arXiv:2601.09202v1 [math.CA] 14 Jan 2026

关于测地线并集与不变集的投影

李龙辉

Abstract. 设 M 为一个 d维完备黎曼流形，并令$\pi : SM \to M$ 表示从单位切丛出发的典范投影。我们证明，若 $E \subset SM$ 是一个在测地流下不变的集合，且其豪斯多夫维数为 $\dim_{\mathcal{H}} E \geq 2(k-1)+1+\beta$，其中 $1 \leq k \leq d-1$为某个整数，$\beta \in [0,1]$满足某个条件，则投影 $\pi(E)$满足 $\dim_{\mathcal{H}} \pi(E) \geq k+\beta$。换言之，这给出了 M中测地线并集的豪斯多夫维数下界。我们的定理推广了 J. Zahl 关于 $\mathbb{R}^d$中直线并集的一项结果。证明依赖于测地线的横截性质、适当的（$k+1$）线性曲线 Kakeya 估计，以及 Bourgain–Guth 论证。

1. Introduction

1.1. 仿射 n维平面。 令 $A(d,n)$ 表示空间$\mathbb{R}^d$中仿射 n维平面的集合。每个仿射 n维平面都可以唯一地写成 $V+a$，其中 V是一个 n维子空间，且 $a \in V^{\perp}$。我们在 $A(d,n)$ 上赋予度量

$$d(V+a, W+b) = \|\pi_V - \pi_W\| + |a-b|,$$

其中 $\|\pi_V - \pi_W\|$ 表示 $\pi_V - \pi_W$的算子范数。

D. Oberlin [12] 证明了，若 A 是一个博雷尔集，且 $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{A} = \alpha > (n+1)(d-n) - n$，则集合$\bigcup_{V \in \mathcal{A}} V$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中具有正的勒贝格测度。对于一般的 n 维平面族 $\mathcal{A}$，这一结果是尖锐的。D. Oberlin 还提出了以下关于仿射直线并集的豪斯多夫维数的猜想。

猜想 1.1。 设 $1 \leq k \leq d-1$ 是一个整数，并令 $\beta \in [0,1]$。若$\mathcal{A} \subset A(d,1)$ 且 维数 $_{\mathcal{H}} \mathcal{A} \geq 2(k-1) + \beta$，则

$$\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{l \in \mathcal{A}} l \geq k + \beta.$$

如果取包含在一个由平行仿射 k 维平面组成的 β 维并集中的所有直线，该猜想就是最优的。R. Oberlin [13]证明了该猜想的有限域版本。H´era、Keleti 和 M´ath´e [8] 证明了该猜想在 $k=1$ 情形下成立，D. Oberlin [12]证明了该猜想在 $k=d-1$ 情形下成立。最后，Zahl [15]利用多线性 Kakeya 定理和 Bourgan-Guth 方法证明了该猜想在其余 k 取值下成立。

将仿射直线替换为仿射 n 维平面的猜想由 H´era [7] 提出，并由 Gan [6] 利用 Bramscamp-Lieb 不等式证明。

1.2. 测地线并集与测地流不变集的投影。 仿射 n 平面的自然对应物是 n 维全测地子流形。任何黎曼流形都有许多一维全测地

子流形，即测地线，但并非所有黎曼流形在 $n \geq 2$ 时都有 n 维全测地子流形。本文聚焦于完备黎曼流形上的测地线并集。

第一个问题是确定一族测地线的适当测度。设 M 是一个完备的黎曼流形，$\Gamma = \{\gamma_i\}_{i\in I}$ 是一族测地线。令 SM 表示 M 的单位切丛，令 π表示从 SM 到 M的典范投影。设 $\gamma_i(t)$是通过弧长对 γ_i 进行的参数化。我们考虑集合

$$S(\Gamma) := \{(\gamma_i(t), \gamma_i'(t)) : t \in \mathbb{R},\ i \in I\} \subset SM. \tag{1}$$

不难验证， $S(\Gamma)$是一个在测地流下不变的集合，并且

$$\bigcup_{i\in I} \gamma_i = \pi(S(\Gamma)). \tag{2}$$

因此，在我们的情形中，测地线并集的大小问题等价于测地流下不变集合的投影的大小问题。为简单起见，如果 $E \subset SM$ 在测地流下不变，我们就称其为不变的。

在 $M = \mathbb{R}^d$的情形下，设 $A \subset A(d,\ 1) = \{(x,\ v) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} :\ x \perp v\}$ 并且

$$S(A) = \{(x + tv, v) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} : t \in \mathbb{R},\ (x, v) \in A\} \subset S(\mathbb{R}^d).$$

$S(A)$ 是一个不变集，并且我们有

$$\dim_{\mathcal{H}} A = \dim_{\mathcal{H}} S(A) - 1. \tag{3}$$

受此启发，我们可以用不变集的投影来表述关于完备流形的相应定理。

定理 1.2. 设 M 是一个 d 维完备黎曼流形。令$1 \leq k \leq d-1$ 为整数，且 $\beta \in [0, 1]$。若 $E \subset SM$ 是一个不变集，满足维数$_{\mathcal{H}} E \geq 2(k-1) + 1 + \beta$，则

$$\dim_{\mathcal{H}} \pi(E) \geq k + \beta.$$

在第 2 节中，我们将看到， SM 上的豪斯多夫维数可以独立于显式的黎曼度量来定义。

注意，当 $d = 2$时，定理 1.2 将意味着投影 π 保持豪斯多夫维数；也就是说，如果维数为 $_{\mathcal{H}} E \leq 2$，那么

$$\dim_{\mathcal{H}} \pi(E) = \dim_{\mathcal{H}} E.$$

定理 1.2 的 $d = 2$ 情形由 Ledrappier 和 Lindenstrauss [10] 利用简单的几何性质和能量方法证明。尽管他们最初的结果涉及紧流形上不变测度的投影，经过一些修改后，该结果也适用于完备流形上不变集的投影。

本文将证明定理 1.2 对所有 $d \geq 2$ 均成立。通过对 SM 进行某些参数化，只需考虑满足正则条件和横截条件的光滑曲线之并。

定理 1.3。 设 $A \subset [-1, 1]^{d-1} \times [-1, 1]^{d-1}$ 且 维数$_{\mathcal{H}} A \geq 2(k-1) + \beta$，其中 $1 \leq k \leq d-1$ 和 $\beta \in [0, 1]$是整数。令 $\{\gamma_y\}_{y\in A}$ 为一族光滑曲线，它们满足 γ_y 个接点 $(y_1, -1)$ 和 $(y_2, 1)$ ，并且可以用其最后一个坐标参数化

$$\gamma_y(c) = (P_y(c), c),\ c \in [-1, 1].$$

我们假设 $\{\gamma_y\}_{y\in A}$ 满足以下条件。

1.（正则条件）

存在 $C \geq 1$ 使得

$$\sup_{y\in A} \|P_y(\cdot)\|_{C^2([-1,1])} \leq C. \tag{4}$$

2.（横截条件）

Let

$$e_y(c) = \frac{\frac{d}{dc}\gamma_y(c)}{|\frac{d}{dc}\gamma_y(c)|} \tag{5}$$

表示 γ_y 在点 γ_y（c）处的切向方向。那么存在 $0 < m < \infty$，使得对于 y、$y' \in [-1,1]^{d-1} \times [-1,1]^{d-1}$、 c、 $c' \in [-1,1]$,

$$|P_y(c) - P_{y'}(c)| + |e_y(c) - e_{y'}(c)| \geq m(|P_y(c') - P_{y'}(c')| + |e_y(c') - e_{y'}(c')|). \tag{6}$$

Then

$$\dim_{\mathcal{H}}(\bigcup_{y\in A} \gamma_y) \geq k + \beta. \tag{7}$$

此外，对于具有常截面曲率的完备流形，定理 1.2 是尖锐的；我们认为，对于维数为 ≥ 3 的非常截面曲率完备流形，定理 1.2 可以得到改进。

1.3. 论文结构。本文安排如下。第 2 节将介绍一些预备知识，包括流形上的豪斯多夫维数，以及 $S(\mathbb{R}^d)$ 上不变集的豪斯多夫维数。第 3 节将利用 SM 的适当参数化以及测地线的横截性质，通过定理 1.3 证明定理 1.2。第 4 节将借助多线性曲线 Kakeya 估计和 Bourgain-Guth 论证，给出定理 1.3 的完整证明。第 5 节将对定理 1.2 作一些评述。

