arXiv:2601.09299v1 [cs.GT] 14 Jan 2026

具有二元 XOS 估值的非对称代理公平分配

ZihengChen[1, 2, *], Bo Li[3, *], Zihan Luo[1, 2, *], Jialin Zhang[1, 2, *, †]

[1] 中国科学院计算技术研究所[2] 中国科学院大学[3] 香港理工大学计算学系

2026年1月15日

摘要

我们研究如何在 m 位代理人之间分配不可分物品的问题，其中每位代理人的估值都是分数次可加（XOS）的。关于任意价格份额（APS）公平性，Kulkarni 等人（2024年）证明，当代理人的边际价值为二元时，可以在多项式时间内找到一个 0.1222-APS 分配，并且存在一个实例，使得任何分配都无法达到优于 0.5-近似 APS。最近，Feige 和 Grinberg（2025年）将问题推广至非对称情形，即代理人可能拥有不同的应得份额，并将一般 XOS 估值的近似比提升至 $1/6$。本文聚焦于具有二元 XOS 估值的非对称情形，并进一步将近似比提升至 $1/2$，这与已知上界相匹配。我们还提出了一种多项式时间算法来计算此类分配。除 APS 公平性外，我们也研究加权最大化最小份额（WMMS）公平性。Farhadi 等人（2019年）证明，对于具有一般可加估值的代理人，$1/n$-WMMS 分配总是存在，而且这一近似比是紧的。我们将该结果推广到一般 XOS 估值：此时仍存在 $1/n$-WMMS 分配，并且即使边际价值为二元，这一近似比也无法改进。这与二元加性估值形成鲜明对比；在后者情形下，精确 WMMS 分配存在，且可在多项式时间内找到。

关键词：公平分配，XOS，APS，WMMS

1 引言

本文研究如何在 n名参与者之间公平分配 m不可分物品。该问题中一种核心且广受认可的公平性标准是极大极小份额（MMS），由 Budish（2011年）提出。然而，先前的研究表明，存在某些实例，使得任何分配都无法保证实现最大化最小份额公平（Feige 等人，2021年；Procaccia 和 Wang，2014年；Kurokawa 等人，2018年）。这引出了公平分配中的一个基本问题：最大化最小份额公平在多大程度上能够得到保证？这一问题催生了大量研究。对于可加、子模和 XOS 估值函数，研究者已确立了最大化最小份额公平的常数因子近似结果；例如，参见（Akrami 和 Garg，2024年；Uziahu 和 Feige，2023年；Akrami 等人，2023b）。Babaioff 等人（2024年）提出了另一种公平性概念——任意价格份额（APS），并证明在加性估值下存在常数近似 APS 分配；随后，Uziahu 和 Feige（2023年）将这一结果推广至子模估值。

除了对一般估值类别的研究外，二元边际值估值（如拟阵秩估值，即具有二元边际值的次模估值）也受到了广泛关注。一方面，这些二元函数非常适合用于模拟现实场景，例如公共住房单元的公平分配（Barman 和 Verma，2021年），也让参与者更容易表达自己的

*这些作者对本研究的贡献相同。
†通讯作者。zhangjialin@ict.ac.cn

设定	APS		WMMS	
	对称	非对称	对称	非对称
可加	$\frac{3}{5}$ （Babaioff 等人（2024年））	$\frac{3}{5}$ （Babaioff 等人（2024年））	$\frac{10}{13}$ （Heidari 等人（2025年））	$\frac{1}{n}$ （Farhadi 等人（2019年））
二元 XOS	$0.1222 \xrightarrow{\text{定理 } \mathbf{2}} \frac{1}{2}$ （Kulkarni 等人（2024年））	$\frac{1}{2}$ （**定理 2**）	$0.3666 \xrightarrow{\text{推论}} \frac{1}{3}$ （Kulkarni 等人（2024年））	$\frac{1}{n}$ （**定理 3**）
一般 XOS	$\frac{4}{17}$ （Feige 和 Grinberg（2025年））	$\frac{1}{6}$ （Feige 和 Grinberg（2025年））	$\frac{4}{17}$ （Feige 和 Grinberg（2025年））	$\frac{1}{n}$ （**定理 3**）

表 1：主要结果。我们指出，本文中的所有近似比都是紧的。为便于说明，我们将其与相关情形下已知的最佳近似比进行了比较。

偏好。另一方面，这些函数还能带来更强的公平性保证。例如，在拟阵秩估值下，始终存在精确 MMS 分配，且可通过高效算法计算得到（Barman 和 Verma，2021年；Viswanathan 和 Zick，2023年）。此外，Kulkarni 等人（2024年）证明，在这一情形下，APS 与 MMS 完全相等，因此始终可以实现精确的 APS 分配。这自然引出了一个问题：二元 XOS 函数又如何呢？它们在无互补层级中推广了二元次模函数。Kulkarni 等人（2024年）证明，在这种情况下，MMS 和 APS 可能并不相等，但二者满足 MMS $\leq$ APS $\leq 2\text{MMS} + 1$。鉴于 Li 和 Vetta（2021年）的算法能够保证得到 0.366-近似 MMS 分配，这一关系立即意味着可得到 0.122-近似 APS 分配。遗憾的是，Kulkarni 等人（2024年）还证明，对于二元 XOS 估值，APS 的近似比不可能优于 0.5。

最近，Feige 和 Grinberg（2025年）通过证明在一般XOS估值下存在一个$\frac{4}{17}(\approx 0.235)$-近似-APS 分配，改进了先前的结果。他们还将分析扩展到了一个更一般的情形，即参与者之间存在非对称性——也就是说，参与者对物品拥有不同的份额，应得份额较高的参与者预计会获得更大的份额。这种非对称情形与现实世界的应用尤其相关。正如 Farhadi 等人（2019年）所讨论的，在许多宗教、文化和法律体系中，继承财富往往是不平等分配的，而邻国之间自然资源的分配也经常基于地理、经济或政治因素。Feige 和 Grinberg（2025年）证明，对于非对称情形下的一般XOS估值，保证存在一个$\frac{1}{6}$-近似 APS 分配。

尽管 Feige 和 Grinberg（2025年）的研究显著推进了我们对 XOS 估值下近似 MMS 和 APS 公平性的理解，但 Kulkarni 等人（2024年）提出的若干开放问题仍未解决。首先，对于二元 XOS 估值，最优近似比仍然未知；已知在对称情形下该比值介于$\frac{4}{17}$和$\frac{1}{2}$之间，在非对称情形下则介于$\frac{1}{6}$和$\frac{1}{2}$之间。其次，在非对称情形下，APS 与加权 MMS（WMMS，定义见 Farhadi 等人（2019年））之间的关系仍不明确，WMMS 的最优近似比也尚不清楚。本文回答了上述两个问题。

1.1 我们的贡献

本文以 Kulkarni 等人（2024年）的研究为基础，探讨如何在代理人的估值为二元 XOS 的情况下，将 m 不可分物品分配给 n 参与者。我们重点研究 APS 和 WMMS 公平性，以及参与者具有不同应得份额的一般情形。主要结果及其与相关工作的比较总结于表 1。

我们的贡献有两方面。首先，对于 APS 公平性，我们证明始终存在一个$\frac{1}{2}$-近似 APS 分配，因此该近似比是紧的。我们的结果适用于一般的非对称情形；参见定理 1。在对称情形下，由于 APS 始终不小于 MMS，我们的结果也保证存在一个$\frac{1}{2}$-近似 MMS 分配。此外，我们还提供了多项式时间实现来计算这样的分配；参见定理 2。

