arXiv:2601.09343v1 [cs.CC] 14 Jan 2026

借助对称性与同态多项式研究代数复杂性的下界

PrateekDwivedi Benedikt Pago 哥本哈根信息技术大学 剑桥大学 Tim Seppelt 哥本哈根信息技术大学

2026年1月15日

摘要

Valiant在1979年提出的猜想断言，电路复杂性类VP与VNP彼此不同，这意味着永久式无法由多项式规模代数电路计算。与复杂性理论的许多分支一样，要无条件地分离这两个复杂性类似乎难以实现。与此形成鲜明对比的是，Dawar和Wilsenach（2020年）已经证明了Valiant猜想的对称类比：永久式无法由多项式规模的对称代数电路计算，而行列式可以。对称代数电路既是一种强大的计算模型，也便于证明无条件下界。

本文通过引入复杂性类VP、VBP和VF的对称类比，分别称为symVP、symVBP和symVF，发展了对称代数复杂性理论。这些类分别由可由对称代数电路、斜电路和公式计算，且轨道大小为多项式规模的多项式构成。在定义这些类之后，我们无条件地证明

$$\mathsf{symVF} \subsetneq \mathsf{symVBP} \subsetneq \mathsf{symVP}.$$

为此，我们将 symVF 和 symVBP 中的多项式分别刻画为可写成有界树深度和有界路径宽度模式的同态多项式线性组合的多项式。此结果扩展了 Dawar、Pago 和 Seppelt（2025）对 symVP 的刻画。我们借助模型论技术和同态不可区分性理论证明了这一分离结果。

尽管 symVBP 和 symVP 存在强下界，我们仍能证明这些复杂性类相当强大：它们分别包含 VBP 完全和 VP-完全的同态多项式。我们大幅推广了以往的结果，给出了关于同态多项式及其线性组合成为 VBP 完全、VP-完全或 VNP 完全的通用图论判据。这些条件下的下界大大拓展了已知的、对 VNP、VP 或 VBP 完全的自然多项式的范围。在假设 VFPT $\neq$VW[1], 的条件下，我们精确刻画了属于 VP 的同态多项式：其模式具有有界树宽；由此解决了 Saurabh 于2016年提出的一个开放问题。

目录

1引言 3

2 预备知识 6

3 主要贡献 8
3.1 关于symVF 和symVBP 的同态多项式刻画 . . . . . 83.2 对称类的无条件分离 .93.3 同态多项式的经典代数下界 .12

4 展望 14

5 扩展预备知识 15
5.1 代数复杂性类 .155.2 参数化代数复杂性类VW[1] 和 VFPT .165.3 矩阵对称多项式和电路 .175.4 树宽、路径宽度和树深度 .20

6 对称复杂性类的刻画 20
6.1 同态多项式映射上的运算.22 6.1.1 不交并.22 6.1.2 粘合积和逐点乘法.23 6.1.3 受限和.24 6.1.4 受限乘积.25 6.2 矩阵对称公式 (symVF).26 6.2.1 有界树深度同态多项式属于 symVF . . . . 26 6.2.2 symVF 计算有界树深度同态多项式 . . . . . 28 6.3 矩阵对称斜电路 (symVBP).32 6.3.1 symVBP 计算有界路径宽同态多项式 33

7 对称类的无条件分离 35

8 同态多项式及其线性组合的经典代数复杂性 36
8.1 多彩同态多项式 .388.1.1 多彩同态多项式的困难族 .388.1.2 沿子式投影多彩同态多项式. . . . . 408.2 无色同态多项式 .428.3 同态多项式的线性组合 .478.4 来自参数化 Valiant 类的困难性 .50

9 致谢 53

1 引言

代数复杂度理论旨在根据多项式族最小代数电路表示的规模对其进行分类。一个代数电路是一个有向无环图，其内部顶点表示加法门和乘法门，输入门则标记为变量或域常数。该电路通过内部门将计算从输入门传递到输出门，从而计算出一个多项式。电路的规模定义为其中包含的门和连线总数。两个典型的多项式例子是行列式 $\det_n = \sum_{\pi\in\mathbf{Sym}_n}(-1)^{\mathrm{sgn}(\pi)}\prod_{i\in[n]} x^{i\pi(i)}$，它可以由多项式规模的电路计算；另一个是永久式 $\mathrm{perm}_n = \sum_{\pi\in\mathbf{Sym}_n}\prod_{i\in[n]}x^{i\pi(i)}$，目前已知计算它的电路只有指数规模。Valiant猜想 [Val79], 是该领域的中心开放问题，它断言(perm_n) 无法由多项式规模的电路计算——等价地说，VP $\neq$VNP。这里，VP 表示多项式族的类$(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中每个p_n 的次数都是多项式有界的，且可由规模关于n为多项式的代数电路族计算。VP 包含于 VNP；VNP 由所有可归约到永久式的多项式族组成。

除了 VP 和 VNP之外，复杂性类 VF 和 VBP也得到了广泛研究；它们在结构上限制更严格，并且普遍被认为规模更小。类 VF 由所有可由多项式规模的 公式计算的多项式构成，也就是说，这些多项式由树形电路计算，而树形电路无法复用此前的子计算。类VBP 包含由多项式规模的斜电路计算的多项式。若每个乘法门至多有一个子节点不是输入门，则称该电路为 斜电路 。这一模型等价于代数分支程序 [Mah13]。

由此得到的复杂性层次为 VF $\subseteq$ VBP $\subseteq$ VP $\subseteq$ VNP。尽管人们相信所有包含关系都是严格的，但目前似乎还无法实现任何无条件的分离。面对这一僵局，许多研究致力于证明受限电路模型（例如单调或多线性电路和公式）的下界 [KS14；LST25]。这些结果的一个缺点是——例如，计算永久式的多线性公式需要指数级下界 [Raz04]——它们同样适用于行列式，尽管后者属于VBP。

据我们所知，唯一一种能够证明永久式很难计算、而行列式仍然易于计算的受限电路模型，是对称电路 [DW20]。我们关注的正是这种对称性限制。我们引入VF、VBP和VP 的对称类比，并建立系统的对称代数复杂度理论。最值得注意的是，我们无条件地分离了VF、VBP 和VP的对称版本。

有趣的是，我们的对称电路模型只对代数计算的一个方面施加限制，同时在其他方面放宽了限制。因此，下面定义的对称类 symVF、symVBP、symVP，从先验上说并不是 VF、VBP 和 VP 的子类，而是与它们正交的类。

它们受到限制的地方，正如前面所说，是变量对称性：许多代数复杂性中研究的多项式在变量的某些置换下具有对称性。因此，自然可以要求计算这些多项式的电路也具有这些对称性。具体来说，考虑变量$\mathcal{X}_n$ 中的永久式 $\mathrm{perm}_n \in \mathbb{K}[\mathcal{X}_n] := \{x_{i,j} \mid i, j \in [n]\}$。群 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$ 通过将变量 $x_{i,j}$ 映射为 $x_{\pi(i),\sigma(j)}$ （其中 $(\pi,\sigma) \in \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$）作用于 $\mathbb{K}[\mathcal{X}_n]$。不难看出，$\mathrm{perm}_n$ 在这一作用下是不变的。若多项式[1] $p \in \mathbb{K}[\mathcal{X}_n]$ 在 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$ [DW22]的作用下保持不变，我们称其为矩阵对称多项式。

用于计算矩阵对称多项式的矩阵对称电路 是指这样一种电路：输入变量上的$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_n$ 作用可以扩展为电路的一个自同构，也就是说，

[1]在全文中，我们固定一个特征为 z 的域 $\mathbb{K}$ ero.

一个保持连线与非连线不变的门置换。Dawar 和 Wilsenach 首先研究了这一模型 [DW20], , 他们证明永久式无法由次指数大小的矩阵对称电路计算，而行列式则可由多项式大小的对称[2] 电路计算。准确地说，他们建立的是轨道大小的下界，而非电路总规模的下界。矩阵对称电路的轨道大小 是指在$\mathrm{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_n$作用下能够彼此映射的最大门集合的大小，并且它是总规模的一个下界。因此，即便允许对称电路具有任意大小，它们仍无法计算永久式，除非其中包含指数多个子电路彼此对称的门。这促使我们定义复杂性类symVP、symVBP和symVF。对称电路和轨道大小的精确定义见第2节。

定义1.1 （对称代数复杂性类）。 设 $p_n \in \mathbb{K}[\mathcal{X}_n]$ 是一个矩阵对称多项式族。

1. (p_n) ∈属于 symVP，当且仅当 p_n 具有轨道大小为多项式级的矩阵对称电路。2. (p_n) ∈ 属于 symVBP，当且仅当 p_n 具有轨道大小为多项式级的矩阵对称斜电 e.
3. (p_n) ∈属于 symVF，当且仅当 p_n 具有轨道大小为多项式级的矩阵对称公式。

我们证明，这些对称复杂性类相当强大：symVBP 和 symVP分别包含 VBP- 和 VP-完备多项式。尽管如此，它们的限制仍足以使其具有研究意义：Dawar 和 Wilsenach [DW20] 证明，永久式多项式不属于symVP。

我们强调，symVP、symVBP 和 symVF 通常与 VP、VBP 和 VF 不可比较，原因有三：我们的对称类只包含矩阵对称多项式；它们不对多项式施加次数上界；并且对称电路的复杂度以轨道大小而非总规模衡量。我们通过证明对称类的自然刻画来说明这些设计选择，最终得到以下无条件分离定理。**定理 A.s**

$$\text{ymVF} \subsetneq \text{symVBP} \subsetneq \text{symVP}.$$

为了得到定理 A，我们通过所谓的同态多项式精确刻画 symVF 和 symVBP。这一论证基于以下基本观察：矩阵对称多项式$p \in \mathbb{K}[\mathcal{X}_n]$（例如永久式）恰好是二分多重图的同态多项式的有限线性组合 [DPS25，引理 3。1]。[3]对于一个二分多重图F，其二分划分为$V(F) = A \uplus B$，给定一个数 $n \in \mathbb{N}$，F 的n 阶同态多项式为

$$\hom_{F,n} := \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \prod_{\substack{ab\in E(F)\\ a\in A, b\in B}} x_{h(a),h(b)}\,. \tag{1}$$

若将 $\hom_{F,n}$ 中的变量赋值为某个(n,n)顶点二分图G的双邻接矩阵的 $\{0,1\}$项，则 $\hom_{F,n}$ 的取值就是从F 到G的同态数量。因此，我们称F 为该同态多项式的模式图。

Dawar、Pago 和 Seppelt [DPS25，定理 1.1] 指出，一族矩阵对称多项式(p_n) 属于 symVP，当且仅当(p_n) 可以表示为以下多项式的线性组合：

[2]严格来说，行列式不在本文讨论范围之内，因为它不是矩阵对称的，而是方阵对称的，即在 $\mathbf{Sym}_n$ 对行和列同时作用、由下式给出时保持不变 $\pi(x_{i,j}) = x_{\pi(i),\pi(j)}$ 其中 $\pi \in \mathbf{Sym}_n$。不过，我们的框架可以推广到方阵对称性，参见 [DW22]。
[3]同样，方阵对称多项式（例如行列式）恰好是那些可以表示为适当定义的有向带环多重图的同态多项式的线性组合的多项式。为了避免处理环和有向边，我们将聚焦于矩阵对称性。

有界树宽模式图的同态多项式。通过大幅细化他们的论证，我们刻画了此前未曾研究的 symVF 和 symVBP。

定理 B （刻画 symVF）。 一个矩阵对称多项式族（p_n） 属于symVF ， 当且仅当（p_n） 可以表示为有界树深度模式的同态多项式的线性组合。

虽然 树宽 tw（F） 衡量图 F 有多像一棵树，路径宽度 pw（F） 衡量 F 有多接近一条路径，参见 [Bod98； NO12]。反过来，树深度 td（F） 衡量图 F 有多像星形图 [NO06]。

定理 C （刻画 symVBP）。一个矩阵对称多项式族（p_n） 属于symVBP，当且仅当（p_n） 可以表示为有界路径宽度模式的同态多项式的线性组合。

定理 A 由定理 B 和 C 可通过调用有限模型理论中的重要结果[CFI92], 图结构理论 [ST93], 以及同态不可区分性理论[Rob22], 得到，参见 [Sep24a]。乍看之下，这种技术深度的必要性颇为反直觉，因为树宽、路径宽度和树深度构成图参数的严格层次结构——这一事实可能会误导人们得出这样的结论：定理 A 是定理 B 和 C的直接推论。然而，正如我们在第 3。2节中详细阐述的那样，非同构模式图的同态多项式不一定线性无关。具体而言，存在一些多项式，既可以表示为有界树宽模式的同态多项式的线性组合，也可以表示为无界树宽模式的同态多项式的线性组合。

这与 Curticapean、Dell 和 Marx [CDM17]开创的研究方向有着明显区别。该方向关注所谓图模体参数的固定参数可处理性，即同态计数的线性组合 $\sum_F \alpha_F \hom(F,\star)$。在这里，同一个图参数 $\sum_F \alpha_F \hom(F,\star)$ 是在任意规模的图上求值的，而正是这一前提使得非同构模式的同态计数线性无关 [Lov67]。 [CDM17]的核心结果指出，参数 $\sum_F \alpha_F \hom(F,\star)$ 的固定参数可处理性，取决于其唯一系数 α_F 非零的那些模式 F 的树宽。基于这一基本观察，人们发展出了一套丰富而优美的理论 [RS20; Dör+21; RSW21; DMW24; CN25]；令人惊讶的是，这一观察在非一致的代数复杂性领域并不成立，参见例 3.1。

在本文的最后一部分，我们通过研究同态多项式的非对称代数复杂度来处理这一问题，从而也彻底脱离[DPS25] 对称性框架。对于这些多项式，我们证明了新颖且非常一般的下界，从而回答了 Saurabh [Sau16]提出的一个开放问题。结合我们对对称代数复杂性类的刻画，这些下界也揭示了对称类令人惊讶的强大能力。它们表明，symVP 和 symVBP 分别包含种类繁多的VP完全多项式和 VBP完全多项式。

在先前的研究中 [Dur+16; MS18; CLV19; Hru17; Sau16], ，同态多项式已被确定为 VBP、VP 和 VNP 的自然完全多项式的来源。然而，这些论文只研究了特定模式族 F_n 对应的同态多项式 $(\hom_{F_n},n)$， ×例如 n 网格或 n 叶完全二叉树。在单调电路复杂性的背景下，同态多项式也曾得到研究 [KPR23; Bha+25]，但这里采用了更严格的假设，即所有 F_n 都是同一个图 F。我们的定理 D 给出了关于模式族 F_n 何时具有 VBP、VP 或 VNP 完全同态多项式 $(\hom_{F_n},n)$ 的一般图论判据。这里，所谓多重图的 p-族 (F_n)，是指满足 $\|F_n\| := |V(F_n)| + |E(F_n)| \leq q(n)$ 的多重图，其中 q 是某个多项式，且对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。

定理 D.设 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个二分多重图的 p-族。设 $\varepsilon > 0$。

1. 如果对所有 $n \geq 2$，$tw(F_n) \geq n^{\varepsilon}$，那么 (hom_{F_n},n) 是 *VNP* 完全。*2.* 如果对所有 $n \geq 2$，$tw(F_n) \in O(1)$，且 $pw(F_n) \geq \varepsilon log(n)$，那么 (hom_{F_n},n) 是 *VP*-完全。*3.* 如果对所有 $n \geq 2$，$pw(F_n) \in O(1)$，且 $td(F_n) \geq \varepsilon log(n)$，那么 (hom_{F_n},n) 是 *VBP*-完全。

在所有情形下，对于任意特征为零的域，困难性都在常深度 c-归约下成立。

特别地，定理 C 和 D 以及 [DPS25] 表明，对称类 symVBP 和 symVP 分别包含 VBP 完全和 VP- 完全的多项式。基于 [CM14a; Cur24]，中的技术，定理 D 的证明通过构造一系列代数归约，从 [Dur+16; Hru17] 中的完全多项式出发，并运用近期的图结构结果[CC16; Gro+23; Hat+24]。在定理 3.7 中，我们将定理 D 推广到同态多项式的线性组合。

在 VP $\neq$ VNP 这一假设下，对于所有模式族 (F_n)，定理 D 并未确定 $(hom_{F_n},n) \in$ VP 是否成立。这是因为，正如 [Sau16, 命题 3.6 所论证的那样，诸如 $(hom^{K_{log(n)},log(n)},n)$ 这类用于统计来自完全二部图 $K_{log(n),log(n)}$（其顶点数为 $\Theta(\log n)$）的同态的模式族，不太可能是 VNP 完全的。2], 另见 [PY96] 和 [FG06, 第 4 节4]。要处理这类模式族，可能需要更强的复杂性理论假设：

定理 E。设 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个二分多重图的 p-族，且树宽 (F_n) 是非递减的。除非VFPT $=$ VW[1], ，否则$(同态_{F_n},n) \in$ 属于 VP当且仅当树宽$(F_n) \in$为 $O(1)$。

这里，复杂性类 VFPT 和 VW[1], 由 Bläser 和 Engels [BE19],引入，是对广为研究的参数化复杂性类 FPT 和 #W[1], 的代数类比，参见[FG06; Cyg+15]。假设 VFPT $\neq$VW[1], ，定理E 全面刻画了属于 VP 的同态多项式，从而解决了 Saurabh 提出的开放问题 [Sau16，第 88] 页：确定模式族(F_n) 中树宽为$o(n)$的同态多项式$(同态_{F_n},n)$ 的代数复杂性。

此外，定理 E 将复杂性理论假设 VFPT $\neq$ VW[1] 与对称和非对称代数电路计算同态多项式的能力坍缩联系起来，即对于所有二分多重图的 p-族 (F_n)，都有 $(hom_{F_n},n) \in$VP $\iff$ $(hom_{F_n},n) \in$ symVP，参见推论 3.6。换言之，从可导出的下界来看，假设 VFPT $\neq$VW[1] 与电路上的对称性假设之间似乎存在出人意料的关联。

2 预备知识

如上所述，考虑变量集 $\mathcal{X}_n$ 及其上此前描述的 $Sym_n \times Sym_n$ 作用。对于任意 $S \subseteq \mathcal{X}_n$，令 $Stab(S) := \{\pi \in Sym_n \times Sym_n \mid \pi(S) = S\} \leq Sym_n \times Sym_n$。逐点稳定子定义为 $Stab^{\bullet}(S) := \{\pi \in Sym_n \times Sym_n \mid \pi(x) = x$ 对每个 $x \in S\} \leq Sym_n \times Sym_n$ 均成立。