1.4. 致谢。 作者谨此感谢导师刘博辰提出的许多宝贵建议。作者也感谢 Josh Zahl 和奚亚坤的有益讨论。

2. Preliminaries

2.1. 流形上的豪斯多夫维数。 设 g 是流形 M 上的一个黎曼度量， d_g 是其诱导的黎曼距离。自然地，我们可以定义与 d_g 相关的豪斯多夫维数，记作 $\dim_g$。

若存在另一个坐标图 (V,ψ) 使得 $U \subset V$，则称坐标图 (U,ϕ) 为正则坐标图。设 $\{(U_i,\phi_i)\}$ 是一组正则坐标图，且满足 $M \subset \cup_i U_i$。根据豪斯多夫维数的性质，我们有

$$\dim_g(E) = \sup_i \dim_g(E \cap U_i).$$

由 [11], 中每个 U_i 上的引理 13.28，黎曼度量 g 等价于欧几里得度量。因此

$$\dim_g(E \cap U_i) = \dim_{\mathcal{H}}(\phi_i(E \cap U_i)),$$

其中 $\dim_{\mathcal{H}}$ 是以欧几里得距离定义的豪斯多夫维数。

这个等式的右边与 g无关，因此我们可以定义一个与 g 无关（也与集合族$\{(U_i, \phi_i)\}$无关）的豪斯多夫维数:

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) := \sup_i \dim_{\mathcal{H}}(\phi_i(E \cap U_i)). \tag{8}$$

我们在两边都使用维数$_{\mathcal{H}}$ ，这样不会造成混淆。

2.2. 上 $S(\mathbb{R}^d)$ 上不变集的豪斯多夫维数。令 $A(d, 1)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中仿射直线的空间。任意仿射直线都可以由一个方向以及垂直于该方向的一个平移唯一确定。换言之，我们可以写成

$$A(d,1) = \{(x,v) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} : x \perp v\} \subset \mathbb{R}^d \times S^{d-1}.$$

我们赋予 $A(d, 1)$ 度量

$$d((x,v),(y,w)) = |x-y| + |v-w|,\ (x,v),\ (y,w) \in A(d,1).$$

设 $A \subset A(d, 1)$ 且

$$S(A) = \{(x+tv, v) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} : t \in \mathbb{R},\ (x,v) \in A\} \subset S(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times S^{d-1}.$$

$S(A)$ 是一个不变集，并且我们有如下结论。

命题 2.1。

$$\dim_{\mathcal{H}} A = \dim_{\mathcal{H}} S(A) - 1. \tag{9}$$

证明。 首先，我们证明

$$\dim_{\mathcal{H}} S(A) \le \dim_{\mathcal{H}} A + 1.$$

对于 $R > 0$，我们定义

$$A_R = \{(x,v) \in A : |x| \le R\}.$$

假设 $\alpha > \dim_{\mathcal{H}}(A_R)$ 且 $\{B_i\}_{i\in I} = \{B((x_i, v_i)\ r_i)\}_{i\in I}$ 是 A_R 的一个覆盖，其中 $\sum_{i\in I} r_i^{\alpha} < \infty$，。对于 $(x, v) \in A$，我们定义

$$l_{x,v,R} = \{(x+tv, v) : t \in \mathbb{R},\ |x+tv| \le R\}.$$

如果 $|(x, v) - (x_i, v_i)| < r_i$，不难验证 $l_{x,v,R}$ 包含于 $l_{x_i,v_i,R}$ 的 $(2R+2)r_i$ 邻域中。$l_{x_i,v_i,R}$ 的 $(2R+2)r_i$ 邻域至多可由 Cr_i^{-1} 个半径为 $(2R+2)r_i$ 的球覆盖，因此我们有 $\mathcal{H}^{\alpha+1}(S(A_R)) \lesssim_R 1$。设 $R \to \infty$ 和 $\alpha \searrow \dim_{\mathcal{H}} A$，得到

$$\dim_{\mathcal{H}} S(A) \le \dim_{\mathcal{H}} A + 1.$$

反过来，对于 $(x, v) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1}$，我们定义映射

$$\phi : \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \to \mathbb{R}^d \times S^{d-1},\ \phi(x,v) = (x', v),$$

其中 $x' = x - \langle x, v\rangle v$. 根据定义，我们有 $A = \phi(S(A))$，以及 $S(A) = \phi^{-1}(A)$。

通过直接计算，对于 $(x,v),(y,w) \in B(0,R) \times S^{d-1}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&|\phi(x,v)-\phi(y,w)| \\
=&|x'-y'|+|v-w| \\
\leq&|x-y|+|v-w|+|\langle x,v\rangle v-\langle y,w\rangle w| \\
\leq&|x-y|+|v-w|+|\langle x,v\rangle-\langle y,w\rangle|+|\langle y,w\rangle||v-w| \\
\leq&|x-y|+|v-w|+|\langle x,v-w\rangle|+|\langle x-y,w\rangle|+|\langle y,w\rangle||v-w| \\
\leq&2|x-y|+(2R+1)|v-w|.
\end{aligned}$$

因此，ϕ 在 $B(0,R) \times S^{d-1}$上是利普希茨的。对于$(x',v) \in S(A_R)$，$\mathcal{H}^1(\phi^{-1}(x',v) \cap B(0,R) \times S^{d-1}) > 0$。根据 [9], 中的引理，我们可以得出

$$\dim_{\mathcal{H}} S(A_R) \geq \dim_{\mathcal{H}} A_R + 1,\ R > 0.$$

设 $R \to \infty$，我们有

$$\dim_{\mathcal{H}} S(A) \geq \dim_{\mathcal{H}} A + 1.$$

□

3. Theorem 1.3 implies Theorem 1.2

在本节中，我们将证明定理 1.3 蕴含定理 1.2。

首先，我们引入 SM 的一种参数化。我们从 [10] 处了解到这种参数化。

假设 $p \in M$。我们可以选取一个正则坐标图 (U, ϕ)，使得

(1) $\phi(p) = 0$(2)

$[-1,1]^d \subset \phi(U)$

(3) 对于 $p_1 \in \mathcal{I}_1 = \phi^{-1}([-1,1]^{d-1} \times \{-1\})$、$p_2 \in \mathcal{I}_2 = \phi^{-1}([-1,1]^{d-1} \times \{1\})$，存在一条唯一的测地线 $\gamma_{p_1,\ p_2} \subset U$ 将它们连接起来。此外，存在一个一致常数 K，使得若 $\phi(\gamma_{p_1,\ p_2}(t)) = (\tilde{x}(t)\ x^d(t))$，则有

$$|\frac{d}{dt}\tilde{x}(t)| \leq K|\frac{d}{dt}x^d(t)|. \tag{10}$$

对于 $p_1 \in \mathcal{I}_1$，$p_2 \in \mathcal{I}_2$，经过重新参数化后，我们可以假设 $|\frac{d}{dt}\gamma_{p_1,\ p_2}(t)| = 1$。现在我们可以定义参数化 $\psi\colon D = [-1,1]^{d-1} \times [-1,1]^{d-1} \times [0,1] \to SM$ 如下

$$\psi(y_1,y_2,t) = \left(\gamma_{p_1,p_2}\left(d_M(p_1,p_2)t\right), \left(\frac{d}{dt}\gamma_{p_1,p_2}\right)\left(d_M(p_1,p_2)t\right)\right), \tag{11}$$

其中

$$p_1 = \phi^{-1}(y_1,-1),\ p_2 = \phi^{-1}(y_2,1).$$

显然，ψ 是从 D 到 $\psi(D)$的微分同胚，因此若 $E \subset SM$，

$$\dim_{\mathcal{H}}(E \cap \psi(D)) = \dim_{\mathcal{H}}(\psi^{-1}(E \cap \psi(D))). \tag{12}$$

