arXiv:2601.09198v1 [econ.TH] 14 Jan 2026

双边交易网络的可信纳什谈判解 *

Kang Rong† Qianfeng Tang†

2026年1月15日

摘要

我们研究具有可转移效用的网络约束双边匹配市场中的剩余分配。我们提出一种新的解概念——可信议价解。该解通过以下要求细化稳定性：对于每一对匹配的买方和卖方，剩余应按照纳什议价解进行分配，其依据是可信外部选择，即移除双方之间的边后所形成的子市场中某个稳定结果下双方的收益。我们确立了可信议价解的一般性质，证明了其存在性，并基于关键连边的概念，给出了单位剩余情形下的完整刻画。

关键词：分配博弈、谈判、二部网络、稳定性**JEL分类代码**：C78、D85

*我们感谢Gaoji Hu、Herve Moulin、Jie Zheng，以及2024年上海微观经济学研讨会、华中科技大学2024年HEAT研讨会和西南财经大学2026年iES机制设计研讨会的与会者提出的宝贵意见并参与讨论。本项目得到国家自然科学基金委员会资助（项目编号：72273085和72033004）。

†上海财经大学经济学院。电子邮箱：rong.kang@mail.shufe.edu.cn（Rong），tang.qianfeng@mail.shufe.edu.cn（Tang）。

1 引言

我们考虑一个由有限名买方和有限名卖方组成的市场。每名卖方拥有一个不可分物品，而每名买方恰好需求一个单位。交易机会受到网络的约束：只有当买方和卖方在网络中相连时，双方才能进行交易。网络结构可以反映交换中的信息、制度或物理约束。除标准的交换市场外，该框架还涵盖一系列应用，包括带有转移支付的婚姻市场、劳动力市场以及其他双边匹配环境。

简言之，我们研究的市场是Shapley 和 Shubik (1972年) 提出的分配博弈，且受限于交易网络。市场的一个结果指定了买方与卖方之间的匹配，以及每位代理人的收益。结果的一项自然要求是稳定性：网络中相连的买卖双方不应存在这样一对，他们仍未匹配，却能通过彼此匹配并适当分配交易剩余而共同获益。稳定性对匹配对之间施加约束，并确保不存在阻挡偏离。然而，对于每个匹配对内部的剩余分配，它只施加较弱的限制。具体而言，广泛的收益分配（包括高度不平等的分配）都可能满足稳定性。[1]

这一观察促使我们关注匹配的买卖双方如何就交易产生的剩余进行谈判。当特定双方之间的谈判破裂时，双方都可能转而寻找网络中可联系的其他合作对象，从而实现外部选择。这些外部选择由网络结构内生决定，并在塑造谈判结果方面发挥关键作用。因此，理解外部选择如何产生以及如何影响剩余分配，是

[1]详见Shapley 和 Shubik (1972年) 以及 Rochford (1984)。

分析网络匹配市场的必要条件。[2]

我们对双边谈判建模如下。当买方i与卖方j匹配并开始谈判时，他们的外部选择由移除i与j之间的边后得到的子市场决定。直观地说，如果i与j之间的谈判破裂，每个代理人都可以在网络中寻找其他交易伙伴，但双方不能再彼此交易。我们称买方i和卖方j的外部选择(d_i,d^j)是可信的，如果它们分别等于i和j在该子市场某个稳定结果中的收益。因此，施加可信性要求，相当于假设这两位代理人对该子市场将出现何种结果达成一致，并且这一结果是稳定的。

如果一个结果满足两个条件，就称其为该市场的可信议价解。第一，该结果是稳定的。第二，对于每一对匹配的买卖双方，剩余分配由针对某一组可信外部选择的纳什议价解决定。也就是说，每位参与者获得其外部选择，剩余部分由买方和卖方平分。在此定义中，第二个条件对每一匹配对内部的剩余分配施加可辩护性要求，而第一个条件则对不同匹配对之间施加无阻挡偏离约束。

我们的分析首先确立了若干一般结果。首先，我们证明，如果一对参与者在某个最优匹配中匹配——也就是说，该匹配使总剩余最大化——那么，对于他们可能提出的任意一对可信外部选择(d_i,d^j)，这两个外部选择之和不会超过匹配这两位参与者所产生的剩余。因此，他们之间的讨价还价问题总是定义良好的。

[2]参见 纳什 (1953年), Harsanyi(1956年), Harsanyi (1977年), 以及 Crawford and Rochford (1986年) 关于谈判中可变且内生的外部选择的讨论。

其次，我们证明，如果某个收益向量属于某个可信议价解，那么将它与任意一个最优匹配相结合后，它仍属于一个可信议价解。这一结果意味着，与稳定性一样，可信议价解主要约束的是收益分配，而非参与者匹配的具体方式。

第三，我们证明，在任何稳定结果中，如果某个匹配对并非市场的关键连接，那么该匹配对内部的剩余分配始终可以在某一对可信外部选择下，合理地视为纳什议价解。如果一条边在每个最优匹配中都被匹配，则称其为关键边。该结果意味着，要验证某个稳定结果是否符合可信议价解，只需考察匹配的关键边上的剩余分配。

我们的主要结果包括单位剩余情形下的一个存在性结果和一个刻画结果。为证明存在性，我们证明，将买方最优和买方最劣稳定收益向量取平均，并与任意最优匹配配对，始终构成一个可信议价解。我们将这一结果称为对称妥协解。为说明每个匹配对i和j内部的剩余分配，每个代理人都将其在移除边ij后形成的子市场中所能获得的最优稳定收益，减去一个共同的妥协量 δ，作为自己的外部选择。我们证明，这样的妥协量始终存在，从而确保由此产生的主张构成可信外部选择。

我们的刻画结果表明，在每个匹配对恰好产生一个单位剩余的市场中，一个结果是可信议价解，当且仅当它是稳定的，并且对于每条匹配的关键连边 ij，i 和 j 均获得 1/2。根据我们先前的结果，只需在匹配的关键连边上核实剩余分配即可。该刻画依赖于一个关键观察：如果一条匹配的边 ij 是关键的，那么从网络中移除这条边后，对于 i 和 j 中的每一个，都存在一种最优

匹配，使该代理人保持未匹配。因此，子市场中每个代理人的稳定收益——以及外部选择——均为零。我们还提供了一种图论程序，用于识别关键连边。具体而言，我们首先对网络应用 Edmonds–Gallai 分解，然后进一步将完全匹配分量分解为基本子图。一条边是关键的，当且仅当它自身构成一个初等子图。