在非对称情形下，Farhadi 等人（2019）首次引入了 WMMS 公平性，以考虑具有不同权重的参与者。在此背景下，APS 不再是 WMMS 的上界；事实上，存在一些实例（其中参与者具有一般的可加估值），使得某些参与者的 APS WMMS 是无穷小的；参见命题

1。Farhadi 等人（2019）进一步证明，轮流分配算法能够保证一个 $\frac{1}{n}$ 近似的 WMMS 分配（针对可加估值）。在超越可加估值的情形下，我们通过证明任意 XOS 估值下始终存在一个 $\frac{1}{n}$ 近似的 WMMS 分配，从而推广了 Farhadi 等人（2019）的结果（定理 3）。然而，我们证明，对于 XOS 估值——即使将其限制在二元情形下——也无法保证优于 $\frac{1}{n}$ 近似的 WMMS 分配（定理 4）。相比之下，我们证明，对于二元加性估值，可以实现精确WMMS分配，这凸显了在二元 XOS 估值下实现 WMMS 公平性的内在挑战（定理 5）。

1.2 相关工作

MMS公平性最早由 Budish（2011）提出，是对比例性的放宽 Steinhaus（1949年）。然而，存在一些实例不具有 MMS 分配 Feige 等人（2021年）；Procaccia 和 Wang（2014年）；Kurokawa 等人（2018年）。对于加性估值，Kurokawa 等人（2018年）证明了$\frac{2}{3}$-MMS 分配的存在性。随后，Ghodsi 等人（2018年）将近似比提高到$\frac{3}{4}$，Garg 和 Taki（2020年）以及 Akrami 等人（2023a）进一步将其提高到 $\frac{3}{4}+o(1)$，$\frac{3}{4}+\frac{3}{3836}$ Akrami 和 Garg（2024年）又将其提高到这一水平，而最近 Heidari 等人（2025年）将其提高到了$\frac{10}{13}$。对于子模估值，Barman 和 Krishnamurthy（2020年）以及 Ghodsi 等人（2018年）分别设计了用于计算 0.21-MMS 和$\frac{1}{3}$-MMS 分配的算法。Ghodsi 等人（2018年）表明，比$\frac{3}{4}$-MMS 更好的 MMS 分配可能不存在。最近，Uziahu 和 Feige（2023年）将近似比提高到$\frac{10}{27}$。对于 XOS 估值，Ghodsi 等人（2018年）证明，最佳可能近似比介于$\frac{1}{5}$和$\frac{1}{2}$之间。随后，Akrami 等人（2023b）设计了一种计算 0.23-MMS 分配的算法。对于一般的次可加估值，Ghodsi 等人（2018年）；Seddighin 和 Seddighin（2024年）；Feige 和 Huang（2025年）；Seddighin 和 Seddighin（2025年）；Feige（2025年）给出了近似 MMS 公平算法。最后，当参与者具有不对称份额时，Farhadi 等人（2019年）引入了加权MMS公平性，并证明对于加性估值，最佳可能近似比为 $\frac{1}{n}$。

Babaioff 等人（2024年）提出了 APS 公平性，旨在解决 MMS 的一些建模问题，尤其是在参与者权重不同时。他们为可加估值设计了一种 0.667-APS 算法。之后，Uziahu 和 Feige（2023年）将研究范围扩展到子模估值，并提出了一种$\frac{1}{3}$-近似算法。最近，Feige 和 Grinberg（2025年）证明了 XOS 估值下$\frac{1}{6}$-APS 分配的存在性，并将参与者具有平等份额时的近似比提升至$\frac{1}{7}$-APS 分配。

尽管上述研究都关注物品分配，但任务分配这一相关问题也得到了广泛研究。例如，在平等份额下，Aziz 等人（2017年）、Huang 和 Lu（2021年）以及 Huang 和 Segal-Halevi（2023年）研究了加性估值下的最大化最小份额公平；Li 等人（2023年）则研究了更一般估值下的这一公平性。在不对称份额下，Aziz 等人（2019年）和 Wang 等人（2024年）研究了 WMMS 公平性，而 Babaioff 等人（2024年）、Li 等人（2022年）以及 Feige 和 Huang（2023年）研究了 APS 公平性。

2 预备知识

我们研究如何在 n 参与者之间公平分配一组 m 不可分物品的问题。设 $[k]=\{1,2,\ldots,k\}$为正整数 k。用 M表示物品集合：$=\{g_1,g_2,\ldots,g_m\}$，用 N表示参与者集合：$=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$。每个参与者 $a_i\in N$的偏好由其对物品集合的估值函数 v_i：$2^M\to\mathbb{R}_{\geq 0}$定义。具体而言，$v_i(S)$ 表示 a_i 对物品子集 $S\subseteq M$的估值。此外，我们着重关注参与者之间因应得份额 $(b_i)_{i\in[n]}$而产生的不均衡。因此，我们用四元组 $(N,\ M,\ (v_i)_{i\in n},\ (b_i)^{i\in[n]})$ 表示一个公平分配实例。

一个分配 A：$=(A_1,\ \ldots\ldots,\ A_n)$ 是在 n 参与者之间对所有物品进行的划分，即对于所有 $i\neq j$和 $\bigcup_{i\in[n]}A_i=M,\ \ A_i\cap A_j=\varnothing$。我们还将部分分配记为 $P=(P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n)$，它是对任意物品子集的划分，其中对于所有 $i\neq j$和 $\bigcup_{i\in[n]}P_i\subseteq M,\ \ P_i\cap P_j=\varnothing$。

2.1 公平性概念

为简便起见，在公平分配实例 $(N,M,(v_i)_{i\in n},(b_i)^{i\in[n]})$ 中，令

$$\Pi_n=\{S=(S_i)_{i\in[n]}\mid M=\cup_{i\in[n]}S_i,S_i\cap S_j=\varnothing,i\neq j\}$$

为将 M 划分为 n 个物品束的所有划分的集合。

极大极小份额是对切蛋糕问题的一种类比：切分者只能期望获得蛋糕中最小的一份。因此，她需要找到能使最小份额最大化的分配。在无权版本的极大极小份额中，我们平等对待所有参与者。也就是说，每位参与者的应得份额都相同，为 $\frac{1}{n}$。

定义 1 (极大极小份额**)**。 对于公平分配实例 $(N, M, (v_i)^{i\in[n]}, (\frac{1}{n})^{i\in[n]})$， a_i 的极大极小份额（*MMS*）为

$$\mathsf{MMS}_i^N(M) = \max_{S\in\Pi_n} \min_{j\in[n]} v_i(S_j).$$

作为一种扩展，加权最大化最小份额将应得份额纳入考量。此时，切分者会根据自己的估值函数和参与者的应得份额来提出分配方案，而不只是进行划分。

定义 2 (加权最大化最小份额**)**。 对于公平分配实例 $(N, M, (v_i)^{i\in[n]}, (b_i)^{i\in[n]})$， a_i 的加权最大化最小份额（*WMMS*）为

$$\mathsf{WMMS}_i^N(M) = \max_{S\in\Pi_n} \min_{j\in[n]} v_i(S_j)\frac{b_i}{b_j}.$$