令 π_1 表示投影 $(y_1,y_2,t) \mapsto (y_1,y_2)$，$A = \pi_1(\psi^{-1}(E \cap \psi(D)))$ and$\gamma_y(t) = \phi \circ \pi \circ \psi(y,t)$。那么，若进一步假设 E 是不变的，我们有

$$(\phi \circ \pi)(E \cap \psi(D)) = \bigcup_{y \in A} \gamma_y. \tag{13}$$

and

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \dim_{\mathcal{H}}(E \cap \psi(D)) - 1. \tag{14}$$

现在我们得到一族光滑曲线 $\{\gamma_y\}_{y\in A}$，使得其端点为 γ_y joints $(y_1, -1)$ 和 $(y_2,1)$。此外，在满足非水平条件 (10) 的情况下，我们可以用曲线 γ_y 的最后一个坐标对其重新参数化

$$\gamma_y(c) = (P_y(c), c),\ c \in [-1, 1]. \tag{15}$$

而非水平条件 (10) 意味着

$$\sup_{\substack{c\in[-1,1]\\ y\in[-1,1]^{d-1}\times[-1,1]^{d-1}}} |\partial_y^\beta \partial_c^\alpha P_y(c)| \le C,\ |\alpha|, |\beta| \le 2. \tag{16}$$

对于某个一致常数 C。

接下来需要验证测地线的横截性质。事实上，我们有如下结论，据作者所知，该结论首次发表于 [10] 。

引理 3.1。设 $\gamma_y(c) = (P_y(c)\ c)$，$y \in [-1, 1]^{d-1} \times [-1, 1]^{d-1}$。令

$$e_y(c) = \frac{\frac{d}{dc}\gamma_y(c)}{|\frac{d}{dc}\gamma_y(c)|}$$

表示 γ_y 在点 $\gamma_y(c)$ 处的切向方向。那么存在 $0 < m < \infty$，使得对于 y, $y' \in [-1, 1]^{d-1} \times [-1, 1]^{d-1}$, $c, c' \in [-1, 1]$,

$$|P_y(c) - P_{y'}(c)| + |e_y(c) - e_{y'}(c)| \ge m(|P_y(c') - P_{y'}(c')| + |e_y(c') - e_{y'}(c')|). \tag{17}$$

这个引理的证明是常微分方程中的标准论证，我们略去。

对于任意 $\epsilon > 0$，我们总能找到 D，使得

$$\dim_{\mathcal{H}}(E \cap \psi(D)) \ge \dim_{\mathcal{H}} E - \epsilon.$$

我们将定理 1.3 应用于 $A = \pi_1(\psi^{-1}(E \cap \psi(D)))$，并令 $\epsilon \to 0$，从而完成证明。

4. Proof of Theorem 1.3

4.1. 离散化论证。我们的首要目标是将定理 1.3 的证明化归为一个离散化的曲线 Kakeya 估计。我们需要一些定义和引理。

定义 4.1 ((δ, s)-集合)。设 $\delta, s > 0$，且 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有限的 δ-分离集合。若 P 满足以下条件，则称其为一个(δ, s)-集合

$$\#(P \cap B(x, r)) \le (\frac{r}{\delta})^s,\ x \in \mathbb{R}^d,\ r \ge \delta. \tag{18}$$

引理 4.2 (弗罗斯特曼)。设 $\delta, s > 0$，且 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是满足 $\mathcal{H}^s_\infty(E) = c > 0$ 的任意集合。那么存在一个(δ, s)-集合 $P \subset E$，使得 $\#P \gtrsim c\delta^{-s}$。

引理 4.2 的证明可参见 [5] 的附录 A。

现在我们可以给出离散化论证了。设 $S = \bigcup_{y\in A} \gamma_y$且 $\dim_{\mathcal{H}} S = \alpha$。令 k_0 为一个较大的正整数，$\epsilon > 0$。我们用一族球 $\bigcup_{k=k_0}^\infty \bigcup_{B\in\mathcal{B}_k} B$覆盖 S，其中 $\mathcal{B}_k$ 是一组半径为 2^{-k}的球，并且

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k(\alpha+\epsilon)} \#\mathcal{B}_k \le 1. \tag{19}$$

特别地，我们有

$$\#\mathcal{B}_k \lesssim 2^{k(\alpha+\epsilon)}. \tag{20}$$

对于每个 $y \in A$，根据构造，

$$\mathcal{H}^1_\infty\left(\gamma_y \bigcap \left(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \bigcup_{B\in\mathcal{B}_k} B\right)\right) \gtrsim 1.$$

于是存在 $k = k(y)$ 使得

$$\mathcal{H}^1_\infty\left(\gamma_y \bigcap \left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}_k} B\right)\right) \gtrsim \frac{1}{k^2}.$$

Let

$$A_k = \{y \in A : k(y) = k\},$$

then

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mathcal{H}^{2(k-1)+\beta-\epsilon}_\infty(A_k) \geq \mathcal{H}^{2(k-1)+\beta-\epsilon}_\infty(A) > 0.$$

于是存在 $k_1 \geq k_0$ 使得

$$H^{2(k-1)+\beta-\epsilon}_\infty(A_{k_1}) \gtrsim \frac{1}{k_1^2}. \tag{21}$$

令 $\delta = 2^{-k_1}$。根据引理 4.2，存在一个 $(\delta,2(k-1)+\beta-\epsilon)$-集合 $A' \subset A_{k_1}$，使得

$$\#A' \gtrsim k_1^{-2} \cdot \delta^{-(2(k-1)+\beta-\epsilon)}. \tag{22}$$

Let

$$S' = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_{k_1}} 2B.$$

并令

$$T^\delta_y = \{x = (x', x_d) \in [-1, 1]^d : |x' - P_y(x_d)| \leq \delta\}.$$

T^δ_y 是一个曲线 δ-管，并且

$$|T^\delta_y \cap S'| \gtrsim k_1^{-2} \cdot \delta^{d-1},\ y \in A'. \tag{23}$$

Then

$$\|\sum_{y\in A'} \chi_{T^\delta_y}\|_{L^1(S')} \gtrsim \#A' \cdot k_1^{-2} \cdot \delta^{d-1} \gtrsim k_1^{-4} \cdot \delta^{d-1-(2(k-1)+\beta-\epsilon)}. \tag{24}$$

另一方面，根据 H¨older 不等式，我们有

$$\|\sum_{y\in A'} \chi_{T^\delta_y}\|_{L^1(S')} \lesssim \|\sum_{y\in A'} \chi_{T^\delta_y}\|_{L^p} \cdot |S'|^{1/p'} \lesssim \|\sum_{y\in A'} \chi_{T^\delta_y}\|_{L^p} \cdot \delta^{\frac{d-\alpha-\epsilon}{p'}}. \tag{25}$$

因此

$$\|\sum_{y\in A'} \chi_{T^\delta_y}\|_{L^p} \gtrsim \log(\delta^{-1})^4 \cdot \delta^{d-2k+1-\beta+\epsilon} \cdot \delta^{-\frac{d-\alpha-\epsilon}{p'}}, p \geq 1. \tag{26}$$

因此，只需证明下面的曲线 Kakeya 估计。

定理 4.3. 设 $A \subset [-1,1]^{d-1} \times [-1,1]^{d-1}$ 是一个$(\delta, 2(k-1)+\beta)$-集合。设$\{\gamma_y\}_{y\in A}$ 是一族光滑曲线，使得 γ_y 关节$(y_1, -1)$ 和$(y_2, 1)$，且可由其最后一个坐标参数化

$$\gamma_y(c) = (P_y(c), c),\ c \in [-1,1].$$

我们假设 $\{\gamma_y\}_{y\in A}$ 满足以下条件。

*1. (*正则条件*)*

存在 $C \geq 1$，使得

$$\sup_{y\in A} \|P_y(\cdot)\|_{C^2([-1,1])} \leq C. \tag{27}$$

*2. (*横截条件*)*

Let

$$e_y(c) = \frac{\frac{d}{dc}\gamma_y(c)}{|\frac{d}{dc}\gamma_y(c)|} \tag{28}$$

表示 γ_y 在点 $\gamma_y(c)$ 处的切向方向。那么存在 $0 < m < \infty$，使得对于 y、$y' \in [-1,1]^{d-1} \times [-1,1]^{d-1}$、 c、 $c' \in [-1,1]$,

$$|P_y(c) - P_{y'}(c)| + |e_y(c) - e_{y'}(c)| \geq m(|P_y(c') - P_{y'}(c')| + |e_y(c') - e_{y'}(c')|). \tag{29}$$

