由 Ovsienko–Roger 代数扩展的新李超代数上的单受限模 [1]

Jinrong Wang，Xiaoqing Yue*

数学科学学院，智能计算与应用重点实验室（教育部），同济大学，上海 200092，中国 电子邮箱：2130926@tongji.edu.cn，xiaoqingyue@tongji.edu.cn

arXiv:2601.09277v1 [math.RT] 14 Jan 2026

摘要。本文介绍了一种新的无限维李超代数 $\mathcal{S}$，称为超扩展 Ovsienko–Roger 代数。该代数通过确定具有 $S_{\bar{0}} = \mathbb{C}[\partial]L \oplus \mathbb{C}[\partial]W$、$S_{\bar{1}} = \mathbb{C}[\partial]G$ 及非平凡 λ-括号 $[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L$、$[L_\lambda G] = (\partial + \lambda)G$、$[L_\lambda W] = [G_\lambda G] = \partial W$ 的李共形超代数 $S = S_{\bar{0}} \oplus S_{\bar{1}}$ 的湮灭超代数而得到。随后，我们构造了一类单受限 $\mathcal{S}$-模；在一定条件下，这些模由某些有限维可解李超代数的单模诱导而来。此外，我们还得到了 $\mathcal{S}$ 上的单广义 Verma 模的分类，并证明 $\mathcal{S}$ 的 Verma 模总是可约的。

关键词：超扩展 Ovsienko–Roger 代数、李共形超代数、受限模、Verma 模、单模

数学主题分类（*2020*）：17B05, 17B10, 17B65, 17B68

1 引言

本文中，我们分别用 $\mathbb{C}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}_+$ 表示复数、整数、非负整数和正整数集。所有向量空间、李超代数和李共形超代数均定义在 $\mathbb{C}$上。对于李代数 $\mathfrak{g}$，我们用 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$表示 $\mathfrak{g}$的泛包络代数。我们用 $V[\lambda]$ 表示系数取自向量空间 V的 λ 多项式集。

受限模（或光滑模，参见 [18]）的研究对于 $\mathbb{Z}$ 或 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次李超代数的表示理论十分重要。已有研究表明，李超代数的受限模范畴与其相应顶点超代数的模范畴之间存在等价关系（参见 [13, 19, 21, 22]）。Mazorchuk 和 Zhao 在 [24] 中提出了一种单 Virasoro 模的一般构造，该构造同时涵盖并推广了最高权模和 Whittaker 模。此后，许多已知李（超）代数上的单限制模相继被构造并得到刻画（参见 [5–7, 21, 22]）。

李共形（超）代数的概念由 Kac 在 [17], 中引入，它以公理化方式描述了共形场论中手征场的算符乘积展开。此外，李共形超代数理论为研究满足局部性 [17], 的李超代数提供了恰当的

[1]本研究得到国家自然科学基金（编号：12471027）和上海市自然科学基金（编号：24ZR1471900）资助。

*通讯作者：Xiaoqing Yue（xiaoqingyue@tongji.edu.cn）

工具。在过去二十年中，李共形超代数的结构理论和表示理论得到了长足发展（参见 [8, 9, 11, 12, 17]）。

在对秩为 (2 + 1) [30], 的李共形超代数进行分类的过程中，作者构造了若干新颖而有趣的例子。通过构造相应的湮灭超代数，他们也确定了这些例子对应的无限维李超代数。特别地，其中一个新的李超代数可视为 $\lambda = 1$ Ovsienko–Roger 代数的超扩张。Ovsienko–Roger 代数 $\mathcal{L}_\lambda$ 是 Virasoro 代数与其次数为一的张量密度模的扩张。它起源于 Ovsienko 和 Roger [27] 关于 Sturm–Liouville 算子 [23]的矩阵类似物的研究。代数 $\mathcal{L}_0$是扭海森堡–维拉索罗代数，在曲线模空间 [1]中发挥着重要作用。代数 $\mathcal{L}_{-1}$ 是 W(2, 2) 代数，也称为 $\mathfrak{bms}_3$ 代数，在顶点算子代数和 BMS/GCA 对应关系的研究中受到广泛关注（参见 [2, 31]）。代数 $\mathcal{L}_1$ 是一个非完美李代数，其受限模范畴已在 [21]中得到研究。

受这些进展的启发，我们引入并研究一种新的无限维李超代数，称为超扩展 Ovsienko–Roger 代数。

定义 1.1。 超扩展 *Ovsienko–Roger* 代数 $\mathcal{S}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的李超代数，其基为

$$\{L_m, W_m, G_r, C_1, C_2 \mid m \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\}$$

其超括号为:

$$\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}C_1,\\
&[L_m, W_n] = (m+n)W_{m+n} + \delta_{m+n,0}C_2,\\
&[L_m, G_r] = rG_{m+r},\\
&[G_r, G_s] = (r+s)W_{r+s} + \delta_{r+s,0}C_2,\\
&[W_m, W_n] = [W_m, G_r] = [\mathcal{S}, C_1] = [\mathcal{S}, C_2] = 0,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

对任意 m, $n \in \mathbb{Z}$, r, $s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$，其中 $|L_m| = |W_m| = |C_1| = |C_2| = \bar{0}$ 且 $|G_r| = \bar{1}$。

回顾 一种特殊秩（$2 + 1$）李共形超代数在 [30] 中被引入。

定义 1.2。 特殊秩为 (2 + 1) 的李共形超代数 $S = S_{\bar{0}} \oplus S_{\bar{1}}$ 是由 L, W 和 G 生成的自由 $\mathbb{Z}_2$-分次 $\mathbb{C}[\partial]$-模，并满足以下非平凡的λ括号:

$$[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L,\ \ [L_\lambda W] = \partial W,\ \ [L_\lambda G] = (\partial + \lambda)G,\ \ [G_\lambda G] = \partial W, \tag{1.2}$$

其中 $S_{\bar{0}} = \mathbb{C}[\partial]L \oplus \mathbb{C}[\partial]W$和 $S_{\bar{1}} = \mathbb{C}[\partial]G$。

首先，通过确定 S的湮灭超代数，我们构造了一类新的李超代数 $\bar{\mathcal{S}}^{\epsilon}$，其中 $\epsilon=0$ 和 $\epsilon=\frac{1}{2}$ 分别对应 Ramond 型和 Neveu–Schwarz 型。随后，我们详细计算了其中心扩张。然而，我们指出，这并非泛中心扩张，因为李超代数 $\mathcal{S}^{\epsilon}$ 不是完全的。

做好这些准备后，我们得到李超代数 $\mathcal{S}$，随后将重点转向研究其单限制模。我们构造（定理 4.1）并在某些条件下分类简单受限 $\mathcal{S}$-模（定理 5.2）。我们还建立了 $\mathcal{S}$ 的单限制模与一族和 $\mathcal{S}$ 相关的有限维可解李超代数的单模之间的一一对应关系（定理 5.3）。利用 Block 在 [3], 中的结论，我们得到 $\mathcal{S}$ 上简单广义 Verma 模的分类（推论 5.4）。此外，受定理 4.1 中条件的启发，我们证明 $\mathcal{S}$ 上的 Verma 模总是可约的。

本文结构如下。第 2 节回顾李超代数和李共形超代数的一些记号与预备知识。第 3 节从湮灭超代数和中心扩张的角度引入新的超扩展 Ovsienko–Roger 代数。第 4 节构造一类 $\mathcal{S}$ 上的单限制模。第 5 节给出 $\mathcal{S}$-模为单限制模的若干等价刻画。此外，我们对 $\mathcal{S}$ 的简单广义 Verma 模进行分类。最后，我们给出一些受限 $\mathcal{S}$- 模的例子。

2 预备知识

本节将为后文的使用，对李超代数和李共形超代数作一些准备。

2.1 李超代数

设 V 是一个超空间，即带有直和分解 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 的 $\mathbb{Z}_2$-分次线性空间。如果 $x\in V_\theta$、$\theta\in\mathbb{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$，则称 x 是齐次的，其宇称为 θ。定义 $x\in V_{\bar{0}}$ 为偶的，$x\in V_{\bar{1}}$ 为奇的。齐次元素 x 的宇称记为 $|x|$。在下文中，如果表达式中出现 $|x|$，则约定 x 是齐次的，并通过线性性将该表达式推广到其他元素。

设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\bar{0}}\oplus\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 是一个李超代数。一个 $\mathfrak{g}$-模是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$，并带有一个双线性映射 $\mathfrak{g}\times V\to V$，记作 $(x,\ v)\mapsto xv$，满足

$$x(yv)-(-1)^{|x||y|}y(xv)=[x,y]v,\quad \mathfrak{g}_{\bar{i}}V_{\bar{j}}\subseteq V_{\bar{i}+\bar{j}},$$

对所有 $x,\ y\in\mathfrak{g}$、$v\in V$、$i,\ j\in\mathbb{Z}_2$均成立。因此，范畴中存在一个奇偶变换函子 Π，它将 $\mathfrak{g}$-模映到自身。换言之，对于任意模 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$，我们都有一个新的模

$\Pi(V)$，在奇偶性变换下具有相同的底空间，即 $\Pi(V_{\bar{0}}) = V_{\bar{1}}$ 和$\Pi(V_{\bar{1}}) = V_{\bar{0}}$。本文中所考虑的所有模均为 $\mathbb{Z}_2$-分次的，且所有单模均为非平凡的，除非另有说明。

定义 2.1. 设 V 是李超代数 $\mathfrak{g}$ 和 $x \in \mathfrak{g}$ 的一个模。
(1) 若对任意 $v \in V$，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x^n v = 0$，则称 x 在 V 上的作用是局部幂零的。类似地，若对任意 $v \in V$，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathfrak{g}^n v = 0$，则称 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的作用是局部幂零 的。

(2) 若对任意 $v \in V$，都有 $\dim(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}x^n v) < +\infty$，则称 x 在V 上的作用是局部有限的。类似地，若对任意 $v \in V$，都有 $\dim(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}\mathfrak{g}^n v) < +\infty$，则称 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的作用是局部有限 的。

注 2.2. 容易看出，x 在 V 上的作用局部幂零，蕴含 x 在 V 上的作用局部有限。若 $\mathfrak{g}$ 是有限生成李超代数，则 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的作用局部幂零，蕴含 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的作用局部有限。

2.2 李共形超代数

现在，我们回顾一下关于李共形超代数的一些定义、记号和相关结果。更多详情请参阅 [8, 12, 16, 17] 。

定义 2.3. 李共形超代数 $R = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次 $\mathbb{C}[\partial]$-模，带有一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $R \otimes R \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes R$, $a \otimes b \mapsto [a_\lambda b]$ ，称为 λ-括号，并满足以下公理（$a, b, c \in R$）：

$$\begin{aligned}
&\text{(conformal sesquilinearity)} && [\partial a_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b],\ [a_\lambda \partial b] = (\partial + \lambda)[a_\lambda b],\\
&\text{(super skew-symmetry)} && [a_\lambda b] = -(-1)^{|a||b|}[b_{-\lambda-\partial} a],\\
&\text{(super Jacobi identity)} && [a_\lambda [b_\mu c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] + (-1)^{|a||b|}[b_\mu [a_\lambda c]].
\end{aligned}$$

