A\cup B\cup Q\cup S),\\ 1, & \text{if } z\in\emptyset,\\ 2, & \text{if } z\in(\{w\}\cup P\cup R)\end{cases}$$

f 的权重为 $10l+2$。每个标签为 0 的顶点都有一个邻点和一个标签为 2 的非邻点。因此，我们得出结论： f 是一个权重为 $10l+2$的全局罗马支配函数。

□

根据引理 16 和 17，我们有 $\gamma_{gR}(G)=10l+2$。因此，我们得到以下定理。

定理 3.5。 图类 $\mathcal{G}$ 上的 *GRD*问题可在线性时间内求解。

4. 受限图类

本节中，我们研究 GRD问题 的复杂性，并证明该问题在分裂图、弦二部图、最大度为五的平面二部图以及圆图上均为 NP完全。此外，我们还给出了适用于余图的线性时间算法。

4.1. 分裂图

本小节中，我们通过从精确 3-覆盖（精确三覆盖）归约，证明 GRD问题 在分裂图上是 NP完全的。

分裂图的定义如下。

定义 1. 图 $G=(V,E)$ 是一个分裂图，当且仅当其顶点集 V 可以划分为两个集合 V_1 和 V_2，使得由 V_1 诱导的图是一个团，而 V_2 是 G中的一个独立集。

文献中关于精确三覆盖的复杂性结果如下。

定理 4.1 ([15])。 精确 3-覆盖是 *NP* 完全的。

构造。设 $(X=\{x_1,x_2,\ldots,x_{3q}\},C=\{C_1,C_2,\ldots,C_t\})$ 是一个 X3C 实例，我们将其转换为 GRD问题的一个实例 $I=(G,k)$，如下所示。对于每个集合 $C_j\in C$，我们创建一个顶点 a_j；对于每个元素 $x_i\in X$，我们在 G 中创建一个顶点 b_i。我们还引入一个虚拟顶点 a_{t+1}。令 $A=\bigcup_{j\in[t+1]} a_j$ 和 $B=\bigcup_{i\in[3q]} b_i$。集合 A 中的顶点构成一个团。对于 A 中的每个顶点添加一个悬挂顶点。与 a_j 相邻的悬挂顶点记为 p_j。令 $P=\bigcup_{j\in[t+1]} p_j$。当且仅当 $x_i\in C_j$ 属于 X3C 实例时，我们在 a_j 与 b_i 之间添加一条边。至此，G 的构造完成。图 3 展示了一个示例。我们令 $k=q+t+3$。图G 是一个分裂图，其中 A 构成团，$B\cup P$ 是 G 中的一个独立集。

引理 18. (X,C) 是实例，当且仅当 I 具有一个权重为 $q+t+3$ 的全局罗马支配函数。

证明。 $(\Rightarrow)$ 设 $C'\subseteq C$ 是 X3C 实例的一个解。我们定义如下全局罗马支配函数 f。

$$f(z)=\begin{cases}0, & \text{if } z\in\left(\bigcup\limits_{C_j\notin C'}\{a_j\}\cup\bigcup\limits_{C_j\in C'}\{p_j\}\cup B\right),\\ 1, & \text{if } z\in\left(\{a_{t+1}\}\cup\bigcup\limits_{C_j\notin C'}\{p_j\}\right),\\ 2, & \text{if } z\in\left(\{p_{t+1}\}\cup\bigcup\limits_{C_j\in C'}\{a_j\}\right)\end{cases}$$