Let

$$T_y^\delta = \{x = (x', x_d) \in [-1,1]^d : |x' - P_y(x_d)| \leq \delta\}.$$

那么对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\|\sum_{y\in A} \chi_{T_y^\delta}\|_{L^p} \lesssim_{d,\epsilon} \delta^{\frac{1-k}{p'}-\epsilon} \cdot (\sum_{y\in A} |T_y^\delta|)^{1/p},\ p' = k+\beta. \tag{30}$$

4.2. **多线性曲线 Kakeya 估计**。 为了证明曲线 Kakeya 估计定理 4.3，我们需要对所有 $1 \leq k \leq d-1$ 给出层级为 $k+1$ 的多线性曲线 Kakeya 估计。对于情形 $k = d-1$，已有一些结果，参见 [2] 的定理 6.2 或 [14] 的定理 1.3。据作者所知，此前尚未提及其余层级的多线性曲线 Kakeya 估计。这里，我们可以借助 [4] 的多线性 Kakeya 定理，以及 [1] 第 5 节中从多线性 Kakeya 到多线性曲线 Kakeya 的论证，给出所有层级、带有对数损失的多线性曲线 Kakeya 估计。注意，当 $k = d-1$ 时， [14] 中的定理 1.3 强于下文的定理 4.5。我们认为，对于 $k < d-1$，可以像 [14], 的定理 1.3 那样消除对数损失，但带对数损失的估计更简单，且足以满足我们的需要。

我们在此陈述 [4] 的多线性 Kakeya 定理，以备后用。

定理 4.4（多线性 Kakeya 定理， [4]）。 设 $1 \leq k \leq d-1$ 且 $\delta > 0$。存在常数 $C_{d,\ k}$ 使得若 $\mathcal{T}_1$、…、 $\mathcal{T}_{k+1}$ 是 $\mathbb{R}^d$中的 δ-管族，则有

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\sum_{T_1\in\mathcal{T}_1} \cdots \sum_{T_{k+1}\in\mathcal{T}_{k+1}} \chi_{T_1}\cdots\chi_{T_{k+1}} |e(T_1)\wedge\cdots\wedge e(T_{k+1})|)^{\frac{1}{k}} dx \leq C_{d,k} \cdot \delta^d (\prod_{j=1}^{k+1} \#\mathcal{T}_j)^{\frac{1}{k}}. \tag{31}$$

这里 $e(T) \in S^{d-1}$ 是管 T的方向，而 $|e(T_1) \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge e(T_{k+1})|$ 是由 $e(T_1)$…、 $e(T_{k+1})$ 张成的平行六面体的体积。

以下是我们需要的多线性曲线 Kakeya 估计。

定理 4.5. 设 $A_1, \ldots, A_{k+1} \subset [-1,1]^{d-1} \times [-1,1]^{d-1}$ 和 $0 < \delta < e^{-2}$。令 $A = \cup_{j=1}^{k+1} A_j$ 和 $\{\gamma_y\}_{y \in A}$ 为一族光滑曲线，使得 γ_y 交点$(y_1, -1)$ 和$(y_2, 1)$，并且可以由其最后一个坐标参数化

$$\gamma_y(c) = (P_y(c), c),\ c \in [-1,1].$$

假设

$$C = \sup_{y \in A} \|P_y(\cdot)\|_{C^2} < \infty$$

并且对于某个 $0 < \rho < 1$,

$$|e_{y^1}(c) \wedge \cdots e_{y^{k+1}}(c)| \geq \rho^k,\ y^j \in A_j,\ 1 \leq j \leq k+1,$$

Let

$$T_y^\delta = \{x = (x', x_d) \in [-1,1]^d : |x' - P_y(x_d)| \leq \delta\}.$$

那么存在一个常数 C'，它仅取决于 *on* d、k 和 C，使得

$$\int (\prod_{j=1}^{k+1} \sum_{y^j \in A_j} \chi_{T^\delta_{y_j}}(x))^{\frac{1}{k}} dx \leq (C'\rho^{-1})^{2\log\log(1/\delta)} \delta^d (\prod_{j=1}^{k+1} \#A_j)^{\frac{1}{k}}. \tag{32}$$

可以选取 $C' = C_{d,\ k}(10+C)^{2d}$，其中某个常数为 $C_{d,\ k}$ 取决于 d, k。

证明。我们的思路是，根据泰勒公式，在一个 $\delta^{1/2}$ 立方体中，弯曲的 δ 管近似为一条直的 δ 管。因此，我们可以应用多线性 Kakeya 估计 (31)，得到一个递归公式并进行迭代。

令 $C_{Curved}(\delta,\ \rho)$ 表示满足下述条件的最小常数 C

$$\int (\prod_{j=1}^{k+1} \sum_{y^j \in A_j} \chi_{T^\delta_{y_j}}(x))^{\frac{1}{k}} dx \leq C\delta^d (\prod_{j=1}^{k+1} \#A_j)^{\frac{1}{k}}.$$

我们将 $[-1,1]^d$ 分解为 $2\delta^{\frac{1}{2}}$ 立方体，记作 $\{Q\}$。固定一个立方体 Q，经过平移后，我们可以假设 $Q = [-\delta^{1/2}, \delta^{1/2}]^d$。根据泰勒公式，我们有

$$Q \cap T_y^\delta \subset Q \cap \mathcal{N}_{(1+C)\delta}(\gamma_y(0) + \mathrm{Span}\{e_y(0)\}) := T_y'.$$

T_y' 近似为一个尺寸为 $(1+C)\delta \times \cdots \times (1+C)\delta \times \delta^{1/2}$ 的管。令 $\mathcal{T}_j = \{T'_{y^j} : y^j \in A_j\}$，并令 $A_j^Q = \{y^j \in A_j :\ T_{y_j} \cap Q \neq \emptyset\}$。然后经过因子为 $\delta^{-1/2}$ 的缩放后，我们可以在尺度 $\delta^{1/2}$ 应用 (31)，得到

$$\int_Q (\prod_{j=1}^{k+1} \sum_{y^j \in A_j} \chi_{T^\delta_{y_j}}(x))^{\frac{1}{k}} dx \leq \int_Q (\prod_{j=1}^{k+1} \sum_{T_j \in \mathcal{T}_j} \chi_{T_j}(x))^{\frac{1}{k}} dx \lesssim C_{d,k}(1+C)^d \rho^{-1} \delta^d (\prod_{j=1}^{k+1} \#A_j^Q)^{\frac{1}{k}}.$$

Then

$$\int (\prod_{j=1}^{k+1} \sum_{y^j \in A_j} \chi_{T^\delta_{y_j}}(x))^{\frac{1}{k}} dx \leq C_{d,k}(1+C)^d \rho^{-1} \delta^d \sum_Q (\prod_{j=1}^{k+1} \#A_j^Q)^{\frac{1}{k}}. \tag{33}$$

现在令

$$T_y^{\delta^{1/2}} = \{x = (x', x_d) \in [-1,1]^d : |x' - P_y(x_d)| \leq (10+C)\delta^{1/2}\}.$$

根据构造,

$$T_y^\delta \cap Q \neq \emptyset \implies Q \subset T_y^{\delta^{1/2}}.$$

Then

$$\#A_j^Q \le \sum_{y^j \in A_j} \chi_{T_{y^j}^{\delta^{1/2}}}(x),\ x \in Q.$$

将两式相乘，然后对 Q 积分，得到

$$(\prod_{j=1}^{k+1} \#A_j^Q)^{\frac{1}{k}} \le 2^d \delta^{-d/2} \int_Q (\prod_{j=1}^{k+1} \sum_{y^j \in A_j} \chi_{T_{y^j}^{\delta^{1/2}}}(x))^{\frac{1}{k}}.$$

对所有 Q求和，得到

$$\sum_Q (\prod_{j=1}^{k+1} \#A_j^Q)^{\frac{1}{k}} \le 2^d \delta^{-d/2} \int (\prod_{j=1}^{k+1} \sum_{y^j \in A_j} \chi_{T_{y^j}^{\delta^{1/2}}}(x))^{\frac{1}{k}} dx. \tag{34}$$