代数电路与公式。在变量集 $\mathcal{X}$ 和域 $\mathbb{K}$ 上的代数电路 C 是一个有向无环图（可能含有重边），其中每个顶点——称为门——都标记为 $\mathcal{X} \cup \mathbb{K} \cup \{+, \times\}$ 中的一个元素。我们用 $\lambda(g) \in \mathcal{X} \cup \mathbb{K} \cup \{+, \times\}$ 表示某个门的标签。由 $\mathcal{X} \cup \mathbb{K}$ 中元素标记的输入门没有入边。内部门标记为 $+$ 或 $\times$。该电路有唯一的输出门，且该门没有出边。电路通过在内部门执行加法和乘法运算，将输入门的值逐步传播，从而计算出 $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$ 中的一个多项式。边的方向遵循计算流程，即从某个门的输出指向使用该值的下一个门。

规模指电路C的大小，记作 $\|C\|$，等于门和连线的总数（按重数计）。我们始终要求输入门唯一：对于每个 $x \in \mathcal{X} \cup \mathbb{K}$，在 $\in V(C)$ 中，恰有一个输入门g 满足 $\lambda(g) = x$。

每当置换群 Γ 作用于变量 $\mathcal{X}$时，我们就可以定义电路 C 在 $\mathcal{X}$ 上是 Γ-对称的含义。令 Aut(C) $\leq$ Sym(V(C)) 表示保持非边、具有重数的边以及门类型不变的门置换群。形式上，$\sigma \in$ Sym(V(C)) 属于 Aut(C)，当且仅当对于每个内部门 g，$\lambda(\sigma(g)) = \lambda(g)$；并且对于任意一对门 (g, h)，$(\sigma(g), \sigma(h))$ 之间边的数量和方向与 (g, h) 之间的相同。

我们称 $\pi \in \Gamma$ 可扩展为自同构 的 C，如果存在一个 $\sigma \in \mathbf{Aut}(C)$ 使得$\lambda(\sigma(g)) = \pi(\lambda(g))$ 对每个输入门 g都成立。这里，$\pi(a) = a$ 对每个 $a \in \mathbb{K}$都成立。

定义 2.1（对称电路）。设 Γ 是一个作用于 $\mathcal{X}$上的群。代数电路 C 在 $\mathcal{X}$上是 Γ-对称的，当且仅当输入门上的每个 $\pi \in \Gamma$ $\mathcal{X}$ 都可扩展为 C 的一个自同构。

本文主要关注受限的电路模型，例如公式 和斜电路。一般来说，公式是没有重边且为树的电路。对于对称公式，我们只要求内部门构成树，因为我们总是将标记为相同变量或域元素的输入门视为同一个门。

定义 2.2（对称公式）。若对称电路C 不含重边，且C 中由内部门诱导的子图是一棵树，则称C 为对称公式。

定义 2.3（对称斜电路）。如果每个乘法门至多有一个子节点是内部门（或非输入门），则称代数电路为斜。对称斜电路是额外满足斜性要求的对称电路。

请注意，定义 2.1 并未要求存在唯一一个电路自同构 σ，使得 $\pi \in \Gamma$可以扩展为它。不过，为了在整个电路上定义良好的作用，通常希望这种 σ 具有唯一性。我们称一个 Γ-对称电路 C 是刚性的，如果 Aut(C) 中唯一固定所有输入门的电路自同构是恒等变换。这等价于说，每个 $\pi \in \Gamma$ 都能唯一扩展为 $\sigma \in$ Aut(C)。值得庆幸的是，我们总可以假设对称电路是刚性的，基本做法是移除电路中的所有冗余。下面的引理 2.4 通过最后两项断言推广了[AD17，引理 7] 以及 [DPS25，引理 4.3]

引理 2.4 (刚性化)。设 Γ 是作用于变量集 $\mathcal{X}$ 上的群，$\mathbb{K}$ 是一个域。设 C 是 $\mathcal{X} \cup \mathbb{K}$ 上的一个 Γ-对称电路。存在一个 $\mathcal{X} \cup \mathbb{K}$ 上的 Γ-对称刚性电路 C'，满足 $\|C'\| \leq \|C\|$，且计算与 C 相同的多项式。若 C 是对称公式，则 C' 是带重边的对称公式。若 C 是对称斜电路，则 C' 也是对称斜电路。

请注意，使用这个引理对对称公式进行刚性化，会得到一个带重边的公式，而这按照定义是不允许的；不过，这些公式只会在证明的中间步骤中出现，因此除非另有明确说明，公式都不带重边。

复杂度度量与支撑。设 C 是一个定义于变量$\mathcal{X}_n$ 和域 $\mathbb{K}$ 上的 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$-对称电路，定义见定义 2.1。在代数复杂性中，通常用其大小 ||C||来度量 C 的复杂度。然而，对于对称电路，我们还希望将对称群考虑在内。若 C 是刚性的，那么对于 C 中的门 g 以及 $(\pi_1, \pi_2) \in \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$，我们记 (π_1, π_2)(g) 为 C 中唯一一个将 (π_1, π_2) 扩展为自同构时，g 在该自同构下的像。C 的轨道大小定义为

$$\mathrm{maxOrb}(C) := \max_{g \in V(C)} \left|\{(\pi_1, \pi_2)(g) \mid (\pi_1, \pi_2) \in \mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_n\}\right|.$$

与以往研究一致，我们的结果依赖于门的支撑这一概念，参见 [AD17; Daw25]。由于 C 是 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$-对称的，在输出门处计算的多项式在该群作用下保持不变。然而，这种不变性未必适用于内部门：它们所计算的多项式通常只在 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$ 的某个子群下保持不变，即该门的稳定子。门 g 的支撑集恰好刻画了在此类置换下保持不变的输入变量。我们将 Stab(g) 的稳定子群的最小支撑记为 $\mathrm{sup}(g) \subseteq [n] \uplus [n] : = \{(\pi_1, \pi_2) \in \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n \mid (\pi_1, \pi_2)(g) = g\}$，也就是说，sup(g) 是满足 $\mathrm{Stab}^\bullet(S)$ 为 Stab(g) 的子群的最小集合 $S \subseteq [n] \uplus [n]$。已知[DPS25, 引理 4.1]，只要存在至少一个集合 $S \subseteq [n] \uplus [n]$，其与每个 $[n]$ 副本的交集大小都小于 n/2，且满足 $\mathrm{Stab}^\bullet(S) \leq \mathrm{Stab}(g)$，那么这个最小集合 S 确实是唯一的。$\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$-对称电路 C 的最大支撑大小定义为

$$\mathrm{maxSup}(C) := \max_{g \in V(C)} |\mathrm{sup}(g)|.$$

我们有以下关于轨道和支撑大小的关系。为直观地（尽管过度简化地）解释该引理，可以设想，门 g 的轨道本质上对应于 $\mathrm{sup}(g)$的轨道，其大小为$(\ n\ ^{|\mathrm{sup}(g)|})$。

引理 2.5 ([DPS25，引理 2.1 和 2.2])。对每个 $n \in \mathbb{N}$，设 C_n 是一个$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_n$-对称刚性电路。那么，当且仅当存在一个常数 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有$\mathrm{maxOrb}(C_n)$ 在 n 中多项式有界，当且仅当 $\mathrm{maxSup}(C_n) \leq k$。

3 主要贡献

3.1 通过同态多项式刻画symVF 和symVBP

我们概述定理 B 和定理C的证明。这两个定理分别将 symVF 和 symVBP 刻画为可表示为有界树深度同态多项式和路径宽度同态多项式线性组合的多项式类。我们先从 symVF 开始。

定理 B （刻画 symVF）。一个矩阵对称多项式族（p_n）属于symVF 当且仅当（p_n）可以表示为有界树深度模式所对应的同态多项式的线性组合。

较难的方向是证明，任何多项式轨道大小的对称公式都能计算有界树深度同态多项式的线性组合。Dawar、Pago 和 Seppelt [DPS25，定理 1。1] 证明了，每个多项式轨道大小的矩阵对称电路都能计算有界树宽同态多项式的线性组合。他们的证明对电路结构进行归纳，本质上表明该电路对应于线性组合中所有模式图的“同时树分解”。这一结果已蕴含，多项式轨道大小的对称 公式 的输出也必定属于有界树宽同态计数这一类。接下来还需证明，除了树宽之外，模式图的树深度 也有一个常数上界。DPS [DPS25] 的关键技术洞见是，门的支撑大小对应于模式图的树宽。并且，根据引理 2。5，如果电路的轨道大小是多项式的，那么其支撑大小必定是常数。

在这里，我们通过考虑树深度来进一步完善这一论证。证明分为两部分。首先，我们为对称电路引入支撑深度这一度量（定义 支撑深度 用于对称电路（定义 6。16）。支撑深度描述了沿着从叶节点到

根节点的任意路径，门的支撑发生变化的次数。也就是说，子门 h 的支撑中存在某个元素，不再属于其父门 g的支撑，即 $\sup(h) \setminus \sup(g) \neq \emptyset$。可以将其类比为树分解中的遗忘节点 [Bod98]。

我们在推论 6.18 中证明，轨道大小为$O(n^d)$ 的对称公式，其支撑深度至多为d。这是因为，只要某个门g处的支撑发生变化（按上述含义），门g 就至少有 $\Omega(n)$ 个彼此对称的子节点。在公式中，以这些子节点为根的子电路彼此不相交。因此，如果任意一条根到叶路径上这类门g 超过d 个，那么该公式的轨道大小至少为 $\Omega(n^{d+1})$。这说明，对于对称公式，有界轨道大小意味着有界支撑深度。

接下来，我们证明，考虑支撑深度后， [DPS25] 的技术核心实际上不仅给出了模式图树宽的上界，也给出了由该对称公式计算其同态多项式的模式图树深度的上界。事实证明，支撑深度对应于树分解的一种相应深度概念 [FSS24], ，而这一概念与模式图的树深度密切相关。

定理B 中较容易的方向需要证明：只要 F 是树深度为 d 的二分多重图，那么 $\hom_{F,n}$ 就可以表示为轨道大小至多为$O(n^d)$ 的矩阵对称公式。其思路是采用标准的动态规划方法，沿着 F 的深度为 d 的消去树，递归计算同态计数。F 的消去树 是一个树T，其顶点集与F 相同，并且F 中任意两个相邻顶点在T中都存在祖先—后代关系。 [KPR23, 定理 11] 给出了从这样的消去树构造 $\hom_{F,n}$ 公式的明确方法，我们注意到该公式是对称的。因此，任意有界树深度同态多项式的线性组合，都可以直接写成一个对各个同态多项式求和的对称公式。这就证明了定理B中较容易的方向。

类似的动态规划方法也适用于有界路径宽度的情形：只要F 是路径宽度为d 的二分多重图，那么 $\hom_{F,n}$ 就可以表示为轨道大小至多为$O(n^d)$ 的矩阵对称斜电路。这就证明了我们第二个主要结果中较容易的方向。

定理C （刻画symVBP）。当且仅当symVBP中的矩阵对称多项式族（p_n）可以表示为有界路径宽度模式的同态多项式的线性组合时，symVBP中的多项式族（p_n）成立。

如上所述，对于较难的方向，出发点是注意到，由于假设电路的轨道大小是多项式有界的，因此门的支撑集大小为某个常数k，这意味着模式图存在常数宽度的树分解。在斜电路这一特殊情形下，我们可以证明这些树分解可以转化为路径分解：直观来说，由于每个乘积门至多有一个内部（非叶节点）子节点，而其余子节点都是输入门，因此按此方式生成的树分解无需分支。

3.2 对称类的无条件分离

本节中，我们给出主要结果。

定理A。symVF $\subsetneq$ symVBP $\subsetneq$ symVP。

鉴于定理B 和C 分别将 symVBP 和 symVF 刻画为有界树深度和路径宽度的同态多项式的线性组合，定理A 似乎可以直接得到。例如，由$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 个顶点组成的n阶路径族具有有界路径宽度，但树深度无界。一方面，定理B 将$(\hom_{P_n,n})$ 归入 symVBP。

另一方面，定理C 断言，$(\hom_{P_n,n}) \in \mathsf{symVF}$ 当且仅当，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\hom_{P_n,n}$ 都可以写成有界树深度的同态多项式的线性组合。熟悉同态计数的读者，例如了解 [CDM17], 的读者，可能会想起 Lovász 的一个结果 [Lov67] ，该结果断言，对于$(F_i, \star)$ ，当F_i为非同构图时，同态计数函数 hom 是线性无关的。因此，这难道不能直接推出$(\hom_{P_n,n}) \notin$ 属于 symVF 吗?

并非如此。关键在于，只有当 $\hom(F, \star)$ 能够在任意大的图上求值时，线性无关性才成立。在代数复杂性的非一致世界中，同态多项式只能在顶点数有限的图上求值。因此，非同构模式对应的同态多项式通常并不线性无关。下面的例子表明，$(\prod_{v,w\in[n]} x_{v,w}) \in \mathsf{symVF}$ 可以表示为树宽无界的模式所对应的同态多项式的线性组合，这似乎意味着 $(\prod_{v,w\in[n]} x_{v,w})$ 不属于 symVP。

例 3.1. 对于 $n \in \mathbb{N}$，多项式 $\prod_{v,w\in[n]} x_{v,w}$ 可以写成

1. 根据定理 B，由于 $(\prod_{v,w\in[n]} x_{v,w}) \in \mathsf{symVF}$，它是树深度有界的模式所对应的同态多项式的线性组合；以及 2. 它是由所有作为完全二部图 $K_{n,n}$的商的模式构成的同态多项式的线性组合。通过观察到 $\prod_{v,w\in[n]} x_{v,w}$ 是模式 $K_{n,n}$ 的子图多项式，并应用莫比乌斯反演 [DPS25, 定理 8.1]，即可得到这个线性组合。特别地，$\mathrm{tw}(K_{n,n}) \in \Theta(n)$。

为了应对线性无关性的缺失，我们证明了由 symVF、symVBP 和 symVP 中多项式表示的函数之间存在语义分离。Dawar 和 Wilsenach [DW20] 在证明 $(\mathrm{perm}_n) \notin$symVP 时采用了类似的方法：他们证明，symVP 中的所有多项式都具有 O(1) 的计数宽度，而永久式的计数宽度为$\Theta(n)$。矩阵对称多项式族 (p_n) 的计数宽度至多为 [DW17] $k \in \mathbb{N}$ ，如果任意两个满足相同的、属于带计数量词的一阶逻辑 k 变量片段 C^k 的句子的 n 顶点图 G 和 H，都有 $p_n(G) = p_n(H)$。这里，矩阵对称性使得多项式 $p_n \in \mathbb{K}[\mathcal{X}_n]$ 可被视为以 (n, n) 顶点二分图为参数，这一点至关重要。特别是，$p_n(G)$ 的值不取决于 G 的双邻接矩阵的行和列的排列顺序。

逻辑 C^k 不仅在有限模型论 [Gro17] 中得到了深入研究，也因其与 Weisfeiler–Leman算法 [CFI92; Kie20] 以及图神经网络 [Xu+19; Mor+19]的联系而在机器学习 [Gro21] 等领域受到广泛关注。关键的是，文献 [Dvo10; DGR18] 证明了：两个图 G 和 H 满足相同的 C^k-句子，当且仅当它们对于所有树宽小于 k 的图都是同态不可区分的；也就是说，对于每个满足 $\mathrm{tw}(F) < k$ 的图 F，从 F 到 G 和从 F 到 H 的同态数量都相同。事实证明，在各种图类上的同态不可区分性可以刻画多种图同构松弛，例如同构 [Lov67]、量子同构 [MR20; Kar+25]，或关于各种逻辑的等价性 [Gro20a; MS24; FSS24; Sch25]。除此之外，图同构松弛的区分能力也可以用同态不可区分性来描述 [Rob22], ；参见专著 [Sep24a]。在给出下述关于 $w \in \{\mathrm{tw}、\mathrm{pw}、\mathrm{td}\}$ 的定义时，我们也采用这一观点。

定义3.2. 设 w 是一个取值于 $\mathbb{N}$的图参数。若一个矩阵对称多项式族(p_n) 的w-计数宽度至多为$k \in \mathbb{N}$ ，则对于任意两个(n,n)顶点二分图G 和H，如果它们在所有满足$w(F) < k$的图F 上同态不可区分，那么$p_n(G) = p_n(H)$。

由 [Dvo10； DGR18], 树宽计数宽度与原始计数宽度一致，该原始计数宽度来自 [DW17]。我们的定理 B和 C 以及 [DPS25，定理 1。1] 给出了symVP、symVBP和symVF的以下语义性质。

推论 3。3。 设(p_n) 是一个矩阵对称多项式族。

1. 如果 *$(p_n) \in$ symVP*，那么 *(p_n)* 的树宽计数宽度为 *O(1)*。*2.*
如果 *$(p_n) \in$ symVBP*，那么 *(p_n)* 的路径宽度计数宽度为 *O(1)*。
3. 如果 *$(p_n) \in$ symVF*，那么 *(p_n)* 的树深度计数宽度为 *O(1)*。

关于定理 A，我们还需要证明存在 pw-和树深度计数宽度分别无界的 symVP 与 symVBP 中的多项式。这可由以下定理推出，其中第一条断言可由 [DPS25，定理7。1]。

定理 3.4. 设 (F_n) 是一个二分多重图族。

1. *$(\hom_{F_n},n) \in$ symVP* 当且仅当 *$tw(F_n) \in O(1)$*。*2.*
$(\hom_{F_n},n) \in$ symVBP 当且仅当 *$pw(F_n) \in O(1)$*。*3.*
$(\hom_{F_n},n) \in$ symVF 当且仅当 *$td(F_n) \in O(1)$*。

换言之，定理 3.4 断言：如果 $w(F_n)$ 无界，那么 $\hom_{F_n},n$ 不能表示为满足 $w(F'_n) \in O(1)$ 的模式 F'_n 所对应的同态多项式的线性组合。为证明该定理，我们证明：如果 $w(F_n)$ 无界，那么 $(\hom_{F_n},n)$ 的 w-计数宽度也无界，并应用推论 3.3。