我们的研究与以下经典成果最为密切相关：Shapley 和 Shubik（1972年）、Rochford （1984）、Cook 和 Yamagishi （1992）以及Crawford and Rochford （1986年）。我们研究的市场本质上是Shapley 和 Shu- bik（1972年）意义上的一种指派博弈，即一种具有可转移效用的匹配问题。关于指派博弈的许多基础性成果——包括最优匹配的存在性与结构、核心以及竞争均衡——均源自Shapley 和 Shubik （1972年）。

Rochford （1984）指出，指派博弈中的稳定结果集合通常很大，并且可能包含收益高度不平等的结果。为减少这种不确定性，她提出了对称成对谈判（SPB）解，该解从核心中选取更加平等的结果。后来，Cook 和 Yamagishi （1992）在社会学文献中提出了一个等价概念，即平衡结果。这两个概念都假设，当一对匹配的参与者进行谈判时，他们的外部选择由其最大偏离收益决定，同时将其他所有参与者的收益视为固定不变。特别是，某一对参与者之间的谈判破裂不会影响其他参与者的收益或预期。这一假设与我们的假设根本不同：在我们的框架中，外部选择由移除边后产生的子市场中的稳定结果决定。我们将在第2.3小节详细讨论 SPB 解和平衡结果。

据我们所知，CrawfordandRochford（1986年）首次通过明确考虑这样一个子市场来定义外部选择：在该子市场中，匹配给定参与者对所产生的剩余被消除。

他们递归地定义了议价均衡的概念：在每个匹配对中，外部选择必须与相应子市场中某个谈判均衡的收益一致。此外，他们的概念要求任何参与者都没有激励偏离当前安排，转而与其他任何参与者进行谈判。相比之下，我们对可信议价解的定义并非递归的，因为外部选择取自子市场的稳定结果。此外，Crawford and Rochford（1986年）所提出的不偏离要求，在概念上不同于稳定性所施加的不偏离要求。

我们提出的可信议价解是一种合作性概念；它抽象掉了非合作模型中至关重要的议价协议细节和策略复杂性。研究网络中非合作讨价还价的重要文献包括 Corominas-Bosch (2004)、Polanski (2007)、Abreu andManea (2012a)，以及 Abreuand Manea(2012b。[3] 其中，Corominas-Bosch (2004) 和 Polanski(2007) 研究了相对较为集中的动态讨价还价过程，其集中性体现在：同时交易或提出报价的机会由最大匹配决定。相比之下，Abreu and Manea (2012a) 和 Abreu and Manea(2012b) 采用了更为去中心化的方法，假设每个时期随机选择一个相连的一对进行讨价还价。 Manea (2016) 对这些模型及其均衡预测进行了全面比较。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们介绍符号说明以及稳定结果和平衡结果的经典概念。在第 3 节中，我们提出可信议价解，并在第 4 节中对这一概念进行分析。最后，我们在第 5 节作出总结。

[3]所有这些论文都通过假设每条边恰好产生一个单位的剩余，来研究网络结构。

2 预备知识

2.1 符号说明

双边交易网络中有有限个买方 I 和有限个卖方 J，我们将其称为市场。这些买方和卖方也称为参与者。每个卖方恰好有一个单位的物品可供出售，每个买方恰好需求一个单位的物品。如果买方 i 从卖方 j 处购买物品，则会产生剩余 $v_{ij} \geq 0$。在市场中，买方和卖方通过无向二部网络（图）G 相连，我们将其定义为 $I \times J$ 的子集。如果 $(i, j) \in G$，则称 (i, j) 为网络 G 的一条边，并称买方 i 和卖方 j 通过边 (i, j) 由网络 G 相连。在不致引起混淆时，我们简单地用 ij 表示边 (i, j)，并用 $G-ij$ 表示子图 $G\backslash\{(i, j)\}$。同样地，我们用 $G_{-i} \equiv \{(i', j') \in G : i' \neq i\}$ 表示 G 的子图，其中参与者 i 的所有边均被移除；我们用 $G_{-i,-j} \equiv \{(i', j') \in G : i' \neq i, j' \neq j\}$ 表示 G 的子图，其中参与者 i 和参与者 j 的所有边均被移除。

为方便起见，我们将市场记为 (G,v)，其中 $v \equiv (v^{ij})_{i\in I, j\in J}$。在市场中，买方 i 只有在与卖方 j 相连时才能向其购买商品，即仅当 $ij \in G$时。对于$ij \in G$，我们也可以将 v^{ij} 称为边 ij 的估值。当每个买方都与每个卖方相连时，该市场就表示一个 Shapley 和 Shubik（1972年(1972)）的分配博弈，其估值矩阵为 v。

匹配是一个一一函数 $\mu : I \cup J \to I \cup J \cup \{\varnothing\}$，满足：(i) 对所有 $i \in I$，$\mu(i) \in J \cup \{\varnothing\}$；(ii) 对所有 $i \in I$、$j \in J$，$\mu(i) = j$ 当且仅当 $\mu(j) = i$；以及 (iii) 仅当 $ij \in G$ 时，$\mu(i) = j \in J$。对于任意买方 i 和卖方 j，如果 $\mu(i) = j$，我们称他们通过 μ匹配。如果对于 $k \in I \cup J$，$\mu(k) = \varnothing$，则称代理人 k 未匹配。

每个匹配 μ 也可以表示为 G 中的互不相交的边集合，这些边是其匹配的边。如果 $\mu(i) = j$，我们也记作 $ij \in \mu$。

市场(G, v) 的一个结果是一个有序对(μ, x)，其中 μ 是匹配，$x \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$是一个收益向量。在全文中，我们只考虑可行的结果。结果(μ,x) 是可行的，当且仅当x 是由 μ产生的总剩余的分配，即

$$\sum_{i \in I} x_i + \sum_{j \in J} x_j = \sum_{ij \in \mu} v_{ij}.$$

2.2 稳定结果

定义 1。 结果(μ,x) 称为稳定的，如果对所有 $i \in I, j \in J$：

1. $x_i, \ x_j \geq 0$; *2.* $x_i + x_j \geq v^{ij}, \ \forall ij \in G$。

如果(μ,x) 是一个稳定结果，那么对于任意匹配对ij，$x_i + x^j = v^{ij}$；对于所有未匹配代理人k，$x_k = 0$。

如果一个匹配 μ 所产生的总剩余 $\sum_{ij \in \mu} v^{ij}$在所有匹配中最高，则称该匹配为**最优的**。众所周知，任何稳定结果中的匹配都是最优匹配；稳定结果中的收益向量集合与核心以及竞争均衡收益向量集合相同。此外，如果 μ 是任意一个最优匹配，且x 是任意一个稳定结果的收益向量，那么(μ,x) 也是一个稳定结果。因此，如果某个代理人在任何最优匹配中都未匹配，那么她在所有稳定结果中的收益均为零。