根据 C_{Curved}的定义，我们有

$$\int (\prod_{j=1}^{k+1} \sum_{y^j \in A_j} \chi_{T_{y^j}^{\delta^{1/2}}}(x))^{\frac{1}{k}} dx \le C_{Curved}((10+C)\delta^{1/2}, \rho)(10+C)^d \delta^{d/2} (\prod_{j=1}^{k+1} \#A_j)^{\frac{1}{k}}. \tag{35}$$

由(33)、(34)和(35)，得到

$$\int (\prod_{j=1}^{k+1} \sum_{y^j \in A_j} \chi_{T_{y_j}^{\delta}}(x))^{\frac{1}{k}} dx \le 2^{-d} C_{d,k} (10+C)^{2d} \rho^{-1} C_{Curved}((10+C)\delta^{1/2}, \rho) \delta^d (\prod_{j=1}^{k+1} \#A_j)^{\frac{1}{k}}.$$

再次根据 C_{Curved} 的定义，我们得到一个递归公式

$$C_{Curved}(\delta, \rho) \le C' \rho^{-1} C_{Curved}((10+C)\delta^{1/2}, \rho) \tag{36}$$

对于某个常数 C'，它仅取决于 d，k和 C。至多迭代$2\log\log(1/\delta)$次（回忆 $\delta < e^{-2}$），我们有

$$C_{Curved}(\delta, \rho) \le (C' \rho^{-1})^{2\log\log(1/\delta)}. \tag{37}$$

□

4.3. 定理 4.3 的证明。 现在我们可以用 Bourgain-Guth 论证和尺度归纳来证明定理 4.3。注意，若 A 是一个 $(\delta, 2(k-1)+\beta)$，则横截条件 (29) 蕴含

$$\{(P_y(c), e_y(c)) : y \in A\}$$

对所有 $c \in [-1,1]$，它都是一个 $(m\delta, 2(k-1)+\beta)$-集合。在尺度归纳过程中，这个非集中条件更容易处理。只需证明以下结论。

定理 4.6。 设 $A \subset [-1,1]^{d-1} \times [-1,1]^{d-1}$。令 $\{\gamma_y\}_{y \in A}$ 为一族光滑曲线，使得 γ_y 个点是关节 $(y_1, -1)$ 且满足 $(y_2, 1)$，并且可以用其最后一个坐标参数化

$$\gamma_y(c) = (P_y(c), c),\ c \in [-1,1].$$

我们假设 $\{\gamma_y\}$ 满足以下条件。

*1. (*正则条件*)*

存在 $C \ge 1$ 使得

$$\sup_{y \in A} \|P_y(\cdot)\|_{C^2([-1,1])} \le C. \tag{38}$$

*2. (*非集中条件*)*

该集合

$$\{(P_y(c), e_y(c)) \in \mathbb{R}^{d-1} \times S^{d-1} : y \in A\} \tag{39}$$

对所有 $c \in [-1,1]$，它是一个 $(\delta, 2(k-1)+\beta)$-集合。

Let

$$T_y^\delta = \{x = (x', x_d) \in [-1,1]^d : |x' - P_y(x_d)| \le \delta\}.$$

那么对于任意 $\epsilon > 0$，我们有

$$\|\sum_{y\in A} \chi_{T_y^\delta}\|_{L^p} \lesssim_{d,\epsilon,C} \delta^{\frac{1-k}{p'}-\epsilon} \cdot (\sum_{y\in A} |T_y^\delta|)^{1/p},\ p' = k+\beta. \tag{40}$$

证明。固定 $\epsilon > 0$，假设对于某些 $\delta_0 > 0$ 和 $C_0 > 0$，我们有

$$\|\sum_{y\in A} \chi_{T_y^{\tilde\delta}}\|_{L^p} \le C_0 \tilde\delta^{\frac{1-k}{p'}-\epsilon} \cdot (\sum_{y\in A} |T_y^{\tilde\delta}|)^{1/p},\ \tilde\delta \ge \delta_0. \tag{41}$$

我们需要选择足够小的 δ_0 和足够大的 C_0，以使归纳闭合。最后，我们将解释如何选择 C_0 和 δ_0。

假设 (41) 成立，并且 $\tilde\delta \ge 2\delta_0$。令 $\rho \ge \delta_0$ 为一个待定的小常数。我们用有界重叠的 $\rho^d/1000d$-帽 $\{\tau\}$ 覆盖 S^{d-1}。这类帽的数量为 $t\rho^{-d(d-1)}$，其中 t 是一个只依赖于 d 的常数。

Let

$$X = \bigcup_{y\in A} T_y^\delta.$$

给定 τ 和 $x \in X$，我们定义

$$A_\tau(x) = \{y \in A : e_y(x_d) \in \tau\}.$$

然后我们定义显著集合

$$S'(x) = \{\tau : \sum_{y\in A_\tau(x)} \chi_{T_y^\delta}(x) \ge \frac{1}{1000\#\{\tau\}} \sum_{y\in A} \chi_{T_y^\delta}(x)\}$$

经过二进制鸽巢原理，我们可以选取 $S(x) \subset S'(x)$，使得

$$\sum_{y\in A_\tau(x)} \chi_{T_y^\delta}(x)/2 \le \sum_{y\in A_{\tau'}(x)} \chi_{T_y^\delta}(x) \le 2 \sum_{y\in A_\tau(x)} \chi_{T_y^\delta}(x),\ \forall \tau, \tau' \in S(x)$$

and

$$\log(\rho^{-1}) \cdot \sum_{\tau\in S(x)} \sum_{y\in A_\tau(x)} \chi_{T_y^\delta}(x) \gtrsim_d \sum_{y\in A} \chi_{T_y^\delta}(x).$$

我们想将 Bourgain-Guth 论证应用于集合 $S(x)$。粗略地说，Bourgain-Guth 论证表明，给定 k，要么$S(x)$中的大多数帽都包含在某个 k维子空间的一个小邻域内，要么大多数（$k+1$）元组彼此充分分离。这个想法最早出现在 [3] 中。

为使这一二分法更加严谨，我们需要先给出一些定义。对于 $u_1, \ldots\ldots, u_{k+1} \in S^{d-1}$，我们将 $|u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{k+1}|$ 定义为由 $u_1, \ldots\ldots, u_{k+1}$ 张成的平行六面体的体积。对于 $u \in S^{d-1}, H \in G(d, k)$，若 $e_1, \ldots\ldots, e_k$ 是 H 的标准正交基，则定义 $|H \wedge u| = |e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge u|$。显然，该定义与所选取的标准正交基无关。我们有如下结论。

引理 4.7。 设 S 是 S^{d-1} 上一族有界重叠的 $\rho^d/1000d$-帽，则以下至少有一项成立。

I. $\exists \tau_1, \dots, \tau_{k+1} \in S$ 使得

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_{k+1}| \geq \rho^k/2, \ \forall u_j \in \tau_j, \ 1 \leq j \leq k+1.$$

II. $\exists H \in G(d,k)$ 使得

$$\#\{\tau \in S : \tau \subset \mathcal{N}_\rho(H)\} \geq \frac{1}{2}\#S.$$

证明。 假设 II 不成立。令 $e(\tau) \in S^{d-1}$ 表示 τ 的中心，只需找到 $\tau_1, \cdots, \tau_{k+1} \in S$ 使得

$$|e(\tau_1) \wedge \cdots \wedge e(\tau_{k+1})| \geq \frac{999}{1000}\rho^k. \tag{42}$$

任取 $\tau_1 \in S$，令 $H_1 = span\{e(\tau_1)\} \in G(d,1)$。由于 B 不成立，我们有

$$\#\{\tau \in S : \tau \subset \mathcal{N}_\rho(H_1)\} \leq \frac{1}{2}\#S.$$

我们可以找到 $\tau_2 \in S$ 使得

$$|e(\tau_1) \wedge e(\tau_2)| \geq \rho - \frac{\rho^d}{1000d} \geq \frac{1000d-1}{1000d}\rho.$$