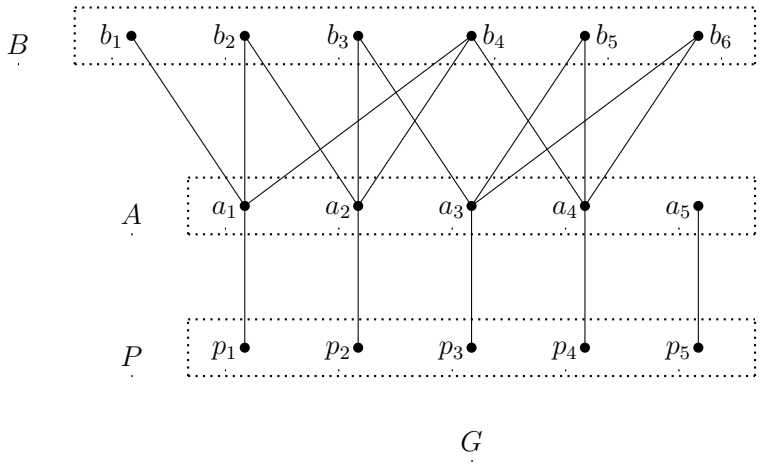


图 3：由一个 X3C 实例构造的 GRD问题约化实例： $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 和 $C = \{C_1 = \{1, 2, 4\}, C_2 = \{2, 3, 4\}, C_3 = \{3, 5, 6\}$ 以及 $C_4 = \{4, 5, 6\}\}$。 A 的顶点构成一个团，图中未予显示。

每个顶点 $u \in B$ 在 A 中都有一个标签为 2 的邻点，也有一个标签为 2 的非邻点 p_{t+1}。每个满足 $f(u) = 0$ 的顶点 $u \in A$，在 A中都有一个标签为 2 的邻点，也有一个标签为 2 的非邻点 p_{t+1}。考虑满足 $f(u) = 0$的顶点 $u \in P$。u 在A 中的唯一邻点标签为 2，且 u有一个标签为 2 的非邻点 p_{t+1}。因此，我们得出结论： f 是 G 上的一个权重为$q + t + 3$的全局罗马支配函数。

(⇐) 设 f是 G的一个权重为 $q + t + 3$的全局罗马支配函数。对于每个悬挂顶点 $p_j \in P$，我们有 $f(p_j) = 1$或 $f(a_j) = 2$。类似地，对于每个顶点 $b_i \in B$，对于某个顶点 $a_j \in N(b_i)$，要么 $f(b_i) = 1$，要么 $f(a_j) = 2$。因此， $A \cup B$的权重至少为 $2q$，而 $A \cup P$的权重至少为 $t + 1$。

现在，我们证明：当且仅当 B 中的每个顶点都标记为 0，且 A 中恰有 q 个顶点被标记为 2 时， f 才是最小权重。为导出矛盾，假设 B 中恰有三个顶点标记为 1，且 A 中有 $q - 1$ 个顶点标记为 2。在 P 中其余未被覆盖的 $t - q + 2$ 个悬挂顶点中， $t - q + 1$ 个被标记为 1，而一个悬挂顶点（设为 p_j）被标记为 2。将顶点 p_j 标记为 2，使其成为所有标记为 0 的顶点的一个标记为 2 的非邻点，但 a_j除外。由于 p_j 标记为 2，a_j 必须标记为 1。 f 的权重变为 $q + t + 5$，这高于

k 的值。容易看出，如果将 B 中多于三个顶点标记为 1，我们仍需要超过 $q+t+5$ 的总权重。因此，必须将 B 中的每个顶点都标记为 0。于是，A 中恰有 q 个顶点被标记为 2。

在 P 的 $t-q+1$ 个未被覆盖的悬挂顶点中，$t-q$ 被赋予标签 1，而一个悬挂顶点（例如 p_j）被赋予标签 2。由于 p_j 的标签为 2，a_j 必须被标记为 1。f 的权重变为 $q+t+3$。$\{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ 中被赋予标签 2 的顶点将对应于 X3C 实例中的 C'。 □