有关.....的详细信息 有关这些结果，请参见Shapley 和 Shubik (1972年) 或 Roth 和

Sotomayor (1990).[4]

例1。 假设 $I = \{1,3\}$、$J = \{2,4\}$、$G = \{12,23,34\}$，且对于 G 的所有边，$v_{ij} = 1$。

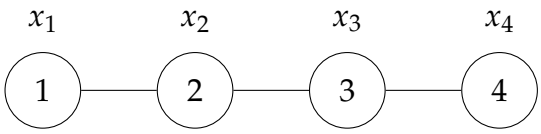

图1：四个参与者由一条线连接

那么，(μ, x) 是稳定结果，当且仅当 $\mu = \{12,34\}$，且 x 满足

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 1, x_2 + x_3 \geq 1.$$

特别是，$(0,1,0,1)$ 和 $(1,0,1,0)$ 都是稳定结果中的收益向量。这意味着在稳定结果中，匹配参与者之间的收益分配可能极不公平。

2.3 平衡结果

在下一节介绍我们的概念之前，我们先回顾一下由 Rochford (1984) 和Cook 和 Yamagishi (1992) 提出的平衡结果概念。该概念从稳定结果中选出匹配参与者之间剩余分配更为均衡的结果。其定义将纳什议价解推广到了双边交易网络。

假设买方 i 与卖方 j 就其剩余 v^{ij}进行谈判，外部选择为 d_i 和d_j，分别为，其中 $d_i + d_j \leq v^{ij}$。纳什谈判解（纳什，1950）为二者之间的

[4]另请参阅 N ´u˜nez 和 Rafels （2015年）了解分配市场的最新综述。

它们记为 纳什议价解$(v^{ij};d_i,d^j)$，是一个有序对 (x_i, x^j)，满足 [5]

$$x_i = d_i + \frac{1}{2}(v_{ij} - d_i - d_j);$$
$$x_j = d_j + \frac{1}{2}(v_{ij} - d_i - d_j).$$

平衡结果是一个稳定结果（μ, x），对于每个匹配对 ij $\in \mu$，其收益 x_i 和 x^j 按照纳什议价解对 v^{ij} 进行分配，其中每个代理人 k $\in$ {i, j} 的外部选择 d_k 是其通过偏离所能获得的最大收益。定义 2（Rochford，1984；Cook 和 Yamagishi，1992）。若对每个 ij $\in \mu$，都有 (x_i, x^j) = 纳什议价解(v^{ij}; d_i, d^j)，则稳定结果（μ, x）是平衡结果，其中对每个 k $\in$ {i, j},

$$d_k = \max\left\{0, \max_{kl \in G_{-ij}} (v_{kl} - x_l)\right\}.$$

根据定义，只要 (μ,x) 是稳定的，<style id='i i^j 和 j 的外部选择之和，即 $d_i + d^j$，就不超过 v^{ij}。

一个等价概念称为对称双边谈判（SPB）分配，早先由Rochford (1984) 针对分配博弈提出。 Rochford (1984) 将 SPB 分配集合刻画为核（Davisand Maschler，1965）与核心（即稳定结果集合）的交集，同时也将其刻画为重新议价过程的不动点集合。后来，Driessen (1998) 证明，对于分配博弈，核实际上是核心的子集。因此，SPB 分配集合（即平衡

[5]在我们的线性效用设定中，纳什议价解与直观的“差额平分”规则一致，这一规则自古代以来一直沿用；例如，参见亚里士多德关于正义的论述（亚里士多德，2004，第五卷第四章）以及 Aumann 和 Maschler 关于争议索赔的论述（Aumann 和 Maschler，1985）。

结果）与核一致。[6]

例2。 让我们重新考察例*1*中的市场，其中四名参与者由一条线相连。在这个市场中，结果(μ, x)是平衡结果，当且仅当 $\mu = \{12,34\}$ 且 $x = (1/3, 2/3, 2/3, 1/3)$。

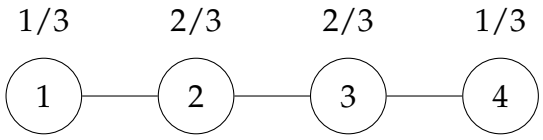

图2：平衡结果收益

当代理人1和2进行议价时，根据平衡结果的定义，买方1的外部选择（即她偏离的最大收益）为0，而卖方2的外部选择为 $1 - x_3 = \frac{1}{3}$。在这些外部选择下，纳什议价解$(v_{12}; d_1, d_2) = (x_1, x_2)$。同理，纳什议价解$(v_{34}; d_3, d_4) = (x_3, x_4)$。

在上述示例中，当卖方 2 通过声称如果偏离并与买方 3 匹配，她将获得 1/3 的收益来威胁买方 1 时，买方 1 应当认为这一威胁**不可信**。这是因为，如果卖方 2 确实与买方 1 解约，她（以及买方 1）将面临子市场（G_{-12}、v），在该子市场中，卖方 2 唯一的稳定结果收益为 0。

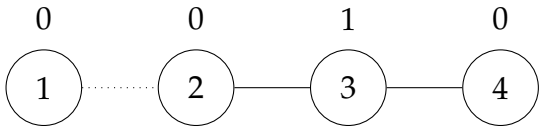

图3：图G_{-12}及稳定结果收益

[6]Roth 和 Sotomayor (1988) 证明了 SPB 分配的集合构成一个格。另请参见Kleinberg 和 Tardos (2008年)，了解平衡结果的计算刻画。

3 可信的谈判解

3.1 定义

固定一个市场（G、v）。假设买方i 和卖方j 已经匹配，并决定根据纳什议价解来分配其剩余v^{ij} 。一旦他们同意各自的外部选择d_i 和d^j，他们将达成分配NBS（v^{ij}；d_i、d^j）。