现在令 $H_2 = span\{e(\tau_1)\ e(\tau_2)\} \in G(d,\ 2)$。类似地，由于 II 不成立，我们可以找到 $\tau_3 \in S(U)$，使得

$$|e(\tau_1) \wedge e(\tau_2) \wedge e(\tau_3)| \geq \frac{1000d-1}{1000d}\rho^2 - \frac{\rho^d}{1000} \geq \frac{1000d-2}{1000d}\rho^2.$$

我们以此方式继续。经过 k 步后，我们可以找到 $\tau_1, \ \cdots, \ \tau_{k+1} \in S(U)$，使得

$$|e(\tau_1) \wedge \cdots \wedge e(\tau_{k+1})| \geq \frac{999}{1000}\rho^k.$$

□

我们将此引理应用于 $S = S(x)$，并称若情形 I 成立，则 x 是宽的；若情形 I 不成立，则 x 是窄的。令 X_b 表示宽点的集合， X_n 表示窄点的集合。我们有

$$X = X_b \bigcup X_n$$

and

$$\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p}^p = \|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_b)}^p + \|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_n)}^p. \tag{43}$$

我们首先估计 $\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_b)}^p$。我们定义横截集

$$T^{k+1} = \{(\tau_1, \dots, \tau_{k+1}) : |u_1 \wedge \cdots \wedge u_{k+1}| \geq \rho^k/2, \ u_j \in \tau_j, \ 1 \leq j \leq k+1\}.$$

根据构造，我们有

$$X_b = \bigcup_{(\tau_1,\dots,\tau_{k+1})\in T^{k+1}} \{x \in X_b : \tau_1, \dots, \tau_{k+1} \in S(x)\}.$$

通过抽屉原理，存在固定的 $(k+1)$ 元组 $(\tau_1, \dots, \tau_{k+1}) \in T_{k+1}$ 使得如果

$$X_b' = \{x \in X_b : \tau_1, \dots, \tau_{k+1} \in S(x)\},$$

then

$$\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_b)}^p \lesssim_d \rho^{-d^3}\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_b')}^p. \tag{44}$$

对于每个 $x\in X_b'$，我们有

$$\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}(x) \lesssim_d \rho^{-d^2}\cdot\prod_{j=1}^{k+1}(\sum_{y^j\in A_{\tau_j}(x)}\chi_{T_{y^j}^\delta}(x))^{\frac{1}{k+1}}. \tag{45}$$

对 X_b'积分，得到

(46)

$$\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_b)}^p \lesssim_d \rho^{-d^3}\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_b')}^p \lesssim_d \rho^{-10d^3}\int\prod_{j=1}^{k+1}(\sum_{y^j\in A_{\tau_j}(x)}\chi_{T_{y^j}^\delta}(x))^{\frac{p}{k+1}}dx.$$

注意，由泰勒公式可得，

$$|e_y(c)-e_y(c')|\le 2C|c-c'|,\ \forall c,c',y. \tag{47}$$

我们用有界重叠的 $\frac{\rho^d}{1000dC}$维立方体 $\{Q\}$覆盖 $[-1,1]^d$，令 c_Q 表示 Q中心的最后一个坐标。固定 Q，令 $A_{\tau_j}(Q)=\{y^j\in A: e_{y^j}(c_Q)\in 2\tau_j\},1\le j\le k+1$。我们有

$$e_{y^j}(x_d)\in\tau_j, x\in Q \implies e_{y^j}(c_Q)\in 2\tau_j.$$

Then

$$\int\prod_{j=1}^{k+1}(\sum_{y_j\in A_{\tau_j}(x)}\chi_{T_{y_j}^\delta}(x))^{\frac{p}{k+1}}dx \le \sum_Q\int_Q(\prod_{j=1}^{k+1}\sum_{y^j\in A_{\tau_j}(Q)}\chi_{T_{y^j}^\delta}(x))^{\frac{p}{k+1}}dx.$$

此外，根据泰勒公式以及 T^{k+1} 的定义，当 $|c-c_Q|\le\frac{\rho^d}{1000dC}$ 时，

$$e_{y^j}(c_Q)\in 2\tau_j,\ 1\le j\le k+1 \implies |e_{y^1}(c)\wedge\cdots\wedge e_{y^{k+1}}(c)|\ge\rho^k/4. \tag{48}$$

于是我们可以应用定理 4.5，得出

$$\int_Q(\prod_{j=1}^{k+1}\sum_{y^j\in A_{\tau_j}(Q)}\chi_{T_{y^j}^\delta}(x))^{\frac{p}{k+1}}dx \le (100C'\rho^{-1})^{2\log\log(1/\delta)}\delta^d(\#A)^p, \tag{49}$$

这里，C' 是一个仅依赖于 d，k 和 C 的常数。非集中条件 (39) 意味着

$$\#A\le\delta^{-2(k-1)-\beta}. \tag{50}$$

回顾 $\#\{Q\}\lesssim_{d,\ C}\rho^{-d^2}$，我们对所有 Q 求和，得到

$$\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_b)}^p \le \overline{C}\rho^{-100d^3}(100C'\rho^{-1})^{2\log\log(1/\delta)}\delta^{\frac{p(1-k)}{p'}}\sum_{y\in A}|T_y^\delta|, \tag{51}$$

其中，$\overline{C}$ 是一个与 ρ，δ 无关的常数。

现在我们转向 $\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_n)}$。对于每个 $x\in X_n$，存在 $H=H(x)\in G(d,k)$，使得

$$\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}(x)\lesssim_d\log(\rho^{-1})\cdot\sum_{\tau\subset\mathcal{N}_\rho(H)}\sum_{y\in A_\tau(x)}\chi_{T_y^\delta}(x)\lesssim\sum_{e_y(x_d)\in S^{d-1}\cap\mathcal{N}_\rho(H)}\chi_{T_y^\delta}(x). \tag{52}$$

我们用有界重叠的 ρ-帽 $\{\tilde{\tau}\}$覆盖 S^{d-1}。由于 H 的维数为 k,

$$\#\{\tilde{\tau} : \tilde{\tau} \cap \mathcal{N}_\rho(H) \neq \emptyset\} \lesssim_{d,k} \rho^{1-k}.$$

然后由 H¨older 不等式,

$$(\sum_{y\in A} \chi_{T_y^\delta}(x))^p \lesssim_{d,k} \log(\rho^{-1})^p \cdot \rho^{(1-k)(p-1)} \cdot \sum_{\tilde{\tau}} (\sum_{y\in A_{\tilde{\tau}}(x)} \chi_{T_y^\delta}(x))^p,\ x \in X_n. \tag{53}$$

对 X_n积分，得

$$\|\sum_{y\in A} \chi_{T_y^\delta}\|^p_{L^p(X_n)} \lesssim_{d,k} \log(\rho^{-1})^p \cdot \rho^{(1-k)(p-1)} \cdot \int \sum_{\tilde{\tau}} (\sum_{y\in A_{\tilde{\tau}}(x)} \chi_{T_y^\delta}(x))^p dx. \tag{54}$$

我们用有界重叠的 $\frac{\rho}{1000C}$-区间 $\{J\}$覆盖 $[-1,1]$，并令 c_J为 J的中心。于是

$$\int \sum_{\tilde{\tau}} (\sum_{y\in A_{\tilde{\tau}}(x)} \chi_{T_y^\delta}(x))^p dx \lesssim \sum_J \int_{S_J} \sum_{\tilde{\tau}} (\sum_{y\in A_{\tilde{\tau}}(x)} \chi_{T_y^\delta}(x))^p dx, \tag{55}$$

其中

$$S_J = [-1,1]^{d-1} \times J.$$

此外，由泰勒公式,

$$y \in A_{\tilde{\tau}}(x),\ x \in S_J \implies y \in A_{\tilde{\tau}}(J), \tag{56}$$

其中

$$A_{\tilde{\tau}}(J) = \{y \in A : e_y(c_J) \in 2\tilde{\tau}\}.$$

Then

$$\sum_J \sum_{\tilde{\tau}} \int_{S_J} (\sum_{y\in A_{\tilde{\tau}}(x)} \chi_{T_y^\delta}(x))^p dx \leq \sum_J \sum_{\tilde{\tau}} \int_{S_J} (\sum_{y\in A_{\tilde{\tau}}(J)} \chi_{T_y^\delta}(x))^p dx. \tag{57}$$