显然，当所有份额相等时，加权最大化最小份额便退化为极大极小份额。此外，我们将达到 WMMS 值的划分称为 WMMS 划分。

定义 3 (WMMS 划分**)**。 对于一个公平分配实例 $(N, M, (v_i)^{i\in[n]}, (b_i)^{i\in[n]})$， a_i 的 *WMMS* 划分为

$$S^i \in \arg\max_{S\in\Pi_n} \min_{j\in[n]} v_i(S_j^i)\frac{b_i}{b_j},$$

其中， S_j^i 是 a_j想要分配给自己的物品束 a_i 。

通俗地说，任意价格份额表示代理人 a_i 基于其应得份额 b_i，在物品价格给定时能够为自己保证的价值。

定义 4 (任意价格份额**)**。 令 $\mathcal{P}$ 表示与物品集合M对应的价格向量单纯形，形式化地说，

$$\mathcal{P} = \left\{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \geq 0 \;\middle|\; \sum_{i\in[m]} p_i = 1 \right\}.$$

对于公平分配实例 $(N, M, (v_i)^{i\in[n]}, (b_i)^{i\in[n]})$， a_i 的 *APS* 值为

$$\mathsf{APS}_i^N(M) := \min_{p\in\mathcal{P}} \max_{S\subseteq M, p(S)\leq b_i} v_i(S),$$

其中， $p(S)$ 表示 S 中物品的价格总和。

为简洁起见，如果上下文中的实例清楚，我们将 (W)MMS$_i^N(M)$ 简称为 (W)MMS$_i$，将 APS$_i^N(M)$ 简称为 APS$_i$。

我们强调，在定义某个 a_i的（加权）极大极小份额和任意价格份额时，只考虑其自身的价值函数。其他参与者的参与仅体现在他们的应得份额上。

当且仅当 $v_i(A_i) \geq \alpha$APS$_i$ （类似地， $v_i(A_i) \geq \alpha$(W)MMS$_i$）对每个参与者 $i \in N$ 都成立时，分配 A 是 α-APS（类似地， α-(W)MMS）。

2.2 估值函数

本文聚焦于具有二元边际值的 XOS 估值（即二元 XOS 估值）。

定义 5 （加性函数）。 函数 $v\colon 2^M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是可加的，当且仅当一个物品集合的价值等于该集合中各物品价值之和，即 $v(S) = \sum_{g\in S} v(\{g\})$。

定义 6（XOS 函数）。函数 $v\colon 2^M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是 *XOS* 函数，或称分数次可加，当且仅当存在一组可加函数 $\{l_t\}_{t\in[L]}$，使得对于每个子集 $S \subseteq M$，都有 $v(S) = \max_{t\in[L]} l_t(S)$。请注意，可加函数的数量 $|L|$ 相对于 m 可能呈指数级增长。

给定一个 XOS 函数 v，假设存在一个查询预言机 $\mathcal{O}$，它接收集合 S 作为输入，并在 $O(1)$ 时间内计算$v(S)$。

此外，估值 v 具有二元边际值，当且仅当对于任意物品子集 $S \subseteq M$ 和任意物品 $g \in M$，$v(S\cup\{g\}) - v(S) \in \{0,1\}$。由此可直接得出，我们考虑的估值是单调的：对于任意子集 $S \subseteq T \subseteq M$，$v(S) \leq v(T)$。此外，我们要求估值满足：对每个$i \in [n]$，$v_i(\varnothing) = 0$。

当估值 v 具有二元边际值时，若物品集合 $S \subseteq M$ 相对于估值 v_i满足 $v(S) = |S|$，则称其为无浪费的。Barman 和 Verma（2021年）证明，对于任意二元 XOS 函数 v 和任意集合 $S \subseteq M$，都存在一个无浪费子集 $X \subseteq S$，满足 $v(X) = |X| = v(S)$；并且该无浪费集合 X 可以在 $O(m)$ 时间内高效计算。

3 二元 XOS 估值下的 APS

本节聚焦于如何在二元 XOS 估值下计算近似 APS 分配。我们首先在第 3.1 节证明存在 $\frac{1}{2}$-APS 分配，然后在第 3.2 节给出一个多项式时间实现。结合 Kulkarni 等人（2024）的上界，我们的结果是紧的。由于参与者拥有平等份额时，APS 不超过 MMS，因此我们的结果意味着存在一个多项式时间算法，可在对称情形下计算 $\frac{1}{2}$-MMS 分配。

3.1 $\frac{1}{2}$-APS 分配的存在性

我们的证明是构造性的，算法在算法 1 中作了正式描述。如果已知所有参与者的 APS 值，该算法会返回一个$\frac{1}{2}$-APS 分配。为了将其作为我们的多项式时间算法 2 的子程序，如果输入的 APS 猜测值过大，我们让算法 1 输出一个未满足的代理人。

Suppo若参与者的 APS 分别为 s_1、s_2、……、s_n，则我们可以对参与者重新命名，使得

$$\frac{\lceil \frac{1}{2}s_1 \rceil}{b_1} \leq \frac{\lceil \frac{1}{2}s_2 \rceil}{b_2} \leq \cdots \leq \frac{\lceil \frac{1}{2}s_n \rceil}{b_n}. \tag{1}$$

我们证明，可以为每位代理人分配一个非浪费物品束，其价值至少为其 APS 的一半。

引理 1. 对于具有二元 *XOS* 估值的公平分配实例 $(N, M, (v_i)_{i\in[n]}, (b_i)_{i\in[n]})$ 中的某位代理人 a_i，假设 $S \subseteq M$ 是物品的子集，则存在一个非浪费物品束 $B \subseteq M \setminus S$，满足$v_i(B) = |B| = \mathsf{APS}_i - \lfloor b_i|S| \rfloor$。

证明。若 $S = \varnothing$，根据 APS 的定义，该引理显然成立。否则，考虑所有物品的如下价格 l，

$$p_l = \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & l \in S, \\ 0, & l \notin S. \end{cases}$$

凭借其应得份额 b_i，a_i 最多只能买得起 S 中的 $\lfloor b_i|S| \rfloor$ 件物品。然而，根据 APS 的定义，对于任意价格，a_i 总能买得起 M 中价值至少为 APS_i 的物品。因此，对于剩余物品，我们有$v_i(M \setminus S) \geq \mathsf{APS}_i - \lfloor b_i|S| \rfloor$。然后，根据 Barman 和 Verma（2021），我们可以从 $M \setminus S$ 中移除一些物品，从而得到所需的非浪费物品束 B，其中 $v_i(B) = |B| = \mathsf{APS}_i - \lfloor b_i|S| \rfloor$。

□

定理 1. 当所有参与者的估计的任意价格舍入份额值都是准确的，也就是说，对于 $i \in [n]$，$s_i = \mathsf{APS}_i$，算法 *1* 会为公平分配实例 $(N, M, (v_i)_{i\in[n]}, (b_i)_{i\in[n]})$中的每个代理人 a_i 计算出一个$\frac{1}{2}$-*APS* 分配，其中$(v_i)_{i\in[n]}$ 是二元 *XOS* 估值。

算法 1 1/2-APS 的存在性

要求： 一个实例 $(N, M, (v_i)_{i\in[n]}, (b_i)_{i\in[n]})$，其估值为二元 XOS 估值，且 APS 值 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ 满足不等式 1。

确保： 如果存在一个 1/2-APS 分配，则返回该分配 $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$。否则，返回一个未满足的代理人 a_i。

对于 $i \leftarrow 1, 2, \ldots, n$ **do**
  如果 $v_i(M) \geq \lceil \frac{1}{2} s_i \rceil$，**则**
    将 a_i 一个非浪费捆绑 A_i 从 M 中分配，其中 $v_i(A_i) = |A_i| = \lceil \frac{1}{2} s_i \rceil$。
    设 $M \leftarrow M \setminus A_i$。
  else
    返回 a_i
如果 $i = n$ 且 $M \neq \varnothing$，**则**
  任意分配剩余物品。
  返回 $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$。