然而，鉴于i 和j 属于一个双边交易网络，他们的外部选择——即他们预期在谈判破裂时能够获得的收益——取决于他们对(G^{-ij},v)子市场中将发生什么的预期。我们对i 和j 关于各自外部选择的预期作出如下可信性假设。

定义 3. 当参与者 i 和 j 组成的匹配对就如何分配 v^{ij} 进行谈判时，如果其外部选择 d_i 和 d^j 分别是(μ', x') 这一(G^{-ij},v)子市场稳定结果中的相应收益，则称这两个外部选择（共同）可信。

也就是说，i 和j 持有相同观点：如果他们的谈判失败，他们都将面对(G^{-ij},v) 这一子市场，且该市场将达成稳定结果。因此，他们的外部选择应当是该稳定结果中的收益。当(G^{-ij},v)中存在多个稳定结果时，i 和j 可以认为其中任何一个都会实现，但他们必须就同一个结果达成一致。

定义 4。　　如果市场$(G,\ v)$ 的结果$(\mu,\ x)$ 是一个可信议价解，那么

1. 它是稳定的；并且

2. 对每个 $ij \in \mu$，他们的分配（$x_i,\ x^j$）是合理的（依据可信外部选择下的纳什谈判

外部选择）：存在可信的外部选择 d_i 和 d^j，使得

$$(x_i, x_j) = NBS(v_{ij}; d_i, d_j).$$

在此定义中，第二个条件要求，在(μ,x)处，任意匹配对i 和j 之间的分配(x_i,x^j)，都能够在某些可信外部选择下被合理地视为纳什议价解。由于第二个条件是分别针对各匹配对提出的，因此它无法确保匹配对之间形成的分配满足稳定性，也就是说，参与者仍可能有动机偏离。在满足第二个条件的结果(μ,x) 中，如果参与者j 有利可图的偏离，那么这将促使i 和j 就一组对j更有利的新可信外部选择(d'_i,d'_j) 达成一致，进而证明一种新的分配是合理的，使j通过谈判获得的份额增加。正是这种动态促使我们对(μ,x)施加稳定性要求，即第一个条件。

3.2 说明性示例

在本小节中，我们用三个简单的网络来说明可信谈判解。稍后，在示例6中，我们将介绍一个更大的网络，其中包含了这些简单网络的所有要素。

示例3. 让我们重新来看一下示例1 和2中讨论的市场：四位参与者通过一条线连接，每条边都产生一个单位剩余。当且仅当 $\mu = \{12, 34\}$ 且 $x = \{1/2, 1/2, 1/2, 1/2\}$时，结果$(\mu, x)$ 是一个可信议价解。

为说明这一点，考虑买方1 与卖方2之间的谈判。注意，在 G_{-12} 中，卖方2唯一的稳定收益是0。因此，$d_1 = d_2 = 0$，从而 $NBS(v_{12}; d_1, d_2) = (1/2, 1/2)$。3 与4 之间的谈判也可以用同样的方法验证。最后，这一结果是稳定的。

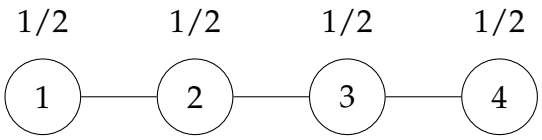

图4：可信议价解的收益

这个市场也凸显了可信议价解与平衡结果之间的差异；后者预测的收益向量为$(1/3, 2/3,2/3,1/3)$（见图2）。

例4。 假设 $I = \{1,3\}$， $J = \{2\}$， $G = \{12,23\}$，且对于 G 的所有边，$v_{ij} = 1$。那么 (μ, x) 是可信议价解，当且仅当它是稳定结果，也就是说 $\mu = \{12\}$或 $\{23\}$，且 $x = \{0,1,0\}$。

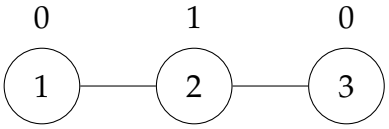

图5：可信议价解的收益

下面来看唯一稳定结果收益向量如何成为可信议价解的一部分。假设 $\mu = \{12\}$。分配 $(x_1, x_2) = (0,1)$ 可以被视为买方 1 和卖方 2之间的纳什议价解，其外部选择为 $(d_1, d_2) = (0,1)$。这对外部选择是网络 G_{-12}中对卖方 2 最有利的稳定结果的一部分。

如果买方 1 和卖方 2 转而同意另一对可信外部选择，$(d_1', d_2') = (0,0)$，那么他们的分配将为 $(x_1', x_2') = (1/2,1/2)$。鉴于未匹配的代理人——买方3——获得 0，所产生的结果并不稳定：卖方 2有动机与买方3重新匹配。这种偏离威胁会促使买方 1 接受对卖方 2更有利的可信外部选择，最终，$d_2 = 1$。

例5。 设 $I = \{1,3\}$、$J = \{2,4\}$、$G = \{12,23,34,41\}$ 以及 $v_{ij} = 1$ 对于 G 的所有边均成立。那么 (μ, x) 是可信议价解，当且仅当它是稳定结果，即

$\mu = \{12, 34\}$ 或 $\{14, 23\}$，且 $x = \{\alpha, 1-\alpha, \alpha, 1-\alpha\}$ 对于某个 $\alpha \in [0, 1]$成立。

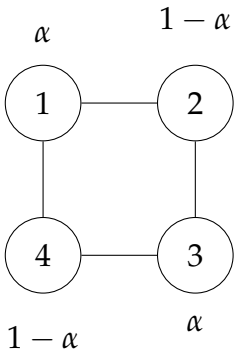

图6：由正方形连接的四位参与者

对于这个市场，平衡结果集合与可信议价解集合一致。

3.3 关于递归性的讨论

递归议价解通过将解本身应用于子市场来定义外部选择，而我们的概念则将子市场的稳定结果视为基本要素。这样可以避免递归，并得到一种更直观、更易处理的可信性概念。

解概念旨在预测市场中可能出现的结果。在定义可信议价解时，我们仅对参与者的行为施加温和且标准的假设。具体而言，我们假设双边议价遵循纳什议价解，并且当匹配参与者 i 和 j之间的谈判破裂时，他们预期子市场 (G^{-ij}, v) 将以稳定结果得到解决。重要的是，不同于 Crawford and Rochford(1986年)递归定义的议价均衡，我们的方法不要求参与者预见或就解概念本身达成一致——