固定 J 和 $\tilde{\tau}$。设 $\mathcal{T}_{\tilde{\tau}}$ 是一族有界重叠的 ρ^2 管，它们指向方向 $e(\tilde{\tau})$，即 $\tilde{\tau}$ 的中心。注意，根据泰勒公式,

$$e_y(c_J) \in 2\tilde{\tau} \implies e_y(c) \in 3\tilde{\tau},\ c \in J \implies \exists T \in \mathcal{T}_{\tilde{\tau}},\ T_y^\delta \cap S_J \subset T. \tag{58}$$

对于每个 $T \in \mathcal{T}_{\tilde{\tau}}$，我们定义

$$A_T = \{y \in A : T_y^\delta \cap S_J \subset T,\ e_y(c_J) \in 2\tilde{\tau}\}.$$

Then

$$\int_{S_J} (\sum_{y\in A_{\tilde{\tau}}(J)} \chi_{T_y^\delta}(x))^p dx \lesssim \sum_{T\in\mathcal{T}_{\tilde{\tau}}} \int_{S_J} (\sum_{y\in A_T} \chi_{T_y^\delta}(x))^p dx. \tag{59}$$

Thus

$$\sum_{\tilde{\tau}} \int_{S_J} (\sum_{y\in A_{\tilde{\tau}}(J)} \chi_{T_y^\delta}(x))^p dx \lesssim \sum_{\tilde{\tau}} \sum_{T\in\mathcal{T}_{\tilde{\tau}}} \int_{S_J} (\sum_{y\in A_T} \chi_{T_y^\delta}(x)))^p dx. \tag{60}$$

现在固定 $T \in \mathcal{T}_{\tilde{\tau}}$。经过平移后，我们假设 T 和 S_J 的中心位于 0。考虑保持 $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ 不变并将 $e(\tilde{\tau})$ 映到 e_d 的线性坐标变换 ψ_ρ。我们有 $|\psi_\rho(v)| \sim_C |v|$, $\forall v$ 且 $|\det \psi_\rho| \sim_C 1$。因此，乘以一个依赖于 C 的常数后，我们可以假设 $e(\tilde{\tau}) = e_d$。

设 $J=[-\frac{\rho}{2000C},\frac{\rho}{2000C}]$。定义 $E_\rho(y)=(P_y(-\frac{\rho}{2000C}),P_y(\frac{\rho}{2000C}))$，并考虑由下式给出的线性映射 A_ρ

$$e_j\mapsto\frac{1}{\rho^2}e_j,\ 1\le j\le d-1;\ e_d\mapsto\frac{2000C}{\rho}e_d.$$

于是我们得到一组新的光滑曲线

$$\tilde{\gamma}_z=A_\rho(S_J\cap\gamma_y),\ z=\frac{1}{\rho^2}E_\rho(y),\ y\in A_T.$$

根据构造，如果 $T_y^\delta\cap S_J\subset T$，$A_\rho(T_y^\delta\cap S_J)$是以曲线$\tilde{\gamma}_z$为中心的$\frac{\delta}{\rho^2}$-管，并且

$$A_\rho(T_y^\delta\cap S_J)\subset A_\rho(T)\subset[-1,1]^d.$$

我们可以用 $\tilde{\gamma}_z$ 的最后一个坐标重新参数化

$$\tilde{\gamma}_z(c)=(\tilde{P}_z(c),c),\ c\in[-1,1],$$

其中

$$\tilde{P}_z(c)=\frac{1}{\rho^2}P_y(\frac{\rho}{2000C}c),\ z=\frac{1}{\rho^2}E_\rho(y).$$

显然，正则条件以相同的 C 成立，并且集合

$$\{(\tilde{P}_z(c),\tilde{e}_z(c))\in\mathbb{R}^{d-1}\times S^{d-1}:z\in A_\rho(A_T)\}$$

是某个仅依赖于 C 和 d 的常数 M_C 所对应的（$M_C\frac{\delta}{\rho}$，$2(k-1)+\beta$）-集合。B　　y 由我们的归纳假设 (41)，可得

$$\int_{S_J}(\sum_{y\in A_T}\chi_{T_y^\delta}(x))^p dx\lesssim_{d,C}C_0^p\rho^{-\frac{p(1-k)}{p'}+p\epsilon}(M_C\delta)^{\frac{p(1-k)}{p'}-p\epsilon}\cdot|J|\cdot\sum_{y\in A_T}|T_y^\delta|. \tag{61}$$

Thus

$$\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_n)}^p\lesssim_{d,k,C}C_0^p\log(\rho^{-1})^p\rho^{p\epsilon}\delta^{\frac{p(1-k)}{p'}-p\epsilon}\cdot\sum_{\tilde{\tau}}\sum_{T\in\mathcal{T}_{\tilde{\tau}}}\sum_{y\in A_T}|T_y^\delta|. \tag{62}$$

回顾一下，如果 $e_y(c_J)\in 2\tilde{\tau}$，则有 $e_y(c)\in 3\tilde{\tau}$, $\forall|c-c_J|\le\frac{\rho}{2000C}$。由于 $\{\tilde{\tau}\}$ 是有界重叠的，因此有

$$\sum_{\tilde{\tau}}\sum_{T\in\mathcal{T}_{\tilde{\tau}}}\sum_{y\in A_T}|T_y^\delta|\lesssim_d\sum_{y\in A}|T_y^\delta|. \tag{63}$$

ˆ 因此，对于某个与 δ，ρ 无关的常数 C，有

$$\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p(X_n)}^p\le\hat{C}C_0^p\log(\rho^{-1})^p\rho^{p\epsilon}\cdot\delta^{\frac{p(1-k)}{p'}-p\epsilon}\sum_{y\in A}|T_y^\delta|. \tag{64}$$

因此，由 (51) 和 (64) 可得

(65)

$$\begin{aligned}&\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p}^p\\&\le\left(\overline{C}\rho^{-100d^3}(100C'\rho^{-1})^{2\log\log(1/\delta)}\delta^{p\epsilon}+\hat{C}C_0^p\log(\rho^{-1})^p\rho^{p\epsilon}\right)\delta^{\frac{p(1-k)}{p'}-p\epsilon}\sum_{y\in A}|T_y^\delta|.\end{aligned}$$

首先，我们选取足够小的 ρ，使得

$$\hat{C}\log(\rho^{-1})^p\rho^{p\epsilon}\leq\frac{1}{2}. \tag{66}$$

然后我们取足够小的 δ_0，使得

$$\overline{C}\rho^{-100d^3}(100C'\rho^{-1})^{2\log\log(1/\delta)}\delta^{p\epsilon}\leq\overline{C}\rho^{-100d^3}(100C'\rho^{-1})^{2\log\log(1/\delta_0)}\delta_0^{p\epsilon},\ \delta\leq\delta_0. \tag{67}$$

注意，我们有一个平凡的界

$$\|\sum_{y\in A}\chi_{T_y^\delta}\|_{L^p}^p\leq\#A^p\leq\delta^{-d}\cdot\delta^{\frac{p(1-k)}{p'}}\sum_{y\in A}|T_y^\delta|.$$

因此，只需取

$$C_0^p\geq\max\{2\overline{C}\rho^{-100d^3}(100C'\rho^{-1})^{2\log\log(1/\delta_0)}\delta_0^{p\epsilon},\delta_0^{-d}\}. \tag{68}$$

□

5. Further Remarks

5.1. 定理 1.2 的锐性。 在本节中，我们将给出明确的例子，说明定理 1.2 对于具有常截面曲率的完备流形是锐的。

定理 5.1. 设 M 是一个具有常截面曲率的 d维完备流形，且 π 是从 SM 到 M的投影。给定整数$1\leq k\leq d-1$和 $\beta\in[0,1]$，存在一个不变集 $E\subset SM$，使得维数 $_{\mathcal{H}}\,E=2(k-1)\,+\beta+1$ 且维数$_{\mathcal{H}}\,\pi(E)\,=k+\beta$。

证明. 众所周知，具有常截面曲率的 d维完备流形的万有覆盖与 $\mathbb{R}^d$、 $\mathbb{H}^d$和 S^d之一等距，且覆盖映射是局部等距映射。因此，只需考虑 $M=\mathbb{R}^d$、 $\mathbb{H}^d$和 S^d。