证明。在算法 1 中，当对于 $i \in [n]$，$s_i = \mathsf{APS}_i$ 时，我们在第 3 行断言 $(A_i)_{i\in[n]}$ 的存在。现在我们用归纳法证明。对于 a_1，显然存在一个物品束 B_1，使得 $v_1(B_1) = |B_1| = \mathsf{APS}_1 \geq \lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_1 \rceil$。然后，与 Barman 和 Verma（2021）的引理 1 证明类似，我们可以找到一个非浪费捆绑 $A_1 \subseteq B_1$，使得 $v_1(A_1) = |A_1| = \lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_1 \rceil$。

接下来，我们假设在前 k 轮中，其中 $1 \leq k \leq n-1$，$(a_i)_{i\in[k]}$ 已获得满足 $v_i(A_i) = |A_i| = \lceil \frac{1}{2}\ \mathsf{APS}_i \rceil$ 的物品束 $(A_i)_{i\in[k]}$。我们将证明，a_{k+1} 可以获得一个物品束 A_{k+1}，使得 $v_{k+1}(A_{k+1}) = |A_{k+1}| = \lceil \frac{1}{2}\ \mathsf{APS}_{k+1} \rceil$。

令 $S_{k+1} = \cup_{i=1}^{k} A_i$ 为前 k 位参与者已选取的物品集合。将 S 代入引理 1 中的 S_{k+1}，可知 $v_{k+1}(M \setminus S_{k+1}) \geq \mathsf{APS}_{k+1} - \lfloor b_{k+1}|S_{k+1}| \rfloor$。因此，若 $\mathsf{APS}_{k+1} - \lfloor b_{k+1}|S_{k+1}| \rfloor \geq \lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_{k+1} \rceil$，则 a_{k+1} 可以按要求获得一个物品束 A_{k+1}。

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{APS}_{k+1} - \lfloor b_{k+1}|S_{k+1}| \rfloor \\
=&\mathsf{APS}_{k+1} - \left\lfloor b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} |A_i| \right\rfloor \\
=&\mathsf{APS}_{k+1} - \left\lfloor b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \left\lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_i \right\rceil \right\rfloor \\
=&\mathsf{APS}_{k+1} - \left\lfloor b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{\lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_i \rceil}{b_i} b_i \right\rfloor \\
\geq&\mathsf{APS}_{k+1} - \left\lfloor b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{\lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_{k+1} \rceil}{b_{k+1}} b_i \right\rfloor \qquad (2) \\
=&\mathsf{APS}_{k+1} - \left\lfloor \left(\sum_{i=1}^{k} b_i \right) \left\lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_{k+1} \right\rceil \right\rfloor \\
\geq&\mathsf{APS}_{k+1} - \left\lfloor \frac{1}{2}\mathsf{APS}_{k+1} \right\rfloor \qquad (3) \\
=&\left\lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_{k+1} \right\rceil .
\end{aligned}
$$

不等式 2 成立，因为参与者按照 $\lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_{b_i}{}_i \rceil$ 的升序排列，$1 \leq i \leq n$。不等式 3 成立，因为 $k \leq n-1$，因此 $\sum_{i=1}^{k} b_i < 1$。

根据归纳法，我们证明了每个 $a_i \in N$ 都可以获得一个非浪费物品束 A_i，使得 $v_i(A_i) = |A_i| = \lceil \frac{1}{2}\mathsf{APS}_i \rceil$。

□

3.2 一个多项式时间算法

算法 1 假设我们已知所有代理人的 APS 值。然而，APS 值能否在多项式时间内计算尚不明确。接下来，我们将提供一种多项式时间实现，如算法 2 所述。直观地说，算法 2 通过迭代猜测 APS 值来运行，猜测从其平凡上界 $s_i = \lfloor b_i m \rfloor$ 开始，并调用算法 1 检查是否返回了所需的分配。如果没有，则返回一个未满足的代理人 a_i，这表明当前对 a_i 的 APS 值的猜测过高。因此，s_i 会降低，并在下一轮迭代中继续这一过程。

算法 2 1 2 -APS 多项式时间算法 要求：一个具有二元 XOS 估值的实例（N、M、$(v_i)_{i\in[n]}$、$(b_i)_{i\in[n]}$）保证：一个 1 2 -APS 分配 $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 1：设置 $M_0 \leftarrow M$。 2：对于 $i \leftarrow 1, 2, \ldots, n$，执行以下操作 3：初始化 $s_i = \lfloor b_i m \rfloor$。 ▷ *Upper bounds of APS* 4：当尚未找到 $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 时，执行以下操作 5：重新命名参与者，使得 $b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n$ 6：以 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ 为输入执行算法 1。 7：如果算法 1 返回一个未满足的代理人 a_i，则 ▷ 某个 s_i 仍然过大。 8：设置 $s_i \leftarrow s_i - 1$。 9：重置 $M \leftarrow M_0$。 10：否则 11：返回 $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$

$\lceil \frac{1}{2} s_1 \rceil \leq \lceil \frac{1}{2} s_2 \rceil \leq \cdots \leq \lceil \frac{1}{2} s_n \rceil$

引理 2。 算法 *2* 的时间复杂度为 $O(mn(m + \log n))$。

证明。每次执行第 4 行的 while 循环时，要么找到一个 1 2-APS 分配，要么某个代理人 a_i 的猜测值 s_i 减 1。所有参与者的初始 APS 猜测值之和为 $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \lfloor b_i m \rfloor \leq m$，因此第 4 行的 while 循环最多执行 m 次。

在 while 循环的每次迭代中，算法 1 都会执行一次，因为它最多需要找到 n 个非浪费捆绑。如果算法 1 未能找到足够的物品束，算法 2 将在下一次迭代中修改猜测值，并重新排列参与者的顺序。Barman 和 Verma（2021）证明，对于二元 XOS 函数 v 及其底集 M，可以在时间 $O(m)$ 内计算出一个价值不超过 $v(M)$ 的非浪费捆绑。第 5 行的重新排列过程通过对 n 个数进行排序来完成，而排序的时间复杂度已知为 $O(n \log n)$。排序可确保算法 1 的输入顺序。

我们已经完成证明：算法 2 至多需要执行 mn 次查找非浪费捆绑，并至多执行 m 次排序操作。总之，算法 2 的时间复杂度为 $O(mn(m + \log n))$。 □

定理 2. 对于任意公平分配实例 $(N, M, (v_i)_{i\in[n]}, (b_i)_{i\in[n]})$，其中 $(v_i)_{i\in[n]}$ 是二元 *XOS* 估值，算法 *2* 可在多项式时间内返回一个 $\frac{1}{2}$-*APS* 分配 A。

证明. 在算法 2 结束时，每位代理人 a_i 都会获得一个价值为 $\lceil \frac{1}{2} s_i \rceil$ 的物品束。为证明这是一个 $\frac{1}{2}$-APS 分配，我们将证明在整个算法执行过程中，对于每位代理人 a_i，都有 $s_i \geq \mathsf{APS}_i$。

假设在某次迭代中，某个代理人 a_{k+1} 无法获得满足 $v_{k+1}(A_{k+1}) = \lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \rceil$ 的物品束 A_{k+1}，我们断言 $\bar{s}_{k+1} > \mathsf{APS}_{k+1}$。根据算法 2 和引理 1，我们有

$$\mathsf{APS}_{k+1} - \left\lfloor b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \left\lceil \frac{1}{2} s_i \right\rceil \right\rfloor < \left\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \right\rceil .$$