对于李共形超代数$R = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}$，若 R在 $\mathbb{C}[\partial]$上有限生成，则称其为有限。若它还是一个自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模，则秩 R 定义为其底层自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模的秩。有时，秩写成两个数之和，表示$R_{\bar{0}}$ 的秩与$R_{\bar{1}}$的秩之和。

特别地，存在一个与李共形超代数相关的重要李超代数。设 R 是一个李共形超代数。对于任意 $a,\ b \in R$，我们记为

$$[a_\lambda b] = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda^{(j)} a_{(j)} b \quad \text{with} \quad \lambda^{(j)} = \frac{\lambda^j}{j!}.$$

对于每个 $j \in \mathbb{N}$，我们都有一个 $\mathbb{C}$-线性映射： $R \otimes R \to R,\quad a \otimes b \mapsto a_{(j)} b$，称为第 j-个乘积。

定义 2.4。 李共形超代数 R 的湮灭超代数 Lie(R) 是一个在 $\mathbb{C}$ 上由 $\{a_{(n)} \mid a \in R,\ n \in \mathbb{N}\}$ 张成、满足以下关系的李超代数

$$(\partial a)_{(n)} = -na_{(n-1)},\quad (a+b)_{(n)} = a_{(n)} + b_{(n)},\quad (ka)_{(n)} = ka_{(n)},$$

对于 a, $b \in R$ 和 $k \in \mathbb{C}$, Lie(R) 的李括号由下式给出

$$[a_{(m)}, b_{(n)}] = \sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{m}{j} (a_{(j)}b)_{(m+n-j)}. \tag{2.1}$$

对于任意齐次的 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{N}$, Lie(R) 的宇称 $|a_{(n)}|$ 与 $|a|$ 相同。

对于李共形超代数 R, 湮灭超代数 Lie(R) 以及带有 $[\partial, a_{(n)}] = -na_{(n-1)}$ 的扩张湮灭超代数Lie(R)$^e = \mathbb{C}\partial \ltimes$Lie($R$), 在李共形超代数的表示中起着关键作用（参见 [8]）。

例 2.5. Neveu–Schwarz李共形超代数是一个自由的 $\mathbb{Z}_2$-分次 $\mathbb{C}[\partial]$模, 以 $\{L, G\}$ 为基, 满足以下关系:

$$[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L,\quad [L_\lambda G] = (\partial + \frac{3}{2}\lambda)G,\quad [G_\lambda G] = 2L.$$

这是最早在 [8] 中引入的李共形超代数的一个重要例子, 其中研究了它的有限非平凡不可约共形模。实际上, Neveu–Schwarz李共形超代数对应于超Virasoro代数（详情见 [9] ）, 也称为 $N = 1$ 超共形代数（参见 [4, 17, 26, 28]）。无中心的超Virasoro代数是李超代数 SVir$_\epsilon = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_m \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}+\epsilon} \mathbb{C}G_r$, 满足以下关系:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n},\ [L_m, G_r] = (\frac{m}{2} - r)G_{m+r},\ [G_r, G_s] = 2L_{r+s},$$

对所有 m, $n \in \mathbb{Z}$, $\epsilon = \frac{1}{2}$, 0, r, $s \in \mathbb{Z} + \epsilon$。 SVir$_0$称为 Ramond 代数, SVir $_{12}$称为 Neveu–Schwarz 代数。这些李超代数的表示论已在一系列论文中得到研究, 例如 [5, 10, 15, 20, 29]。

3 由 S导出的新李超代数

3.1 湮灭超代数 Lie(S)

引理 3.1. 假设李超代数 $\bar{\mathcal{S}}^0$ 是 S的湮灭超代数。那么 $\bar{\mathcal{S}}^0 = \mathrm{Lie}(S) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}($ $\mathbb{C}L_m \oplus \mathbb{C}W_m \oplus \mathbb{C}G_m)$ 满足以下关系:

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n},\quad [L_m, W_n] = (m+n)W_{m+n},\quad [L_m, G_n] = nG_{m+n},$$
$$[G_m, G_n] = (m+n)W_{m+n},\quad [W_m, W_n] = [W_m, G_n] = 0,$$

其中 $|L_m| = |W_m| = \bar{0}$ 且 $|G_m| = \bar{1}$、 m、 $n \in \mathbb{Z}$。

证明。 根据 j次乘积的定义以及（1.2），我们有

$$L_{(0)}L=\partial L,\ L_{(1)}L=2L,\ L_{(0)}W=\partial W,\ L_{(0)}G=\partial G,\ L_{(1)}G=G,\ G_{(0)}G=\partial W,$$
$$L_{(i+2)}L=L_{(i+1)}W=L_{(i+2)}G=G_{(i+1)}G=W_{(i)}W=W_{(i)}G=0,\ \ \forall\, i\geq 0.$$

结合 (2.1) 可得

$$[L_{(m)},L_{(n)}]=(m-n)L_{(m+n-1)},\ \ [L_{(m)},W_{(n)}]=-(m+n)W_{(m+n-1)},$$
$$[L_{(m)},G_{(n)}]=-nG_{(m+n-1)},\ \ [G_{(m)},G_{(n)}]=-(m+n)W_{(m+n-1)},$$

其余各项均为零。对 $L_{(m+1)}\to L_m$、 $W_{(m-1)}\to W_m$、 $G_{(m)}\to G_m$ 作平移，然后对所有 $m\in\mathbb{Z}$ 取 $m\to -m$ ，即可得到引理 3.1 的结论。 □

参照超Virasoro代数，我们或许可以称李超代数 $\bar{\mathcal{S}}^0$ 为 Ramond 型。同时，我们可以定义 Neveu–Schwarz 型，记作 $\bar{\mathcal{S}}^{\frac{1}{2}}$ ，其基为 $\{L_m,W_m,G_r\mid m\in\mathbb{Z},\ r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\}$，满足

$$[L_m,L_n]=(n-m)L_{m+n},\ \ [L_m,W_n]=(m+n)W_{m+n},\ \ [L_m,G_r]=rG_{m+r},$$
$$[G_r,G_s]=(r+s)W_{r+s},\ \ [W_m,W_n]=[W_m,G_r]=0,$$

其中 $m,n\in\mathbb{Z}$, $r,s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$。显然， $\bar{\mathcal{S}}^{\frac{1}{2}}$ 是 $\bar{\mathcal{S}}^0$ 的子代数。设 $\varphi\colon\ \bar{\mathcal{S}}^{\frac{1}{2}}\to\bar{\mathcal{S}}^0$ 是一个线性映射，定义如下

$$L_m\mapsto\frac{1}{2}L_{2m},\ \ W_m\mapsto W_{2m},\ \ G_{m+\frac{1}{2}}\mapsto\frac{1}{\sqrt{2}}G_{2m+1},\ \ \text{for } m\in\mathbb{Z}.$$

容易看出， φ 是单射。因此，我们得到由李共形超代数 S导出的以下李超代数 $\mathcal{S}^\epsilon$ 。

定义 3.2. 李超代数

$$\bar{\mathcal{S}}^\epsilon=(\bar{\mathcal{S}}^\epsilon)_{\bar{0}}\oplus(\bar{\mathcal{S}}^\epsilon)_{\bar{1}}=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}(\mathbb{C}L_m\oplus\mathbb{C}W_m)\oplus\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}+\epsilon}\mathbb{C}G_r$$

定义在 $\mathbb{C}$ 上，其中 $(\mathcal{S}^\epsilon)_{\bar{0}}=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}(\mathbb{C}L_m\oplus\mathbb{C}W_m)$ 且 $(\mathcal{S}^\epsilon)_{\bar{1}}=\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}+\epsilon}\mathbb{C}G_r$，其超括号如下：

$$[L_m,L_n]=(n-m)L_{m+n},\ \ [L_m,W_n]=(m+n)W_{m+n},\ \ [L_m,G_r]=rG_{m+r},$$
$$[G_r,G_s]=(r+s)W_{r+s},\ \ [W_m,W_n]=[W_m,G_r]=0,$$

对于任意 $m,\ n\in\mathbb{Z}$、 $r,\ s\in\mathbb{Z}+\epsilon$、 $\epsilon=\frac{1}{2}$, 0。

3.2 中心扩张

设 $\mathfrak{g}$ 是一个李超代数。$\mathfrak{g}$ 上的 2-余循环是一个 $\mathbb{C}$-双线性函数 $\psi:\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$, 满足 ($x,\ y,\ z\in\mathfrak{g}$):

$$\text{(super skew-symmetry)}\quad \psi(x,y)=-(-1)^{|x||y|}\psi(y,x), \tag{3.1}$$

$$\text{(super Jacobi identity)}\quad \psi(x,[y,z])=\psi([x,y],z)+(-1)^{|x||y|}\psi(y,[x,z]). \tag{3.2}$$

记 $C^2(\mathfrak{g},\ \mathbb{C})$ 为 $\mathfrak{g}$ 上 2-余循环的向量空间。对于任意线性函数 $f:\ \mathfrak{g}\to\mathbb{C}$, 可以定义 ψ_f 在 $\mathfrak{g}$ 上的一个 2-余循环:

$$\psi_f(x,y)=f([x,y]),\quad \forall\ x,y\in\mathfrak{g},$$

这称为 $\mathfrak{g}$ 上的 2-余边界。记 $B^2(\mathfrak{g},\ \mathbb{C})$ 为 $\mathfrak{g}$ 上 2-余边界的向量空间。若 2-余循环 ϕ 与另一个 2-余循环 ψ 等价, 即 $\phi-\psi$ 是一个 2-余边界, 则称二者等价。商空间

$$H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})=C^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})/B^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$$

称为 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{C}$ 中取平凡系数时的第二上同调群。

定义 3.3。设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\bar{0}}\oplus\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 为一个李超代数。若 ($\tilde{\mathfrak{g}},\ \varphi$) 中 $\tilde{\mathfrak{g}}=\tilde{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}\oplus\tilde{\mathfrak{g}}_{\bar{1}}$是一个李超代数, 且 $\varphi:\ \tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$ 是满同态, 则称该对为 $\mathfrak{g}$ 经 $\ker(\varphi)$ 的中心扩张, 条件是 $[\ker(\varphi)\ \tilde{\mathfrak{g}}]=0$。将 $\ker(\varphi)$ 视为一个超交换李超代数, 同时也是一个平凡的 $\mathfrak{g}$-模。如果 $\ker(\varphi)_{\bar{1}}=\{0\}$（相应地, $\ker(\varphi)_{\bar{0}}=\{0\}$）, 则称该中心扩张为偶（相应地为奇）。

设 $\mathfrak{g}$ 为一个李超代数。$\mathfrak{g}$ 通过中心元 z 的一维中心扩张（$\tilde{\mathfrak{g}},\ \varphi$）是李超代数同态的正合列

$$0\longrightarrow\mathbb{C}z\longrightarrow\tilde{\mathfrak{g}}\xrightarrow{\varphi}\mathfrak{g}\longrightarrow 0,$$