在 $M=\mathbb{R}^d$的情况下，我们只需取包含在由平行仿射 k维平面组成的 β维并集中的所有直线构成的集合。类似地，在 $M=\mathbb{H}^d$的情况下，我们取包含在由与边界 $\{x_d=0\}$正交的平行仿射k维平面组成的 β维并集中的所有测地线构成的集合。

情形 $M=S^d$ 与另外两种情形略有不同，因为当 $k>(d-1)/2$ 时，不存在平行的 k 维全测地子流形。我们的思路是选取一组 k维全测地子流形，使它们的交叠尽可能小，即任意两个子流形都交于一个固定的（$k-1$）维子流形。

我们取

$$S^k=\{x=(x_i)_{i=1}^{d+1}\in S^d:x_{k+2}=\cdots=x_{d+1}=0\}.$$

我们取一个 β 维集合 $A\subset[-\pi/6,\pi/6]$。对于每个 $\theta\in A$，定义正交映射 $g_\theta\in O(d-k+1)$，使得

$$\begin{aligned}g_\theta(1,0,\ldots,0)&=(\cos\theta,\sin\theta,0,\ldots,0),\\ g_\theta(0,1,\ldots,0)&=(-\sin\theta,\cos\theta,0,\ldots,0),\\ g_\theta(0,0,x_{k+3},\ldots,x_{d+1})&=(0,0,x_{k+3},\ldots,x_{d+1}).\end{aligned}$$

容易验证,

$$\|g_\theta - g_{\theta'}\|_{\mathbb{R}^{(d-k+1)\times(d-k+1)}} \sim |\theta - \theta'|,\ \theta,\ \theta' \in [-\pi/6, \pi/6].$$

那么，如果 $O_A = \{g_\theta\}_{\theta\in A}$，我们有 $\dim_{\mathcal{H}} O_A = \dim_{\mathcal{H}} A = \beta$。令 $S^k_\theta := (Id_k \oplus g_\theta)(S^k)$。$S^k_\theta$ 是一个 k 维全测地子流形，并且

$$S^k_\theta \bigcap S^k_{\theta'} = S^{k-1},\ \forall \theta \neq \theta'.$$

我们取

$$E = \bigcup_{\theta\in A} S(S^k_\theta) \subset SM.$$

E 是不变的。根据构造,

$$\pi(E) = \bigcup_{\theta\in A} S^k_\theta.$$

还需证明

$$\dim_{\mathcal{H}} E = 2(k-1) + \beta + 1 \tag{69}$$

and

$$\dim_{\mathcal{H}} \pi(E) = k + \beta. \tag{70}$$

我们首先计算 $\pi(E)$ 的豪斯多夫维数。注意映射

$$\phi : (x, g) \in S^d \times O(d-k+1) \mapsto (Id_k \oplus g)(x) \in S^d.$$

是利普希茨的，因此

$$\dim_{\mathcal{H}} \pi(E) = \dim_{\mathcal{H}} \phi(S^k \times O_A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(S^k \times O_A) = k + \beta.$$

对于逆映射，我们选取一点 $p \in S^{k-1} = \bigcap_{e\in A} S^k_e$，并考虑指数映射

$$\exp_p : B(0,\delta) \subset T_pS^d \to SB_\delta(p).$$

当 $\delta < \pi$ 时，指数映射 $\exp_p$ 是一个微分同胚。注意到 S^k_θ 是全测地的，因此我们有

$$\exp_p(t \cdot \bigcup_{e\in A} S_p(S^k_\theta)) \subset \pi(E),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

不难验证

$$\dim_{\mathcal{H}}(\bigcup_{e\in A} S_p(S^k_\theta)) = k - 1 + \beta.$$

Then

$$\dim_{\mathcal{H}}(\{tv : t \in (0,\delta),\ v \in \bigcup_{e\in A} S_p(S^k_\theta)\}) \geq \dim_{\mathcal{H}}(\bigcup_{e\in A} S_p(S^k_\theta)) + 1 = k + \beta.$$

Thus

$$\dim_{\mathcal{H}} \pi(E) \geq k + \beta.$$

现在我们转而讨论 E 的豪斯多夫维数。注意，投影 $\pi|_E$ 是利普希茨映射，并且对于 $p \in \pi(E)$，根据 E 的构造,

$$\dim_{\mathcal{H}} \pi|_E^{-1}(\{p\}) \geq k - 1.$$

根据 [9], 中的引理，我们有

$$\dim_{\mathcal{H}} E \geq k-1+\dim_{\mathcal{H}} \pi(E) = 2(k-1)+\beta+1.$$

另一方面，我们考虑映射

$$\psi : S(S^k)\times A \to E,\ \psi((p,v),\theta) = (g_\theta(p), g_\theta(v)).$$

显然， ψ 是利普希茨的，因此

$$\dim_{\mathcal{H}} E \leq \dim_{\mathcal{H}}(S(S^k)\times A) = 2(k-1)+\beta+1.$$

□

5.2. 关于非常截面曲率流形的猜想。 当M是一个非常截面曲率的完备流形，且维数为 ≥ 3时，自然会问定理 1.2 是否仍是尖锐的。我们认为，在这种情况下，定理 1.2 可以得到改进，并提出如下猜想。

猜想 5.2. 设 $d \geq 3$ 和 M 是一个 d维、截面曲率非常数的完备黎曼流形。设 $1 \leq k \leq d-1$ 为整数，且 $\beta \in [0,1]$。那么存在 $\epsilon = \epsilon(d,k,\beta,M) > 0$，使得若 $E \subset SM$是一个不变集，且维数$\dim_{\mathcal{H}} E \geq 2(k-1)+1+\beta$，则

$$\dim_{\mathcal{H}} \pi(E) \geq k+\beta+\epsilon.$$

References

[1] J. Bennett。与横截性相关的多线性调和分析若干方面。载于 *Harmonic analysis and partial differential equations* 612 *Contemp. Math.* 1 28 ，第 卷，第 – 页。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2014。[2] J. Bennett 、 A. Carbery 和 T. Tao。关于多线性限制与 Kakeya 猜想。*Acta Mathematica*，196(2):261–302，2006。[3] J. Bourgain 和 L. Guth。基于多线性估计的振荡积分算子界。 *Geom. Funct. Anal.*，21(6):1239–1295，2011。[4] A. Carbery 和 S. I. Valdimarsson。通过博尔苏克–乌拉姆定理证明端点多线性 Kakeya 定理。 *J. Funct. Anal.*，264(7):1643–1663，2013。[5] K. F ¨ $\mathbb{R}^3$ *Proceedings of the London Mathematical Society* 109 2 353 381, 03 2014 assler 和 T. Orponen。关于 中的受限投影族。[6] S. Gan。 k维平面并的豪斯多夫维数。 *arXiv:2305.14544*，2023。[7] K. H´era。与仿射子空间族相关的 Furstenberg 型集合的豪斯多夫维数。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*，44(2):903–923，2019。[8] K. H´era、T. Keleti 和 A. M´ath´e。仿射子空间并及 Furstenberg 型集合的豪斯多夫维数。 *J. Fractal Geom.*，6(3):263–284，2019。[9] R. Kaufman 和 P. Mattila。线性变换的豪斯多夫维数与例外集。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*，1(2):387–392，1975。[10] F. C. Ledrappier 和 E. Lindenstrauss。关于在测地流下不变的测度的投影。 *Int. Math. Res. Not.*，(9):511–526，2003。[11] J. M. Lee。 *Introduction to smooth manifolds*， *Graduate Texts in Mathematics*第218卷。施普林格，纽约，第二版，2013。[12] D. Oberlin。投影的例外集、k 维平面的并及相关变换。 *Israel Journal of Mathematics*，202:331–342，2014。[13] R. Oberlin。 F^n中的直线的并。 *Mathematika*，62(3):738–752，2016。[14] T. Tao。端点之外多线性曲线 Kakeya、限制及振荡积分估计的尖锐界。 *Mathematika*，66(2):517–576，2020。[15] J. Zahl。 $\mathbb{R}^n$中的直线的并。 *Mathematika*，69(2):473–481，2023。