由于 G 是一个分裂图，借助定理 4.1 和引理 18，我们得到以下定理。

定理 4.2。 分裂图上的 *GRD*问题是 *NP*完全的。

4.2. 弦二部图、最大度为五的平面二部图和圆图

我们通过从 DS 问题进行归约，证明 GRD问题在弦二部图、最大度为五的平面二部图和圆图上是 NP完全的。

弦二部图和圆图的定义如下。

定义 2。 如果一个二分图中的每个长度至少为六的圈都有一条弦，则称其为弦二部图。

定义 3。 当且仅当存在一个相应的圆模型，使得其中的弦表示图的顶点，并且两条弦相交当且仅当对应的顶点相邻时，该图才是圆图。

与 DS 问题相关的已知复杂性结果如下。

定理 4.3 ([16, 17, 18])。 弦二部图、最大度为三的平面二部图以及圆图上的 *DS* 问题是 *NP*完全的。

构造。 设 $I=(G,k)$ 是 DS 问题的一个实例。我们将其转化为 GRD问题的一个实例 $I'=(G',3n+k)$，具体如下。对于每个顶点 $v_i \in V$，我们按如下方式附加一棵以 v_i 为根的树。我们创建两个顶点a_i 和 e_i，并使它们与 v_i相邻。我们引入一个顶点 b_i，并使其与 a_i相邻。我们创建两个悬挂顶点 c_i 和 d_i，并使它们与 b_i相邻。至此，G'的构造完成。更多细节参见图 4。

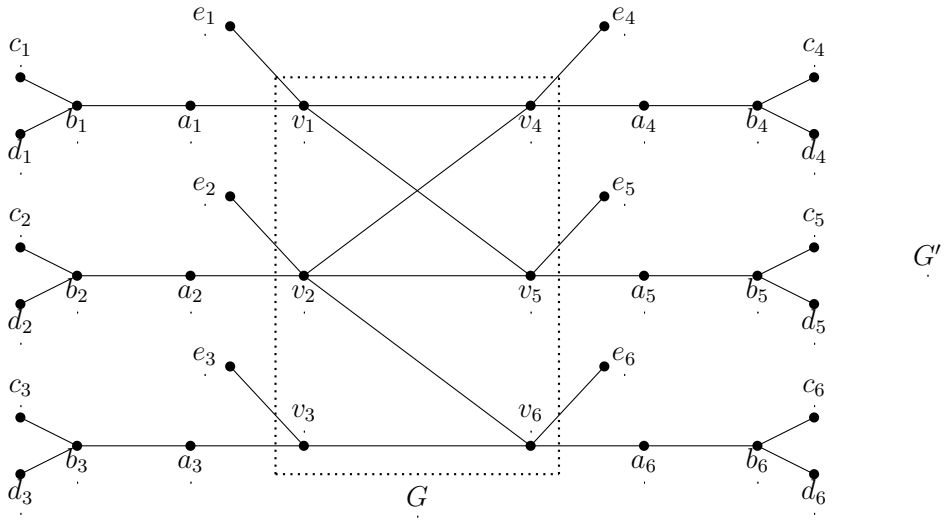


图 4：由 DS 问题实例得到的 GRD问题约简实例。

引理 19。 G 存在一个大小至多为 k 的支配集，当且仅当 G' 存在一个权重至多为 $3n + k$ 的全局罗马支配函数。

证明。 **(⇒)** 令 S 为一个大小不超过 k 的支配集。我们定义如下的全局罗马支配函数 f。

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{if } z \in \left(\bigcup\limits_{i\in[n]} \{a_i, c_i, d_i\} \cup \bigcup\limits_{v_i\in S} e_i \cup (V \setminus S) \right), \\ 1, & \text{if } z \in \left(\bigcup\limits_{v_i\notin S} \{e_i\} \right), \\ 2, & \text{if } z \in \left(S \cup \bigcup\limits_{i\in[n]} \{b_i\} \right) \end{cases}$$

$u \in V'$每个顶点 f都具有一个非邻点 $v \notin N(v)$，且该非邻点带有$f(v) = 2$ 于 G'。这是因为，如果我们考虑任意两个顶点 b_i 和b_j，$u \in V'$ 中的每个顶点要么与 b_i 不相邻，要么与 b_j不相邻。因此，我们只需讨论每个顶点 $u \in V'$ 是否具有一个邻点 $v \in N(u)$，使得 $f(v) = 2$。

- Each vertex in $\bigcup\limits_{i\in[n]} \{a_i, c_i, d_i\}$ has a neighbour b_i such that $f(b_i) = 2$.