其中, $\tilde{\mathfrak{g}}\cong\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}z$ 作为向量空间。于是, 该正合列等价于存在一个双线性形式 α, 使得

$$[x,y]_{\tilde{\mathfrak{g}}}=[x,y]_{\mathfrak{g}}+\alpha(x,y)z,\ \ \forall\ x,y\in\mathfrak{g}.$$

直接验证可知, α 是 $\mathfrak{g}$上的一个2-余循环。此外, 我们有

命题 3.4。（[25]）第二上同调群 $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ 与 $\mathfrak{g}$的一维中心扩张的等价类集合之间存在一一对应关系。

令 α 为 $\mathcal{S}^\epsilon$ 上任意一个 2-余循环。假设 $f:\ \mathcal{S}^\epsilon\to\mathbb{C}$ 是由 $\mathcal{S}^\epsilon$ 上的线性映射定义的

$$f(L_n)=\frac{1}{n}\alpha(L_0,L_n),\quad f(W_n)=\frac{1}{n}\alpha(L_0,W_n),\quad n\neq 0,$$
$$f(G_r)=\frac{1}{r}\alpha(L_0,G_r),\quad r\neq 0.$$

¯令 $\bar{\alpha}=\alpha-\alpha_f$，其中 $\alpha_f(x,y)=f([x,y])$，对任意 $x,y\in\mathcal{S}^\epsilon$ 均成立。

由于 $\mathcal{S}_0^\epsilon$ 是一个子代数，属于 $\mathcal{W}(a,\ b)$，由 [14, 定理 2.3], 可得以下引理 :

引理 3.5. ([14]) 对某些 c_1、c_2、$c_3\in\mathbb{C}$，有

$$\begin{aligned}&\bar{\alpha}(L_m,L_n)=\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_1,\\&\bar{\alpha}(L_m,W_n)=m\delta_{m+n,0}c_2+\delta_{m+n,0}c_3,\\&\bar{\alpha}(W_m,W_n)=0,\quad\forall\ m,n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

引理 3.6. $\bar{\alpha}(L_m、\ G_r)=(m^2+m)\delta_{m+r,\ 0}c_4$，其中 $c_4\in\mathbb{C}$ 且 $m\in\mathbb{Z}$、$r\in\mathbb{Z}+\epsilon$。

证明。由 (3.2)，考察 $\alpha(L_m,\ [L_n,G_r])=\alpha([L_m,L_n],\ G_r)+\alpha(L_n,\ [L_m,G_r])$，可得

$$r\alpha(L_m,G_{n+r})=(n-m)\alpha(L_{m+n},G_r)+r\alpha(L_n,G_{m+r}).\tag{3.3}$$

将 $m=0$ 代入 (3.3)，可得 $r\alpha(L_0,\ G_{n+r})=(n+r)\alpha(L_n,\ G_r)$。于是，

$$\alpha(L_n,G_r)=\frac{r}{n+r}\alpha(L_0,G_{n+r}),\quad n+r\neq0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(L_n,G_r)&=\alpha(L_n,G_r)-\alpha_f(L_n,G_r)=\frac{r}{n+r}\alpha(L_0,G_{n+r})-f([L_n,G_r])\\&=\frac{r}{n+r}\alpha(L_0,G_{n+r})-rf(G_{n+r})=0,\quad n+r\neq0.\end{aligned}$$

将 α 替换为 $\bar{\alpha}$，等式 (3.3) 仍然成立。将 $r=-m-n$ 代入 (3.3)，可推出

$$(m+n)\bar{\alpha}(L_m,G_{-m})=(m-n)\bar{\alpha}(L_{m+n},G_{-m-n})+(m+n)\bar{\alpha}(L_n,G_{-n}).\tag{3.4}$$

设 $\bar{\alpha}(L_m,\ G_{-m})=g(m)$。于是 (3.4) 变为

$$(m+n)g(m)=(m-n)g(m+n)+(m+n)g(n).\tag{3.5}$$

将 $n=-m$ 代入 (3.5)，得到 $2mg(0)=0$，这意味着 $g(0)=0$。定义 $f(G_0)=\alpha(L_{-1},\ G_1)$。于是，

$$\begin{aligned}g(-1)&=\bar{\alpha}(L_{-1},G_1)=\alpha(L_{-1},G_1)-\alpha_f(L_{-1},G_1)\\&=\alpha(L_{-1},G_1)-f([L_{-1},G_1])=\alpha(L_{-1},G_1)-f(G_0)=0.\end{aligned}$$

将 $n=1$ 代入（3.5），可得

$$(m+1)g(m)=(m-1)g(m+1)+(m+1)g(1).\tag{3.6}$$

此外，令 $n=-1$ 并将 m 替换为 $m+1$，代入（3.5），可推得

$$mg(m+1)=(m+2)g(m). \tag{3.7}$$

结合（3.6）和（3.7），对于任意 $m\in\mathbb{Z}$，我们得到 $g(m)=\frac{1}{2}(m^2+m)g(1)$。因此，

$$\bar{\alpha}(L_m,G_r)=(m^2+m)\delta_{m+r,0}c,$$

其中 $c\in\mathbb{C}$ 是某个常数。 □

引理 3.7。 $\bar{\alpha}(W_m,G_r)=\delta_{m+r,0}c_5$，其中 $c_5\in\mathbb{C}$ 且 $m\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{Z}+\epsilon$。

证明。由（3.2），考察 $\bar{\alpha}(L_m,[W_n,G_r])=\bar{\alpha}([L_m,W_n],G_r)+\bar{\alpha}(W_n,[L_m,G_r])$，可得

$$(m+n)\bar{\alpha}(W_{m+n},G_r)+r\bar{\alpha}(W_n,G_{m+r})=0. \tag{3.8}$$

将 $m=0$ 代入（3.8），得到 $(n+r)\bar{\alpha}(W_n,G_r)=0$，这意味着当 $n+r\neq 0$ 时，$\bar{\alpha}(W_n,G_r)=0$。因此，对于 $\epsilon=\frac{1}{2}$，任意 $m\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ 都有 $\bar{\alpha}(W_m,G_r)=\theta$。若 $\epsilon=0$，我们可在（3.8）中取 $n=0$ 和 $r=-m$，得到 $m\bar{\alpha}(W_m,G_{-m})=m\bar{\alpha}(W_0,G_0)$，进而得到$\bar{\alpha}(W_m,G_{-m})=\bar{\alpha}(W_0,G_0)=c$，其中 $c\in\mathbb{C}$ 是一个常数。 □

引理 3.8. $c_2=0$ 和 $\bar{\alpha}(G_r,G_s)=\delta_{r+s,0}c_3$，其中 $r,s\in\mathbb{Z}+\epsilon$。

证明. 由 (3.2)，利用 $\bar{\alpha}(L_m,[G_r,G_s])=\bar{\alpha}([L_m,G_r],G_s)+\bar{\alpha}(G_r,[L_m,G_s])$，我们得出

$$(r+s)\bar{\alpha}(L_m,W_{r+s})=r\bar{\alpha}(G_{m+r},G_s)+s\bar{\alpha}(G_r,G_{m+s}). \tag{3.9}$$

在 (3.9) 中取 $m=0$，可得 $(r+s)\bar{\alpha}(L_0,W_{r+s})=(r+s)\,\bar{\alpha}(G_r,G_s)$。这意味着

$$\bar{\alpha}(L_0,W_{r+s})=\bar{\alpha}(G_r,G_s),\quad r+s\neq 0. \tag{3.10}$$

由引理 3.5 可知，若 $r+s\neq 0$，则 $\bar{\alpha}(L_0,W_{r+s})=0$。结合 (3.10) 可得，若 $r+s\neq 0$，则 $\bar{\alpha}(G_r,G_s)=0$。

将 $m=-r-s$ 代入 (3.9)，得

$$(r+s)\bar{\alpha}(L_{-r-s},W_{r+s})=r\bar{\alpha}(G_{-s},G_s)+s\bar{\alpha}(G_r,G_{-r}). \tag{3.11}$$

注意，由 (3.1) 可知 $\bar{\alpha}(G_{-s},G_s)=-(-1)^{|G_{-s}||G_s|}\bar{\alpha}(G_s,G_{-s})=\bar{\alpha}(G_s,G_{-s})$。设 $\bar{\alpha}(G_s,G_{-s})=g(s)$。于是 (3.11) 变为

$$(r+s)\bar{\alpha}(L_{-r-s},W_{r+s})=rg(s)+sg(r). \tag{3.12}$$

在（3.12）中取 $r=-r$、$s=-s$，可得

$$(r+s)\bar{\alpha}(L_{r+s},W_{-r-s})=rg(s)+sg(r). \tag{3.13}$$

由（3.12）和（3.13）可推得

$$(r+s)\bar{\alpha}(L_{-r-s},W_{r+s})=(r+s)\bar{\alpha}(L_{r+s},W_{-r-s}).$$

由引理 3.5，得到 $2(r+s)^2c_2=0$，从而推出 $c_2=0$。因此 (3.12) 变为

$$(r+s)c_3=rg(s)+sg(r). \tag{3.14}$$

若 r，$s\in\mathbb{Z}$，则可在 (3.14) 中取 $s=1$，得到

$$(r+1)c_3=rg(1)+g(r). \tag{3.15}$$

将 $r=1$ 代入 (3.15)，得到 $g(1)=c_3$。将其代入 (3.15)，对于 $r\in\mathbb{Z}$，有 $g(r)=c_3$。若 r，$s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$，则在 (3.14) 中取 $-s=\frac{1}{2}$，得到

$$(r+\frac{1}{2})c_3=rg(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}g(r). \tag{3.16}$$

在 (3.16) 中取 $-r=\frac{1}{2}$，可得 $g(\frac{1}{2})=c_3$。因此，对于 $r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$，有 $g(r)=c_3$，引理得证。 □

由引理 3.5–3.8，我们得到李超代数的中心扩张 $\mathcal{S}^\epsilon$。新的代数记为 $\tilde{\mathcal{S}}^\epsilon$，其基为 $\{L_m,W_m,G_r,C_1,C_2,C_3,C_4\mid m\in\mathbb{Z},\ r\in\mathbb{Z}+\epsilon\}$，超括号如下：

$$\begin{aligned}
&[L_m,L_n]=(n-m)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C_1,\\
&[L_m,W_n]=(m+n)W_{m+n}+\delta_{m+n,0}C_2,\\
&[L_m,G_r]=rG_{m+r}+(m^2+m)\delta_{m+r,0}C_3,\\
&[W_m,G_r]=\delta_{m+r,0}C_4,\\
&[G_r,G_s]=(r+s)W_{r+s}+\delta_{r+s,0}C_2,\\
&[W_m,W_n]=[\mathcal{S}^\epsilon,C_i]=0,\quad i=1,2,3,4,
\end{aligned}$$