无论是在原市场还是在相关子市场中，都是如此。

从实践角度来看，将递归要求强加于我们的概念，也会导致严重的存在性问题。举例来说，考虑示例 4中的市场。若结果 (μ, x) 稳定，则必有 $\mu = \{12\}$ 或 $\{23\}$，且 $x = (0, 1, 0)$。以$\mu = \{12\}$ 为例。若用子市场 (G_{-12},v)的解来定义参与者1和2的外部选择，那么必然有 $d_1 = 0$ 且 $d_2 = 1/2$。这些外部选择无法通过纳什谈判为收益分配 $(x_1, x_2) = (0, 1)$ 提供依据，这意味着不存在任何递归定义的解会从稳定结果集合中选出结果。这个例子表明，递归可能导致解集为空，而我们非递归的可信性概念则始终定义良好。

4 结果

4.1 一般结果

我们首先证明，若买方 i 和卖方 j 能够在市场 (G,v)的任一最优匹配中匹配，则他们任意一对可信外部选择 d_i 和 dj之和不超过 v^{ij}。这确保了他们之间的议价问题定义良好。

引理1. 假设 $ij \in \mu$ 对于市场(G,v)的某个最优匹配 μ 成立。若(μ', x') 是子市场(G^{-ij},v)的一个稳定结果，那么

$$x'_i + x'_j \leq v_{ij}.$$

证明。 反设$x'_i + x'_j > v^{ij}$。由于(μ',x') 是子市场(G^{-ij}, v)的一个稳定结果，它也是市场(G,v)的一个稳定结果。鉴于 μ 是一个最优

匹配，(G,v)的(μ, x') 也是(G,v)的一个稳定结果，这意味着$x'_i + x'_j = v^{ij}$。由此产生矛盾。

□

以下结果表明，可信议价解与稳定结果一样，与其说是参与者匹配的解，不如说是收益分配的解。

命题1。 如果 μ' 是一个最优匹配，且 x 是任一可信议价解(μ, x)的收益向量，那么(μ', x) 也是一个可信议价解。

证明。 由于 μ' 是一个最优匹配，且(μ, x) 是一个稳定结果，我们知道(μ', x) 也是一个稳定结果。接下来，考虑由μ'匹配的一对参与者ij 。我们需要证明，分配(x_i, x^j) 在可信外部选择下可作为纳什议价解予以合理解释。我们讨论两种情形。

情形 I。 $\mu'(i) = \mu(i)$。在这种情况下，i 在 μ 和μ'下均与同一个参与者匹配。由于(μ, x) 是 (G, v)的一个可信议价解，因此，分配 (x_i, x^j) 可由市场 (G^{-ij}, v)中的可信外部选择予以合理解释。

情形 II. $\mu'(\mathrm{i}) \neq \mu(\mathrm{i})$。（可能出现 $\mu(\mathrm{i}) = \emptyset$。）由于 (μ, x) 是 (G, v) 的一个稳定结果，且在 μ 下，配对 ij 未匹配，因此 (μ, x) 也必定是 $(\mathrm{G}^{-ij}, \mathrm{v})$ 的一个稳定结果。此外，由于 (μ, x) 是 (G, v) 的一个稳定结果，且 μ' 是 (G, v) 的一个最优匹配，因此 (μ', x) 也是 (G, v) 的一个稳定结果。由于 i 和 j 在 μ' 下匹配，$\mathrm{x}_i + \mathrm{x}^j = \mathrm{v}^{ij}$。这两个事实表明，对于 (μ', x) 及其匹配对 ij，v^{ij} 的分配 $(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}^j)$ 可由外部选择 $\mathrm{d}_i = \mathrm{x}_i$ 和 $\mathrm{d}^j = \mathrm{x}^j$ 证明合理性；它们分别是 i 和 j 在 $(\mathrm{G}^{-ij}, \mathrm{v})$ 的稳定结果 (μ, x) 中的稳定收益。

□

固定一个市场(G,v)。若每个最优匹配都匹配边$ij \in G$，则称其为**必要的**。以下结果表明，如果(μ,x) 是一个稳定结果，且$ij \in \mu$ 不是

必要的，那么i和j对v^{ij}的分配(x_i,x^j)总是合理的。

命题2。假设(μ, x)是一个稳定结果，且$ij \in \mu$。若存在一个最优匹配μ'，使得$ij \not\in \mu'$，那么存在可信外部选择d_i和d^j，使得

$$(x_i, x_j) = NBS(v_{ij}; d_i, d_j).$$

证明。由于 (μ, x) 是一个稳定结果，且 μ' 是 (G, v) 的一个最优匹配，因此 (μ', x) 也是 (G,v) 的一个稳定结果。此外，由于 $\mathrm{ij} \not\in \mu'$，(μ', x) 也是 $(\mathrm{G}^{-ij}, \mathrm{v})$ 的一个稳定结果。因此，在市场 (G,v) 中，在匹配 μ下，当 i 和 j 谈判如何分配 v^{ij}时，存在可信外部选择 $\mathrm{d}_i = \mathrm{x}_i$ 和 $\mathrm{d}^j = \mathrm{x}^j$。由于 $\mathrm{d}_i + \mathrm{d}^j = \mathrm{v}^{ij}$，$\mathrm{NBS}(\mathrm{v}^{ij}; \mathrm{d}_i, \mathrm{d}^j) = (\mathrm{x}_i, \mathrm{x}^j)$。

□

命题 2 是一个重要结果。它告诉我们，要验证一个稳定结果(μ, x)是否是一个可信议价解，我们只需验证由 μ匹配的关键连边上的分配是否合理。

推论 1. 稳定结果(μ, x)是一个可信议价解，当且仅当对于所有关键连接$ij \in \mu$，分配(x_i, x^j)在某些可信外部选择下可作为纳什议价解得到证明。

4.2 存在性

下述结果表明，总是存在一个可信议价解，使得每个代理人在(G,v)中获得其最大和最小稳定收益的平均值。

对于任意$k \in I \cup J$，设 $\bar{x}_k$ 和$\underline{x}_k$ 分别为(style id='16'>k在(G, v)中的最大和最小稳定收益。

定理 1. 设 μ 为(G,v) 的任意一个最优匹配，并设 x 为如下收益向量：

$$x_k = \frac{\bar{x}_k + \underline{x}_k}{2}, \forall k \in I \cup J.$$

那么(μ, x) 是一个可信议价解。

对于$ij \in \mu$，当i 与j 谈判划分v^{ij}时，i 希望设定$d_i = \bar{y}_i$，而j 希望设定$d_j = \bar{y}^j$，其中，$\bar{y}_i$ 和 $\bar{y}^j$ 分别是它们在子市场(G^{-ij}, v)中的最大稳定收益。然而，这样的外部选择可能并不可信，因为它们可能无法在(G^{-ij}, v)的任何稳定结果中同时实现。[7]