- $\bigcup_{v_i \in S} e_i$ 中的每个顶点都有一个邻点 v_i，使得 $f(v_i) = 2$。

- 每个顶点 $u \in V \setminus S$ 都有一个邻点 $v \in N(u)$，使得 $f(v) = 2$。

因此，我们得出结论：f 是一个权重至多为 $3n + k$ 的全局罗马支配函数。

(⇐) 设 f 是一个权重至多为 $3n + k$ 的全局罗马支配函数，且 S 是一个支配集。

- $\bigcup_{i \in [n]} b_i$ 中的每个顶点都被赋予标签 2，其三个邻点 a_i、c_i 和 d_i 都被赋予标签 0。

- 此时，还剩下 $n + k$ 的权重。$\bigcup_{i \in [n]} \{v_i, e_i\}$ 中的每个顶点都尚未被覆盖。

- 顶点对 (e_i, v_i) 必须被赋予标签 (1, 0) 或 (0, 2)。对于至多 k 个这样的顶点对，我们将 v_i 标记为 2，将 e_i 标记为 0。对于其余至多 $n - k$ 个这样的顶点对，我们将 v_i 标记为 0，将 e_i 标记为 1。f 的权重为 $2k + 1(n - k)$，即 $n + k$。

- 顶点集 $V' \subseteq V$ 中在 f 被赋予标签二的部分，对应于 G 中的支配集 S，其大小至多为 k。

□

引理20。如果 G 是

1. 弦二部图，则 G' 是弦二部图。2. 平面二部图且最大度为三，则 G' 是最大度为五的平面二部图。3. 圆图，则 G' 也是圆图。

证明。**1. 弦二部图**。在 G' 的构造中，为每个顶点 $v_i \in V$ 添加的构件都是一棵树，涉及顶点 a_i、b_i、c_i、d_i 和 e_i。由于构件内的顶点之间不会形成圈，因此不会引入长度大于 4 的圈。由于 G 是弦二部图，G' 仍然是弦二部图。

2. **最大度为 5 的平面二部图**。 每个构件都是一棵最大度为 3 的树。向 G' 中的顶点 v_i 添加与 a_i 和 e_i相连的边后，其度为 5。 G' 的平面性得以保持。由于为任何顶点 $v_i \in G'$ 添加构件都不会引入圈，因此 G' 的二部性得以保持。因此， G' 是一个最大度为 5 的平面二部图。

3. **圆图**。 在构造中，每个顶点 v_i 对应的构件仅限于 v_i。该构件形成一棵以 v_i为根的树，并且不与 G 中的其他顶点及其各自的构件发生交互。在圆表示中，可以在 v_i 对应的弦附近添加分别对应于 a_i、 b_i、 c_i、 d_i、 e_i 的弦来表示该构件，使这些弦不与任何其他弦相交。因此，所得图 G' 也是一个圆图。

□

定理 4.4。 在弦二部图、最大度为五的平面二部图和平面圆图上，*GRD*问题是*NP*完全的。

4.3. 余图

在本小节中，我们给出一种线性时间算法，用于计算余图的全局罗马支配数。

余图的定义如下。

定义 4。 余图是不包含任何四个顶点诱导路径的图。

如果 G 是一个连通余图，则 $\gamma_R(G) \leq 4$ [3]。然而， $\gamma_{gR}(G)$ 不一定有界。例如，完全图 K_n 是一个余图，并且$\gamma_{gR}(K_n) = n$。