因此，

$$\begin{aligned}
\mathsf{APS}_{k+1} &< \left\lfloor b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \left\lceil \frac{1}{2} s_i \right\rceil \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \right\rceil \\
&\leq \left\lfloor b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\lceil \frac{1}{2} s_i \right\rceil}{b_i} b_i \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \right\rceil \\
&\leq \left\lfloor b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \right\rceil}{b_{k+1}} b_i \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \right\rceil \qquad (4) \\
&\leq \left\lfloor \sum_{i=1}^{k} b_i \left\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \right\rceil \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \right\rceil \\
&\leq \left\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \right\rceil \qquad (5) \\
&\leq s_{k+1}.
\end{aligned}$$

不等式 4 成立，因为 $\frac{\lceil \frac{1}{2} s_i \rceil}{b_i} \leq \frac{\lceil \frac{1}{2} s_{k+1} \rceil}{b_{k+1}}$ 当 $i < k+1$ 时；不等式 5 成立，因为 $k < n$ 因此 $\sum_{i=1}^{k} b_i < 1$。

因此，当某个代理人 a_i 无法从剩余物品中获得 $\frac{1}{2}$-APS 物品束时，有 $s_i > \mathsf{APS}_i$。这表明，第 8 行中 s_i 的减少会使每个 a_i 的 $s_i \geq \mathsf{APS}_i$ 保持成立。因此，在算法 2 结束时，$v_i(A_i) = \lceil \frac{1}{2} s_i \rceil \geq \lceil \frac{1}{2} \mathsf{APS}_i \rceil$，这说明算法 2 是 $\frac{1}{2}$-APS。 □

定理 2 蕴含 $\frac{1}{2}$-MMS 的存在性。Ghodsi 等人（2018年）给出了一个具有二元 XOS 估值的实例，以表明 MMS 近似比的上界为 $\frac{1}{2}$。我们将下界提高到 $\frac{1}{2}$，从而使上下界相匹配。

推论 1. *对于二元 XOS 估值，存在一个 $\frac{1}{2}$-MMS 分配，且可在多项式时间内计算。*

证明。 Babaioff 等人（2024）证明，当所有参与者的应得份额相等 $\frac{1}{n}$ 时，对于任意非负估值，APS 值不低于 MMS 值。

我们的定理 2 适用于任意应得份额，因此当参与者的应得份额相等时，$\frac{1}{2}$-APS 分配的存在性同样成立，并且我们仍有一个多项式时间算法来计算该分配。这意味着 $\frac{1}{2}$-MMS 分配存在，且有一个多项式时间算法。 □

4 一般XOS估值下的 WMMS

本节首先说明，当参与者的应得份额不对称时，APS 不再是 WMMS 的上界。事实上，存在一些实例，其中 WMMS 可以任意大于 APS，因此上一节中的算法对 WMMS 不提供任何近似保证。

命题 1。 *对于任意 $\delta > 0$，存在一个公平分配实例 $(N, M, (v_i)_{i \in [n]}, (b_i)_{i \in [n]})$，其估值为加性，且其中有一位代理人 $a_i \in N$ 满足*

$$\frac{\mathsf{APS}_i}{\mathsf{WMMS}_i} < \delta.$$

证明。 我们通过构造如下公平分配实例（N，M，$(v_i)_{i \in [n]}$，$(b_i)_{i \in [n]}$）来证明。共有 n 个参与者和 $m = n$ 件待分配的物品。每个参与者 $a_i \in N$ 都具有相同的可加估值

$$v_i(\{g_j\}) = \begin{cases} \varepsilon, & j \in [n-1], \\ 1 - (n-1)\varepsilon, & j = n, \end{cases}$$

其中， $\varepsilon > 0$ 是一个待确定的小值。参与者的份额为

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = \varepsilon, b_n = 1 - (n-1)\varepsilon.$$

显然，所有参与者的 WMMS 划分是：给前 $n-1$ 个参与者各分配一件 $\{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}\}$ 中的物品，并将物品 g_n 分配给 a_n。因此， a_n 的 WMMS 值为

$$\mathsf{WMMS}_n = 1 - (n-1)\varepsilon.$$

然而，对于 APS 值，考虑价格

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = 0, p_n = 1.$$

现在 a_n 买不起物品 g_n，因此

$$\mathsf{APS}_n \leq (n-1)\varepsilon.$$

对于任意 $\delta > 0$，取

$$\varepsilon < \frac{1}{n-1}\frac{\delta}{\delta+1},$$

那么，对于代理人 a_n,

$$\frac{\mathsf{APS}_n}{\mathsf{WMMS}_n} \leq \frac{(n-1)\varepsilon}{1-(n-1)\varepsilon} < \delta,$$

这就证明了该命题。 □

Farhadi 等人（2019年）证明，对于具有一般可加估值的参与者，存在 $\frac{1}{n}$-WMMS 分配；同时还给出了一个实例，在该实例中不存在优于 $\frac{1}{n}$-WMMS 近似的分配。接下来，我们证明，对于具有一般 XOS 估值的参与者，存在 $\frac{1}{n}$-WMMS 分配，从而推广了此前的结果。关于上界，我们证明，对于二元 XOS 估值，不存在优于 $\frac{1}{n}$-WMMS 的算法。然而，如果所有参与者都具有二元加性估值，则可以在多项式时间内找到精确 WMMS 分配。

4.1 计算 $\frac{1}{n}$-WMMS 分配

对于一个公平分配实例（N， M， $(v_i)^{i\in[n]}$， $(b_i)^{i\in[n]}$），不失一般性，设 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$。按照定义 3，将 a_i 的 WMMS 划分记为 S^i。容易发现

$$v_i(S^i_j) \geq \mathsf{WMMS}_i, \forall j \in [i], i \in [n].$$

因此，在 a_i 的 WMMS 划分中，至少有 i 个物品束满足 a_i。这一观察引出了算法 3。直观而言，在算法 3 中，我们采用轮流选择式过程，每位代理人在每一轮获得一个物品。于是，在第一轮中，在轮到 a_i 之前，只有 $(i-1)$ 个物品被取走。因此，每位代理人都可以在 $\{S^i_j, j \in [i]\}$ 中选择一个完整的物品束作为其第一轮的目标。总体而言，每位代理人都有一个满足其 WMMS 的物品束，并且在轮流选择式过程中，她是该物品束中物品的首位选择者。借助于使该物品束的 XOS 估值最大化的加性函数，每位代理人都能获得至少其 WMMS 的 $\frac{1}{n}$。

In沿用定义 3 的记号，下面我们给出算法 3 的具体描述 .