这里的关键在于论证：对于 $w \in \{tw、pw、td\}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，所有满足 $w(F) \leq k$ 的图 F 所构成的类都是非一致同态可区分闭合的 [DPS25]。如果对于所有图 $F \notin \mathcal{F}$，都存在图 G 和 H，使得它们在 $\mathcal{F}$ 上同态不可区分 [Rob22]，但从 F 到它们的同态数量不同，那么图类 $\mathcal{F}$ 就是（一致）同态可区分闭合的；参见 [Sep24a，第 6] 章。已有研究表明 [Neu24；Sep24a；FSS24]，对于上述 w 和 k，所有满足 $w(F) \leq k$ 的图 F 所构成的类都是同态可区分闭合的。这些结果基于 Cai-Fürer-Immerman 图 [CFI92；Rob22] 以及关于宽度参数 w [Bie+91；ST93；NO12] 的对偶定理。在非一致设定下，相应的结论是：族 $(\hom_{F_n},n)$ 的 w-计数宽度为 O(1)，当且仅当 $w(F_n) \in O(1)$。因此，例如，如果 $(\hom_{F_n},n) \in$ symVP，那么根据推论 3.3，$(\hom_{F_n},n)$ 的树宽计数宽度为 O(1)，这意味着 $tw(F_n) \in O(1)$。考虑由 n 顶点路径构成的族 P_n，以及由 n 叶完全二叉树构成的族 B_n，即可由定理 3.4 推出定理 A。可以验证，$pw(P_n) = 1$，且 $td(P_n) \in \Theta(\log n)$；同时 $tw(B_n) = 1$，且 $pw(B_n) \in \Theta(\log n)$。因此，$(\hom_{P_n},n) \in$ symVBP $\setminus$ symVF，且 $(\hom_{B_n},n) \in$ symVP $\setminus$ symVBP。

定理 3.4 和例 3.1 揭示了两个极端：一般的矩阵对称多项式既可以写成常数宽度的同态多项式线性组合，也可以写成无界宽度的同态多项式线性组合；而单个同态多项式则不会呈现这种复杂性。对后一种情形进行推广，我们刻画出一大类矩阵对称多项式，其对称复杂性也可以从其按同态多项式展开的形式中读出：对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $p_n = \sum_F \alpha_{F,n} \hom_{F,n}$ 为一组有限线性组合，每个组合均由对应于两两不同构且不含孤立顶点的二分多重图 F[4] 的同态多项式构成，系数为$\alpha_{F,n} \in \mathbb{K}$。这类线性组合的体积定义为 $\mathrm{vol}(n) := \max\{|V(F)| : \alpha_{F,n} \neq 0\}$。对于上述宽度参数 w，记 $\max w(p_n) := \max\{w(F_n) : \alpha_{F,n} \neq 0\}$。在体积为次线性的假设下，我们通过应用 DPS25 中的描述复杂度单调性定理（定理 7.11]），证明如下定理 3.5。第一个断言可由 DPS25 中的定理 7.9] 推出。

[4]这一假设并不失一般性，因为可以重新缩放系数以处理孤立顶点，即 $\hom_{F+K_1,n} = n \cdot \hom_{F,n}$。在全文中，我们只考虑不含孤立顶点的 hom-线性组合。

定理 3。5。 令(p_n) 为一族由对应于不含孤立顶点且体积为 $o(n)$的模式的同态多项式线性组合构成的族。

1. $(p_n) \in$ symVP 当且仅当 max tw$(p_n) \in O(1)$。2.
$(p_n) \in$ symVBP 当且仅当 maxpw$(p_n) \in O(1)$。3.
$(p_n) \in$ symVF 当且仅当 maxtd$(p_n) \in O(1)$。

重申一下：例如，定理 B 通常表明 $(p_n) \in$ symVF 当且仅当每个 p_n都可以写成有界树深度同态多项式的某个线性组合。定理 3。5 更具体地指出，对于每个次线性体积的具体线性组合 $(\sum_F \alpha_{F,\ n}$ 同态$_{F,\ n})$，该线性组合中模式的树深度恰好决定了它是否属于symVF。如果体积是线性或超线性的，那么这一结论就不成立，而且线性组合可能并不唯一，如例3。1所示。

3.3 同态多项式的经典代数下界 s

在确定同态多项式是对称代数复杂性理论的关键主角之后，我们终于转向同态多项式的经典代数复杂性。Durand、Mahajan、Malod、de Rugy-Altherre 和 Saurabh [Dur+16]确定了特定的模式族(F_n)，其同态多项式分别是VBP-、VP-或VNP完全的。更准确地说，他们证明了路径族、完全二叉树族和团族的同态多项式分别是 VBP 完全、VP 完全和 VNP 完全。我们通过给出关于[5] (F_n) 的图论判据，对这些结果作了全面推广；满足这些判据时，其同态多项式是 VBP 完全、VP 完全或 VNP 完全。

定理D.令$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为二分多重图的一个 p-族。令 $\varepsilon > 0$。

1. 如果对于所有 $n \geq 2$，*tw$(F_n) \geq n^{\varepsilon}$*，那么 *(hom$_{F_n}$,n)* 是 *VNP* 完全。*2.* 如果对于所有 $n \geq 2$，*tw$(F_n) \in O(1)$* 且 *pw$(F_n) \geq \varepsilon$log(n)*，那么 *(hom$_{F_n}$,n)* 是 *VP*-完全。*3.* 如果对于所有 $n \geq 2$，*pw$(F_n) \in O(1)$* 且 *td$(F_n) \geq \varepsilon$log(n)*，那么 *(hom$_{F_n}$,n)* 是 *VBP*-完全。

在所有情况下，对于任意特征为零的域，困难性都在常深度 c-归约下成立。

定理 D 的证明通过从 [Dur+16; Hru17] 给出的困难族进行归约得到。我们的归约利用了多彩同态多项式，以及 Curticapean 和 Marx [CM14a]以及 Curticapean [Cur24] 开发的技术，这些技术用于研究树宽无界的模式的同态计数的 #W[1]-困难性和 #P-困难性。然而，代数计算的特性要求对这一框架作出重大调整：最关键的是，模式 F_n 仅在 (n, n) 阶二分图中计数。这意味着构件构造必须非常简洁，才能适应相应目标图的规模。具体而言，若照搬 [CM14a; Cur24] 中的技术，定理 D 的断言只能适用于满足 $|V(F_n)| \leq n^{1-\varepsilon}$ 的模式族。为克服这些挑战，我们利用了精巧的图结构结果 [CC16; Gro+23; Hat+24]，以及同态不可区分性方面的最新成果 [Rob22; Sep24b]。

定理 D 不足以确定诸如以下同态多项式族的复杂度：(同态$_{K_{\log(n),\ \log(n),\ n}}$) 因为完全二部图的树宽 $\Theta(\log(n))$ 增长得太慢。在 [Sau16，第 88], Saurabh 提出，要确定同态多项式的复杂度

[5]Dur 的同态多项式 [在技术上不同于我们的方程（1），但可以进行转换，参见引理8。4 和8。5。

多项式 (同态$_{F_n,n}$) 对于模式族 (F_n)，其树宽$(F_n) \in o(n)$。我们通过证明以下定理来解决这个问题：

定理E。设$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个二分多重图的 p-族，且树宽(F_n) 是非递减的。除非VFPT $=$ VW[1], ，否则(同态$_{F_n}n$) $\in$ VP 当且仅当树宽(F_n) $\in O(1)$。

这里，VFPT 和 VW[1], 由 Bläser 和 Engels [BE19], 引入，是著名参数化复杂性类 FPT 和 #W[1], 的代数类比，参见 [Cyg+15]。这两个类都包含参数化多项式族，即由 n、k $\in \mathbb{N}$共同索引的多项式族 $(p_{n,k})$。若存在代数电路，使 $p_{n,k}$ 的规模至多为 $f(k)\cdot q(n)$，其中 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是任意函数，q 是多项式，则 $(p_{n,k})$ $\in$ VFPT。相比之下，VW[1] 包含被认为不属于 VFPT 的多项式。

注意，我们并未证明：若 tw(F_n) $\in \Omega(1)$，则 (hom$_{F_n}$,n) 是 VW[1]-难的，因为 (hom$_{F_n}$,n) 甚至不是一个参数化族，参见 [Cur21]。相反，定理 E 的证明是通过说明：若 tw(F_n) $\in$ $\Omega(1)$ 时 (hom$_{F_n}$,n) $\in$VP，则存在某个 VW[1]-难的参数化多项式族，使其具有 VFPT 电路。尽管这个论证是间接的，但事实证明，要证明定理 E，假设 VFPT $\neq$VW[1] 是必要的。此外，以下推论 3.6 表明，VFPT $\neq$ VW[1] 等价于同态多项式的对称与非对称计算合并；也就是说，若 (hom$_{F_n}$,n) $\in$ VP，则 (hom$_{F_n}$,n) $\in$symVP。

推论 3.6。 当且仅当对于每个满足 树宽(F_n) 非递减的二分多重图 p-族 (F_n)，VFPT $\neq$ VW[1] 成立，

$$(\hom_{F_n,n}) \in \mathsf{VP} \iff \mathrm{tw}(F_n) \in O(1) \iff (\hom_{F_n,n}) \in \mathsf{symVP}.$$

尽管假设 FPT $\neq$ #W[1] 对于研究计数问题的参数化复杂性至关重要 [Cyg+15]，但假设 VFPT $\neq$ VW[1] 却鲜少受到关注[Cur21； Bha+24] 自其于 2019年提出以来便是如此。我们相信，我们的定理 E是 Dalmau 和 Jonsson 对固定参数可处理的同态计数所作开创性刻画的代数类比 [DJ04], ，将有助于提升 VFPT $\neq$VW[1]的重要性。

最后，我们将定理 D 和 E 推广到同态多项式的线性组合。与定理 3.5一样，这需要额外的增长假设。在以下定理 3.7和 3.8中，多项式族 p-族(p_n) 是指其次数由 n的某个多项式所界定的族。

定理 3.7. 对于 $\varepsilon > 0$，设 $(p_n) := (\sum_F \alpha_{F,\,n}$同态$_{F,\,n})$ 是一个 p-族，其中的多项式为二分多重图的同态多项式的线性组合；这些图没有孤立顶点，且体积至多为 $n^{1-\varepsilon}$，其多项式维数为 维数 $\dim(n) := |\{F \mid \alpha_{F,\,n} \neq 0\}|$。则有以下结论：

1. 如果对所有 $n \geq 2$，*max tw(p_n)* $\geq n^{\varepsilon}$，则 *(p_n)* 是 *VNP* 完全。*2.* 如果对所有 $n \geq 2$，*max tw(p_n)* $\in O(1)$，且 *max pw(p_n)* $\geq \varepsilon\, log(n)$，则 *($p_n$)* 是 *VP*-完全；*3.* 如果对所有 $n \geq 2$，*max pw(p_n)* $\in O(1)$，且 *max td(p_n)* $\geq \varepsilon\, log(n)$，则 *($p_n$)* 是 *VBP*-完全，

在所有情况下，困难性在任意特征为零的域上，均可通过常深度 c-归约得到。 *o.*

定理 3.8. 对于 $\varepsilon > 0$，设 (p_n) 是一个 p-族，由不含孤立顶点、体积至多为 $n^{1-\varepsilon}$、多项式维数且最大树宽max tw(p_n)非递减的二分多重图的同态多项式的线性组合构成。除非 VFPT $=$VW[1], ，否则，(p_n) $\in$VP 当且仅当maxtw(p_n) $\in O(1)$。

4 展望

我们引入了对称代数复杂性类symVF、symVBP和 symVP ，为 Valiant 的纲领提供了一种新的视角，并通过基于同态多项式的刻画，确立了无条件分离 symVF ⊊symVBP ⊊ symVP。受此启发，我们还在经典的非对称电路模型中，为同态多项式证明了新的、适用范围非常广的（有条件）下界，并得出了关于 VP 与 symVP之间关系的出人意料的结论。详细概述请见表 1 。我们的工作还引出了以下一些自然的问题。

对称深度归约。 在代数复杂度理论中，有界深度和公式等自然的电路限制得到了广泛研究，部分原因在于一种显著的深度归约现象；目前尚不知晓该现象是否在布尔情形中成立。具体而言，任何可由规模为 d 的次数多项式电路计算的多项式 s ，也可由一个齐次深度为 4 的电路，或一个（可能非齐次的）深度为 3 且规模为 $s^{O(\sqrt{d})}$的电路计算。因此，证明针对这类常深度电路的 $n^{\omega(\sqrt{d})}$ 下界，就足以将VP 与 VNP 分离，并解决 Valiant猜想 [Sap21]。一个自然的问题是，这样的深度归约结果是否也适用于对称电路。我们的工作表明，从一般意义上说，这不太可能。唯一可能实现的深度归约类型，是不降低支撑深度（定义 6.16）的归约。也就是说，引理 6.20 表明，对称电路的支撑深度控制着其所计算的同态多项式对应的模式图的树深度。因此，定理3.4 和 3.5 构成了对称深度归约的障碍。

线性体积的线性组合。 我们的结果表明，理解同态多项式的线性组合复杂性时，一个关键参数是其体积 $\mathrm{vol}(n) :=$最大值$\{|V(F)| : \alpha_{F,n} \neq 0\}$。如表 1所总结，次线性体积的线性组合在本质上与单个同态多项式表现相似，其对称代数复杂度和非对称代数复杂度可由我们的结果描述。

一般而言，根据 [DPS25，引理 3。1], 每个矩阵对称多项式 $p \in \mathbb{K}[\mathcal{X}_n]$ 都可以写成体积为 $\leq n$ 的同态多项式的线性组合，并且根据引理 8。18，这样的线性组合是唯一的。然而，如例 3。1所示，可以用宽度更小的同态多项式的线性组合来表示一个多项式，但代价是体积增至 $> n$。这表明，至少具有线性体积的线性组合领域在本质上截然不同。理解其复杂性是一个引人入胜的开放问题。具体而言，我们提出以下问题：

- 在什么假设下，线性体积或超多项式维数的同态多项式线性组合的对称或非对称代数复杂度由模式图的宽度决定？更具体地说，子图多项式或线性规模的模式（如永久式）的复杂度如何，参见[DPS25，猜想8。7]?

- 为了使推论 3VW[1] 适用于路径宽度/VBP。6 /VBP/symVBP 或树深度/VF/symVF 而非树宽度/VP/symVP，需要将 [CM15] 哪个复杂性理论假设替换为？

- 是否存在这样的同态多项式的线性组合 (p_n) ，其线性体积和多项式维数均受限，使得 $\mathrm{maxtw}(p_n) \in \Omega(1)$，但 $(p_n) \in$ VP，即使 VFPT $\neq$ VW[1]? 若否，那么 symVP 和 VP 将在所有矩阵对称多项式上重合，而不仅仅是在单个同态多项式上，如推论 3.6.

	单个同态多项式（$\hom_{F_n,n}$）	同态多项式的线性组合（p_n）
对称复杂度	一般 定理 3.4	体积 $o(n)$ 定理 3.5
代数复杂性 假设 VFPT $\neq$ VW[1]	p-模式族 (F_n) 其中树宽（F_n） 非递减 定理 E	p-多项式族 （p_n）体积至多为$n^{1-\varepsilon}$，多项-项式维数 ，且非-最大树宽递减（p_n） 定理 3.8
代数复杂性 假设 VP $\neq$VNP	p 模式族（F_n），其树宽(F_n) $\geq n^{\varepsilon}$ 或树宽(F_n) $\in O(1)$ 定理D	p-多项式族(p_n) with 体积至多为$n^{1-\varepsilon}$ ，多项式 维数, and 最大树宽(p_n) $\geq$ n^{ε} or 最大树宽(p_n) $\in O(1)$ 定理 3.7

表 1： 概述了关于矩阵对称多项式的假设：这些多项式表示为同态多项式的线性组合，并且在这些假设下，我们能够精确刻画VP 和symVP中的成员资格。从左到右、从上到下，假设的限制性逐渐增强。

5 扩展预备知识

除非另有说明，所有多项式和电路都定义在某个特征为零的域 $\mathbb{K}$ 上。所有对数均以 2 为底。记 $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ 和 $[k] := \{1, \dots, k\}$ 表示满足 $[0] = \emptyset$ 的 $k \in \mathbb{N}$。

5.1 代数复杂性类

我们概述 Valiant 引入的复杂性类 [Val79], 另见 [Büro0; BE19]。以下，令 $\mathbb{K}$ 表示一个域。令 $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ 为一组变量。若存在一个多项式 q，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $f(n) \leq q(n)$，则函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是多项式有界的。

定义 5.1. 多项式序列 $(f_n) \in \mathbb{K}[X]$ 是一个 p-族，如果

1. f_n 中的变量个数是 p-有界的，即存在一个 p-有界函数 $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$f_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{q(n)}]$，并且 2. 次数 $\deg(f_n)$ 是 p-有界的。

对于多项式 f，用 $\mathrm{size}(f)$ 表示计算 f 的最小代数电路的大小。

定义 5.2. 类 VP 由所有满足 $\mathrm{size}(f_n)$ 是 p-有界的 p-族 (f_n) 组成。

定义 5.3. 类 VNP 由所有满足以下条件的 p-族 (f_n) 组成：存在一个 p-族 (g_n)，它属于 VP；并且存在一个 p-有界函数 q，使得

$$f_n(x_1, \dots, x_{q(n)}) = \sum_{e \in \{0,1\}^{q(n)}} g_n(x_1, \dots, x_{q(n)}, e_1, \dots, e_{q(n)}).$$

也就是说，VNP由可表示为对多项式有界的VP可计算函数求指数和的多项式族构成。

定义5.4. VF类由所有可通过大小为p有界的代数公式计算的p族(f_n) 构成。公式是一种电路，其底层图是一棵树（即不允许重复使用子计算结果）。

定义5.5. 复杂性类 VBP 由所有可以通过规模为 p 有界的斜代数电路计算的 p-族 (f_n) 构成。若对于每个乘法门，至多有一个子节点是内部（非输入）门，则该代数电路称为斜电路。

斜电路在计算能力上等价于代数分支程序（ABP），这是一种在代数复杂度理论中得到充分研究的计算模型。ABP 是一个分层有向无环图，具有指定的源节点和汇节点，其中每条边连接相邻层，并标记为关于输入变量的仿射线性形式。ABP 计算的多项式由对所有路径求和得到，其中每条路径对应其边标签的乘积。关于这一等价关系及相关结果的详细介绍，请参阅 Mahajan 的综述 [Mah13]。在symVBP中，我们选择使用斜电路而非 ABP，因为电路具有更自然的对称性概念。

我们将在上述复杂性类上证明关于p-投影或常数深度c-归约的困难性，前者的限制比后者更严格。

定义5.6. 1. 设f、$g \in \mathbb{K}[X]$。若存在一个代换 $r\colon X \to X \cup \mathbb{K}$，使得$fg$ 的一个投影，记作$f \leq_p g$，即$f = r(g)$。