尽管如此，在引理2中，我们证明存在 $\delta \geq 0$，使得$d_i = \bar{y}_i - \delta$和$d_j = \bar{y}_j - \delta$ 是可信外部选择。我们将这样的d_i 和d^j 称为具有对称妥协的外部选择。定理1的证明的核心思想是：如果i 与j 根据纳什议价解划分v^{ij}，那么在具有对称妥协的外部选择下，它们各自获得其在(G, v)中的最大稳定收益与最小稳定收益的平均值。

我们将定理1 中提出的解称为**具有对称妥协的可信议价解**。这一解见于Thompson (1981)、N ´u˜nez 和 Rafels(2002)、N ´u˜nez 和 Rafels(2008)，以及Elliott(2015)等文献中。

定理 *1*的证明。 假设 μ 是 (G,v) 的最优匹配。首先注意到，由于 x 是买方最优稳定结果与卖方最优稳定结果的收益向量的平均值，(μ,x) 也是一个稳定结果。接下来，对于每个 $ij \in \mu$，我们构造可信外部选择 d_i 和d^j，使得如果 i 和j 按照纳什议价解分配v^{ij}，那么他们各自将获得其在 v^{ij} 中最大和最小稳定收益的平均值，且仅—

[7]例如，假设ij 是一个单位剩余正方形中的一条边。

mal 在 (G,v) 中的稳定收益。

对于每个 $k \in I \cup J$，令 $\bar{y}_k$ 和 $\underline{y}_k$ 分别为(G^{-ij},v)子市场中k的最大稳定收益和最小稳定收益。当买方i 和卖方j 协商如何分配v^{ij}时，i 希望设定$d_i = \bar{y}_i$，而j 希望设定$d_j = \bar{y}_j$。然而，这些外部选择可能并不可信，因为它们未必能在(G^{-ij}, v)的任何稳定结果中同时可行。

引理 2. 存在 $\delta > 0$，使得 $d_i = \bar{y}_i - \delta$ 和 $d_j = \bar{y}_j - \delta$ 是可信外部选择。

证明。若 $\bar{y}_i = y_i$ 或 $\bar{y}_j = y_j$，则 $\bar{y}_i$ 和 $\bar{y}_j$ 是可信外部选择。因此，我们只需令 $\delta = 0$。否则，令权重 $\alpha \in [0,1]$ 满足

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{\bar{y}_j - \underline{y}_j}{\bar{y}_i - \underline{y}_i},$$

并令

$$\delta = (1-\alpha)(\bar{y}_i - \underline{y}_i) = \alpha(\bar{y}_j - \underline{y}_j).$$

Then

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_i - \delta \\ \bar{y}_j - \delta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \bar{y}_i \\ \underline{y}_j \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} \underline{y}_i \\ \bar{y}_j \end{pmatrix}$$

由于(G^{-ij},v) 的稳定结果的收益向量构成一个凸多胞体，因此我们知道，$\bar{y}_i - \delta$ 和 $\bar{y}_j - \delta$ 分别是i 和j在(G^{-ij},v)某个稳定结果中的稳定收益。

□

注意，在 $(d_i,d_j) = (\bar{y}_i - \delta, \bar{y}_j - \delta)$ 处，由于 $d_i - d_j = \bar{y}_i - \bar{y}_j$，$i$ 和 j 的外部选择之差与 δ 的选择无关。

在这些外部选择下，当i 和j 谈判分配v^{ij}时，他们的纳什议价解

收益分别为，

$$x_i = \bar{y}_i - \delta + \frac{v_{ij} - (\bar{y}_i - \delta) - (\bar{y}_j - \delta)}{2} = \bar{y}_i + \frac{1}{2}(v_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j), \tag{4.1}$$

$$x_j = \bar{y}_j - \delta + \frac{v_{ij} - (\bar{y}_i - \delta) - (\bar{y}_j - \delta)}{2} = \bar{y}_j + \frac{1}{2}(v_{ij} - \bar{y}_j - \bar{y}_i). \tag{4.2}$$

注意，$\bar{x}_i$，$\bar{x}^j$ 分别是i、j在(G, v)中的边际贡献，而 $\bar{y}_i$，$\bar{y}^j$ 分别是i、j在(G^{-ij}, v)中的边际贡献。[8] 因此，

$$\bar{x}_i = v_G - v_{G_{-i}}, \bar{x}_j = v_G - v_{G_{-j}},$$

$$\bar{y}_i = v_{G_{-ij}} - v_{G_{-i}}, \bar{y}_j = v_{G_{-ij}} - v_{G_{-j}}.$$

因此，

$$\bar{y}_i - \bar{y}_j = \bar{x}_i - \bar{x}_j = v_{G_{-j}} - v_{G_{-i}}.$$

结合方程4.1 和4.2，可知在外部选择$(d_i, d^j) = (\bar{y}_i - \delta, \bar{y}_j - \delta)$下的纳什议价解$(x_i, x^j)$，

$$x_i - x_j = \bar{y}_i - \bar{y}_j = \bar{x}_i - \bar{x}_j.$$

由于i 和j 正在分配剩余v^{ij}，$x_i + x^j = v^{ij}$。因此，

$$x_i = \bar{x}_i + \frac{1}{2}(v_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j), \tag{4.3}$$

$$x_j = \bar{x}_j + \frac{1}{2}(v_{ij} - \bar{x}_j - \bar{x}_i). \tag{4.4}$$

众所周知，在买方最优稳定结果和卖方最优

[8]例如，参见Roth 和 Sotomayor(1990)的引理 8.15。

稳定结果下，(G,v)中i 和j的收益分割了v^{ij}。也就是说，

$$\bar{x}_i + \underline{x}_j = v_{ij} = \bar{x}_j + \underline{x}_i.$$

代入方程4.3 和 4.4，可得外部选择为i 与 j 之间的纳什议价解$(d_i,d^j) = (\bar{y}_i - \delta, \bar{y}_j - \delta)$ 为

$$x_i = \frac{1}{2}(\bar{x}_i + \underline{x}_i),$$
$$x_j = \frac{1}{2}(\bar{x}_j + \underline{x}_j).$$