定理 3. 对于任意具有 *XOS* 估值的公平分配实例 $(N, M, (v_i)^{i\in[n]}, (b_i)^{i\in[n]})$，存在一个 $\frac{1}{n}$ *-WMMS* 分配。

证明。 算法 3 证明了存在 $\frac{1}{n}$-WMMS 分配。首先，我们声称 t

$$v_i(S^i_j) \geq \mathsf{WMMS}_i, \forall j \in [i], i \in [n].$$

回顾 WMMS 划分的定义 3， a_i 的 WMMS 划分为

$$S^i = \arg\max_{S\in\Pi_n} \min_{j\in[n]} v_i(S^i_j)\frac{b_i}{b_j},$$

算法 3 1 $\frac{1}{n}$-一般 XOS 估值下 WMMS 的存在性

要求： 一个具有一般XOS估值的实例 $(N, M, (v_i)_{i\in[n]}, (b_i)_{i\in[n]})$，WMMS 值 $(\mathsf{WMMS}_i)_{i\in[n]}$ 以及 WMMS 划分 $(S^i)_{i\in[n]}$。

确保： 一个 $\frac{1}{n}$-WMMS 分配 $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$。

1: 重新命名参与者，使得 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$。
2: 初始化 n 空物品束 $(A_i \leftarrow \varnothing)_{i\in[n]}$。
3: 设置 $r \leftarrow 1$。 ▷ 轮次计数器。
4: **当** $N \neq \varnothing$ **时执行**
5: **对于** $i \leftarrow 1, 2, \ldots, n$ **do**
6: **若** $r = 1$ **则**
7: 从 (S_j^i) 中选择一个物品束 $B^i{}_{j\in[i]}$，其中 $g_1, g_2, \ldots, g_{i-1} \notin B^i$。 ▷ 该物品束仍然完整。
8: 假设对于 $S \subseteq M$，$v_i(S) = \max_{t\in L} l_t(S)$，其中 $(l_t)_{t\in L}$ 是加性函数。令 $t_0 \leftarrow$ 最大自变量 $_{t\in L}\, l_t(B^i)$ 和 $l^i \leftarrow l_{t_0}$。
9: 令 $g_i \leftarrow$ 最大自变量 $_{e\in B^i}\, l^i(e)$。
10: **如果** $a_i \in N$ **那么**
11: **如果** $B^i \neq \varnothing$ **那么** ▷轮流选择式过程
12: 令 $g \leftarrow$ 最大自变量 $_{e\in B^i}\, l^i(e)$。
13: 设置 $A_i \leftarrow A_i \cup \{g\}$。
14: 若已选中 B^j，则为 $j \in [n]$ 设置 $B^j \leftarrow B^j \setminus \{g\}$。
15: 设置 $M \leftarrow M \setminus \{g\}$。
16: **else**
17: 设置 $N \leftarrow N \setminus \{a_i\}$。 ▷ 代理人 a_i 完成。
18: 设定 $r \leftarrow r + 1$。
19: **如果** $M \neq \varnothing$ **则**
20: 任意分配剩余物品。
返回 $A = (A_1、A_2、\ldots\ldots、A_n)$。

而 S_j^i 是 a_i 想分配给 a_j的物品束。根据 WMMS 的定义 2,

$$v_i(S_j^i)\frac{b_i}{b_j} \geq \mathsf{WMMS}_i, \forall j \in [n].$$

假设 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$，则对于 $j \in [i]$，我们有 $v_i(S_j^i) \geq \mathsf{WMMS}_i$。

这意味着，在第 7 行，每位参与者 a_i 都从物品束 B^i 开始，其中 $v_i(B^i) \geq \mathsf{WMMS}_i$。由于每位参与者在每轮最多只能获得一件物品，在 a_i 的第一轮之前，先前的参与者总共只拿走了 $(i-1)$ 件物品。因此，物品束 $(S_j^i)_{j\in[i]}$ 对于 a_i 能够保证 B^i存在。

关于近似比，代理人 a_i 是第一个从物品束 B^i中取物品的人，并且她总会像第 8 行那样，根据可加函数 l^i 选择价值最高的物品。令 $l^i|_{B^i}$ 为一个可加函数，其中

$$l^i|_{B^i}(e) = \begin{cases} l^i(e), & e \in B^i, \\ 0, & e \notin B^i. \end{cases}$$

假设 a_i 在第 r轮收到某个物品 g^r，那么根据第 12 行的选择，我们有 $l^i|_{B^i}(g^r) \geq l^i|_{B^i}(e^r)$，对所有在第 r 轮至算法 a_i的第 $(r+1)$ 轮之间，任何其他代理人可能获得的物品 e^r 均成立。由于在第一轮中，直到 a_i 行动之前，没有代理人会从 B^i 中取走任何物品，并且参与者总数为 n，因此这一过程表明

$$l^i(A_i) = l^i|_{B^i}(A_i) \geq \frac{1}{n} l^i|_{B^i}(B^i) = \frac{1}{n} l^i(B^i).$$

根据 XOS 函数的定义，$v_i(S) \geq l^i(S)\ \forall S \subseteq M$。综上，我们有

$$v_i(A_i) \geq l^i(A_i) \geq \frac{1}{n} l^i(B^i) = \frac{1}{n} v_i(B^i) \geq \frac{1}{n} \mathsf{WMMS}_i.$$

因此，分配 A 是该实例的 $\frac{1}{n}$-WMMS 分配。 □

4.2 上界

这个紧确示例利用了这样一个事实：应得份额最大的代理人可能只有一个物品束满足其 WMMS。

定理 4. 对于任意 $n \geq 2$，都存在一个由 n 参与者组成、具有二元 *XOS* 估值的公平分配实例，其中不存在优于 $\frac{1}{n}$ -*WMMS* 的分配。

证明。令 n 为参与者数量，我们构造一个公平分配实例，使得不存在优于 $\frac{1}{n}$-WMMS 的分配。考虑如下实例（$N, M,$ $(v_i)_{i\in[n]}, (b_i)_{i\in[n]}$）。这里设定 $m = 2n-1$ 和 $M = \{g_1, g_2, \ldots, g_{2n-1}\}$。对于任意 $S \subseteq M$，参与者的价值函数为

$$\begin{aligned} v_1(S) =& v_2(S) = \cdots = v_{n-1}(S) \\ =& \max\{|S \cap \{g_1\}|, |S \cap \{g_2\}|, \ldots, |S \cap \{g_n\}|\}, \\ v_n(S) =& \max\{|S \cap \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}|, \\ & |S \cap \{g_{n+1}\}|, |S \cap \{g_{n+2}\}|, \ldots, |S \cap \{g_{2n-1}\}|\}. \end{aligned}$$

参与者的应得份额为

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = \frac{1}{2n-1}, b_n = \frac{n}{2n-1}.$$

很容易看出，这些估值是二元 XOS。接下来我们计算 n 参与者的 WMMS 值。尽管应得份额不均衡，对于 $(a_i)_{i\in[n-1]}$，唯一合理的分配方式是给每位 n 参与者在 $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ 中分配一个物品，并任意分配剩余物品。否则，至少有一位参与者会收到价值为零的物品束，这会使其在 WMMS 定义中的最小价值为 0。根据定义 2,

$$\mathsf{WMMS}_1 = \mathsf{WMMS}_2 = \cdots = \mathsf{WMMS}_{n-1} = \frac{1}{n}.$$

对于 a_n，由于她的应得份额是其他参与者的 n 倍，根据她的价值函数，对她有利的分配是自己获得 $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$，并给每位其他参与者一个属于 $\{g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots, g_{2n-1}\}$ 的物品。因此，

$$\mathsf{WMMS}_n = n.$$

关于分配，为确保每位参与者获得的价值大于 0，前 $n-1$ 位参与者必须各自至少获得 $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ 中的一个物品。不失一般性，我们将物品 $\{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}\}$ 分配给前 $n-1$ 位参与者，这样参与者 n 就只能获得价值为 1 的物品束 $S \subseteq \{g_n, g_{n+1}, \ldots, g_{2n-1}\}$。总而言之，对于 $(a_i)_{i\in[n-1]}$ 中的某位参与者，分配的 WMMS 为 0；或者对于 a_n，分配至多为 $\frac{1}{n}$-WMMS。由此完成证明。 □