2. 设(f_n)和(g_n)是p-族。若存在一个p-有界函数$q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对所有$n \in \mathbb{N}$，都有$(f_n)$ p-投影(g_n)，记作$(f_n) \leq (g_n)$，即$f_n \leq_p g^{q(n)}$。

为定义常深度 c-归约，考虑带有预言机门的代数电路。对于多项式 $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_\ell]$，其预言机门有 ℓ 个输入 $t_1, \ldots, t_\ell$，并计算值 $g(t_1, \ldots, t_\ell)$。对于多项式 $f \in \mathbb{K}[X]$, $d \in \mathbb{N}$ 以及多项式集合 $G \subseteq \mathbb{K}[X]$，用 $\mathrm{size}_G(f)$ 表示计算 f、且带有 $g \in G$ 的预言机门的最小电路规模；用 $\mathrm{size}^d_G(f) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 表示计算 f、且带有 $g \in G$ 的预言机门的最小深度 d 电路规模。若 G 是单元素集合 $\{g\}$，则用 g 代替 G。

定义 5.7. 设(f_n)和(g_n)是p-族。若存在常数$d \in \mathbb{N}$和p-有界函数$q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{size}^d_{g_{q(n)}}(f_n)$是$p$-有界的，则族$(f_n)$可在常数深度下 c-归约到$(g_n)$。

5.2 参数化代数复杂性类VW[1] 和VFPT

我们回顾 Bläser 和 Engels 引入的参数化 Valiant 类VW[1] 和VFPT的定义 [BE19]。它们是参数化复杂性类W[1] 和FPT的类似物，参见 [Cyg+15]。

定义 5.8. 参数化 p-族是一个多项式族$(f_{n,k})$，满足

1. 存在一个p-有界函数$q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对所有$n$、$k \in \mathbb{N}$，都有$f_{n,k} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{q(n)}]$；2. 存在一个$p$-有界函数$q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对所有$n$、$k \in \mathbb{N}$，都有 $\deg(f_{n,k}) \leq q(n+k)$。

函数 $p\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是 ***fpt*-有界** 的，当且仅当存在一个 p-有界函数 $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 以及任意一个[6] 函数 $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得 $p(n,k) \leq g(k) \cdot q(n)$ 对所有 $n, k \in \mathbb{N}$均成立。

[6]在非代数类 FPT的定义中，假定函数 g 是可计算的，参见 [Cyg+15]。在 Valiant 非一致复杂性类的语境中，这一假设被取消。

定义 5.9. VFPT 类包含所有参数化的 p-族 $(f_{n,k})$，其 size$(f_{n,k})$ 是 fpt-有界的。

定义 5.10。1. 若参数化 p-族 $(f_{n,k})$ 固定参数可投影到参数化 p-族 $(g_{n,k})$，记作 $(f_{n,k}) \leq^{f} \text{ptp } (g_{n,k})$，则存在函数 r, s, t : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得 r 是多项式有界的，并且对某个 $k' \leq t(k)$ 及所有 $n, k \in \mathbb{N}$，$f_{n,k}$ 是 $g_{r(n)s(k),k'}$ 的一个投影。

2. 若参数化 p-族 $(f_{n,k})$（其中 $f_{n,k} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{p(n)}]$）是另一个参数化 p-族 $(g_{n,k})$（其中 $g_{n,k} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{q(n)}]$）的 fpt-代入，记作 $(f_{n,k}) \leq^{f} \text{pts } (g_{n,k})$，则存在函数 r, s, t : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得 r 是多项式有界的，并且存在多项式 $h_1, \ldots, h_{q(r(n)s(k))} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{p(n)}]$，使得

$$f_{n,k} = g_{r(n)s(k),k'}(h_1, \ldots, h_{q(r(n)s(k))})$$

对于某些 $k' \leq t(k)$，以及 $\deg(h_i)$ 和 size(h_i)，它们作为 n、k 的函数均为 fpt-有界；对所有$1 \leq i \leq q(r(n)s(k))$均成立。

3. 参数化 p-族 $(f_{n,k})$ fpt-c-归约到参数化 p-族 $(g_{n,k})$，记作 $(f_{n,k}) \leq^{f} \text{ptc } (g_{n,k})$，当且仅当存在一个 p-有界函数 q : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 以及函数 s, t : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得 size$_{G_{q(n)s(k)},t(k)}(f_{n,k})$ 是 fpt-有界的，其中 $G_{n,k} := \{g_{i,j} \mid i \in [n], j \in [k]\}$。

代数电路 C 的纬度 是从任一叶节点到根节点的路径上扇入大于 2 的门的最大数量。对于 s、$k \in \mathbb{N}$，记 $\binom{\langle s \rangle}{k} \subseteq \{0,1\}^s$ 为恰好包含 k 个 1 的所有长度为s 的向量组成的集合。

定义 5.11. 令$t \geq 0$。类 VW$[t]$ 由满足以下条件的参数化p-族$(f_{n,k})$ 组成：存在一个多项式$g_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x^{q(n)}, y_1, \ldots, y_{q(n)}]$ 的(g_n) p-族，其中p-有界函数q满足： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 并且g_n 由纬度为 $\leq t$ 且规模为多项式的常深度无界扇入电路计算，且

$$(f_{n,k}) \leq_s^{fpt} \left(\sum_{e \in \binom{\langle q(n) \rangle}{k}} g_n(x_1, \ldots, x_{q(n)}, e_1, \ldots, e_{q(n)}) \right).$$

在 [BE19], 中，人们注意到 VFPT =VW[0]。我们主要关注 VW[1]。

5.3 矩阵对称多项式与电路

在论文的扩展摘要中，为求简便，我们只考虑变量 **Sym**$_n$ ×**Sym**$_m$-对称多项式。一般而言，我们关于对称计算的大多数结果，对于变量 **Sym**$_n$ ×**Sym**$_m$-对称多项式也成立，其中 $\mathcal{X}_{n,m} = \{x_{i,j} \mid i \in [n], j \in [m]\}$，对于 $n \neq m$。从现在起，我们采用这一更一般的设定。现在给出第2节中省略的刚性化引理的证明。

引理 2.4 (刚性化). 设 Γ 是作用于变量集 $\mathcal{X}$上的群， $\mathbb{K}$ 是一个域。设 C 是 $\mathcal{X} \cup \mathbb{K}$上的 Γ-对称电路。存在一个 Γ-对称刚性电路 C'，满足 $\|C'\| \leq \|C\|$，且计算与 C 相同的多项式。如果 C 是对称公式，那么 C' 是带有重边的对称公式。如果 C 是对称斜电路，那么 C'也如此。

证明。 我们通过合并C中的等价门来构造C'。为实现刚性，可能需要不止一次地重复以下过程。形式上，我们从C' 及一个

满射 $\delta: V(C) \to V(C')$ 出发，从C 的输入门到根节点，归纳地定义该映射。映射 δ记录C 中的哪些门被合并到了C' 中的哪些门，并且只是简化了表示方式。令$\mathbf{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$ 表示$\mathbf{Aut}(C)$ 中固定C的每个输入门的子群。

对于每个变量和域元素，C 中都有一个带有该标签的唯一输入门，因此输入门不会违反刚性。因此，我们令 C′ 的输入门与 C 中的相同，并将 δ 定义为这些输入门上的恒等映射。现在假设根据归纳法，我们已将 C′ 和 δ 构造至第 d 层。下面描述第 d $+1$层上的构造。令 $V_{d+1} \subseteq$ V(C) 为第 d $+1$层中门的集合。对于每个 Stab$^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道 O $\subseteq V_{d+1}$，我们在 C′ 的第 d $+1$ 层引入一个新门 g_O，并令 δ (g) $:=$ g_O，其中对每个 g $\in$O 都如此。g_O 的运算类型与 O 中每个门的运算类型相同。

为了定义 $d+1$ 层与 d 层之间在 C' 中的连接，我们首先注意到：
断言 5.11a. 设 g、g′ $\in$ V(C) 属于同一个 Stab$^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道。那么存在一个双射$\gamma$: gE(C) $\to$ g′ E(C)，使得对于每个 h $\in$ gE(C)，h 和 γ(h) 都属于同一个 Stab$^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道。

命题证明。 由于g、g' 处于同一轨道中，存在 $\pi \in \mathbf{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$，使得 $\pi(g) = g'$，且 π 在g $E(C)$ 上的作用定义了一个双射 γ: $gE(C) \to g'E(C)$，具有所声称的性质。

」

根据该命题，对于任意两个门g、$g' \in O$，都有 $\{\delta(h) \mid h \in gE(C)\} = \{\delta(h) \mid h \in g'E(C)\}$。因此，我们可以任意选取一个$g \in O$，并将$g_O$ 在C' 中的子节点集合定义为

$$g_O E(C') := \{\delta(h) \mid h \in gE(C)\}.$$

对于(h) 的每个子节点 δ，其中g_O 位于C'中，我们将g_O 与 $\delta(h)$ 之间的边的重数定义如下。令$m(g$、$h)$ 表示g 与h 在C中的边的重数。那么在C'中，边$(g_O$、 $\delta(h))$ 的重数为

$$\sum_{h' \in \delta^{-1}(\delta(h)) \cap gE} m(g, h').$$

至此，C'的构造完成。注意，根据构造，两个门 $g_1, g_2 \in V(C)$ 属于同一个 $\mathbf{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$轨道，当且仅当 $\delta(g_1) = \delta(g_2)$。
命题5.11b. C' 计算的多项式与C相同。

命题证明。 我们用归纳法证明，对于每个门 $g \in V(C)$， $\delta(g)$ 计算的多项式与g相同。对于输入门，这显然成立。现在考虑第$d+1$层的归纳步骤。设$g \in V(C)$ 是第$d+1$层上的一个门，不失一般性，假设它是一个 $+$-门，并设h_1,……、h_m 是它在C中的子节点。那么它计算

$$g = \sum_{i \in [m]} m(g, h_i) \cdot h_i.$$

现在， $\delta(g)$ 在 C' 中的子节点定义为：对构造中所用的、与g 处于同一轨道的某个门g^* 的子节点应用映射 δ所得的像。因此，存在一个 $\pi^* \in \mathbf{Aut}(C)$，它固定每个输入门，将$g$ 映射到g^*，并将 g 的子节点映射到g^* 的子节点（保持边重数不变）。一般而言，对于任意$h \in V(C)$，只要 $\pi \in \mathbf{Aut}(C)$ 固定所有输入门， $\pi(h)$ 与h 就计算相同的多项式。因此我们可以写成

$$g = \sum_{i \in [m]} m(g, h_i) \cdot \pi^*(h_i) = \sum_{i \in [m]} m(g, h_i) \cdot \pi^*(h_i) = \sum_{i \in [m]} m(g, h_i) \cdot \delta(\pi^*(h_i)),$$

其中，最后一个等式由归纳假设得出。在C'的构造中，$\delta(g^*) = \delta(g)$ 与其子节点 $\{\delta(\pi^*(h_i)) \mid i \in [m]\}$ 之间的边重数经过选择，使得$\delta(g)$ 确实计算上述求和。若g 是乘法门，论证完全相同。至此，归纳步骤完成。」

命题5.11c。 每个 $\pi \in \Gamma$ 都可扩展为电路自同构 $\sigma \in \mathbf{Aut}(C')$。

命题证明。设 $\pi \in \Gamma$。由于 C 是 Γ-对称的，因此存在一个 $\sigma' \in \mathrm{Aut}(C)$，它可扩展为 π。每个 $\mathrm{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道 $O \subseteq V(C)$ 在 σ' 下的像仍是一个 $\mathrm{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道。因此，我们可以定义一个双射 $\sigma: V(C') \to V(C')$，对每个 $\mathrm{Stab}_{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道 $O \subseteq V(C)$，令 $\sigma(g_O) := g_{\sigma'(O)}$。根据 C' 的构造以及 $\sigma' \in \mathrm{Aut}(C)$，$\sigma$ 是 C' 的一个自同构。」

该命题表明，C' 是 Γ-对称的（但可能不具刚性）。

命题5.11d。如果 C 是 一个对称公式，那么 C' 是一个对称公式，可能带有重边 s.

命题证明。 考虑构造C'中第$d+1$ 层的归纳步骤。根据归纳法，我们可以假设，对于$V(C)$ 的第 $\leq d-1$ 层中的每个非输入门$g \in$，门 $\delta g()$ 在C'中都有唯一父节点。令$h \in$ 为$V(C)$ 中第d层上的一个门。令

$$P_h := \{g \in V(C) \mid (g, h') \in E(C) \text{ for some } h' \in \delta^{-1}(\delta(h))\}$$

P_h 中的门是 C' 中 $\delta(h)$ 的潜在父节点。但是，在第 $d+1$ 层的构造步骤中，P_h 中所有门的 δ-像都相同。事实上，根据 C' 的构造，$\delta^{-1}(\delta(h))$ 中的所有门都属于 C 中同一个 $\mathrm{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道。由于 C 是一个公式，这些门各自都有唯一父节点，因此 P_h 中的所有门也属于同一个 $\mathrm{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道，记作 O。于是，对于每个 $g \in P_h$，$\delta(g) = g_O$。因此，g_O 是 C' 中 $\delta(h)$ 的唯一父节点。至此归纳步骤完成，并证明 C' 的内部门构成一棵树。」

命题5.11e. 如果C 是对称斜电路，那么C'也是。

命题证明。我们需要证明，C' 中的每个乘法门至多有一个子节点是C'中的非输入门。设$g_O \in V(C')$ 是一个乘法门，并反设它有两个不同的子节点h、h' in C'，且它们都不是输入门。由于C是斜电路，因此C中必定存在两个门$g_1, g_2 \in O$，使得它们唯一的非输入子节点未被δ识别。换言之，设h_1, h_2 分别是C中g_1, g_2, 唯一的非输入子节点。那么$\delta(h_1) \neq \delta(h_2)$。但这是不可能的：由于$g_1, g_2$ 属于同一个 $\mathrm{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道，因此存在一个 $\pi \in \mathrm{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$，将$g_1$ 映射到g_2。这个 π 也必须将h_1 映射到 h_2,，因此h_1, h_2 属于同一个$\mathrm{Stab}^{\mathbf{Aut}(C)}(\mathcal{X})$-轨道。于是，根据$C'$ 和 δ的构造，我们有 $\delta(h_1) = \delta(h_2)$。这与假设 $\delta(h_1) \neq \delta(h_2)$矛盾。」

如果C' 是刚性的，那么我们就完成了；根据上述断言，C' 具备引理中所述的性质。如果C' 不是刚性的，我们就从C'开始，重复上述构造。这样一来，我们最终会得到一个刚性电路，因为只要存在一个非单元素轨道，该构造就会严格减少门的数量。因此，它必然会以一个刚性电路结束。 □

5.4 树宽、路径宽度和树深度

令 T 为一个图 a 以及F 一个多重图。对于F 而言，T-分解 是一个映射 $\beta\colon V(T) \to 2^{V(F)}$，满足t 1. V(F) = ⋃t∈V(T) β(t)，2. 对所有 uv ∈ E(F)，存在 t ∈ V(T)，使得 u,v ∈ β(t)，并且 3. 对所有 v ∈ V(F)，由满足 v ∈ β(v) 的 t ∈ V(T) 诱导出的 T 的子图是连通的。

宽度 为 T-分解 (T, β) 的最大值 $\max_{t\in V(T)} |\beta(t)| - 1$。多重图$F$ 的树宽 $\mathrm{tw}(F)$ 是 T 为一棵树时，F 的 T-分解的最小宽度。多重图 F 的路径宽度 $\mathrm{pw}(F)$ 是 P 为一条路径时，F 的 P-分解的最小宽度。

树深度 $\mathrm{td}(F)$ 多重图 F 的，正如 Nešet˘ril 和 Ossona De Mendez [NO06],所引入的定义，是 F 的消去树的最小高度。消去树 是一个顶点集为 $V(F)$ 的树，且对于任意 $uv \in E(F)$，u 和 v 在 T 中处于祖先—后代关系。

对于每个多重图，树宽、路径宽度和树深度之间都存在如下关系F，根据 [NO12，第 6节。4],

$$\mathrm{tw}(F) \le \mathrm{pw}(F) \le \mathrm{td}(F) - 1. \tag{2}$$

6 对称复杂性类的刻画

本节给出定理B 和定理C的完整证明，这两个定理刻画了轨道大小为多项式有界的矩阵对称公式和斜电路。

我们回顾 [DPS25] 中的一些定义和记号，它们对证明至关重要。我们首先引入以下集合，该集合由与二部多重图相关的同态多项式的有限线性组合构成：

$$\mathfrak{G}_{n,m} := \left\{ \sum \alpha_i \hom_{F_i,n,m} \;\middle|\; F_i \text{ bipartite multigraphs}, \alpha_i \in \mathbb{K} \right\} \subseteq \mathbb{K}[\mathcal{X}_{n,m}]. \tag{3}$$

在 [DPS25 中，引理 3.1], 证明了集合 $\mathfrak{G}_{n,m}$ 等于矩阵对称多项式的集合。

带标签二分图与同态多项式映射。对于任意 ℓ、r ∈ ℕ，一个 (ℓ, r)-带标签二分图是一个元组 F = (F, a, b)，其中 F 是一个二部多重图，其顶点划分为 A ⊎ B，而 a ∈ A^ℓ 和 b ∈ B^r 分别是左侧和右侧顶点上的标签序列。用 $\mathcal{G}(\ell, r)$ 表示所有 (ℓ, r)-带标签二分图组成的集合。对于 n、m ∈ ℕ，我们定义同态多项式映射 $F_{n,m}\colon [n]^\ell \times [m]^r \to \mathbb{K}[\mathcal{X}_{n,m}]$，如下所示

$$\boldsymbol{F}_{n,m}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \sum_{\substack{h:A\uplus B\to[n]\uplus[m] \\ h(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{v} \\ h(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{w}}} \prod_{(a,b)\in E(F)} x_{h(a),h(b)} \quad \in \quad \mathbb{K}[\mathcal{X}_{n,m}].$$

注意，当 $\ell = r = 0$ 时，这就化简为 $\hom_{F、n、m}$，参见方程（1）。我们定义

$$\mathfrak{G}_{n,m}(\ell, r) := \left\{ \sum \alpha_i \boldsymbol{F}^i_{n,m} \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{K}, \boldsymbol{F}^i \in \mathcal{G}(\ell, r) \right\},$$