对于任意 m、$n\in\mathbb{Z}$、r、$s\in\mathbb{Z}+\epsilon$、$\epsilon=\frac{1}{2}$，0。注意，$\mathbb{C}C_3$ 和 $\mathbb{C}C_4$ 是奇中心元。此外，根据命题 3.4，我们得到以下定理。

定理 3.9。(1) $\dim H^2(\mathcal{S}^0,\mathbb{C})=4$；$H^2(\mathcal{S}^0,\mathbb{C})=\mathbb{C}\alpha_1\oplus\mathbb{C}\alpha_2\oplus\mathbb{C}\alpha_3\oplus\mathbb{C}\alpha_4$，其中

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(L_m,L_n)=\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0},\\
&\alpha_2(L_m,W_n)=\delta_{m+n,0},\quad \alpha_2(G_r,G_s)=\delta_{r+s,0},\\
&\alpha_3(L_m,G_r)=(m^2+m)\delta_{m+r,0},\\
&\alpha_4(W_m,G_r)=\delta_{m+r,0},
\end{aligned}$$

对于任意 m、n、r、$s \in \mathbb{Z}$。

(2) $\dim H^2(\mathcal{S}^{\frac{1}{2}}, \mathbb{C}) = 2$; $H^2(\mathcal{S}^{\frac{1}{2}}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}\beta_1 \oplus \mathbb{C}\beta_2$, 其中

$$\beta_1(L_m, L_n) = \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0},$$
$$\beta_2(L_m, W_n) = \delta_{m+n,0}, \quad \beta_2(G_r, G_s) = \delta_{r+s,0},$$

对任意的 m、$n \in \mathbb{Z}$、r、$s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$。

3.3 李超代数 $\mathcal{S}$

下文中，我们仅关注 $\mathcal{S}^{\frac{1}{2}}$ 的中心扩张情形，即定义 1.1 中定义的李超代数 $\mathcal{S}$。

首先回顾，Ovsienko–Roger 代数 $\mathcal{L}_\lambda$ 是 $\mathcal{W}(a, b)$ 的中心扩张李代数。该代数源于 Ovsienko 和 Roger 对 Sturm–Liouville 算子的矩阵类似物的研究（参见 [23]）。对于 $\lambda = 1$ 的情形，我们有如下定义。

定义 3.10。 $\lambda = 1$ Ovsienko–Roger 代数

$$\mathcal{L}_1 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}W_n \oplus \mathbb{C}C_1 \oplus \mathbb{C}C_2 \oplus \mathbb{C}C_3$$

是一个李代数，其括号如下（m， $n \in \mathbb{Z}$）：

$$[L_m, L_n] = (n - m)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}C_1,$$
$$[L_m, W_n] = (m + n)W_{m+n} + \delta_{m+n,0}(mC_2 + C_3),$$
$$[W_m, W_n] = [\mathcal{L}_1, C_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

我们称李代数 $\mathfrak{g}$ 为完全的，如果 $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$。显然， $\mathcal{L}_1$ 不是完全的，因为 $W_0 \notin [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1]$。文献 [21]研究了 $\mathcal{L}_1$ 的限制模范畴。此外，文献 [21], 构造了许多简单的 $\mathcal{L}_1$-模。

现在，我们回到李超代数 $\mathcal{S}$。显然， $\mathcal{S}$ 的偶子代数是 $\mathcal{L}_1$的一个子代数。缺少 C_2（ $\mathcal{L}_1$）导致它们的模存在显著差异。我们将在后文展示这一点。此外，由于 W_0， $\mathcal{S}$ 仍然不是完全的。

根据定义 1.1，我们有分解 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{S}_{\bar{1}}$，其中

$$\mathcal{S}_{\bar{0}} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} (\mathbb{C}L_m \oplus \mathbb{C}W_m) \oplus \mathbb{C}C_1 \oplus \mathbb{C}C_2, \quad \mathcal{S}_{\bar{1}} = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \mathbb{C}G_r.$$

由此可知 $\mathcal{S}$ 具有三角分解 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_- \oplus \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_+$，其中

$$\mathcal{S}_\pm = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_+} (\mathbb{C}L_{\pm m} \oplus \mathbb{C}W_{\pm m}) \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} \mathbb{C}G_{\pm r},$$
$$\mathcal{S}_0 = \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}W_0 \oplus \mathbb{C}C_1 \oplus \mathbb{C}C_2.$$

设 $\varphi:\mathcal{S}_0\to\mathbb{C}$ 是一个线性函数。假设 V 是一个 $\mathcal{S}_0$-模，中心 $z=\mathbb{C}C_1\oplus\mathbb{C}C_2$ 对 V的作用由 φ 给出，且 $\mathcal{S}_+$ 在 V上的作用平凡，从而使 V成为一个 $(\mathcal{S}_0\oplus\mathcal{S}_+)$-模。关于 $\mathcal{S}$ 的广义 ***Verma*** 模 可定义为

$$M_\varphi(V)=\mathcal{U}(\mathcal{S})\otimes_{\mathcal{U}(\mathcal{S}_0\oplus\mathcal{S}_+)}V.$$

特别地，对于 $h_1,h_2,c_1\in\mathbb{C}$，令 $V=\mathbb{C}v$ 为由下式定义的一维 $(\mathcal{S}_0\oplus\mathcal{S}_+)$-模

$$L_0v=h_1v,\ \ W_0v=h_2v,\ \ C_1v=c_1v,\ \ C_2v=0,\ \ \mathcal{S}_+v=0,$$

其中 $\varphi(L_0)=h_1,\varphi(W_0)=h_2,\varphi(C_1)=c_1$ 且 $\varphi(C_2)=0$。注意，由于 $[L_0,W_0]=C_2$， $\varphi(C_2)=0$是必要的。于是， $\mathcal{S}$ 的***Verma*** 模可定义为

$$M(h_1,h_2,c_1)=\mathcal{U}(\mathcal{S})\otimes_{\mathcal{U}(\mathcal{S}_0\oplus\mathcal{S}_+)}\mathbb{C}v.$$

对于任意 $k\in\mathbb{Z}_+$，令

$$\mathcal{S}^{(k)}=\bigoplus_{i\geq k}(\mathbb{C}L_i\oplus\mathbb{C}W_i\oplus\mathbb{C}G_{i+\frac{1}{2}})\oplus\mathbb{C}C_1\oplus\mathbb{C}C_2.$$

于是 $\mathcal{S}^{(k)}$ 是 $\mathcal{S}$的子代数。令 $\psi_k:\mathcal{S}^{(k)}\to\mathbb{C}$ 为李超代数同态。由关系式 (1.1) 可立即得到

$$\psi_k(L_m)=0,\ \ \psi_k(W_n)=0,\ \ \psi_k(G_{r+\frac{1}{2}})=0,\ \ \forall\ m\geq 2k+1,\ n\geq 2k,\ r\geq k.$$

定义 3.11. 对于 $c_1,c_2\in\mathbb{C}$，若 $\mathcal{S}$-模 W 满足以下条件，则称其为类型为 (ψ_k,c_1,c_2) 的 ***Whittaker*** 模
(1) W 由齐次向量 w生成，(2) 对任意 $x\in\mathcal{S}^{(k)}$，
$xw=\psi_k(x)w$ ，(3) $C_1w=c_1w,C_2w=c_2w$,
其中 w 称为 W的***Whittaker*** 向量。

定义 3.12。 如果对每个 $v\in M$， $\mathcal{S}$-模 M 都满足以下条件，则称其为受限的，

$$L_iv=W_iv=G_{i+\frac{1}{2}}v=0,$$

当 i 充分大时。

显然， $\mathcal{S}$ 上的广义 Verma 模和 Whittaker 模都是受限的。

记 $\mathbb{M}$ 为所有如下形式的无限向量构成的集合：$\mathbf{i}:=(\ldots,i_2,i_1)$，其分量属于 $\mathbb{N}$，且非零分量的个数有限，并且 $\mathbb{M}_1=\{\mathbf{i}\in\mathbb{M}\mid i_k=0,1,\ \forall\ k\in\mathbb{Z}_+\}$。令 $\mathbf{0}=(\ldots,0,0)\in\mathbb{M}$（或 $\mathbb{M}_1$）。对于 $i\in\mathbb{Z}_+$，记 $e_i=(\ldots,0,1,0,\ldots,0)\in\mathbb{M}$（或 $\mathbb{M}_1$），其中 1 位于从右数第 i 个位置。对于任意 $\mathbf{i}\in\mathbb{M}$（或 $\mathbb{M}_1$），我们记

$$\mathbf{w}(\mathbf{i})=\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}s\cdot i_s,\ \ \mathbf{d}(\mathbf{i})=\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}i_s,$$

它们是非负整数。对于任意非零的 $\mathbf{i} \in \mathbb{M}$ （或 $\mathbb{M}_1$），即 $\mathbf{i} \neq \mathbf{0}$，设$p$ 和 q 分别为满足 $i_p \neq 0$ 和 $i_q \neq 0$的最大和最小整数，并定义 $\mathbf{i}' = \mathbf{i} - e_p$ 和 $\mathbf{i}'' = \mathbf{i} - e_q$。

定义 3.13。 记 $>$ 和 $\succ$ 分别为字典序全序和反字典序全序 在 $\mathbb{M}$ （或 $\mathbb{M}_1$）上，定义如下:

（1）对于任意 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j} \in \mathbb{M}$ （或 $\mathbb{M}_1$），

$$\mathbf{j} > \mathbf{i} \iff \text{存在 } r \in \mathbb{Z}_+ \text{ 使得 } (j_s = i_s, \quad \forall\, s > r) \text{ 且 } j_r > i_r;$$

（2）对于任意 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j} \in \mathbb{M}$ （或 $\mathbb{M}_1$），

$$\mathbf{j} \succ \mathbf{i} \iff \text{there exists } r \in \mathbb{Z}_+ \text{ such that } (j_s = i_s,\ \forall\ 1 \leq s < r) \text{ and } j_r > i_r.$$

显然，我们可以将上述全序扩展为在 上的主全序，仍记作 $\succ$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1) \succ (\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2) \Longleftrightarrow\ & (\mathbf{k}_1, \mathbf{w}(\mathbf{k}_1)) \succ (\mathbf{k}_2, \mathbf{w}(\mathbf{k}_2)) \ \text{ or} \\ & \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 \ \text{ and } \ (\mathbf{j}_1, \mathbf{w}(\mathbf{j}_1)) \succ (\mathbf{j}_2, \mathbf{w}(\mathbf{j}_2)) \ \text{ or} \\ & \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2,\ \mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_2 \ \text{ and } \ \mathbf{i}_1 > \mathbf{i}_2,\end{aligned}$$

¯对于任意（$\mathbf{i}_1$,$\mathbf{j}_1$,$\mathbf{k}_1$），（$\mathbf{i}_2$,$\mathbf{j}_2$,$\mathbf{k}_2$）$\in \mathbb{M} \times \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}$。记 $\mathbb{M} \times \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}$ 为 $\mathbb{M}$。