4.3 二元可加估值

与一般可加估值（Farhadi 等人，2019）和二元 XOS 估值的 $\frac{1}{n}$ -WMMS 界不同，我们提出了一种多项式时间算法，可为具有二元加性估值的参与者输出精确WMMS分配。对于具有二元加性估值的公平分配实例 $(N, M, (v_i)_{i\in[n]}, (b_i)_{i\in[n]})$，令

$$D^i = \{g \in M | v_i(g) = 1\},$$

那么，参与者 a_i 的估值为 $v_i(S) = |S \cap D^i|, \forall S \subseteq M$。

我们首先介绍算法4，它可在多项式时间内计算任意参与者的 WMMS 划分，从而得到其 WMMS 值。

引理3。对于具有二元加性估值的任意公平分配实例 $(N, M, (v_i)_{i\in[n]}, (b_i)_{i\in[n]})$，算法*4*可在多项式时间内返回代理人 a_i 的 *WMMS* 划分。

算法4：二元加性估值的 WMMS 划分要求：一个具有二元加性估值的实例（$N, M, (v_i)_{i\in[n]}, (b_i)_{i\in[n]}$）以及一个代理人 $a_i \in N$。保证：代理人 a_i的 WMMS 划分 $S^i = (S^i_j)_{j\in[n]}$。1：初始化 n 个空物品束$(S^i_j \leftarrow \varnothing)_{j\in[n]}$。2：令 $D^i \leftarrow \{g \in M | v_i(g) = 1\}$。3：对于 $g \in D^i$，执行 4：设置 $j_{\min} \leftarrow \arg\min_{j\in[n]} \frac{|S^i_j|}{b_j}$，平局时任意选择。5：设置 $S^i_{j_{\min}} \leftarrow S^i_{j_{\min}} \cup \{g\}$。6：将 $M \setminus D_i$ 中的物品任意分配。7：返回 $S^i = (S^i_1, S^i_2, \ldots, S^i_n)$。

证明。 在for循环的第 r步之后，记我们分配的 n 个物品束为 $S^{i,\,r} = (S^{i,\,r}_j)_{j\in[n]}$，那么我们已分配的物品集合为 $M^{i,\,r} = \cup_{j\in[n]} S^{i,\,r}_j$。

令 $L^{i,\,r}$ 表示这样一个物品束：该物品束对代理人 a_i的价值除以其索引对应的应得份额 b_j 后，所得比值最小。也就是说

$$L^{i,r} = \min_{j\in[n]} \frac{|S^{i,r}_j|}{b_j}.$$

我们声称，对所有for循环索引 r， $L^{i,\,r}$ 都满足

$$\frac{|S^{i,r}_j| - 1}{b_j} \le L^{i,r} \le \frac{|S^{i,r}_j|}{b_j}, \forall j \in [n]. \tag{6}$$

根据 $L^{i,\,r}$的定义，不等式6的右侧显然成立。我们将用反证法证明不等式6的左侧。假设存在一个物品束 $S^{i,\,r}_k$ 满足 $\frac{|S^{i,\,r}_k|-1}{b_k} > L^{i,\,r}$，且物品束 $S^{i,\,r}_k$ 中的最后一个物品是在第 r'次for循环中分配给它的。经过第 r'轮后，有

$$\frac{|S^{i,r'}_k|}{b_k} = \frac{|S^{i,r}_k| - 1}{b_k} > L^{i,r} \ge L^{i,r'}.$$

最后一个不等式成立，因为根据算法4，每个物品束中的物品数量不会减少，因此 $L^{i,\,r}$ 的价值关于 r单调不减。由于 $\frac{|S^{i,\,r'}_k|}{b_k}$ 严格大于 $L^{i,\,r'}$，根据算法4，这一轮中该物品不会被分配给 $S^{i,\,r'}_k$，这与我们的假设矛盾。由此我们证明了不等式6的左侧。

接下来，我们将证明，对于任意 for循环索引 $r \in [|D^i|]$，物品束集合 $S^{i,\,r}$ 是已分配物品集合 $M^{i,\,r}$ 关于代理人 a_i 的 WMMS 划分。因此，根据 WMMS 的定义，我们有

$$\mathsf{WMMS}_i(M^{i,r}) = L^{i,r} b_i.$$

我们还将用反证法证明这一点。假设划分 $S^{i,\,r}$ 不是物品集合 $M^{i,\,r}$的 WMMS 划分。设一个 WMMS 划分为 $T^{i,\,r} = (T^{i,\,r}_j)_{j\in[n]}$。因此，根据 WMMS 划分的定义，存在

$$\min_{j\in[n]} \frac{|T^{i,r}_j|}{b_j} > L^{i,r}.$$

由于 $T^{i,\,r}$ 不等于 $S^{i,\,r}$，因此必定存在一个物品束索引 k，使得

$$|T^{i,r}_k| \le |S^{i,r}_k| - 1.$$

根据不等式6，这意味着

$$\frac{|T^{i,r}_k|}{b_k} \le \frac{|S^{i,r}_k| - 1}{b_k} \le L^{i,r},$$

这会导致矛盾。

算法4正确性的证明至此完成。

对于算法4的时间复杂度，我们需要遍历所有 m物品，每次迭代都需要在 n 值中进行一次二分搜索。总体而言，时间复杂度为 $O(m\log\ n)$。 □

不难观察到，计算 WMMS 划分可作为每个代理人的“最坏”情况分配。也就是说，如果我们让每个代理人按照算法4中的规则，以对自己有利的方式选择物品，那么从某个代理人的角度来看，她可能会对其他参与者拿走的某些物品无差别。这一观察引出了算法5。

算法5 二元加性估值下的WMMS分配要求：一个具有二元加性估值的实例（N、M、$(v_i)_{i\in[n]}$、$(b_i)_{i\in[n]}$）。确保：一个 WMMS 划分 $A=(A_1、A_2、...、A_n)$。1：初始化 n 空物品束 $(A_i\leftarrow\varnothing)_{i\in[n]}$。2：令 $D^i\leftarrow\{g\in M|v_i(g)=1\}$、$\forall i\in[n]$。3：当 $N\neq\varnothing$ 时4：设置 $i_{\min}\leftarrow\arg\min_{i\in[n]}\frac{|A_i|}{b_i}$。5：如果 $D^{i_{\min}}\neq\varnothing$，则6：任意选择一个物品$g\in D^{i_{\min}}$ 并设置 $A_i\leftarrow A_i\cup\{g\}$。7：设置 $D^i\leftarrow D^i\setminus\{g\}$、$\forall i\in[n]$。8：设置 $M\leftarrow M\setminus\{g\}$。9：否则10：$N\leftarrow N\setminus\{a_{i_{\min}}\}$。11：任意分配剩余物品 M。12：返回 $S^i=(S_1^i、S_2^i、...、S_n^i)$。

定理 5. 对于任意具有二元加性估值的公平分配实例$(N, M,(v_i)^{i\in[n]}, (b_i)^{i\in[n]})$，算法*5*均可在多项式时间内返回一个 *WMMS* 分配。

证明。 对于任意代理人 a_i，我们有 $v_i(A_i)\geq \text{WMMS}_i$。这是因为，如果每个人在每次 while 循环中都从集合 D_i 中取走物品 g，那么算法5所做的工作与算法4相同。在这种情况下，引理3已证明 $v_i(A_i)\geq \text{WMMS}_i$。否则，如果某个代理人获得的物品不属于 D_i，则 D_i 中的剩余物品将会增加，物品数量也会同时增加。我们仍有 $|A_i|=v_i(A_i)\geq \text{WMMS}_i$。算法5的时间复杂度也是 $O(m\log\ n)$。 □