同态多项式映射的有限线性组合构成的集合。

有界树宽的带标号图。若存在一个宽度小于 k 的 F 的树分解 (T, β)，使得存在节点 s $\in$ V(T)，其袋 β(s) 包含 a 和 b 中出现的所有顶点，则称 F = (F, a, b) 的树宽小于 k。记 $\mathcal{T}$k(ℓ, r) $\subseteq \mathcal{G}(\ell, r)$ 为所有树宽小于 k 的 (ℓ, r)-带标签二分图的集合。类似于方程 (3)，我们定义树宽至多为 k 的 (ℓ, r)-带标签二分图的同态多项式映射的有限线性组合的集合：

$$\mathfrak{T}^k_{n,m}(\ell, r) := \left\{ \sum \alpha_i \boldsymbol{F}^i_{n,m} \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{K}, \boldsymbol{F}^i \in \mathcal{T}^k(\ell, r) \right\} \subseteq \mathfrak{G}_{n,m}(\ell, r). \tag{4}$$

对于标签 $\boldsymbol{v} \in [n]^\ell$ 和 $\boldsymbol{w} \in [m]^r$，$\mathfrak{T}^k_{n,\,m}(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) := \{\varphi(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) \mid \varphi \in \mathfrak{T}^k_{n,\,m}(\ell,\ r)\} \subseteq \mathbb{K}[\mathcal{X}_{n,m}]$。使用这些记号，我们现在可以正式陈述 [DPS25]的主要结果。

定理 6。1 ([DPS25，定理 1。1])。一族矩阵对称多项式$(p_{n,\,m})_{n,\,m\in\mathbb{N}}$ 属于symVP 当且仅当存在一个 $k \in \mathbb{N}$ 使得$(p_{n,\,m}) \in \mathfrak{T}^k_{n,\,m}(0,0)$。

有界树深度的带标记图。 现在我们定义方程（4）中集合的类似物，使其适用于定理 B。在 [FSS 24], 有根树分解的深度T 定义为

$$\operatorname{depth}(T) := \max_{v \in V(T)} \left| \bigcup_{t \preceq v} \beta(t) \right|,$$

当且仅当$t \preceq v$ 位于从T 的根节点到v的唯一路径上时。对于k、$q \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{T}_{k,\,q}$表示具有宽度小于k且深度至多为q的有根树分解的二分图类。类似地，令 $\mathcal{T}_{k,\,q}(\ell,\ r)$ 表示$(\ell,\ r)$带标签二分图类，其中存在一个宽度小于k 且深度至多为q的有根树分解，使所有标签顶点都同时出现在根袋中。

引理 6.2 ([FSS24，定理 14 和推论 15])。设 $k,q \in \mathbb{N}$。$\mathcal{T}k,q$ 中的每个图的树深度至多为 q，树宽至多为 $k - 1$。

定义相应的线性组合集合如下：

$$\mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell, r) := \left\{ \sum \alpha_i \boldsymbol{F}^i_{n,m} \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{K}, \boldsymbol{F}^i \in \mathcal{T}^{k,q}(\ell, r) \right\} \subseteq \mathfrak{T}^k_{n,m}(\ell, r). \tag{5}$$

与之前一样，令 $\mathfrak{T}^{k,n^q,m}(0,0) =: \mathfrak{T}^{k,n^q,m}$ 表示由树宽小于k 且树深度至多为q的二分图所产生的同态多项式的线性组合集合。于是定理B证明，多项式族$(p_{n,n})$ 属于 symVF，当且仅当存在一个常数$k \in \mathbb{N}$，使得$(p_{n,n}) \in \mathfrak{T}^{k,n^q,n}(0,0)$。

有界路径宽度的带标号图。我们称 F = (F, a, b) 的路径宽度小于 k，若存在 F 的一个路径分解 (P, β)，使得存在一个节点 s $\in$ V(T)，其次数为 ≤ 1，且其袋 β(s) 包含 a 和 b 中出现的所有顶点。用 $\mathcal{P}^k(\ell, r)$ 表示所有路径宽度小于 k 的 (ℓ, r)-带标签二分图构成的类。类似于公式 (4)，我们定义路径宽度至多为 k 的 (ℓ, r)-带标签二分图的多项式映射的线性组合。令 k、n、m $\in \mathbb{N}$，并定义

$$\mathfrak{P}^k_{n,m}(\ell, r) := \left\{ \sum \alpha_i \boldsymbol{F}^i_{n,m} \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{K}, \boldsymbol{F}^i \in \mathcal{P}^k(\ell, r) \right\} \subseteq \mathfrak{T}^k_{n,m}(\ell, r). \tag{6}$$

因此，定理 C 证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，一个族 $(p_{n,n})$ 属于 symVF，当且仅当存在一个常数 $k \in \mathbb{N}$，使得 $(p_{n,n}) \in \mathfrak{P}^k_{n,n}(0,0)$。

我们回顾 [DPS25 中的以下示例，例 3.8], 该示例说明，对于任意常数，都是关于 $\mathfrak{P}^k_{n,m}(0,0)$ 的多项式，其中$k \geq 2$。注意，对于 $\mathfrak{T}^k{}_{,n}{}^q{}_{,m}$，也可以构造类似的示例。

例 6.3. 设 ℓ，$r \in \mathbb{N}$，并考虑(ℓ,r)-带标号无边二分图$\boldsymbol{J} := (J, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$。由于$J$没有边，因此对于任意$k \geq \ell + r$，它显然属于类 $\mathcal{P}^k(\ell, r)$。对于所有n、$m \in \mathbb{N}$以及标记$\boldsymbol{v} \in [n]^\ell$、$\boldsymbol{w} \in [m]^r$，我们有：

$$\boldsymbol{J}_{n,m}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{\substack{h: A \uplus B \to [n] \uplus [m] \\ h(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v} \\ h(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{w}}} 1 = 1.$$

也就是说，从J到K_n恰有一个保留标记的同态m。

以下示例说明，变量是关于$\mathfrak{P}^k_{n,m}$的多项式。

例 6.4. 设 ℓ，$\mathrm{r} \in \mathbb{N}$，并考虑 $\mathrm{F} = (\mathrm{F}, \mathrm{a}, \mathrm{b})$ 是一个由单边构成的 (ℓ, r)-带标签二分图。由于 F 存在宽度为 $\ell + \mathrm{r}$ 的路径分解，因此 $\mathrm{F} \in \mathcal{P}^k(\ell, \mathrm{r})$，其中 $\mathrm{k} = \ell + \mathrm{r}$。对于 $\mathrm{n}, \mathrm{m} \in \mathbb{N}$，令 $\mathrm{v} \in [\mathrm{n}]$，$\mathrm{w} \in [\mathrm{m}],$，并令 $\mathrm{v} = \mathrm{v} \cdots \mathrm{v} \in [\mathrm{n}]^\ell$，$\mathrm{w} = \mathrm{w} \cdots \mathrm{w} \in [\mathrm{m}]^r$。则有 $\mathrm{F}_{n,m}(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = \mathrm{x}_{v,w}$。

6.1 同态多项式映射上的运算

定理 6.1 的证明中，针对 [DPS25] 中的 $\mathfrak{T}^k_{n,\ m}$证明了加法和乘法等闭包性质。我们需要 $\mathfrak{T}^k{}_{,n}{}^q{}_{,m}$ 和 $\mathfrak{P}^k_{n}$也满足类似性质，$_m$。为此，我们重新考察 [DPS25 第 5 节2]中介绍的带标号图及其对应同态多项式映射上的某些运算。首先指出，带标号图的左侧标记和右侧标记可以互换。这样可以简化本节其余部分的记号；我们只陈述关于左侧标记上的运算的结果。

6.1.1 不交并

对于带标号图 $\mathrm{F} = (\mathrm{F}, \mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathcal{G}(\ell, \mathrm{r})$ 和 $\mathrm{F}' = (\mathrm{F}', \mathrm{a}', \mathrm{b}') \in \mathcal{G}(\ell', \mathrm{r}')$，定义它们的不交并 $\mathrm{F} \otimes \mathrm{F}' \in \mathcal{G}(\ell + \ell', \mathrm{r} + \mathrm{r}')$ 为 $(\mathrm{F} \uplus \mathrm{F}', \mathrm{aa}', \mathrm{bb}')$。类似地，对于同态多项式映射 $\varphi \in \mathfrak{G}(\ell, \mathrm{r})$ 和 $\varphi' \in \mathfrak{G}(\ell', \mathrm{r}')$，定义 $\varphi \otimes \varphi' \in \mathfrak{G}(\ell + \ell', \mathrm{r} + \mathrm{r}')$ 如下：

$$(\varphi \otimes \varphi')(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \varphi(v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_r) \cdot \varphi'(v_{\ell+1}, \ldots, v_{\ell+\ell'}, w_{r+1}, \ldots, w_{r+r'}), \tag{7}$$

对所有$\boldsymbol{v} \in [n]^{\ell+\ell'}$ 和$\boldsymbol{w} \in [m]^{r+r'}$。

在 [DPS25中，引理5.10], 指出，对于常数k，集合 $\mathcal{T}_k$ 以及相应的集合 $\mathfrak{T}^k$ 在不交并下是闭的。我们注意到，有界树深度类和有界路径宽度类也具有相同的闭包性质。

引理 6.5（带标号图的不交并）。令 k、k'、q、q'、ℓ、ℓ'、r、$r' \in \mathbb{N}$。

1. 若$\boldsymbol{F} \in \mathcal{T}k(\ell,r)$且$\boldsymbol{F'} \in \mathcal{T}k'(\ell',r')$，则$\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F'} \in \mathcal{T}k''(\ell+\ell',r+r')$其中

$$k'' := \max\{k, k', \ell + \ell' + r + r'\}.$$

2. 若$\boldsymbol{F} \in \mathcal{T}k,q(\ell,r)$且$\boldsymbol{F'} \in \mathcal{T}k',q'(\ell',r')$，则$\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F'} \in \mathcal{T}k'',q''(\ell+\ell',r+r')$其中

$$k'' := \max\{k, k', \ell+\ell'+r+r'\}, \quad q'' := \max\{q+\ell'+r', q'+\ell+r\}.$$

3. 若$\boldsymbol{F} \in \mathcal{P}k(\ell,r)$且$\boldsymbol{F'} \in \mathcal{P}k'(\ell',r')$，则$\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F'} \in \mathcal{P}^{k''}(\ell+\ell',r+r')$对于

$$k'' := \min\big\{\max\{k, k'+\ell+r\}, \max\{k', k+\ell+r\}\big\}.$$

证明。第一个断言已在 [DPS25，引理5中证明。10] 将 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F'}$ 的树分解连接起来，并在新根袋中包含 $\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F'}$的所有带标签顶点。

对于第二个断言，注意这个新的有根分解的深度为$q'' :=\max\{q+\ell'+r', q'+\ell+r\}$。

对于最后一个断言，令 $B_1, \ldots, B_s$ 和 $B'_1, \ldots, B'_{s'}$ 分别表示 F 和 F′的路径分解。不妨设 B_1 和 B'_1 仅包含带标签顶点。那么，$B_1 \cup B'_1, B_2 \cup B'_1, \ldots, B_s \cup B'_1, B'_2, \ldots, B'_{s'}$是 $F \otimes F'$ 的一个路径分解，其袋大小至多为 $\max\{k+\ell'+r', k'\}$。交换 F 和 F′的角色即可得到另一个分解。 □

方程（7）和引理 6.5通过线性性推出以下引理。

引理 6.6（不 交并的同态多项式映射）。设 k，k'，q，q'，ℓ，ℓ'，r，$r' \in \mathbb{N}$.

1. *If* $\varphi \in \mathfrak{T}^{k}_{n,m}(\ell,r)$ *and* $\varphi' \in \mathfrak{T}^{k'}_{n,m}(\ell',r')$, *then* $\varphi \otimes \varphi' \in \mathfrak{T}^{k''}_{n,m}(\ell+\ell',r+r')$.
2. *If* $\varphi \in \mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell,r)$ *and* $\varphi' \in \mathfrak{T}^{k',q'}_{n,m}(\ell',r')$, *then* $\varphi \otimes \varphi' \in \mathfrak{T}^{k'',q''}_{n,m}(\ell+\ell',r+r')$.
3. *If* $\varphi \in \mathfrak{P}^{k}_{n,m}(\ell,r)$ *and* $\varphi' \in \mathfrak{P}^{k'}_{n,m}(\ell',r')$, *then* $\varphi \otimes \varphi' \in \mathfrak{P}^{k''}_{n,m}(\ell+\ell',r+r')$.

这里，k'' 和 q'' 与引理6.5的相应情形中的定义相同。

6.1.2 粘合积与逐点乘法

带标号图上的粘合操作记作 $\boldsymbol{F} \odot \boldsymbol{F'} \in \mathcal{G}(\ell,r)$，其定义如下：取底层图 F 和F'的不交并，并将带有左侧标签 $\boldsymbol{a}$ 的顶点与标记为 $\boldsymbol{a}'$的顶点识别；对标记为 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}'$的顶点也进行同样处理。

对于同态多项式映射 $\varphi, \varphi' \in \mathfrak{G}_{n,m}(\ell,r)$，定义它们的逐点乘积如下

$$(\varphi \odot \varphi')(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \cdot \varphi'(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}).$$

在 [DPS25，引理 5。11], 中已证明，由树宽有界的模式产生的同态多项式的线性组合所构成的集合在粘合操作下是封闭的。我们注意到，由有界树深度和有界路径宽度定义的类也具有相同的闭包性质。

引理 6。7 (粘合)。设 k，ℓ，$r \in \mathbb{N}$，并定义

$$k'' := \min\big\{\max\{k, k'+\ell+r\}, \max\{k', k+\ell'+r'\}\big\}.$$

那么，对于上文定义的粘合操作 $\boldsymbol{F} \odot \boldsymbol{F'} \in \mathcal{G}(\ell,r)$，以下结论成立：

1. 如果 F，$F' \in \mathcal{T}k(\ell, r)$，那么 $F \odot F' \in \mathcal{T}k(\ell, r)$。*2.* 如果 F，$F' \in \mathcal{T}k,q(\ell, r)$，那么 $F \odot F' \in \mathcal{T}k,q(\ell, r)$。*3.* 如果 $F \in \mathcal{P}^{k}(\ell, r)$ 且 $F' \in \mathcal{P}^{k'}(\ell, r)$，那么 $F \odot F' \in \mathcal{P}k''(\ell, r)$。

证明。第一个断言由 [DPS25，引理 5.11] 证明。同样的论证也能证明第二个断言。对于第三个断言，设 B_1,……，B_s 和 B'_1，……，B'_r 分别表示 F 和 F′ 的路径分解中的袋，且 B_1 和 B'_1 分别恰由带标签顶点组成。那么，$B'_1 \cup B_1, B'_2 \cup B_1$,……，$B'_r \cup B_1, B_1, B_2$ ……，B_s 和 $B_1 \cup B'_1$、$B_2 \cup B'_1$、……、$B_s \cup B'_1$、B'_1、B'_2、……、B'_r 都是 F $\odot$ F′ 的路径分解。前者的宽度为 $\max\{k' + \ell + r,\ k\} - 1$，后者的宽度为 $\max\{k\ + \ell' + r',\ k'\} - 1$，如所求。 □

对于路径宽度，我们还证明以下引理，以便重复应用粘合操作。

引理 6.8. 设 $k, \ell, r \in \mathbb{N}$。若 $F_1, \ldots, F_s \in \mathcal{P}k(\ell, r)$，则 $F_1 \odot \cdots \odot F_s \in \mathcal{P}^{k+\ell+r}(\ell, r)$。

证明。 通过归纳应用引理6.7 即可证明。考虑

$$F_1 \odot \cdots \odot F_s = (F_1 \odot \cdots \odot F_{s-1}) \odot F_s.$$

根据假设和前提，第一个因子属于 $\mathcal{P}^{k+\ell+r}(\ell, r)$，第二个因子属于 $\mathcal{P}_k(\ell, r)$。根据引理 6.7，它们的乘积属于 $\mathcal{P}_{k'}(\ell, r)$，因此

$$k' = \min\{\max\{k + \ell + r, k + (\ell + r)\}, \max\{k, (k + \ell + r) + (\ell + r)\}\} = k + \ell + r,$$

如所需。 □

引理 6.9（同态多项式映射的粘合）**.** 设 k、ℓ、ℓ'、r、r'、n、$m \in \mathbb{N}$，并定义

$$k'' \ := \ \min\{\max\{k, k' + \ell + r\}, \max\{k', k + \ell' + r'\}\}.$$

那么，对于上述定义的粘合操作，以下结论成立：

1. *If* $\varphi, \varphi' \in \mathfrak{T}^{k}_{n,m}(\ell, r)$ *then* $\varphi \odot \varphi' \in \mathfrak{T}^{k}_{n,m}(\ell, r)$
2. *If* $\varphi, \varphi' \in \mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell, r)$ *then* $\varphi \odot \varphi' \in \mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell, r)$
3. *If* $\varphi \in \mathfrak{P}^{k}_{n,m}(\ell, r)$ *and* $\varphi' \in \mathfrak{P}^{k'}_{n,m}(\ell, r)$, *then* $\varphi \odot \varphi' \in \mathfrak{P}^{k''}_{n,m}(\ell, r)$.

6.1.3 受限和

令 a nd $F = (F, a, b) \in \mathcal{G}(\ell, r)$ 为一个带标签二分图。对于任意 $i \in [\ell]$，定义

$$\Sigma_i F \ := \ (F, a[i/], b) \ \in \ \mathcal{G}(\ell - 1, r)$$

为删除第 i 个左侧标签后得到的图。类似地，对于同态多项式映射 φ，定义

$$(\Sigma_i \varphi)(v[i/], w) \ := \ \sum_{u \in [n]} \varphi(v[i/u], w),$$

对于所有 $v \in [n]^{\ell}$ 和 $w \in [m]^{r}$。这里，v[i/u] 表示将元组 v 的第 i 个分量替换为 u 后得到的元组。

由于去标号既不影响底层二分图，也不影响它们的分解，以下恒等式成立，参见 [DPS25，引理5。9]。

引理6。10 (去标号)。 令 k，ℓ，$r \in \mathbb{N}$ 其中 $\ell \geq 1$，并令 $i \in [\ell]$。

1. 如果$F \in \mathcal{T}k(\ell, r)$，那么 $\Sigma_i F \in \mathcal{T}k(\ell - 1, r)$。2.
如果$F \in \mathcal{T}k,q(\ell, r)$，那么 $\Sigma_i F \in \mathcal{T}k,q(\ell - 1, r)$。

3. *If* $\boldsymbol{F} \in \mathcal{P}^k(\ell, r)$, *then* $\Sigma_i \boldsymbol{F} \in \mathcal{P}^k(\ell - 1, r)$.