4 单限制 $\mathcal{S}$-模的构造

本节介绍李超代数 $\mathcal{S}$ 上单限制模的构造。这些模由 $\mathcal{S}$ 的某些子代数上的单模诱导而来。

为方便起见，定义 $\mathcal{S}$ 的如下子代数,

$$\mathcal{T}_d = \bigoplus_{i \geq 0} (\mathbb{C}L_i \oplus \mathbb{C}W_{i-d}) \oplus \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{C}G_{i-\frac{1}{2}} \oplus \mathbb{C}C_1 \oplus \mathbb{C}C_2,$$

其中 $d \in \mathbb{N}$。

令 V 为一个简单的 $\mathcal{T}_d$-模，则有诱导的 $\mathcal{S}$-模

$$\mathrm{Ind}(V) = \mathcal{U}(\mathcal{S}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathcal{T}_d)} V.$$

由于我们通常考虑代数 $\mathcal{S}$ 或其某个包含中心元 C_i、$i = 1$，2 的子代数的单模，因此总是假设 C_i 的作用对 $i = 1$，2 取标量 c_i。

固定 $d \in \mathbb{N}$，并设 V 是一个简单的 $\mathcal{T}_d$-模。对于 $\mathbf{i}$,$\mathbf{k} \in \mathbb{M}$、$\mathbf{j} \in \mathbb{M}_1$，记

$$W^{\mathbf{i}} G^{\mathbf{j}} L^{\mathbf{k}} = \cdots W_{-d-2}^{i_2} W_{-d-1}^{i_1} \cdots G_{-\frac{3}{2}}^{j_2} G_{-\frac{1}{2}}^{j_1} \cdots L_{-2}^{k_2} L_{-1}^{k_1} \in \mathcal{U}(\mathcal{S}).$$

根据 PBW定理和 $G^2_{i-\frac{1}{2}}V=(i-\frac{1}{2})W_{2i-1}V$（对于 $i\in\mathbb{Z}$），Ind(V) 中的每个元素都可以唯一地写成以下形式

$$\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})\in\bar{\mathbb{M}}} W^{\mathbf{i}}G^{\mathbf{j}}L^{\mathbf{k}}v_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}}, \tag{4.1}$$

其中所有 $v_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}}\in V$ 中只有有限多个非零。对于任意如(4.1)中的 $v\in$ Ind(V)，我们用 supp(v) 表示所有满足$v_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}}\neq 0$的 $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})\in\mathbb{M}$ 的集合。对于非零的$v\in$ Ind(V)，我们将 supp(v) 中关于 $\mathbb{M}$ 上的主全序的最大元素记作 deg(v)，称其为 v的次数 。注意，此处及下文约定，只有对 $v\neq 0$，deg(v) 才有定义。

定理 4.1. 设 $d\in\mathbb{N}$ 和 V 是一个简单的 $\mathcal{T}_d$-模，并假设存在满足以下两个条件的 $t\in\mathbb{N}$:

(a) 当 $t>0$ 或 $c_2\neq 0$ 时，W_t 在 V上的作用是单射；(b) 对于所有 $i>t$，$W_iV=0$，且对于所有 $j>t+d$，$L_jV=0$。于是有(i) 对于所有 $i>t$，$G_{i-\frac{1}{2}}V=0$；(ii) Ind(V) 是一个简单的 $\mathcal{S}$-模。

证明。(i) 对于 $i>t\geq 0$，由 $[G_{i-\frac{1}{2}},G_{i-\frac{1}{2}}]=(2i-1)W_{2i-1}$ 和 (b)，我们有 $G^2_{i-\frac{1}{2}}V=(i-\frac{1}{2})W_{2i-1}V=0$。若 $G_{i-\frac{1}{2}}V=0$，则结论成立。否则，我们可以考虑 V 的真子空间 $U=G_{i-\frac{1}{2}}V$，并推得

$$\begin{aligned}
&G_{j-\frac{1}{2}}U=G_{j-\frac{1}{2}}G_{i-\frac{1}{2}}V=(i+j-1)W_{i+j-1}V-G_{i-\frac{1}{2}}G_{j-\frac{1}{2}}V\subseteq G_{i-\frac{1}{2}}V=U,\ \ \forall\, j\in\mathbb{Z}_+,\\
&L_mU=L_mG_{i-\frac{1}{2}}V=(i-\frac{1}{2})G_{m+i-\frac{1}{2}}V+G_{i-\frac{1}{2}}L_mV\subseteq U,\ \ \forall\, m\in\mathbb{N},\\
&W_nU=W_nG_{i-\frac{1}{2}}V=G_{i-\frac{1}{2}}W_nV\subseteq U,\ \ \forall\, n\in\mathbb{Z},\ n\geq -d.
\end{aligned}$$

由此可知，U 是 V 的真 $\mathcal{T}_d$-子模。由于 V 是单的，因此$U=G_{i-\frac{1}{2}}V=0$ 对于 $i>t$ 成立。

(ii) 为了证明这一结论，我们需要以下断言。

断言 1。对于任意 $v\in\mathrm{Ind}(V)\setminus V$，令 $\deg(v)=(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$，$\check{}i=\max\{s:\ i_s\neq 0\}$ 若$\mathbf{i}\neq\mathbf{0}$，$\hat{}j=\min\{s:\ j_s\neq 0\}$ 若$\mathbf{j}\neq\mathbf{0}$，且$\hat{}k=\min\{s:\ k_s\neq 0\}$ 若$\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$。则我们可以得到 $\hat{}$*(1)* 若 $k\neq 0$，则 $k>0$ 且 *deg*$(W_{\hat{k}+t}v)=(i,j,k'')$；*(2)* 若 $k=0$、$j\neq 0$，则 $\hat{}j>0$ 且 *deg*$(G_{\hat{j}+t-\frac{1}{2}}v)=(i,j'',0)$；*(3)* 若 $j=k=0$、$i\neq 0$，则 $\check{}i>0$ 且 *deg*$(L_{\check{i}+t+d}v)=(i',0,0)$。

为证明这一点，我们假设 v 具有式（4.1）中的形式。只需比较次数，即可证明所需结论。

（1）考虑满足 $W_{\hat{k}+t}W^{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}L^{\mathbf{z}}v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} \neq 0$ 的那些 $v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}$。注意，对于任意 $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathrm{supp}(v)$，都有 $W_{\hat{k}+t}v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} = 0$。容易验证

$$W_{\hat{k}+t}W^{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}L^{\mathbf{z}}v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} = W^{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}[W_{\hat{k}+t}, L^{\mathbf{z}}]v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}.$$

显然，由 (a) 可知，$W_t v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} \neq 0$ 或 $c_2 v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} \neq 0$。若 $\mathbf{z} = \mathbf{k}$，则可得

$$\deg(W_{\hat{k}+t}W^{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}L^{\mathbf{z}}v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}) = (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}'') \preceq (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}''),$$

其中等号成立当且仅当 $\mathbf{y} = \mathbf{j}$,$\mathbf{x} = \mathbf{i}$。

现在，假设 $(\mathbf{z}, \mathbf{w(z)}) \prec (\mathbf{k},\mathbf{w(k)})$，并记

$$\deg(W_{\hat{k}+t}W^{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}L^{\mathbf{z}}v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}) = (\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1) \in \bar{\mathbb{M}}.$$

^ ^ 若 w(z) < w(k)，则可得 $\mathbf{w(z_1)} \leq \mathbf{w(z)} - k < \mathbf{w(k)} - k = \mathbf{w(k'')}$，从而得到 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1) \prec (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k''})$。接下来讨论 w(z) = w(k) 且 z ≺ k 的情形。注意此处 ^ z ≠ 0，否则由于 k ≠ 0，w(z) = 0 < w(k)。令 $\hat{z} = \min\{s : z_s \neq 0\} > 0$。若 $\hat{z} > k$，则 ^ ^ $\mathbf{w(z_1)} < \mathbf{w(z)} - k = \mathbf{w(k'')}$。若 $\hat{z} = k$，同理可推出 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z''})$。于是由 $\mathbf{z''} \prec \mathbf{k''}$，可得

$$\deg(W_{\hat{k}+t}W^{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}L^{\mathbf{z}}v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}) = (\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1) \prec (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}'')$$

在这两种情况下。

因此，综合上述所有论证，可得 $\deg(W_{\hat{k}+t}v) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k''})$，如所求。

(2) 现在考虑 $v_{\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{0}}$，其中 $G_{\hat{j}+t-\frac{1}{2}}W_{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}v_{\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{0}} \neq 0$。由于对任意 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0}) \in \mathrm{supp}(v)$，都有 $G_{\hat{j}+t-\frac{1}{2}}v_{\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{0}} = 0$，因此

$$G_{\hat{j}+t-\frac{1}{2}}W^{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{0}} = W^{\mathbf{x}}[G_{\hat{j}+t-\frac{1}{2}}, G^{\mathbf{y}}]v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{0}}.$$

注意，由 (a) 可知 $W_t v_{\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{0}} \neq 0$ 或 $c_2 v_{\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{0}} \neq 0$。若 $\mathbf{y} = \mathbf{j}$，则可得

$$\deg(G_{\hat{j}+t-\frac{1}{2}}W^{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{0}}) = (\mathbf{x},\mathbf{y''},\mathbf{0}) \preceq (\mathbf{i},\mathbf{j''},\mathbf{0}),$$

且当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{i}$ 时等号成立。

现在假设 $(\mathbf{y},\ \mathbf{w(y)}) \prec (\mathbf{j},\ \mathbf{w(j)})$，并记

$$\deg(G_{\hat{j}+t-\frac{1}{2}}W^{\mathbf{x}}G^{\mathbf{y}}v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{0}}) = (\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{0}) \in \bar{\mathbb{M}}.$$

若 w(y) < w(j)，则有 $\mathbf{w(y_1)} \leq \mathbf{w(y)} - \hat{j} < \mathbf{w(j)} - \hat{j} = \mathbf{w(j'')}$，由此得到 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{0}) \prec (\mathbf{i}, \mathbf{j''}, \mathbf{0})$。现在考虑 w(y) = w(j) 且 y ≺ j 的情况，这意味着 y ≠ 0，否则 w(y) = 0 < w(j)，因为 j ≠ 0。令 $\hat{y} = \min\{s : y_s \neq 0\} > 0$。如果

$\hat{}y > \hat{}j$，则有 $\mathbf{w(y}_1\mathbf{)} < \mathbf{w(y)} - \hat{}j = \mathbf{w(j'')}$。若 $\hat{}y = \hat{}j$，同样可以验证 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{0}) = (\mathbf{x},\mathbf{y''},\mathbf{0})$。根据 $\mathbf{y''} \prec \mathbf{j''}$ 这一事实，在这两种情况下，我们都可以得到

$$\deg(G_{\hat{j}+t-\frac{1}{2}} W^{\mathbf{x}} G^{\mathbf{y}} v_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{0}}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{0}) \prec (\mathbf{i}, \mathbf{j''}, \mathbf{0}).$$