至此，我们完成了证明。 □

4.3 单位剩余情形

我们称市场 (G,v) 为单位剩余市场，若对所有 $ij \in G$，$v_{ij} = 1$。回顾一下，若边$ij \in G$ 在每个最优匹配中都被匹配，则称其为**必要的**。

定理2。 设 $v_{ij} = 1, \forall ij \in G$。结果$(\mu, x)$ 是市场(G,v) 的可信议价解，当且仅当它是稳定的，且对于所有必要的 $ij \in \mu$，$x_i = x_j = 1/2$。

定理2 的证明关键依赖于这样一个事实：在单位剩余情形下，若$ij \in \mu$是(G,v)的关键边，则(G^{-ij},v) 中存在一个最优匹配，使i 和j 都未匹配。这一事实意味着，在子市场(G^{-ij}, v)中，在所有稳定结果下，i 和j 都只能获得零。

定理证明 2. 设 (μ, x) 是市场 (G,v)的任意一个稳定结果。要证明该定理，只需证明 (μ,x) 是可信议价解，当且仅当对于所有必要的 $ij \in \mu$，都有 $x_i = x_j = 1/2$。

根据推论 1，(μ,x) 是可信议价解，当且仅当对于所有必要的边 $ij \in \mu$，分配 (x_i,x^j) 在某些可信外部选择下可被证明为纳什议价解。

令 $ij \in \mu$ 为 μ 的任意一条关键连边。那么，子市场 (G^{-ij}, v) 所能产生的总剩余必然严格小于 (G, v) 的总剩余。因此，在子市场 (G^{-ij}, v) 中，匹配 $\mu - \{ij\}$ 必然是最优匹配，因为它产生的剩余恰好比 (G, v) 的总剩余少一个单位。也就是说，在市场 (G^{-ij}, v) 中，存在一种最优匹配，使 i 和 j 均未匹配。因此，对于 (G^{-ij}, v) 的任意稳定结果 (μ', x')，$x'_i = x'_j = 0$。

因此，当 i 和 j 协商分配 v^{ij} 时，只有 $(d_i, d^j) = (0,0)$ 才可能是一对可信外部选择，这意味着 (x_i,x^j) 是合理的分配，当且仅当$x_i = x_j = 1/2$。

□

如何识别（G,v）的关键连接?

G 中的节点集合（即所有代理人的集合）可划分为以下几类：需求不足的参与者、需求过剩的参与者和完全匹配的参与者：

1. U：G中需求不足的参与者集合，由至少在一个最优匹配中未匹配的参与者组成；

2. O：G中需求过剩的参与者集合，由（$I \cup J$）$-U$ 中至少与一个U中的参与者相连的参与者组成；

3. P：G中完全匹配的参与者集合，其中包含所有不属于U 或O的参与者。[9]

[9]我们采用“需求不足的参与者”、“需求过剩的参与者”和“完全匹配的参与者”这些术语，遵循Manea（2016年）的用法。此外，集合U、O、P 分别对应于D、A、C，分别见于Lov´asz and Plummer（1986年）。

由于 Edmonds-Gallai 分解定理（Lov´asz 和 Plummer，1986年，定理 3.2.1），我们知道U 是一个独立集，即U 中任意两个参与者之间都没有边。我们还知道，如果 μ 是一个最优匹配，那么它会将O 中的每个参与者与U 中的一个不同参与者匹配，并将P 中的参与者彼此完全匹配；此外，对于U 中的每个参与者，都存在某个最优匹配使其未匹配。这些事实表明，在任何稳定结果(μ,x)中，对于所有$i \in U$，$x_i = 0$；对于所有$i \in O$，$x_i = 1$。

如果ij 是(G,v)的关键连边，那么i 和j 都必须属于集合P。我们将注意力限制在仅由 P 中的参与者及其之间的边构成的子图上；将该子图记为G_P。如果一条连接P 中一对参与者的边不属于(G,v)的任何最优匹配，则称其为禁用边；不属于禁用边的边称为允许边。如果一个网络（图）的允许边构成其一个连通子图，则称该网络（图）为初等的。

引理 3 (Lov´asz and Plummer, 1986年, Corollary 4.2.10)。 每一对初等二分图的边都包含在一个（良好）圈中。

根据引理3，可以直接确定哪些边是关键连边 .

命题 3。 边 $ij \in G$ 是(G,v) 的关键连边，当且仅当它是G_P的某个初等子图中唯一的边。

证明。 如果$ij \in \mu$ 属于G_P 的一个包含多条边的初等子图，那么根据引理3，它属于一个圈，因此存在另一个不包含ij的最优匹配。因此，ij 不是(G,v)的关键连边。如果$ij \in \mu$ 是G_P的一个初等子图中唯一的边，那么每个(G,v)的最优匹配都必须匹配它。因此，它是关键连边。

□

我们使用以下示例来说明寻找关键连接的过程。

示例 6. 考虑以下单位剩余市场（见图 7）。共有十三名参与者，他们根据所属的 *Edmonds-Gallai* 分解集合（U、O、P）分别标记。

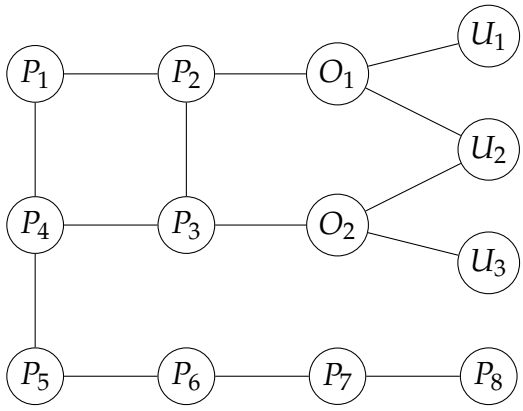

图 7：Edmonds-Gallai 分解

将注意力限制在 G_P （仅由 P 中的参与者组成的子图）上，可以看到有两条禁边，即 P_4P_5 和 P_6P_7。移除它们后，我们得到三个初等子图（见图 8）。

P_5P_6 和 P_7P_8 各自是某个初等子图中的唯一一条边。因此，根据命题 3，它们都是关键连边。由此，根据定理2可知，当且仅当结果(μ, x) 稳定，且参与者 P_5, P_6, P_7和 P_8 均获得1/2时，它才是该市场的可信议价解。