引理 6.10中的恒等式可以提升到同态多项式。此外，它们还可以推广到以下受限求和算子。设$i \in [\ell]$ 且$J \subseteq [\ell] \setminus \{i\}$。对于$\varphi \in \mathfrak{G}_{n,m}(\ell,r)$，定义

$$(\Sigma_{i,J}\, \varphi)\,(v[i/], w) \coloneqq \sum_{u \in [n] \setminus \{v_j \mid j \in J\}} \varphi(v[i/u], w)$$

以下恒等式成立。

引理 6.11 (同态多项式映射的受限求和)**.** 设 k, ℓ,$r \in \mathbb{N}$ 满足$\ell \geq 1$，且 $i \in [\ell]$ 和 $J \subseteq [\ell] \setminus \{i\}$。假设 $\ell + r \leq k$ 且 $k \leq q$。设 n,$m \in \mathbb{N}$。对于上述定义的受限求和运算，以下结论成立：

1. 若 $\varphi \in \mathfrak{T}^k_{n,m}(\ell, r)$，则 $\Sigma_{i,J}(\varphi) \in \mathfrak{T}^k_{n,m}(\ell - 1, r)$。*2.* 若 $\varphi \in \mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell, r)$，则 $\Sigma_{i,J}(\varphi) \in \mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell - 1, r)$。
3. 若 $\varphi \in \mathfrak{P}^k_{n,m}(\ell, r)$，则 $\Sigma_{i,J}(\varphi) \in \mathfrak{P}^k_{n,m}(\ell - 1, r)$。

证明。第一个断言由 [DPS25，引理 5.12]得出。对于另外两个断言，回顾其证明。证明中指出，对于某个 $\delta \in \mathfrak{G}_{n,m}(\ell, \mathrm{r})$，有 $\Sigma_{i,J}\varphi = \Sigma_i(\delta \otimes \varphi)$；该对象由某个不含无标号顶点的图 $\mathrm{D}^{i,j} \in \mathcal{G}(\ell, \mathrm{r})$ 通过取粘合幂和线性组合得到。这里，$\mathrm{D}^{i,j}$ 是一个 (ℓ, r)-带标签、无边且有 $(\ell - 1, \mathrm{r})$ 个顶点的二分图，其标签的放置方式使得第 i 个和第 j 个左侧标签位于同一顶点，而所有其他标签位于互不相同的顶点上，参见 [DPS25, (6)]。同态多项式映射 δ 由 $\mathrm{p}(\sum_{j \in J} \mathrm{D}^{i\,j}_{n},_{,m})$ 给出，其中 $\mathrm{p} \in \mathbb{K}[\mathrm{x}]$是某个多项式。

对于树深度的情形，根据引理 6.9，$\delta \otimes \varphi \in \mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell, r)$。根据引理 6.10，$\Sigma_i(\delta \otimes \varphi) \in \mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell, r)$。对于路径宽度的情形，需要更加仔细。由于 $\boldsymbol{D}'$ 中的所有顶点都有标号，因此，对其取粘合积得到的任何图也都满足这一点。因此，δ 的每个组成图都是一个没有无标号顶点的 (ℓ, r)-带标签二分图。由于 φ 的任一组成图中的所有带标签顶点都位于某个路径分解的同一个袋中，因此，将 δ 与 φ取粘合积不会增加路径宽度。用符号表示，$\delta \otimes \varphi \in \mathfrak{P}^k_{n,m}(\ell, r)$。根据引理6.10，$\Sigma_i(\delta \otimes \varphi) \in \mathfrak{P}^k_{n,m}(\ell - 1, r)$。 □

6.1.4 受限乘积

设 $i \in [\ell]$ 和 $J \subseteq [\ell] \setminus \{i\}$。对于 $\varphi \in \mathfrak{P}^k_{n,m}(\ell,r)$，在 $\mathfrak{P}^k_{n,m}(\ell, r)$ 上定义受限积如下：

$$(\Pi_{i,J}\varphi) \coloneqq \prod_{u \in [n] \setminus \{v_j \mid j \in J\}} \varphi(v[i/u], w),$$

对于所有 $\mathrm{v} \in [\mathrm{n}]^\ell$ 和 $\mathrm{w} \in [\mathrm{m}]^r$。在 [DPS25，第 5.2 节。7], 中，已证明 $\mathfrak{T}^k$ 对受限积封闭。在下面的引理中，我们将证明有界树深度$_{\mathfrak{T}^{k,n}}{}^{q},_{m}$ 和路径宽度类 $\mathfrak{P}^k_{n,m}$的类似结论。证明与 [DPS25，第 5.2 节。7],中的论证非常相似，我们建议读者在继续阅读前先查阅该节了解背景。

引理 6.12 (受限乘积)。 设 k，ℓ，r，n，m，$q \in \mathbb{N}$。假设 $\ell + r \leq k$。对于 $i \in [\ell]$ 和 $J \subseteq [\ell] \setminus \{i\}$，以下结论成立：

1. *If* $\varphi \in \mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell, r)$, *then* $\Pi_{i,J}(\varphi) \in \mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}(\ell - 1, r)$.

2。 若 $\varphi \in \mathfrak{P}^{k}_{n,\ m}(\ell,\ r)$，则 $\Pi_{i,\ J}(\varphi) \in \mathfrak{P}^{3k}_{n,\ m}(\ell-1,\ r)$

证明。 我们证明第二个断言；第一个断言可通过将有界路径宽度操作替换为前文讨论的有界树深度操作，以类似方式得出。

与 [DPS25, 推论 5.18] 中一样，证明通过对 $|J|$ 进行归纳法完成。首先，考虑基例 $J = \emptyset$，这对应于 [DPS25, 定理 5.13]。根据该定理，$\Pi_i(\varphi) \in \mathfrak{T}^{k}_{n,m}(\ell-1, r)$。根据 [DPS25, (8)]，这个线性组合的组成图具有以下形式

$$\Pi^{\pi}_{i}(\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n) := \bigodot_{P \in [n]/\pi} \left(\Sigma_i \bigodot_{v \in P} \boldsymbol{F}^{v} \right)$$

其中 π 是 $[n]$ 的一个划分，而 $F^1, \ldots, F^n \in \mathcal{P}^{k}(\ell, r)$ 是 φ 的一些组成图。根据引理 6.8，由于 $\ell + r \leq k$，对于每个 $P \subseteq [n]$，都有 $\bigodot_{v \in P} F^{v} \in \mathcal{P}^{2k}(\ell, r)$。根据引理 6.10，$\Sigma_i \bigodot_{v \in P} F^{v} \in \mathcal{P}^{2k}(\ell-1, r)$。最后，根据引理 6.7，$\Pi^{\pi}_{i}(F_1, \ldots, F_n) \in \mathcal{P}^{3k}(\ell-1, r)$。根据 [DPS25, (8)]，线性组合 $\Pi_i(\varphi)$ 中出现的模式图均具有这种形式，因此 $\Pi_i(\varphi) \in \mathfrak{P}^{3k}_{n,m}(\ell-1, r)$。基例的证明至此完成。

对于归纳 步骤，考虑 [DPS25 推论5 的证明中的最后一个方程。18] :

$$\Pi_{i,J}(\varphi) = \psi \odot \Pi_{i,J'}(\varphi) + (1-\psi) \odot \left(\Pi_{i,J'}(\varphi + \boldsymbol{D}^{i,j}_{n,m}) - \Pi_{i,J'}(\varphi) \right). \tag{8}$$

这里，J' 是 J 的某个子集，使得 $|J| = |J'| + 1$。此外，$D^{i,j}$ 是一个 (ℓ, r)-标记的无边 $(\ell-1, r)$-顶点二分图，其标签的放置方式如下：第 i 个和第 j 个左侧标签位于同一个顶点上，而所有其他标签分别位于不同的顶点上，见 [DPS25, (6)]。显然，$D^{i,j} \in \mathcal{P}k(\ell, r)$。最后，$\psi := p(\ ^{1}n\ \sum_{j' \in J'}(\Sigma_i D_{i,}{}^{j'} n, m))$，其中 $p \in \mathbb{K}[x]$是某个多项式。可得$\Sigma_i D^{i,j'} \in \mathcal{P}k(\ell-1, r)$。因此，由引理 6.8，$\psi \in \mathfrak{P}^{2k}_{n,m}(\ell-1, r)$。

根据归纳假设，方程（8）中的每个最外层粘合积都有一个因子属于 $\mathfrak{P}^{3k}_{n,m}(\ell-1, r)$，另一个因子属于 $\mathfrak{P}^{2k}_{n,m}(\ell-1, r)$。根据引理 6.7，$\Pi_{i,J}(\varphi) \in \mathfrak{P}^{k''}{}_{n,m}(\ell-1, r)$，

$$k'' = \min\{\max\{3k, 2k+\ell-1+r\}, \max\{2k, 3k+\ell-1+r\}\} \leq 3k,$$

正如所需。 □

6.2 矩阵对称公式（symVF）

本节将给出定理 B 的完整证明。等价关系的两个方向分别在第 6.2.1 节和第 6.2.2 节中证明。

6.2.1 有界树深度同态多项式属于symVF

我们首先证明，有界树宽模式的同态多项式可以由多项式轨道大小的矩阵对称刚性公式计算。

引理 6.13. 设 F 是一张树深度为 d 的二分多重图，且 $n, m \in \mathbb{N}$。那么 同态$_{F,n,m}$ 可以由一个 $\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称刚性公式计算，其大小至多为 $(|V(F)| \cdot |E(F)| \cdot (n+m))^{d}$，支撑大小至多为 d，深度至多为 d。

证明。 设T 是F的一棵消去树。我们通过对T作归纳法，构造一个用于 hom$_{F,n,m}$ 的公式C 。对于每个$u \in V(T)$，令$P(u) \subseteq V(T) = V(F)$ 表示从T 的根节点到u 的唯一路径上出现的顶点（不包括u）。在电路C中，我们为每个$u \in V(T)$ 以及每个

保持二分划分的映射 γ: P(u) $\to$ [n] $\uplus$ [m], a 个门 $g_{u,\gamma}$，它是一个子公式 $C_{u,\gamma}$ 的根节点。该子公式定义如下。令 E(u) $\subseteq$ E(F) 表示 F 中所有边 uv 的集合，其中 a 个 v $\in$ P(u)。假设 u 位于 F 的二分划分的左侧；否则，将下方表达式中的 h：{u} $\to$ [n] 替换为 h：{u} $\to$ [m],，并将 $x^{h(u)\gamma(w)}$ 替换为 $x^{\gamma(w)h(u)}$。

$$C_{u,\gamma} := \sum_{h\colon \{u\}\to[n]} \prod_{uw\in E(u)} x_{h(u)\gamma(w)} \cdot \prod_{v\in uE(T)} C_{v,\gamma\cup h}.$$

为使电路具有刚性，我们采用以下技巧。固定一个双射 ℓ：$uE(T)$ $\to$ $[|\quad|]$ $\quad v\ \gamma\cup h$ $\quad \prod_{v\in uE(T)}\ v\ \gamma\cup h$ $\quad 1^{\ell(v)}\ uE(T)$。在实际电路中，我们将每个 C 与乘积 C 中的 相乘。这不会改变语义，但能确保任何电路自同构都无法置换该乘积中出现的子电路。这样便消除了在固定所有输入门的同时移动内部门的潜在非平凡电路自同构。

注意，如此定义的 C 确实是一个公式，因为每个子公式 $C_{v,\gamma\cup h}$ 在 C 中都有唯一父节点。也就是说，对于 T 中 v 的父节点 u，这是 $C_{u,\gamma}$ 中的乘积门，对 $C_{u,\gamma}$ 的求和中 h 的特定选择而言。

断言 6.13a。 对于每个 $u \in V(T)$ 以及每个 γ：$P(u) \to [n] \uplus [m]$,，子公式 $C_{u,\gamma}$ 是一个刚性的 **Stab**$^{\bullet}(\gamma(P(u)))$-对称公式。

命题证明。对 T 的结构进行归纳法即可证明此结论。若 u 是叶节点，则该结论对 $C_{u,\gamma}$显然成立。现在假设 u 是 T 的非叶节点。根据归纳法，$C_{v,\gamma\cup h}$ 中每一项都出现在 C $\quad u\ \gamma \quad {}^{\bullet}\ \gamma \quad \cup\{\quad\}$ $\quad \prod_{uw\in E(u)}\ h(u)\gamma(w) \quad {}^{\bullet}\ \gamma \quad \cup$ 中，且关 $\{\quad\}$ $\quad \{\ \} \to [\ ]$ $\quad {}^{\bullet}\ \gamma$ 于 Stab ((P(u)) h(u)) 对称。同样，x 也关于 Stab ((P(u)) h(u)) 对称。因此，对所有 h : u n 求和所得的结果关于 Stab ((P(u))- 对称，因为其中各加项彼此对称。此外，根据归纳法，每个 $C_{v,\gamma\cup h}$ 都是刚性的，$C_{u,\gamma}$也仍然如此：根据我们的电路构造，$C_{u,\gamma}$ 的每个非平凡自同构都必须置换外层求和中的加项。但这样一来，它就会将某个输入门 $x^{h(u)\gamma(w)}$ 移到另一个输入门 $x_{h'}(u)_{\gamma}(w)$，其中 h′(u) $\neq$ h(u)。因此，$C_{u,\gamma}$ 是刚性的。」

该结论表明， γ(P(u)) 是 $g_{u,\gamma}$ 中出现的求和门和乘积门的一个支撑。因此，C 的支撑大小确实至多为 d，因为 |P(u)| $\leq$ d。对于作为 T 根节点的 u，P(u) $= \emptyset$，所以由该结论可知，整个电路 C 是 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$-对称的，正如所需。根据定义，显然它计算 $\mathrm{hom}_{F,n,m}$；另请参见 [KPR23, Theorem 11] 的证明。

剩下的任务是估计 C 的大小。由归纳法可知， $|C_{u,\gamma}| \leq (|V(F)| \cdot |E(F)| \cdot (n+m))^c$，其中 c 是 T 中以 u 为根的子树的高度。事实上，若 u 是叶节点，则 $|C_{u,\gamma}| \leq |E(F)| \cdot (n+m)$。若 u 是一个高度为 c 的子树的内部节点，则利用归纳假设，

$$\begin{aligned} |C_{u,\gamma}| &\leq (n+m)\cdot|V(F)|\cdot|E(F)|\cdot(|V(F)|\cdot|E(F)|\cdot(n+m))^{c-1} \\ &= (|V(F)|\cdot|E(F)|\cdot(n+m))^c \end{aligned}$$

这里，因子 $|V(F)|$ 是 $|uE(T)|$的上界，即子电路 $C_{v,\gamma\cup h}$的数量；而因子 $|E(F)|$ 是乘积 $\prod_{uw\in E(u)} x_{h(u)\gamma(w)}$大小的上界。 □

推论 *6.14*。固定 $d \in \mathbb{N}$。设 $(p_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ 是一个多项式族，使得每个 $p_{n,m}$ 都是同态多项式 $\mathrm{hom}_{F_i,n,m}$ 的线性组合，其中每个二分多重图 F_i 的树深度至多为 d。则每个 $p_{n,m}$ 都具有一个轨道大小至多为 $(n+m)^d$ 且深度至多为 d 的 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_m$ 对称刚性电路。若进一步地，每个 $p_{n,m}$ 中模式 F_i 的数量以及 $|F_i|$ 的大小都是 $(n+m)$ 的多项式，则电路大小也为多项式。

证明。对线性组合 $p_{n,m}$ 中的每个单独的同态多项式应用引理 6.13，从而为每个 $\hom_{F_i}$,n,m 得到一个支撑大小和深度均为 d 的刚性对称公式。于是，表示 $p_{n,m}$ 的公式 C 是这些公式的加权和。为确保 C 的刚性，我们只需将每个 $\hom_{F_i}$,n,m 乘以 $1^{\ell(i)}$，并为每个 i 取不同的 ℓ(i) $\in \mathbb{N}$ 。根据引理 2.5，每个 $\hom_{F_i}$,n,m 的公式的轨道大小至多为 $(n+m)^d$。根据构造，C 的所有自同构都必须稳定相应的 $\hom_{F_i}$,n,m 公式，因此 C 的轨道大小不大于 $\hom_{F_i}$,n,m 公式的轨道大小。该陈述的第二部分直接由引理 6.13 中的电路大小上界得到。

□

6.2.2 symVF 计算有界树深度同态多项式

设 $(C_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ 是一个矩阵对称公式族，其轨道大小至多为 $(n+m)^d$，其中$d \in \mathbb{N}$ 是某个常数。我们的目标是证明，$C_{n,m}$ 计算的多项式是常数树深度模式的同态多项式的线性组合。根据定理6.1，这些模式的树宽是常数。为了同时界定树深度，我们引入对称电路的支撑深度 这一概念，并证明两个结果：首先，具有多项式轨道大小的对称公式必须具有常数支撑深度。其次，电路具有常数支撑深度，也意味着其所计算同态多项式对应的模式具有常数树深度。

界定对称公式的支撑深度。 设 C 是一个 $\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称公式。如果门 g 在 C 中是大的，则至少存在 $\min\{n,m\}/2$ 个不同的子节点，它们都属于同一个 $\mathbf{Stab}(g)$-轨道。对于 g 的任一子节点，如果其 $\mathbf{Stab}(g)$-轨道大小至少为 $\min\{n,m\}/2$，则称其为 g 的中心的 子节点。

引理 6.15. 设 C 是一个 $\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称公式。假设存在一条从根节点到输入门的路径，经过 d 个大型门，并且每次都沿着其中一个中心子节点前进。那么 最大轨道$(C) \geq \frac{1}{2^d} \cdot (\min\{$自然数集$,m\})^d$。

证明。 我们通过归纳法证明以下断言：设 P 是一条以大型门 g 为起点、以输入门为终点的路径，它总共经过 d 个大型门，并且每次都沿着大型门的一个中心子节点前进。那么，以 g 为根节点的子公式包含一个门，其 $\mathbf{Stab}(g)$-轨道大小至少为 $\frac{1}{2^d} \cdot (\min\{$自然数集$,m\})^d$。

对于 $d = 1$，我们无需利用 P。设 g 是 P 的起始大型门。那么 g 有$\geq \min\{$自然数集$,m\}/2$ 个子节点属于同一个 $\mathbf{Stab}(g)$-轨道，因此以 g为根节点的子公式中存在一个门，其 $\mathbf{Stab}(g)$-轨道大小至少为 $\frac{1}{2} \cdot \min\{$自然数集$,m\}$ 。