因此，我们可以得出 $\deg(G_{\hat{j}+t-\frac{1}{2}} v) = (\mathbf{i}, \mathbf{j''}, \mathbf{0})$。

(3) 类似地，考虑那些 $v_{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{0}}$ 满足 $L_{\check{i}+t+d} W^{\mathbf{x}} v_{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{0}} \neq 0$ 的情形。令 $\check{}x = \max\{s : x_s \neq 0\}$，则 $0 < \check{}x \leq \check{}i$。若 $\check{}x < \check{}i$，则容易得到 $\deg(L_{\check{i}+t+d} W^{\mathbf{x}} v_{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{0}}) \prec (\mathbf{i'}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$。若 $\check{}x = \check{}i$，则有

$$\begin{aligned} L_{\check{i}+t+d} W^{\mathbf{x}} v_{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{0}} &= L_{\check{x}+t+d} W^{x_{\check{x}}}_{-\check{x}-d} W^{x_{\check{x}-1}}_{-\check{x}+1-d} \cdots W^{x_1}_{-1-d} v_{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{0}} \\ &= [L_{\check{x}+t+d}, W^{x_{\check{x}}}_{-\check{x}-d}] W^{x_{\check{x}-1}}_{-\check{x}+1-d} \cdots W^{x_1}_{-1-d} v_{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{0}}, \\ &= \begin{cases} t x_{\check{x}} W^{x_{\check{x}}-1}_{-\check{x}-d} W^{x_{\check{x}-1}}_{-\check{x}+1-d} \cdots W^{x_1}_{-1-d} W_t v_{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{0}}, & t > 0, \\ c_2 x_{\check{x}} W^{x_{\check{x}}-1}_{-\check{x}-d} W^{x_{\check{x}-1}}_{-\check{x}+1-d} \cdots W^{x_1}_{-1-d} v_{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{0}}, & t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

这与 (a) 一起推出

$$\deg(L_{\check{i}+t+d} W^{\mathbf{x}} v_{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{0}}) \preceq (\mathbf{i'}, 0, 0),$$

其中等号成立当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{i}$。由此，断言 1 得证。

反复使用断言 1，从任意非零元素 $v \in \mathrm{Ind}(V)$ 出发，都可以到达 $\mathcal{U}(\mathcal{S})v \cap V \neq 0$ 中的一个非零元素，这表明 $\mathrm{Ind}(V)$ 的单性。 □

注 4.2. 显然 诱导模 $\mathrm{Ind}(V)$ 是一个单受限 $\mathcal{S}$-模。

此外，即使不假设 V 是单的，上述结论仍然成立。我们有如下推论。

推论 4.3. 令 d、t 和 V 如定理 *4.1* 中所述，但 V 不一定是单的 $\mathcal{T}_d$-模，则有

$$V = \{v \in \mathrm{Ind}(V) \mid W_i v = G_{j-\frac{1}{2}} v = L_k v = 0,\ \forall\ i, j > t,\ k > t + d\}.$$

5 单受限模的刻画

本节将在一定条件下，对单受限 $\mathcal{S}$-模进行精确刻画。对任意 r_1, r_2, $r_3 \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{S}^{(r_1,r_2,r_3)} = \bigoplus_{i \geq r_1} \mathbb{C} L_i \oplus \bigoplus_{i \geq r_2} \mathbb{C} W_i \oplus \bigoplus_{i \geq r_3} \mathbb{C}(1 - \delta_{i,0}) G_{i-\frac{1}{2}}.$$

显然 不难验证，$\mathcal{S}^{(r_1,r_2,r_3)}$ 是 $\mathcal{S}$ 的有限生成子代数 .

首先，我们给出简单受限 $\mathcal{S}$-模的几个等价条件。

命题 *5.1.* 设 P 是一个简单的 $\mathcal{S}$-模。则以下条件等价：*(1)* 存在 $t\in\mathbb{N}$，使得 L_i、W_i、$(1-\delta_{i,0})G_{i-\frac{1}{2}}$ 在 P 上的作用是局部有限的。*(2)* 存在 $t\in\mathbb{N}$，使得 L_i、W_i、$(1-\delta_{i,0})G_{i-\frac{1}{2}}$ 在 P 上的作用是局部幂零的。*(3)* 存在 r_1、r_2、$r_3\in\mathbb{N}$，使得 P 是一个局部有限的 $\mathcal{S}^{(r_1,r_2,r_3)}$-模。*(4)* 存在 r_1、r_2、$r_3\in\mathbb{N}$，使得 P 是一个局部幂零的 $\mathcal{S}^{(r_1,r_2,r_3)}$-模。*(5)* 存在 r_1、r_2、$r_3\in\mathbb{N}$ 以及一个非零向量 $v\in P$，使得 $\mathcal{S}^{(r_1,r_2,r_3)}v=0$。*(6)* P 是受限的。

证明。注意到 (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$(1)、(3) $\Rightarrow$ (1) 和 (6) $\Rightarrow$ (5) 很容易得到。由于 $\mathcal{S}^{(r_1,r_2,r_3)}$是有限生成的，我们有 (4) $\Rightarrow$ (3)。得到 (5) $\Rightarrow$ (4) 也并不困难。假设 (5) 成立。由于 P 是一个单 $\mathcal{S}$-模，对于 (5) 中的向量 v，有 $P=\mathcal{U}(\mathcal{S})v$。由 PBW定理和李超括号 (1.1) 可知，对于某个 r_1', $r_2',r_3'\in\mathbb{N}$，P 是一个局部幂零 $\mathcal{S}^{(r_1',r_2',r_3')}$-模。实际上，我们只需证明 (1) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6)。

现在我们证明 (1) $\Rightarrow$ (5)。设 P 是一个单 $\mathcal{S}$-模，并且存在 $t\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $i\geq t$，$L_i, W_i, (1-\delta_{i,0})G_{i-\frac{1}{2}}$ 的作用都是局部有限的。那么我们可以选取一个非零的 $v\in P$，使得对于某个 $\lambda\in\mathbb{C}$，$L_tv=\lambda v$。

任取 $j\in\mathbb{N}$，使得 $j>t$，并记

$$\begin{aligned}N_L&=\sum_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{C}L_t^mL_jv=\mathcal{U}(\mathbb{C}L_t)L_jv,\\ N_W&=\sum_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{C}L_t^mW_jv=\mathcal{U}(\mathbb{C}L_t)W_jv,\\ N_G&=\sum_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{C}L_t^mG_{j-\frac{1}{2}}v=\mathcal{U}(\mathbb{C}L_t)G_{j-\frac{1}{2}}v,\end{aligned}$$

它们都是有限维的。由关系式 (1.1)，对所有 $m\in\mathbb{N}$，我们有

$$\big(j+(m-1)t\big)L_{j+(m+1)t}v=[L_t,L_{j+mt}]v=L_tL_{j+mt}v-L_{j+mt}L_tv=(L_t-\lambda)L_{j+mt}v.$$

同理可得

$$\begin{aligned}\big(j+(m+1)t\big)W_{j+(m+1)t}v&=(L_t-\lambda)W_{j+mt}v,\\ (j+mt-\frac{1}{2})G_{j+(m+1)t-\frac{1}{2}}v&=(L_t-\lambda)G_{j+mt-\frac{1}{2}}v,\quad\forall\ m\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&L_{j+mt}v\in N_L\Rightarrow L_{j+(m+1)t}v\in N_L,\ W_{j+mt}v\in N_W\Rightarrow W_{j+(m+1)t}v\in N_W,\\ &G_{j+mt-\frac{1}{2}}v\in N_G\Rightarrow G_{j+(m+1)t-\frac{1}{2}}v\in N_G,\quad\forall\ m\in\mathbb{N},\ j>t.\end{aligned}$$

因此，通过对 m 使用归纳法，我们得到

$$L_{j+mt}v\in N_L,\ W_{j+mt}v\in N_W,\ G_{j+mt-\frac{1}{2}}v\in N_G,\quad\forall\ m\in\mathbb{N}.$$

换言之，我们可以得出结论：对于 $j > t$， $\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{C}L_{j+mt}v$、 $\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{C}W_{j+mt}v$ 和 $\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{C}G_{j+mt-\frac{1}{2}}v$ 都是有限维的。因此，

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{C}L_{t+i}v = \mathbb{C}L_t v + \sum_{j=t+1}^{2t} (\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{C}L_{j+mt}v),$$
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{C}W_{t+i}v = \mathbb{C}W_t v + \sum_{j=t+1}^{2t} (\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{C}W_{j+mt}v),$$
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{C}G_{t+i-\frac{1}{2}}v = \mathbb{C}G_{t-\frac{1}{2}}v + \sum_{j=t+1}^{2t} (\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{C}G_{j+mt-\frac{1}{2}}v),$$

均为有限维的。现在，我们可以选择 $l \in \mathbb{Z}_+$，使得

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{C}L_{t+i}v = \sum_{i=0}^{l} \mathbb{C}L_{t+i}v,\ \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{C}W_{t+i}v = \sum_{i=0}^{l} \mathbb{C}W_{t+i}v,\ \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{C}G_{t+i-\frac{1}{2}}v = \sum_{i=0}^{l} \mathbb{C}G_{t+i-\frac{1}{2}}v. \quad (5.1)$$

记 $V' = \sum_{x_0,\dots,x_l,z_0,\dots,z_l\in\mathbb{N},y_0,\dots,y_l\in\mathbb{Y}} \mathbb{C}W_t^{x_0}\cdots W_{t+l}^{x_l}G_{t-\frac{1}{2}}^{y_0}\cdots G_{t+l-\frac{1}{2}}^{y_l}L_t^{z_0}\cdots L_{t+l}^{z_l}v$，其中 $\mathbb{Y} = \{0,1\}$。

断言 2. V' 是一个有限维 $\mathcal{S}^{(t,t,t)}$-模。

根据 (1)，我们知道 V' 是有限维的。利用 PBW定理，我们可以将$L_{t+s}v'$、 $W_{t+s}v'$、$G_{t+s-\frac{1}{2}}v'$分别用 $s \in \mathbb{N}$和 $v' \in V'$改写为以下形式的向量之和：

$$L_{t+s}W_t^{x_0}\cdots W_{t+l}^{x_l}G_{t-\frac{1}{2}}^{y_0}\cdots G_{t+l-\frac{1}{2}}^{y_l}L_t^{z_0}\cdots L_{t+l}^{z_l}v, \quad (5.2a)$$
$$W_{t+s}W_t^{x_0}\cdots W_{t+l}^{x_l}G_{t-\frac{1}{2}}^{y_0}\cdots G_{t+l-\frac{1}{2}}^{y_l}L_t^{z_0}\cdots L_{t+l}^{z_l}v, \quad (5.2b)$$
$$G_{t+s-\frac{1}{2}}W_t^{x_0}\cdots W_{t+l}^{x_l}G_{t-\frac{1}{2}}^{y_0}\cdots G_{t+l-\frac{1}{2}}^{y_l}L_t^{z_0}\cdots L_{t+l}^{z_l}v. \quad (5.2c)$$