5 结论与讨论

本文证明了在 APS 和 WMMS 公平准则下，针对具有二元 XOS 估值的非对称公平分配问题，可以达到紧确的近似保证。具体而言，我们设计了一种多项式时间算法，可计算$\frac{1}{2}$-近似 APS 分配，其近似比达到了上界。该结果还意味着，当参与者拥有平等份额时，存在$\frac{1}{2}$-近似 MMS 分配。当参与者的份额不同时，我们证明，即使参与者具有可加估值，APS 也可能任意小于 WMMS。随后，我们设计了一种算法，保证得到 $\frac{1}{n}$-WMMS 分配，并证明无法保证优于 $\frac{1}{n}$ 的近似比。即使对于一般 XOS 估值，该近似比也成立。此外，我们证明，对于二元加性估值，可以实现精确 WMMS 分配；这一结果凸显了在二元 XOS 估值下获得 $\frac{1}{n}$-WMMS 保证并非易事。未来还有几个值得研究的方向。首先，对于具有二元边际值的次可加估值，能否保证常数近似仍是未知的。其次，对于具有二元子模（拟阵秩）估值的非对称代理人，在 APS/WMMS 问题上，虽然我们的二元 XOS 结果已经适用，但能否在对称代理人情形之外获得严格更好的近似保证仍有待研究。第三，本文仅关注了物品分配。研究任务分配这一较小问题也很有意思。

致谢

我们感谢 Yiwei Gao 和 Ankang Sun 提供的有益讨论。

参考文献

Hannaneh Akrami 和 Jugal Garg。2024年。突破近似最大最小份额的3/4障碍。载于*2024*年*ACM-SIAM*离散算法年会论文集。SIAM，74–91。Hannaneh Akrami、Jugal Garg、Eklavya Sharma 和 Setareh Taki。2023a。MMS近似的简化与改进。*arXiv*预印本 *arXiv:2303.16788*（2023年）。Hannaneh Akrami、Kurt Mehlhorn、Masoud Seddighin 和 Golnoosh Shahkarami。2023b。分数次可加估值的随机化与确定性最大最小份额近似。神经信息处理系统进展36（2023年），58821–58832。

Haris Aziz、Hau Chan 和 Bo Li。2019年。面向不对称参与者的不可分家务任务最大最小份额公平分配。载于第*18*届国际自主代理人与多智能体系统会议论文集。1787–1789。

Haris Aziz、Gerhard Rauchecker、Guido Schryen 和 Toby Walsh。2017年。不可分家务任务的最大最小份额公平分配算法。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第31卷。

Moshe Babaioff、Tomer Ezra 和 Uriel Feige。2024年。具有任意应得份额的参与者的公平份额分配。运筹学数学49，4（2024年），2180–2211。

Siddharth Barman 和 Sanath Kumar Krishnamurthy。2020年。最大最小公平分配的近似算法。*ACM*经济学与计算汇刊8，1（2020年），1–28。

Siddharth Barman 和 Paritosh Verma。2021年。二元 XOS 和二元次可加估值下纳什社会福利的近似。载于国际网络与互联网经济学会议。施普林格，373–390。

Eric Budish. 2011. 组合分配问题：基于等额收入的近似竞争均衡。政治经济学杂志 119, 6 (2011), 1061–1103。

Alireza Farhadi、Mohammad Ghodsi、Mohammad Taghi Hajiaghayi、Sebastien Lahaie、David Pennock、Ma- soud Seddighin、Saeed Seddighin 和 Hadi Yami。2019年。面向非对称代理人的不可分物品公平分配。人工智能研究杂志 64 (2019年), 1–20。

Uriel Feige. 2025年. 从多重分配到分配：次可加估值。*arXiv* 预印本 *arXiv:2506.21493*（2025年）。Uriel Feige 和 Vadim Grinberg. 2025年. 次可加估值与 XOS 估值下的公平分配。载于第*26*届*ACM*经济学与计算会议论文集。160–185。Uriel Feige 和 Shengyu Huang. 2025年. 次可加估值下的集中性与极大极小公平分配。*arXiv* 预印本 *arXiv:2502.13541*（2025年）。Uriel Feige 和Xin Huang.2023年. 论任务的选取序列。载于第*24*届*ACM*经济学与计算会议论文集。626–655。Uriel Feige、Ariel Sapir 和 Laliv Tauber. 2021年. MMS公平分配的紧致反例。载于国际网络与互联网经济学会议。施普林格，355–372。Jugal Garg 和 Setareh Taki. 2020年. 一种改进的极大极小份额近似算法。载于第*21*届*ACM*经济学与计算会议论文集。379–380。

Mohammad Ghodsi、MohammadTaghi HajiAghayi、Masoud Seddighin、Saeed Seddighin 和 Hadi Yami. 2018年. 不可分物品的公平分配：改进与推广。载于第*19*届*ACM*经济学与计算会议论文集。539–556。Ehsan Heidari、Alireza Kaviani、Masoud Seddighin 和 AmirMohammad Shahrezaei. 2025年. 加性估值下改进的极大极小份额保证。*arXiv* 预印本 *arXiv:2510.10423*（2025年）。Xin Huang 和 Pinyan Lu. 2021年. 用于近似计算任务最大最小份额分配的算法框架。载于第*22*届*ACM*经济学与计算会议论文集。ACM，630–631。Xin Huang 和 Erel Segal-Halevi. 2023年. 从任务分配到作业调度的归约。载于第*24*届*ACM*经济学与计算会议论文集。ACM，908。Halvard Hummel. 2025年. 遗传集合系统中的最大最小份额。*ACM*经济学与计算汇刊13, 3（2025年），1–33。Pooja Kulkarni、Rucha Kulkarni 和 Ruta Mehta. 2024年. 二元边际值下次模与 XOS 估值的 APS 近似。载于第*23*届国际自主智能体与多智能体系统会议，Mehdi Dastani、Jaime Sim˜ao Sichman、Natasha Alechina 和 Virginia Dignum（编）。国际自主智能体与多智能体系统基金会 / ACM，1057–1065。David Kurokawa、Ariel D Procaccia 和 Junxing Wang. 2018年. 公平至上：保证近似最大最小份额。*ACM*期刊65, 2（2018年），1–27。Bo Li、Yingkai Li 和 Xiaowei Wu. 2022年. 不可分任务的近似（加权）比例分配。载于*ACM*网络会议论文集。122–131。Bo Li、Fangxiao Wang 和 Yu Zhou. 2023年. 不可分任务的公平分配：超越可加性成本。载于神经信息处理系统会议与研讨会。Zhentao Li 和 Adrian Vetta. 2021年. 遗传集合系统的公平分割。*ACM*经济学与计算汇刊9, 2（2021年），1–19。Ariel D Procaccia 和 Junxing Wang. 2014年. 公平至上：保证近似最大最小份额。载于第*15*届*ACM*经济学与计算会议。675–692。Masoud Seddighin 和 Saeed Seddighin. 2024年. 次可加与分数次可加公平分配问题的改进极大极小保证。《人工智能》327（2024年），104049。Masoud Seddighin 和 Saeed Seddighin. 2025年. 突破次可加最大最小份额问题的对数障碍。载于第*26*届*ACM*经济学与计算会议论文集。764–782。Hugo Steinhaus. 1949年. 论实用分割。《计量经济学》：计量经济学会期刊（1949年），315–319。Gilad Ben Uziahu 和 Uriel Feige. 2023年. 论将不可分物品公平分配给次模参与者。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.12444*（2023年）。Vignesh Viswanathan 和 Yair Zick. 2023年. 拟阵秩估值下公平分配的通用框架。载于第*24*届*ACM*经济学与计算会议论文集。1129–1152。Fangxiao Wang、Bo Li 和 Pinyan Lu. 2024年. 不可分任务加权MMS公平性的改进近似。载于第*33*届国际人工智能联合会议。3014–3022。