引理2 1 （[19]）。如果 G是一个余图，则以下情况之一成立。

1. G 至多有一个顶点。2. G 是两个余图 G_1 和 G_2的不交并，即 $G = G_1 \cup G_2$。3. G 是两个余图 G_1 和 G_2的联图，即 $G = G_1 \vee G_2$。

余图 G 的余树 T_G 是一棵有根树，其中每个内部顶点要么是 $\cup$（并）类型，要么是 $\vee$ （联图）类型。 T_G 的叶子对应于余图 G的顶点。

定理 4.5。 *[3]* 如果 G 是一个余图，那么 $\gamma_R(G)$ 可以在线性时间内计算。

定理 4.6. *[20]* 若 G 是一个至少有两个阶数不小于 *2* 的连通分量的非连通图，则 $\gamma_{gR}(G) = \gamma_R(G)$。

引理 22. 设 G_1 和 G_2 是两个余图，且它们各自都有一个至少包含两个顶点的连通分量，并且 $G = G_1 \cup G_2$。那么

1. $\gamma_{gR}(G) = \gamma_R(G) = \gamma_R(G_1) + \gamma_R(G_2)$
2. $\gamma_R(\overline{G}) = \gamma_R(\overline{G}_1 \vee \overline{G}_2)$

证明. 由于 G是非连通图，且由两个连通分量组成， G_1 和 G_2，每个分量都至少有两个顶点。由定理4.6 可知 $\gamma_{gR}(G) = \gamma_R(G)$。若 G 包含两个连通分量 G_1 且 G_2 使得它们各自都有一个至少包含两个顶点的连通分量，那么不难看出 $\gamma_R(G) = \gamma_R(G_1) + \gamma_R(G_2)$。

引理的第二部分由以下事实得出： G 的补图是各个图 G_1 和 G_2的补图的联图。 □

若 G_1 或 G_2 （不失一般性，设为 G_1）没有包含至少两个顶点的连通分量，我们考察 G_2 是否恰好包含一个至少有三个顶点的连通分量，且其余连通分量都是孤立顶点。若 G_2 属于这种情形，则 $\gamma_{gR}(G) = \gamma_R(G) + 1$；否则$\gamma_{gR}(G) = \gamma_R(G)$。若 G_1 和 G_2 都没有包含至少两个顶点的连通分量，则 $\gamma_{gR}(G) = \gamma_R(G)$。

引理 23. 设 G_1 和 G_2 是两个各自至少有两个顶点的余图，且 $G = G_1 \vee G_2$。那么

1. $\gamma_{gR}(G) = \gamma_R(\overline{G_1}) + \gamma_R(\overline{G_2})$
2. $\gamma_R(\overline{G}) = \gamma_R(\overline{G_1}) + \gamma_R(\overline{G_2})$

证明. 我们知道 $\gamma_{gR}(G) = \gamma_{gR}(G)$，其中 G 是两个图 G_1 和 G_2的不交并。因此，根据引理 22，可得

$$\gamma_{gR}(G) = \gamma_{gR}(\overline{G}) = \gamma_R(\overline{G}) = \gamma_R(\overline{G_1}) + \gamma_R(\overline{G_2})$$

由于 $\overline{G}$ 是非连通的，且由两个连通分量 G_1 和 G_2 构成，因此 $\gamma_R(\overline{G}) = \gamma_R(G_1) + \gamma_R(G_2)$。 □

注意，在引理22 和 23中，如果至少一个图 G_1 和 G_2恰好由一个顶点组成，那么 G 要么包含一个全称顶点，要么是非连通的。在这种情况下，可以直接计算 $\gamma_{\not R}(G)$、 $\gamma_R(G)$、$\gamma_{gR}(G)$和 $\gamma_{gR}(G)$。

根据引理22 和23，我们得到以下定理。

定理4.7。若 G 是余图，则可在线性时间内计算 $\gamma_{gR}(G)$。

5. 结论

本文研究了GRD问题的复杂性，并得到了若干有趣的结果。我们给出了若干图类，以区分GRD问题与RD问题的复杂性。我们证明，GRD问题在分裂图、弦二部图、最大度为五的平面二分图以及圆图上均为NP完全问题。另一方面，我们提出了一种用于余图上GRD问题的线性时间算法。

最后，我们提出以下关于GRD问题的未解决问题。

- 该问题在区间图、块图和强弦图上的复杂性如何?