根据 (5.1)，我们只需证明 (5.2a)–(5.2c) 中含有 $0 \le s \le l$ 的元素属于 V'。(5.2b) 的情形显然。对于 (5.2a)，我们有

$$\begin{aligned}
&L_{t+s}W_t^{x_0}\cdots W_{t+l}^{x_l}G_{t-\frac{1}{2}}^{y_0}\cdots G_{t+l-\frac{1}{2}}^{y_l}L_t^{z_0}\cdots L_{t+l}^{z_l}v\\
=\ &W_t^{x_0}\cdots W_{t+l}^{x_l}G_{t-\frac{1}{2}}^{y_0}\cdots G_{t+l-\frac{1}{2}}^{y_l}L_t^{z_0}\cdots L_{t+s}^{z_s+1}\cdots L_{t+l}^{z_l}v\\
&+[L_{t+s}, W_t^{x_0}\cdots W_{t+l}^{x_l}G_{t-\frac{1}{2}}^{y_0}\cdots G_{t+l-\frac{1}{2}}^{y_l}L_t^{z_0}\cdots L_{t+s}^{z_s}]L_{t+s+1}^{z_s+1}\cdots L_{t+l}^{z_l}v.
\end{aligned}$$

通过归纳法，很容易验证上述等式中的所有项都属于 V'。因此，(5.2a) 中所示形式的元素属于 V'。(5.2c) 的情形也可类似证明。因此，命题 2 得证。

根据断言 2，我们可以取一个最小的 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$(L_m + a_1L_{m+1} + \cdots + a_nL_{m+n})V' = 0, \quad (5.3)$$

对某些 $m \geq t$ 和 $a_i \in \mathbb{C}$。将 L_m 应用于（5.3），得到

$$(a_1[L_m, L_{m+1}] + \cdots + a_n[L_m, L_{m+n}])V' = 0.$$

为避免矛盾，这迫使 $n = 0$，即 $L_m V' = 0$。因此，我们得到

$$0 = L_i L_m V' = [L_i, L_m]V' + L_m(L_i V') = (m - i)L_{m+i}V', \quad \forall\, i \geq t.$$

因此，对所有 $i > m$，都有 $L_{m+i}V' = 0$。那么，对于 $j,\ k > m$，我们有

$$0 = W_j L_m V' = [W_j, L_m]V' + L_m(W_j V') = -(m + j)W_{m+j}V',$$
$$0 = G_{k-\frac{1}{2}} L_m V' = [G_{k-\frac{1}{2}}, L_m]V' + L_m(G_{k-\frac{1}{2}}V') = (\frac{1}{2} - k)G_{m+k-\frac{1}{2}}V',$$

也就是说，$W_{m+j}V' = G_{m+k-\frac{1}{2}}V' = 0$。由此可得 (5)。

对于 (5) $\Rightarrow$ (6)，固定 r_1，r_2，$r_3 \in \mathbb{N}$ 和 $0 \neq v \in P$，使得 $\mathcal{S}^{(r_1,r_2,r_3)}v = 0$。根据PBW定理以及 P 的单性，P 有一个由以下形式的向量构成的张成集

$$L^{\mathbf{i}}W^{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v = \cdots L^{i_2}_{r_1-2}L^{i_1}_{r_1-1}\cdots W^{j_2}_{r_2-2}W^{j_1}_{r_2-1}\cdots G^{k_2}_{r_3-\frac{3}{2}}G^{k_1}_{r_3-\frac{1}{2}}v,$$

其中 $\mathbf{i},\ \mathbf{j} \in \mathbb{M}$，$\mathbf{k} \in \mathbb{M}_1$。

断言3。存在 $n > N = r_1 + r_2 + r_3 + \mathbf{w}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ 使得

$$L_n L^{\mathbf{i}}W^{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v = W_n L^{\mathbf{i}}W^{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v = G_{n-\frac{1}{2}}L^{\mathbf{i}}W^{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v = 0.$$

我们对 D 进行归纳法证明该断言：$= \mathbf{d}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$。$D = 0$ 的情形显然。对于 $D = 1$，$L^{\mathbf{i}}W_{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v$的形式为 $L_{r_1-b}v$、$W_{r_2-b}v$ 或 $G_{r_3+\frac{1}{2}-b}v$，其中某个 $b \in \mathbb{Z}_+$。设 $L^{\mathbf{i}}W^{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v = G_{r_3+\frac{1}{2}-b}v$。对于 $n > r_1 + r_2 + r_3 + b$，根据假设，我们有

$$G_{n-\frac{1}{2}}G_{r_3+\frac{1}{2}-b}v = [G_{n-\frac{1}{2}}, G_{r_3+\frac{1}{2}-b}]v - G_{r_3+\frac{1}{2}-b}G_{n-\frac{1}{2}}v = 0,$$
$$L_n G_{r_3+\frac{1}{2}-b}v = [L_n, G_{r_3+\frac{1}{2}-b}]v + G_{r_3+\frac{1}{2}-b}L_n v = 0 \ \text{ and } \ W_n G_{r_3+\frac{1}{2}-b}v = 0.$$

类似地，我们可以得到 $L_{r_1-b}v$ 和 $W_{r_2-b}v$ 情形下的结果。现在假设 $D > 1$，且该断言对 $D' < D$ 成立。那么，对于任意满足 $\mathbf{d}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = D$、$n > N$ 的 $L^{\mathbf{i}}W^{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v$，可得

$$\begin{aligned} L_n L^{\mathbf{i}}W^{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v = &\sum_a \cdots L^{i_{a+1}}_{r_1-a-1}[L_n, L_{r_1-a}]L^{i_a-1}_{r_1-a}\cdots L^{i_1}_{r_1-1}W^{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v \\ &+ \sum_a L^{\mathbf{i}}\cdots W^{j_{a+1}}_{r_2-a-1}[L_n, W_{r_2-a}]W^{j_a-1}_{r_2-a}\cdots W^{j_1}_{r_2-1}G^{\mathbf{k}}v \\ &+ \sum_a L^{\mathbf{i}}W^{\mathbf{j}}\cdots G^{k_{a+1}}_{r_3-a-\frac{1}{2}}[L_n, G_{r_3-a+\frac{1}{2}}]G^{k_a-1}_{r_3-a+\frac{1}{2}}\cdots G^{k_1}_{r_3-\frac{1}{2}}v. \end{aligned}$$

根据归纳法假设，对于 $n > N$，我们可以得到 $L_n L^{\mathbf{i}}W_{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v = 0$。类似地，可以直接验证，对于 $n > N$，有 $W_n L^{\mathbf{i}}W_{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v = G_{n-\frac{1}{2}}L^{\mathbf{i}}W^{\mathbf{j}}G^{\mathbf{k}}v = 0$。因此，断言3 得证。

由断言3可得，P 是一个受限模。证明完毕。 □

此外，我们还有以下结果。

定理 5.2。 设 P 是一个简单受限的 $\mathcal{S}$-模。假设存在 $c_2 \neq 0$ 使得 $C_2 P = c_2 P$。那么存在 $d \in \mathbb{N}$ 以及一个简单的 $\mathcal{T}_d$-模 V，满足定理 *4.1* 中的条件，使得 $P \cong \mathrm{Ind}(V)$。

证明。 对于任意 $i, j, k \in \mathbb{Z}$，考虑向量空间

$$N_{\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}} = \{v \in P \mid W_i v = (1 - \delta_{j,0}) G_{j-\frac{1}{2}} v = L_k v = 0, \ \ \forall\, i > \tilde{i}, j > \tilde{j}, k > \tilde{k}\}.$$

由命题 5.1(5)可知，对于充分大的整数 i, j, k，有 $N_{\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}} \neq 0$。注意，对于任意非零的 $v \in P$，都有$W_0 v = c_2 v \neq 0$。因此，我们可以找到最小的非负整数 a，并选取某个 $b, c \in \mathbb{N}$，使得 $b, c \geq a$，且 $N_{a,b,c} \neq 0$。此外，我们可以选取定理 4.1 中的 $a = b$。

记 $d = c - a$ 和 $V = N_{a,a,a+d}$。对于任意 $i > a, j > a, k > a + d$，由 (1.1) 可得

$$W_i(G_{n-\frac{1}{2}} v) = 0, \ \ G_{j-\frac{1}{2}}(G_{n-\frac{1}{2}} v) = (j + n - 1) W_{j+n-1} v = 0,$$
$$L_k(G_{n-\frac{1}{2}} v) = (n - \frac{1}{2}) G_{k+n-\frac{1}{2}} v = 0,$$

对于任意 $v \in V$, $n \geq 1$。因此，$G_{n-\frac{1}{2}} v \in V$。类似地，对于所有 $m \in \mathbb{N}$，我们还可以得到 $W_{m-d} v \in V$和$L_m v \in V$。因此， V是一个 $\mathcal{T}_d$-模。

根据 V 的定义，我们可以推知，对于某个$t \in \mathbb{N}$， W_t 在 V 上的作用是单射。由于 P是单的且由 V生成，因此存在一个典范满射

$$\pi : \mathrm{Ind}(V) \longrightarrow P, \ \ \pi(1 \otimes v) = v, \ \ \forall\, v \in V.$$

要证明 π 是双射，只需证明它是单射。令 $K =$**ker(**π**)**。显然，$K \cap V = 0$。若 $K \neq 0$，我们可以选取一个非零向量 $v \in K \setminus V$，使得 **deg(**v**)** $=$**(i,j,k)** 尽可能小。注意到 K 是 **Ind(**V**)** 的一个 $\mathcal{S}$-子模，因此在对任意 $i \in \mathbb{Z}$而言的 L_i, W_i和 $G_{i-\frac{1}{2}}$的作用下封闭。按照断言 1 的类似证明，我们可以构造一个新的向量 $u \in K$，使得 **deg(**u**)** $\prec$**(i,j,k)**，这就产生了矛盾。因此我们有 $K = 0$，即$P \cong$ **Ind(**V**)**。根据诱导模的性质，我们知道 V是一个单的 $\mathcal{T}_d$-模。 □

事实上，任何满足定理 5.2 中条件的简单受限 $\mathcal{S}$-模，都由某个子代数 $\mathcal{T}_d$上的一个单模 V 确定。定理 4.1 的条件表明， V 可以视为 $\mathcal{T}_d$ 的某个有限维可解商代数上的单模。因此，对 $\mathcal{S}$ 上这类模的研究可以归结为对相应有限维代数上的单模的研究。更确切地说，我们有以下结论。

定理 5.3。 设 P 是一个简单受限的 $\mathcal{S}$-模。假设存在 $k \in \mathbb{Z}_+$，使得 W_k 在 P 上的作用是单射，或者存在 $c_2 \neq 0$ 使得 $C_2 P = c_2 P$成立。那么$P \cong \mathrm{Ind}(V)$，其中 V 是一个简单的 $\mathfrak{q}^{(d,t)}$-模，而 $\mathfrak{q}^{(d,t)} = \mathcal{T}_d / \mathcal{S}^{(t+d+1,t+1,t+1)}$ 是某个 $t \in \mathbb{N}$的商代数。