注1。 固定 G 的一个 *Edmonds–Gallai* 分解。大多数合作博弈解概念和非合作讨价还价模型预测，U 中所有参与者的收益均为0 ，O 中所有参与者的收益均为1，但它们对 P 中参与者的预测可能不同。对于这些完全匹配的参与者，除稳定性所施加的要求外，可信议价解只确定由关键连边相连的参与者的收益，要求每位此类参与者获得1/2。

相比之下，在*Corominas-Bosch (2004)*提出的动态讨价还价过程中，

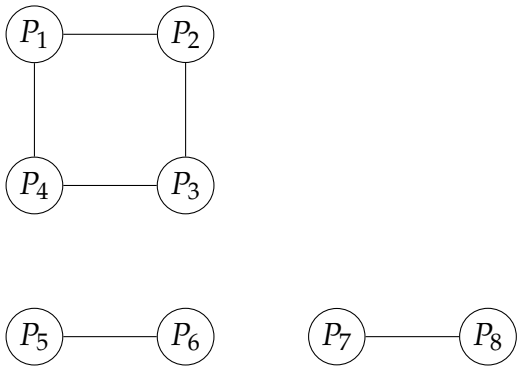

图8：G 的初等子图$_P$

存在一种子博弈精炼均衡，其中 P 中的所有参与者在贴现因子 $\delta \to 1$趋于极限时均获得1/2 。*Polanski (2007)*在分析其提出的动态讨价还价过程的均衡时，也得出了类似的预测。相比之下，在去中心化讨价还价协议下，*Abreu and Manea (2012a)*表明，即使在完全匹配的参与者之间，马尔可夫精炼均衡也可能产生极不对称的收益（例如参见*Abreu andManea(2012a)*中的图 *3*；关于非合作讨价还价的全面综述，参见*Manea(2016*年）。

5 结论

本文通过提出一种基于可信外部选择的新议价解，研究网络约束匹配市场中的剩余分配。在经典稳定性概念的基础上，我们的方法通过要求每一对匹配的买卖双方之间的剩余分配，都能够被视为在外部选择下进行纳什谈判的结果，来从稳定结果中进行筛选；这些外部选择源自经过适当定义的子市场中的稳定结果。这项额外的可信性要求无需施加明确的非合作讨价还价协议，就能约束剩余分配，并对均衡收益，尤其是关键连接上的均衡收益，得出明确的结论。

我们确立了可信议价解的一般性质，包括其存在性，并对单位剩余情形给出了完整刻画。我们的分析凸显了关键连接在决定议价结果中的核心作用，并表明在这些连接之外，仅凭稳定性就足以证明剩余分配合理。

未来研究仍有几个有待探索的方向。在理论方面，进一步探究可信谈判解的结构性质，并将其刻画拓展至单位剩余环境之外，将颇有意义。更广泛地说，以子市场稳定性为基础的可信性概念，为将我们的方法拓展至更一般的合作博弈提供了很有前景的途径；在这类博弈中，外部选项由约化博弈的结果内生决定。最后，探讨能够进一步完善可信谈判解，或指导如何从多个稳定结果中进行选择的规范性标准，也值得一做。

参考文献

D. Abreu 和 M. Manea（2012a），网络谈判模型中的马尔可夫均衡，《博弈与经济行为》，75，1-16。

D. Abreu 和 M. Manea（2012b），网络中的谈判与效率，《经济理论杂志》，147，43-70。

亚里士多德（2004），《尼各马可伦理学》，Roger Crisp 译并编，剑桥大学出版社。

R. Aumann 和 M. Maschler（1985），《塔木德》中的破产问题的博弈论分析，《经济理论杂志》，36，195–213。

K. S. Cook 和 T. Yamagishi（1992），交换网络中的权力：权力依赖公式，《社会网络》，14，245–265。

M. Corominas-Bosch（2004），买卖双方网络中的议价，《经济理论杂志》，115，35-77。

V. P. Crawford 和 S. C. Rochford（1986），匹配市场中的议价与竞争，《国际经济评论》，27，329–348。

M. Davis 和 M. Maschler（1965），合作博弈的核，《海军研究后勤季刊》，12，223-259。

T. S. H. Driessen（1998），关于双边指派博弈中核包含于核心的注记，《国际博弈论杂志》，27，301-303。

M. Elliott（2015），网络市场中的低效率，《美国经济学杂志：微观经济学》，7，43-82。

J. Harsanyi（1956），博弈论提出前后关于谈判问题的研究路径：对 Zeuthen、Hick 和 Nash 理论的批判性讨论，《计量经济学》，24，144-157。

J. Harsanyi（1977年），博弈与社会情境中的理性行为和议价均衡，剑桥大学出版社。

J. Kleinberg 和 E. Tardos（2008年），社会交换网络中的平衡结果，第*40*届 *ACM*计算理论研讨会论文集。

L. Lov´asz 和 M. D. Plummer（1986年），匹配理论，北荷兰出版社。

M. Manea（2016年），网络中的双边贸易模型，载于《牛津网络经济学手册》，由 Y. Bramoull´e、A. Galeotti 和 B. W. Rogers 编，牛津：牛津大学出版社。

J. Nash（1950年），议价问题，《计量经济学》，18，155-162。J.
Nash（1953年），双人合作博弈，《计量经济学》，21，128-140。

M. N ´u˜nez 和 C. Rafels（2002），分配博弈：τ值，《国际博弈论杂志》，31，411-422。

M. N ´u˜nez 和 C. Rafels（2008），针对分配市场的合作讨价还价方法，《群体决策与谈判》，17，553-563。

M. N ´u˜nez 和 C. Rafels（2015），分配市场综述，《动力学与博弈杂志》，2，227-256。

A. Polanski（2007），网络中的双边议价，《经济理论杂志》，134，557-565。

S. C. Rochford（1984），分配市场中的对称双边议价分配，*Journal ofEconomic Theory*，34,262-281。

A. Roth 和 M. Sotomayor（1988），双边匹配市场核心中的内点，*Jour-nal of EconomicTheory*，45，85-101。

A. Roth 和 M. Sotomayor（1990），双边匹配：博弈论建模与分析研究，剑桥大学出版社。

L. Shapley 和 M. Shubik（1972年），分配博弈 I：核心，《国际博弈论杂志》，第1卷，111–130页。

G. L. Thompson（1981），拍卖与市场博弈，载于：R. Aumann（编），纪念奥斯卡·摩根斯特恩的博弈论论文集，德国曼海姆，181–196页。