现在考虑 $d+1$ 的情形，并令 g_1 为 P 开始所在的大型门。令 g_2 为路径上的下一个大型门。根据归纳假设，以 g_2 为根节点的子公式包含一个门，记为 g^*，其 Stab(g_2)-轨道的大小至少为 $\frac{1}{2^d} \cdot (\min\{n, m\})^d$。由于 P 从带有一个中心子节点 h 的 g_1继续前进，因此 g_1 至少有 n/2 个子节点 h' ，使得以 h' 为根节点的子公式与以 h 为根节点的子公式关于 Stab(g_1) 对称。任取这样的 $h' = \pi_{h'}(h)$，其中 $\pi_{h'} \in \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_m$。那么，在以大型门 $\pi_{h'}(g_2)$为根节点的子电路中，会出现门 $\pi_{h'}(g^*)$，并且其 Stab($\pi_{h'}$(g_2))-轨道的大小至少为 $\frac{1}{2^d} \cdot (\min\{n, m\})^d$。因此，对于每个 $h' = \pi_{h'}(h) \in \mathrm{Orbs}_{\mathbf{Stab}(g_1)}(h)$，我们都可以将其与以 h'为根节点的子公式中具有大轨道的不同门 $\pi_{h'}(g^*)$相关联。由于所有这些门都属于同一个 Stab(g_1)-轨道，该轨道的大小至少为 $\frac{1}{2} \cdot \min\{n, m\} \cdot \frac{1}{2^d} \cdot (\min\{n, m\})^d = \frac{1}{2^{d+1}} \cdot (\min\{n, m\})^{d+1}$。这就完成了归纳步骤。 □

上述引理将路径上大型门数量的下界转化为对称公式的轨道大小下界。接下来还需将其与门的支撑集联系起来。

在刚性$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称电路$C$中，如果门$g$支持变化，即$g$有一个子节点$h$，使得$\sup(h) \setminus \sup(g) \neq \emptyset$，则称$h$为$g$的支持变化子节点。如果从$C$的根节点到某个输入门的路径中心的，那么对于路径$P \in$上的每个支持变化门$g$，$P$中$g$的后继节点都是$g$的支持变化子节点。

定义 6.16（支撑深度）。设C为一个$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称电路。令$\mathcal{P}$表示从$C$的根节点到输入门的所有路径构成的集合。路径$P \in \mathcal{P}$的支撑深度$\mathrm{supDp}(P)$是满足以下条件的门$g \in P$的数量：$g$是支持变化的，且$P$包含$g$的一个支持变化子节点。$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称电路$C$的支撑深度为

$$\mathrm{supDp}(C) := \max_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{supDp}(P).$$

引理 6.17。设C是一个刚性的$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称公式，且$\mathrm{maxSup}(C) \leq \min\{n,m\}/2$。设$g \in V(C)$是一个支持变化门。那么$g$是大的，且$g$的每个支持变化子节点都是中心的。

证明。由于g是支持变化的，令h为它的一个子节点，满足$\sup(h) \setminus \sup(g) \neq \emptyset$。假设$\sup_L(h) \setminus \sup_L(g) \neq \emptyset$。$\sup_R(h) \setminus \sup_R(g) \neq \emptyset$的情形类似，只需将$n$替换为$m$。由于我们假设$|\sup(h)_L| \leq n/2$，因此有

$$\begin{aligned} |\mathbf{Orb}_{\mathbf{Stab}^\bullet(\sup(g))}(\sup(h)_L \setminus \sup(g)_L)| &= |\{S \subseteq [n] \setminus \sup(g)_L : |S| = |\sup(h)_L \setminus \sup(g)_L|\}| \\ &\geq n/2. \end{aligned}$$

$\mathrm{Orbs}_{\mathbf{Stab}^\bullet(\mathrm{sup(g)})}(\mathrm{sup(h)}_L \setminus \mathrm{sup(g)}_L)$的每个元素都对应于 g 的一个不同子节点，因此 g 至少有 n/2 个子节点，且它们都处于同一个 $\mathrm{Stab}^\bullet(\mathrm{sup(g)})$-轨道中。由于 $\mathrm{Stab}^\bullet(\mathrm{sup(g)}) \leq \mathrm{Stab(g)}$，这些门尤其处于同一个 Stab(g)-轨道中。因此，g 符合我们上面对大型门的定义，并且每个支持变化子节点都是中心的。□

推论 6.18. 设C是一个$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称公式，满足$\mathrm{maxSup}(C) \leq \min\{n,m\}/2$。设$d \in \mathbb{N}$为一个常数。假设$\mathrm{supDp}(C) \geq d$。那么$\mathrm{maxOrb}(C) \geq \frac{1}{2^d} \cdot (\min\{n,m\})^d$。—

证明。设P是一条见证$\mathrm{supDp}(C) \geq d$的路径。根据引理 6.17，P经过d个大型门，并且在这些门处沿着中心子节点前进。因此，根据引理$(C) \geq \frac{1}{2^d} \cdot (\min\{n,m\})^d$ 6.15。—

□

支撑深度为常数意味着模式的树深度为常数。现在我们将证明，对称公式$C_{n,\,m}$其支撑大小和支撑深度均为常数，总能计算出一个关于$\mathfrak{T}^k_{n^q,\,m}$的多项式，其中k和q是某些常数。根据引理 6.2，这意味着所有出现的模式图都具有常数树深度。

这个结果基本上可由 [DPS25, 定理 1.1]，的证明推出，只需考虑到在我们这里的设定中，电路的支撑大小和支撑深度都有界。具体而言，[DPS25, 引理 5.21] 通过归纳证明，刚性$\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_m$-对称电路中每个支撑大小至多为 k 的门 g，都会计算出一个关于$\mathfrak{T}^{2k}_{n,m}(\vec{\sup}_L(\mathrm{g}), \vec{\sup}_R(\mathrm{g}))$的多项式。这里，$\vec{\sup}_L(\mathrm{g})$，$\vec{\sup}_R(\mathrm{g})$表示集合$\sup_L(\mathrm{g}), \sup_R(\mathrm{g})$，并将其写成有序元组，使其顺序与模式图中相应的标签一致。

我们要说明，如果电路的支撑深度还被d所界定，那么每个门g计算的都是关于$\mathfrak{T}^{2k}_{n^{d\cdot k},m}(\vec{\sup}_L(g), \vec{\sup}_R(g))$的多项式。证明对电路结构使用归纳法，归纳步骤归结为以下引理。对于门g，我们用$\mathrm{children}(g)$表示其子节点集合，即电路中作为g输入的门。

引理 *6.19*。设 $k \in \mathbb{N}$。设 C 是一个刚性的 $Sym_n \times Sym_m$-对称电路。设 $g \in V(C)$ 是一个乘法门或求和门，且 $|sup(g)| \leq k$。假设对于每个 $h \in children(g)$，多项式 p_h *is in* $\mathfrak{T}^{2k,q(h)}_{n,m}(\vec{sup}_L(h), \vec{sup}_R(h))$，其中某个 $q(h) \in \mathbb{N}$。对于每个 $h \in children(g)$，令 $\delta(h) := |sup(g) \setminus sup(h)|$。令 $q := \max_{h \in \text{children}(g)} q(h) + \delta(h)$。门 g 处计算的多项式属于 $\mathfrak{T}^{2k,q}_{n,m}(\vec{sup}_L(g), \vec{sup}_R(g))$。

这个引理的证明与 [DPS25 的引理 5.22] 的证明完全相同。唯一的区别是，现在我们还关注树分解的深度，而不仅仅是宽度。 [DPS25 的引理 5.22] 的证明依赖于粘合积保持树宽这一事实，而根据引理6.9 ，深度也同样如此。

由于引理 5.22 在 [DPS25] 中的证明长达数页，这里我们只给出概要，并指出树分解的深度究竟在哪里增长。在引理6.19 的设定下，令 $g \in V(C)$ 为一个门，且满足 $|\text{sup}(g)| \leq k$。

一般情形是g 会改变支撑，但首先考虑它不会改变支撑这一较简单的情形很有启发性。如果g 不改变支撑，那么对每个$h \in$ 子节点(g)，$\text{sup}(h) \subseteq \text{sup}(g)$。根据引理的假设，对每个$h \in$子节点$(g)$，$p_h$ 属于 $\mathfrak{T}^{2k,q(h)}_{n,m}(\vec{\text{sup}}_L(h), \vec{\text{sup}}_R(h))$。

由于 $\text{sup}(h) \subseteq \text{sup}(g)$，我们可以证明$p_h$ 也属于

$$\mathfrak{T}^{2k,q(h)+|\text{sup}(g)\setminus\text{sup}(h)|}_{n,m}(\vec{\text{sup}}_L(g), \vec{\text{sup}}_R(g)).$$

原因如下：对于 p_h 中出现的每个 $F_{n,m}(\vec{\text{sup}}_L(h), \vec{\text{sup}}_R(h))$，我们可以向 F 添加 $|\text{sup}(g) \setminus \text{sup}(h)|$ 个带标签的孤立顶点，从而得到一个新的模式图 F′。形式上，F′ 是将 F 与这些孤立顶点作不交并的结果（见引理 6.5）。由于 $|\text{sup}(g)| \leq k$，所得分解的宽度仍至多为 2k，但深度会随着所添加的孤立顶点数量而增加。以这种方式给模式图添加更多标签不会改变多项式 p_h ，因为这相当于将每个 $F_{n,m}(\vec{\text{sup}}_L(h), \vec{\text{sup}}_R(h))$ 乘以 Example 6.3 中的$1 = J_{n,m}(\vec{\text{sup}}_L(g)\setminus \vec{\text{sup}}_L(h), \vec{\text{sup}}_R(g)\setminus \vec{\text{sup}}_R(h))$（另见 [DPS25, 引理 5.21]的证明）。因此，根据引理 6.6，$p_h \in \mathfrak{T}^{2k,q(h)+|\text{sup}(g)\setminus\text{sup}(h)|}_{n,m}(\vec{\text{sup}}_L(g), \vec{\text{sup}}_R(g))$。

由于我们可以对每个 $h \in$children(g) 都这样做，因此在 g 处计算出的多项式，就是对多项式 $p_h \in \mathfrak{T}^{2k,q(h)+\delta(h)}_{n,m}(\vec{\text{sup}}_L(g), \vec{\text{sup}}_R(g))$ 求和或求积，其中对于所有 $h \in$children(g)，$\delta(h) = |\text{sup}(g) \setminus \text{sup}(h)|$。根据定义，对于每个 $q' \geq q$，$\mathfrak{T}^{k,q}_{n,m} \subseteq \mathfrak{T}^{k,q'}_{n,m}$。因此，

$$\{p_h \mid h \in \text{children}(g)\} \subseteq \mathfrak{T}^{2k,q}_{n,m},$$

对于 $q := \max_{h \in \text{children}(g)} q(h) + \delta(h)$。由于 $\mathfrak{T}^{2k,q}_{n,m}(\vec{\text{sup}}_L(g), \vec{\text{sup}}_R(g))$ 根据定义对求和封闭，且根据引理 6.9 对求积封闭，因此 g 计算出的多项式也属于 $\mathfrak{T}^{2k,q}_{n,m}(\vec{\text{sup}}_L(g), \vec{\text{sup}}_R(g))$。

剩下的情况是处理 g 发生支撑变化的情形。然后，我们将 g 的子节点划分为 $\text{Stab}^{\text{Stab}^\bullet(\text{sup}(g))}$-轨道。这是可行的，因为根据支撑的定义，群 $\text{Stab}^\bullet(\text{sup}(g)) \leq Sym_n \times Sym_m$ 稳定 g 这个门，因此将 children(g) 集合保持不变。我们分别处理每个轨道。设 $h \in \text{children}(g)$，$O_h \subseteq \text{children}(g)$ 为其 $\text{Stab}^\bullet(\text{sup}(g))$-轨道。令 $S(h) := \bigcap_{h' \in O_h} \text{sup}(h') \subseteq \text{sup}(g)$。我们记 $S_L(h) := S(h) \cap \vec{\text{sup}}_L(g)$，$S_R(h) := S(h) \cap \vec{\text{sup}}_R(g)$。对于任意两个门 h'、$h'' \in O_h$，存在一对置换 $(\pi, \sigma) \in Sym_n \times Sym_m$，使得 $(\pi, \sigma)(h') = h''$。因此，$\pi(\vec{\text{sup}}_L(h')) = \vec{\text{sup}}_L(h'')$，且 $\sigma(\vec{\text{sup}}_R(h')) = \vec{\text{sup}}_R(h'')$。所以，$O_h$ 中各门的支撑彼此对称，并且在 S(h) 上一致。令 $\ell := |\text{sup}_L(h)|$，$r := |\text{sup}_R(h)|$。根据对称性，$O_h$ 中所有门的这些支撑大小都相同。假设

其中 g 是一个乘积门。根据 [DPS25 的证明，引理 5。21], g 所计算的内容是

$$\prod_{O_h}\prod_{h'\in O_h} p_{h'} = \prod_{O_h}\prod_{h'\in O_h}\prod_{\boldsymbol{v}\in([n]\setminus \sup_L(g))^{\ell-|S_L(h)|}}\prod_{\boldsymbol{w}\in([m]\setminus \sup_R(g))^{r-|S_R(h)|}} \varphi_{h'}(\vec{S}_L(h)\boldsymbol{v}, \vec{S}_R(h)\boldsymbol{w}). \tag{9}$$

这里，乘积 $\prod_{O_h}$ 遍历所有被子节点$\mathbf{Stab}^{\bullet}(\sup(g))$-轨道划分的$(g)$，而 $\varphi_{h'}(\vec{}S_L(h)\boldsymbol{v},\ \vec{}S_R(h)\boldsymbol{w})$ 表示由 $p_{h'}$计算得到的、对标签赋予实例化图像的同态多项式映射。

根据引理的假设，我们知道 $\varphi_{h'} \in \mathfrak{T}^{2k,q(h)}_{n,m}$, (ℓ,r)。与前一种情形中的论证相同，我们可以通过向模式图添加 |sup(g) \ sup(h′)| 个孤立顶点，将每个 $\varphi_{h'}$ 扩展为至多含有 2k 个标签的同态多项式映射。然后，我们可以将每个 $p_{h'}$ 视为关于 $\mathfrak{T}^{2k,q(h)+\delta(h)}_{n,m}$, ($\vec{}\sup_L(g)$ $\vec{}\sup_L(h')$, $\vec{}\sup_R(g)$ $\vec{}\sup_R(h')$) 的多项式。前面定义的值 q 是深度的上界，因此我们也可以说 $p_{h'} \in_{\mathfrak{T}^{2k,q}_{n,m}}$, ($\vec{}\sup_L(g)$ $\vec{}\sup_L(h')$, $\vec{}\sup_R(g)$ $\vec{}\sup_R(h')$)。

现在，引理 6.12 的第一个断言表明，方程（9）所示形式的乘积求值得到的是关于 $\mathfrak{T}^{2k,q}_{n,m}$,($\vec{}\sup_L(g)$、 $\vec{}\sup_R(g)$) 的多项式。也就是说，这个大的对称乘积起到了“忘记” $\vec{}\sup_L(g)$之外标签的作用。

如果 g 是一个求和门，论证类似，只需使用引理 6.11。至此，引理 6.19的证明概述就完成了。详细内容请参见 5.22 中的证明，其中 [DPS25], 处的 $\mathfrak{T}^{k}_{n,m}$只需在所有位置替换为 $\mathfrak{T}^{k,q}_{n,m}$。通过对电路结构归纳应用引理 6.19，可得：

引理 6.20。 设 $k,d \in \mathbb{N}$。设 C 是一个 $\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称电路，满足 $\mathrm{maxSup}(C) \le k$，且 $\mathrm{supDp}(C) \le d$。那么，C 计算的多项式属于 $\mathfrak{T}^{2k,\,d\cdot k}_{n,m}$。

证明。对于每个门 g ∈ V(C)，令 d(g) 表示以 g 为根的子电路的支撑深度。通过对电路结构归纳，我们证明对每个 g ∈ V(C)：由 g 计算的多项式 p_g 属于 $\mathfrak{T}^{2k,d(g)\cdot k+\sup(g)}$ n,m ($\vec{}\sup_L(g)$, $\vec{}\sup_R(g)$)，其中 d(g) 是以 g 为根的子电路的支撑深度。首先，对于每个输入门 g，$p_g = x_{ij}$，其中 i ∈ [n],j ∈ [m]。这属于 $\mathfrak{T}^{1,2}_{n,m}$(i, j)，且 d(g) = 0, |sup(g)| = 2，k ≥ 2，因此该命题对 g 成立。

现在令 g 为 $V(C)$ 为m一个内部门，并假设该命题对它的所有子节点都成立。根据引理 6. $= \prod_{h\in\text{children}(g)} p_g \in \mathfrak{T}^{2k,q}_{n,m}$,($\vec{}\sup(g)$, $\vec{}\sup(g)$)，其中 $q \max q(h) + \delta(h)$ 对于 $\delta(h)\sup(g)\sup(h)$。

根据归纳假设，q(h) ≤ d(h) · k + |sup(h)|。假设 g 不是支持变化的。那么，对于每个 h ∈ g 的子节点，都有 sup(h) ⊆ sup(g)，并且 d(g) = $\max^{h\in\text{children}(g)}$ d(h)。因此，q ≤ d(g) · k + |sup(g)|。这就完成了 g 不是支持变化时的归纳步骤。

如果 g 是支持变化的，那么对于每个支持变化子节点 h，都有 $d(g) \ge d(h) + 1$。回顾一下，当 $\sup(h)\setminus\sup(g) \neq \emptyset$ 时，h 是支持变化子节点。对于每个支持变化h ∈g 的子节点(g)，我们有：

$$\begin{aligned} d(g)\cdot k + |\sup(g)| &\ge d(h)\cdot k + k + |\sup(g)| \\ &\ge d(h)\cdot k + |\sup(h)| + |\sup(g)| \\ &\ge q(h) + \delta(h). \end{aligned}$$

对于每个 h ∈ g 的子节点，若其不是支持变化的，则有 d(g) ≥ d(h)，且 sup(h) ⊆ sup(g)。那么，根据与 g 不是支持变化时相同的推理，q(h) + δ(h) ≤ d(g) · k + |sup(g)|。

综上，正如所需，$d(g)\cdot k + |\sup(g)|$ 是$q = \max^{h\in\text{children}(g)} q(h) + \delta(h)$的上界。至此，归纳步骤完成。 □