然而，据我们所知，除了 $(d,\ t) = (0,\ 0)$ 这一情形外，简单 $\mathfrak{q}^{(d,t)}$-模的分类仍是一个未解决的问题。注意， $\mathfrak{q}^{(0,0)}$ 是李代数 $\mathcal{S}_0$ ，而简单 $\mathcal{S}_0$-模的分类源自 R. Block [3]的一项重要工作。由定理 5.3 可知， $\mathcal{S}$ 的简单广义 Verma 模可分类如下。

推论 5.4. </style对于 中满足 的每个简单广义 Verma 模，都同构于诱导模 Ind(V)，其中 V 是 $\mathcal{S}_0$-模之一，包括简单尖点模、简单最高/最低权模、简单（对偶）*Whittaker* 模和简单 *Block* 模。

回顾一下， $\mathcal{S}$ 的偶子代数是 $\lambda = 1$Ovsienko–Roger 代数$\mathcal{L}_1$ 的一个子代数。因此，参照 [21, 推论 4.4]，不难写出推论 5.4 中 $\mathcal{S}_0$-模的更明确的定义。我们将其留给感兴趣的读者。

6 $\mathcal{S}$ 受限模的例子

现在我们可以给出一些 $\mathcal{T}_d$-模的例子。然后，根据定理 4.1，我们可以构造（简单）$\mathcal{S}$-模。

6.1 Verma 模

首先，我们给出 Verma 模 $M(h_1, h_2, c_1)$ 的例子，这表明它总是可约的。对于 $h_1, h_2, c_1 \in \mathbb{C}$，令 $\mathbb{C}v$ 为一个一维 $\mathcal{S}_0$-模，其定义如下:

$$L_0 v = h_1 v,\ \ W_0 v = h_2 v,\ \ C_1 v = c_1 v,\ \ C_2 v = 0.$$

令 $\mathcal{S}_+$ 在 v上平凡作用，这使得 $\mathbb{C}v$ 成为一个 $(\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_+)$-模。于是我们得到 Verma 模 $M(h_1,\ h_2,\ c_1) = \mathcal{U}(\mathcal{S}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_+)} \mathbb{C}v$，它属于 $\mathcal{S}$。考虑向量 $G_{-\frac{1}{2}} v \in M(h_1,\ h_2,\ c_1)$，根据 Verma 模的构造，该向量非零。此外，我们有

$$\begin{aligned}
&L_m(G_{-\frac{1}{2}} v) = [L_m, G_{-\frac{1}{2}}]v + G_{-\frac{1}{2}} L_m v = 0,\ \ \forall\ m > 0,\\
&W_m(G_{-\frac{1}{2}} v) = [W_m, G_{-\frac{1}{2}}]v + G_{-\frac{1}{2}} W_m v = 0,\ \ \forall\ m > 0,\\
&G_r(G_{-\frac{1}{2}} v) = [G_r, G_{-\frac{1}{2}}]v - G_{-\frac{1}{2}} G_r v = 0,\ \ \forall\ r \in \mathbb{N} + \frac{1}{2},\\
&L_0(G_{-\frac{1}{2}} v) = [L_0, G_{-\frac{1}{2}}]v + G_{-\frac{1}{2}} L_0 v = (h_1 - \frac{1}{2}) G_{-\frac{1}{2}} v,\\
&W_0(G_{-\frac{1}{2}} v) = [W_0, G_{-\frac{1}{2}}]v + G_{-\frac{1}{2}} W_0 v = h_2 G_{-\frac{1}{2}} v.
\end{aligned}$$

因此， $G_{-\frac{1}{2}} v$是一个奇异向量。由于$G_{-\frac{1}{2}} v$的权 $h_1 - \frac{1}{2}$严格低于 M的权 h_1（$h_1,\ h_2,\ c_1$），子模 $\mathbb{C}G_{-\frac{1}{2}} v$是 proper 的。因此， M（$h_1,\ h_2,\ c_1$）是可约的。注意， M（$h_1,\ h_2,\ c_1$）对应于定理 4.1 中的情形 $t = d = 0$，但它不满足条件 $c_2 \neq 0$。

注 6.1。 这与推论 5.4 一起完整描述了在 $\mathcal{S}$ 上满足 $c_2 \neq 0$的广义 Verma 模。不同于 [21, 推论 4.4], 中的 $\mathcal{L}_1$ ， $\mathcal{S}$ 的 Verma 模总是可约的。

6.2 Whittaker 模

对于 $k \in \mathbb{Z}_+$，设 ψ_k 是一个李超代数同态 $\psi_k : \mathcal{S}^{(k)} \to \mathbb{C}$，满足 $\psi_k(C_1) = c_1$，$\psi_k(C_2) = c_2$。由此可得，对于 $m \geq 2k+1$、 $n \geq 2k$和$r \geq k$，有 $\psi_k(L_m) = \psi_k(W_n) = \psi_k(G_{r+\frac{1}{2}}) = 0$。设 $\mathbb{C}w$ 是一个一维向量空间，并且

$$xw = \psi_k(x)w, \quad C_1 w = c_1 w, \quad C_2 w = c_2 w, \quad \forall\, x \in \mathcal{S}^{(k)}.$$

若 $\psi_k(W_{2k-1}) \neq 0$，则 $\mathbb{C}w$ 是一个简单的 $\mathcal{S}^{(k)}$-模。现在令 $\psi_k(W_{2k-1}) \neq 0$ ，并考虑诱导模

$$V_{\psi_k} = \mathcal{U}(\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_+) \otimes_{\mathcal{U}(\mathcal{S}^{(k)})} \mathbb{C}w.$$

容易验证， V_{ψ_k} 是一个简单的$(\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_+)$-模。因此，定理 4.1 中相应的简单$\mathcal{S}$-模 Ind$(V_{\psi_k})$（此处取 $t = 2k-1$、 $d = 1$）恰好就是 Whittaker 模。

参考文献

[1] E. Arbarello, C. DeConcini, V. G. Kac, C. Procesi，曲线模空间与表示论，Commun. Math. Phys.**117**，1-36（1988）。[2] A. Bagchi，BMS/GCA 对应，物理评论快报（2010）105:171601。[3] R. Block，李代数 $sl(2)$与 Weyl 代数的不可约表示，《数学进展》**39**，（1981）69-110。[4] O. Blondeau-Fournier, P. Mathieu, D. Ridout, S. Wood，超共形极小模型与容许Jack多项式，《数学进展》，**314**（2017）71-123。[5] H. Chen，作为顶点算子超代数弱模的 $N = 1$ Ramond代数单受限模，J. Algebra，**621** （2023）41-57。[6] H. Chen, Y. Hong, Y. Su，Schr¨odinger–Virasoro 代数上的一族新的单模，纯粹与应用代数杂志，**222(4)**（2018）900–913。[7] H. Chen, Y. Su, Y. Xiao，扭曲 $N = 2$ 超共形代数的限制表示，J. Algebra，**681** （2025）318-342。[8] S.-J. Cheng, V. G. Kac，共形模，亚洲数学杂志，**1(1)**（1997）181-193，亚洲数学杂志，**2(1)**，（1998）153-156（勘误）。[9] S.-J. Cheng, V. G. Kac, M. Wakimoto，Neveu–Schwarz共形模的扩张，数学物理杂志，**41**，2271-2294（2000）。

[10] Y. Cai, D. Liu, R. L¨u, $N=1$ Ramond代数上的简单 Harish-Chandra 模的分类，J. algebra，**567**（2021）114–127。[11] D. Fattori, V. G. Kac，有限维单李共形超代数的分类，J. Algebra，**258(1)**，23–59（2002）。[12] D. Fattori, V. G. Kac, A. Retakh，有限维李共形超代数的结构理论，李理论及其在物理学中的应用 *V*（世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇），27–63（2004）。[13] I.B. Frenkel, Y.C. Zhu，与仿射代数和 Virasoro 代数表示相关的顶点算子代数，杜克数学杂志，**66(1)**（1992）123–168。[14] S. Gao, C. Jiang, Y. Pei，李代数 $W(a,b)$的低维上同调群，Comm. Algebra，**39(2)**（2011）397-423。[15] K. Iohara, Y. Koga，Neveu–Schwarz 代数与 Remond 代数的表示论 I：Verma 模，《数学进展》，**177**（2003）61–69。[16] V. G. Kac，局域性思想，载于：H.-D. Doebner 等（编），《几何、群与代数的物理应用及数学方面》，新加坡：世界科学出版社，16-32（1997）。[17] V. G. Kac，初学者的顶点代数，大学讲座系列第10卷，美国数学学会，（1998）。[18] D. Kazhdan, G. Lusztig，仿射 Kac-Moody 代数产生的张量结构 I、II，《美国数学会杂志》，**6(4)**（1993）905–947，949–1011。[19] J. Lepowsky, H.S. Li，《顶点算子代数及其表示导论》，数学进展丛书，第227卷，Birkh¨auser，波士顿，（2004）。[20] D. Liu, Y. Pei, L. Xia，Neveu–Schwarz 代数的单限制模，J. Algebra，**56**（2020）341-356。[21] D. Liu, Y. Pei, L. Xia，Ovsienko–Roger 代数的限制模范畴，《代数与表示论》，**25(3)**（2022）777–791。[22] D. Liu, Y. Pei, L. Xia, K. Zhao，$N=1$ Bondi–Metzner–Sachs 超代数上的光滑模，《当代数学通讯》，**27(4)**（2025）2450021，30页。[23] P. Marcel, V. Ovsienko, C. Roger，Virasoro 代数和 Neveu-Schwarz 代数的扩张及广义 Sturm-Liouville 算子。《数学物理快报》，**40**（1997）31-39。[24] V. Mazorchuk, K. Zhao，在正部分上局部有限的单 Virasoro 模，《数学精选》新辑，**20**（2014）839–854。[25] E. Neher，李超代数泛中心扩张导论。载于：群、环、李代数与 *Hopf* 代数，数学及其应用，555。多德雷赫特：Kluwer 学术出版社，141–166（2003）。[26] A. Neveu, J. Schwarz，poins 的可因子化对偶模型，《核物理 B》，**31**（1971）86-112。

[27] V. Ovsienko, C. Roger，张量密度模对 S^1 上的 Virasoro 群和 Virasoro 代数的扩张，Functional Anal. Appl.，**30**(1996) 290–291。[28] P. Ramond，自由费米子的对偶理论，Phys. Rev. D，**3** (1971) 2415-2418。[29] Y. Su，超 Virasoro 代数上的 Harish-Chandra 模的分类，Comm. Algebra，**23**(1995) 3653–3675。[30] J. Wang, X. Yue，秩为 $(2+1)$ 的李共形超代数，J. Algebra，**688** (2026) 116-155, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2025.08.045。[31] W. Zhang, C. Dong， W-代数 $W(2,2)$ 及顶点算子代数 $L(\frac{1}{2},0) \otimes L(\frac{1}{2},0)$，Commun. Math. Phys. **285**(2009) 991–1004。