- 由于已知该问题以权重为参数时是 W[2]-难的，那么在分裂图和二分图上它仍然是 W[2]-难的吗?

参考文献

[1] I. Stewart，《保卫罗马帝国！》，《科学美国人》281 (6) (1999年) 136–138。[2] C.-H. Liu，G. J. Chang，强弦图上的罗马支配，《组合优化杂志》26 (3) (2013) 608–619。[3] M. Liedloff，T. Kloks，J. Liu，S.-L. Peng，若干类图上的罗马支配高效算法，《离散应用数学》156 (18) (2008) 3400–3415。[4] H. Fernau，罗马支配：参数化视角，载于：J. Wie- dermann，G. Tel，J. Pokorný，M. Bieliková，J. Štuller（编），《SOFSEM 2006：计算机科学理论与实践》，施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，2006年，第262–271页。

[5] A. Mohanapriya，P. Renjith，N. Sadagopan，罗马 k-支配：困难性、近似与参数化结果，载于：算法与计算国际会议及研讨会，施普林格，2023年，第343–355页。[6] P. Ashok，G. K. Das，A. Pandey，K. Paul，S. Paul，按到簇的距离参数化的（独立）罗马支配，载于：组合优化与应用国际会议，施普林格，2024年，第157–169页。[7] Z. Duan，H. Jiang，X. Liu，P. Wu，Z. Shao，独立罗马支配：树上的复杂性与线性时间算法，Symmetry 14 (2) (2022年) 404。[8]P. Chakradhar，P. V. S. Reddy，图中罗马 {3}支配的算法方面，RAIRO-运筹学 56 (4) (2022年) 2277–2291。[9] K. Mann，H. Fernau，完美罗马支配：枚举与参数化方面，Algorithms 17 (12) (2024年) 576。[10] P. Chakradhar，P. V. S. Reddy，图中全罗马 {2}支配的算法方面，Commun. Comb. Optim. 7 (2022年) 183–192。[11] P. Chakradhar，图中受限罗马支配的复杂性方面，《离散数学、算法与应用》15 (03) (2023) 2250096。[12] B. Panda，P. Goyal，图中全局罗马支配的困难性结果，《离散应用数学》341 (2023年) 337–348。[13] D. B. West，《图论导论》，第2版，培生，金奈，2015年。[14] T. Kikuno，N. Yoshida，Y. Kakuda，立方平面图中支配集问题的 NP 完全性，IEICE Transactions 6 (1980年) 443–444。[15] D. S. Johnson，M. R. Garey，《计算机与难解性：NP完全性理论指南》，W. H. Freeman，1979年。

[16] H. Müller，A. Brandstädt，弦二部图上的斯坦纳树和支配集的 NP完全性，Theoretical Computer Science 53 (2-3) (1987) 257–265。[17] I. E. Zvervich，V. E. Zverovich，支配完美图的诱导子图刻画，Journal of Graph Theory 20 (3) (1995) 375–395。[18] J. M. Keil，圆图中支配问题的复杂性，《离散应用数学》42 (1) (1993) 51–63。[19] D. G. Corneil，Y. Perl，L. K. Stewart，余图的线性识别算法，SIAM Journal on Computing 14 (4) (1985) 926–934。[20] M. Atapour，S. M. Sheikholeslami，L. Volkmann，树上的全局罗马支配，Graphs and Combinatorics 31 (4) (2015年) 813–825。