定理B证明的准备工作至此完成。

定理 B（刻画 symVF）。一个矩阵对称多项式族（p_n）属于symVF，当且仅当，（p_n）可以写成有界树深度模式的同态多项式的线性组合。

证明。反向结论已在推论 6.14 中证明。对于另一个方向，设 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族轨道大小至多为 $O(n^d)$ 的 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_m$-对称公式，其中 $d \in \mathbb{N}$ 是某个常数（注意，该定理针对 $n = m$ 的情形）。根据引理 2.4，我们可以假设这些对称公式是刚性的（但可能包含重边）。刚性是为了获得明确定义的支撑概念。根据引理 2.5，存在一个常数 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{maxSup}(C_n) \le k$。于是根据推论 6.18，$\mathrm{supDp}(C_n) \le d$。因此根据引理 6.20，$C_n$ 计算一个多项式 $p \in \mathfrak{T}^{2k}_{n,n^{d\cdot k}}$。根据引理 6.2，$p$ 是树深度至多为 $d\cdot k$ 的模式的同态多项式的线性组合，其中 $d\cdot k$ 为常数。

□

定理B 是我们的主要结果中唯一一个在证明中必须将定理表述为关于$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称多项式，而不是更一般的$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称多项式的结果。该结果也可以推广到后一种情形，但这样一来，n 和m 的增长比就会产生影响：例如，如果m 相对于n增长得非常缓慢，那么公式相对于 $\sup_R$ 的支撑深度可能远大于相对于 $\sup_L$ 的支撑深度。为避免这些复杂情况，本定理只考虑$m = n$ 的情形。

6.3 矩阵对称斜电路（symVBP）

我们先给出上界，证明任意路径宽度有界的同态多项式确实都存在一个多项式规模的矩阵对称斜电路。电路构造与 [DPS25，引理5。23] 中针对树宽的构造类似。

引理 6。21（symVBP 中的同态多项式symVBP）。**设 k、n、m $\in \mathbb{N}$。**设 F 是一个路径宽度小于 k 的二分多重图。那么$\hom_{F、n、m}$ 存在一个矩阵对称斜电路，其规模关于 $\|F\|$、n、m 呈多项式，且轨道大小至多为$(n+m)^k$。

证明。 设 T 是 F 的一个路径分解，其根节点为r。对于 $s \in V(T)$，令T_s 表示以s为根节点的T的子树。令$A \uplus B = V(F)$ 为F的二分划分。

我们通过对 T 使用归纳法来构造电路。对于每个 $s \in V(T)$，令 F^s 表示由 $\bigcup_{t\in V(T_s)} \beta(t)$ 中顶点诱导的 F 的子图。令 $s \in V(T)$，并令 $\ell = |\beta(s)\cap A|$，$r = |\beta(s)\cap B|$。在我们的电路构造中，我们确保对于每个 $v \in [n]^\ell$、$w \in [m]^r$，都存在一个计算 $F^s_{n,m}(v, w)$ 的门。

在基例中，设 $s \in V(T)$ 是该路径的叶节点。于是 $F^s_{n,m}(v,w)$ 是一个单项式，可以用一个扇入等于F^s中边数的单个乘法门表示。

在归纳情形中，设 $s \in V(T)$ 是路径分解的一个内部节点，$t \in V(T)$ 是它的子节点。固定 $v \in [n]^\ell$、$w \in [m]^r$、$a \in A^\ell$、$b \in B^r$，使得 $\beta(s) = \{a_1, \dots, a_\ell, b_1, \dots, b_r\}$。令 $E^s := E(F^s) \setminus E(F^t)$。令 $\beta(t) = \{a'_1, \dots, a'_{\ell'}, b'_1, \dots, b'_{r'}\}$ 为 $\beta(t)$ 中标签的一个枚举。为简单起见，假设 $\beta(s) \cap \beta(t)$ 中的元素在 $\beta(s)$ 和 $\beta(t)$ 的枚举中出现在相同的索引处。令 $I_A(s, t) := \{i \in [\ell] \mid a_i = a'_i\}$ 和 $I_B(s, t) := \{i \in [r] \mid b_i = b'_i\}$ 分别表示 $\beta(s)$ 中也出现在 $\beta(t)$ 中的元素的索引。令

$$I(v,w) := \{(v', w') \in [n]^{\ell'} \times [m]^{r'} \mid v'_i = v_i, w'_j = w_j \text{ for all } i \in I_A(s,t), j \in I_B(s,t)\}.$$

那么我们可以写成：

$$F^{s}_{n,m}(v,w) = \left(\sum_{(v',w')\in I(v,w)} F^{t}_{n,m}(v',w') \right) \cdot \prod_{a_i b_j \in E^s} x_{v_i w_j}$$

这里，这个求和对应于在 $\beta(t) \setminus \beta(s)$ 中忘掉标签。由归纳法可知，我们有一个计算 $F^{t}_{n,m}(v',w')$ 的斜电路，而且显然，上述 $F^{s}_{n,m}(v,w)$ 的表达式仍可用斜乘法门实现。

我们对最终电路应用引理 2.4，使其具有刚性，从而可以讨论各门的支撑集。在任意阶段，计算 $F^{s}_{n,m}(v, w)$ 的子电路按构造都是 $\mathrm{Stab}^{\bullet}_{\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_m}(v, w)$-对称的，因此 vw 是计算 $F^{s}_{n,m}(v, w)$ 的门的一个支撑。注意，$|vw| \le k$，因此根据引理 2.5，电路的轨道大小至多为 $(n+m)^k$。整个电路是 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_m$-对称的，因为每个 $(\pi, \sigma) \in \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_m$ 都会将计算 $F^{s}_{n,m}(v, w))$ 的子电路映射到计算 $F^{s}_{n,m}(\pi(v), \sigma(w)))$ 的子电路。电路的规模与 $|V(T)| + |E(F)|$ 成线性关系，因此关于 $\|F\|$ 是多项式级的。 □

对于下界，我们使用以下引理，其证明将在下一节给出。

引理 6.22. 由刚性 $\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称斜电路 C 计算的每个多项式，若 $k := \mathrm{maxSup}(C)$，则属于 $\mathfrak{P}^{9k}_{n,m}$。

对 symVBP 的刻画 （定理 C）可由以下定理直接推出 .

定理 6.23 （刻画 symVBP）**.** 一族 $\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称多项式 $(p_{n,m})$ 属于symVBP 当且仅当 $(p_{n,m})$ 可以写成有界路径宽度模式的同态多项式的线性组合。

证明。对于反向推导，对线性组合中的每个同态多项式应用引理 6.21，然后使用引理 2.4 将其刚性化。对于正向推导，设 $C_{n,m}$ 是一个 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_m$-对称斜电路，其轨道大小至多为 $O((n+m)^d)$，其中 $d \in \mathbb{N}$ 是一个固定常数。根据引理 2.4，我们可以假设 $C_{n,m}$ 是刚性的，因此其门的支撑有明确定义。根据引理 2.5，存在一个常数 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{maxSup}(C_{n,m}) \le k$。于是，由引理 6.22 可得 $p_{n,m} \in \mathfrak{P}^{9k}_{n,m}$。 □

6.3.1 symVBP计算有界路径宽度同态多项式 s

本节将给出引理 6.22的完整证明，该引理证明了定理 C中较难的方向。引理 6.22 证明的主要内容是下面这个引理，它表明，矩阵对称斜电路中每个门计算出的多项式都是有界路径宽度同态多项式的线性组合。

引理 *6.24*。设 k、n、$m \in \mathbb{N}$ 和 C 是一个刚性 $Sym_n \times Sym_m$-对称斜电路。考虑 C 中一个门 g，它是加法门或乘法门，且 $|sup(g)| \le k$。若对于 g 的每个子节点 h，由 h 计算出的多项式都属于 $\mathfrak{P}^{9k}_{n,m}(\vec{sup}_L(h), \vec{sup}_R(h))$，则由 g 计算出的多项式属于$\mathfrak{P}^{9k}_{n,m}(\vec{sup}_L(g), \vec{sup}_R(g))$。

该引理的证明沿用了 [DPS25中引理 5 的思路22] ，篇幅长达数页。下面我们简要概述主要思想，并请读者参阅 [DPS25 第 5 节2] 以了解更多细节。

证明概要。 我们以 g 为乘积门的情形为例概述证明。另一种情形更为简单，此时使用引理 6.11 代替引理6.12。在斜电路中，每个乘法门至多有一个子节点是内部（非输入）门，其余子节点都是输入门。令 p_g 表示门 g所计算的多项式。我们写作 $p_g := p_{g_1} \cdot p_{g_2}$，以将该计算表示为两个子计算的乘积，其中 g_1 表示内部子节点（如果存在），而 g_2 表示一个新的门；我们可以直接插入该门，使其计算 g的输入门子节点的乘积。我们先处理输入的乘积。

令 $G := \mathbf{Stab}^{\bullet}(\sup(g)) \leq \mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$。根据支撑的定义，每个 $\pi \in G$ 都可扩展为一个稳定 g 的电路自同构；因此它也会集合地固定 $\mathrm{children}(g_2)$，并将 $\mathrm{children}(g_2)$ 划分为若干轨道。令 Ω 为这些轨道的集合。对于 $h \in \mathrm{children}(g_2)$，令$O_h \in \Omega$ 为 G 对h的轨道。我们可以将 g_2 处的乘积重新分组为

$$p_{g_2} = \prod_{O_h \in \Omega} \prod_{h' \in O_h} p_{h'}.$$

由于所有 $h' \in O_h$ 都是输入门，对于每个 $h' \in O_h$，都有 $|\sup_L(h')| = |\sup_R(h')| \leq 1$。下文仅考虑每个 h' 都是变量输入门而非常数的情形。此时$|\sup_L(h')| = |\sup_R(h')| = 1$。如方程（9）和 [DPS25 的引理 5 中所述，一个轨道中的所有门都计算同一个实例化同态多项式映射，只是标签不同。对于每个 $O_h \in \Omega$，令 $\varphi_h \in \mathfrak{P}^k_{n,m}(1,1)$ 表示该同态多项式映射。令 $S(h) := \bigcap_{h' \in O_h} \sup(h') \subseteq \sup(g)$，且令 $S_L(h) := S(h) \cap [n], S_R(h) := S(h) \cap [m]$。注意，由于 $|\sup_L(h)| = |\sup_R(h)| = 1$，因此$|S_L(h)|$与 $|S_R(h)| \leq 1$。于是，

$$p_{g_2} = \prod_{O_h \in \Omega} \prod_{v \in ([n] \setminus \sup_L(g))^{1-|S_L(h)|}} \prod_{w \in ([m] \setminus \sup_L(g))^{1-|S_R(h)|}} \varphi_h\left(\vec{S}_L(h)v, \vec{S}_R(h)w\right). \tag{10}$$

在上述表达式中，φ_h 对应一个变量，即对于每个 $v \in [n], w \in [m]$，$\varphi_h(v,w) = x_{vw}$（见例 6.4）。这是一个带标记端点的边的同态多项式。我们也可以将多项式 $x_{vw} \in \mathfrak{P}^k_{n,m}(\vec{L}, \vec{R})$ 视为同态多项式 $\varphi'_h(\bar{\sup}_L(g)v, \bar{\sup}_R(g)w), (\sup_L(g)v, \sup_R(g)w)$，只需向带标记的边添加 $\sup(g) \setminus \sup(h)$ 个孤立带标记顶点即可。这与上面引理 6.19 的证明中的论证相同；它利用了孤立带标记顶点的同态多项式为 1 这一事实，因此，将这些顶点与任意其他模式图作不交并不会改变同态多项式（参见例 6.3 和引理 6.6）。据此，我们有：

$$p_{g_2} = \prod_{O_h \in \Omega} \prod_{v \in ([n] \setminus \sup_L(g))^{1-|S_L(h)|}} \prod_{w \in ([m] \setminus \sup_R(g))^{1-|S_R(h)|}} \varphi'_h\left(\vec{\sup}_L(g)v, \vec{\sup}_R(g)w\right).$$

注意，其中一个或两个乘积 $\prod_{v \in ([n] \setminus \sup_L(g))^{1-|S_L(h)|}}$、$\prod_{w \in ([m] \setminus \sup_R(g))^{1-|S_R(h)|}}$ 可能为空（例如 $S_L(h) \subseteq \sup_L(g)$）的情况）。将引理 6.12 应用于其中每个非空乘积。由此，我们得出，同一轨道 O_h 内各个门所计算的多项式之积满足

$$\varphi_{O_h}(\vec{\sup}_L(g), \vec{\sup}_R(g)) := \prod_{h' \in O_h} p_{h'} \in \mathfrak{P}^{3^2 \cdot k}_{n,m}(\vec{\sup}_L(g), \vec{\sup}_R(g)).$$

为完成论证，我们纳入乘法门 g 的内部子节点 g_1。根据归纳假设，我们有 $p_{g_1} \in \mathfrak{P}^{9 \cdot k}_{n,m}(\bar{\sup}_L(g_1), \bar{\sup}_R(g_1))$。和之前一样，我们通过附加 $|\sup(g) \setminus \sup(g_1)| < k$ 个孤立带标记顶点，扩展 p_{g_1} 的标记。结合引理 6.6，得到

$$\varphi_{g_1} \in \mathfrak{P}^{9 \cdot k}_{n,m}(\vec{\sup}_L(g), \vec{\sup}_R(g)).$$

因此，门 g 处计算的多项式可以表示为

$$p_g = p_{g_1} \cdot \prod_{O_h \in \Omega} \prod_{h' \in O_h} p_{h'} = \varphi_{g_1}(\vec{\sup}_L(g), \vec{\sup}_R(g)) \cdot \prod_{O_h \in \Omega} \varphi_{O_h}(\vec{\sup}_L(g), \vec{\sup}_R(g)).$$

应用引理6.9 进行粘合操作可得

$$p_g \in \mathfrak{P}^{9\cdot k}_{n,m}(\vec{\sup}_L(g), \vec{\sup}_R(g)). \qquad \square$$

引理 6.22. 由刚性$\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-对称斜电路 C 计算的、满足 $k := \mathrm{maxSup}(C)$ 的每个多项式都属于 $\mathfrak{P}^{9k}_{n,m}$。

证明。我们对 $C_{n,m}$ 的结构进行归纳，并证明对于每个门 g，在该门处计算的多项式都属于 $\mathfrak{P}^{9k}_{n,m}(\vec{\sup}_L(g), \vec{\sup}_R(g))$。对于基例，考虑叶节点，其中 $C_{n,m}$ 的每个门 g 都标记为变量或常数。任意常数都是属于 $\mathfrak{P}^0_{n,m}(0,0)$ 的多项式（见例 6.3）。如果 g 是一个标记为 $x_{i,j}$ 的输入门，考虑一个由单边组成的图 F。那么 $x_{i,j} = F_{n,m}(i,j) \in \mathfrak{P}^2_{n,m}(i,j)$。注意，$2 \leq k = \mathrm{maxSup}(C)$。这就确立了基例。

对于归纳步骤，门g 要么是乘法门，要么是加法门。无论哪种情况，我们都使用引理6.24。特别地，在门g 处计算的多项式属于$\mathfrak{P}^{9k}_{n,m}(\vec{\sup}_L(g), \vec{\sup}_R(g))$。最后，由于输出门的最小支撑为空，由$C_{n,m}$计算的多项式属于$\mathfrak{P}^{9k}_{n,m}(0,0) = \mathfrak{P}^{9k}_{n,m}$。 $\square$

7 对称类的无条件分离

本节详细阐述第3.2节中给出的结果。首先，我们将定义3.2表述得更精确。

定义在$\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \mathbb{K}^{n\times m}$ 上的函数p 是一个图参数，如果它是矩阵对称的，即对于$X \in \mathbb{K}^{n,m}$以及 $(\sigma, \pi) \in \mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$，都有$p(X) = p((\sigma,\pi)(X))$。

定义 7.1. 设 w 是一个取值于 $\mathbb{N}$ 的图参数。设 n、m $\in \mathbb{N}$。设 p 是 $\{0,1\}^{n\times m}$ 上的 $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_m$-不变函数。p 的 w-计数宽度是满足以下条件的最小整数 k $\in \mathbb{N}$：对于所有 G、H $\in \{0,1\}^{n,m}$，若 G 和 H 在所有满足 w(F) $<$ k 的二分多重图 F 上同态不可区分，则 p(G) = p(H)。

由于w-计数宽度是良定义的，这是因为根据 [Lov67]，，对于每个 n、$m \in \mathbb{N}$，都存在有限个图 F_1,.....、F_r，使得两个具有 (n, m) 个顶点的简单图 G 和 H 同构，当且仅当它们在 F_1,.....、F_r 上同态不可区分。于是，$k := \max\{w(F_i)+1\}$ 是任意定义在 $\{0,1\}^{n\times m}$ 上的 $\mathbf{Sym}_n \times \mathbf{Sym}_m$-不变函数的$w$-计数宽度的上界。

注 7.2. 根据 [Dvo10; DGR18]，，图参数 p 的树宽度计数宽度至多为 k，当且仅当其计数宽度 [DW17] 至多为 k；也就是说，任意两个 C^k-等价图 G 和 H 都满足 p(G) = p(H)。类似地，根据 [Gro20a]，，树深度计数宽度至多为 k 对应于一阶逻辑中量词深度为 k 的、带计数量词的片段 C_k。根据 [MS24]，，路径宽度计数宽度至多为 k 对应于受限合取 k 变量片段 $\curlywedge C_k$。不过，此处证明的结论并不需要这些逻辑刻画。

现在我们可以正式证明定理3。4。

定理 3.4. 设 (F_n) 是一个二分多重图族。

1. $(\text{hom}_{F_n}, n) \in$ symVP 当且仅当 $tw(F_n) \in O(1)$。2.
$(\text{hom}_{F_n}, n) \in$ symVBP 当且仅当 $pw(F_n) \in O(1)$。3.
$(\text{hom}_{F_n}, n) \in$ symVF 当且仅当 $td(F_n) \in O(1)$。

证明。 正向蕴含由推论 3。3 已经给出。第一个断言已经由[DPS25，定理 7.1]蕴含。我们将对全部三个反向蕴含给出一个统一证明。为此，令 $w \in \{\text{tw、pw、td}\}$。令 (F_n) 为一个二部多重图族，使得 $w(F_n)$ 无界。

必须证明 w-计数宽度 $(\text{hom}_{F_n,\ n})$ 是无界的。为此，考虑 [DPS25第 34] 页中的以下定义。对于一个具有固定二分划分且 $\mathcal{F}$ 由二分图组成的类，以及 n、$m \in \mathbb{N}$,

$$\text{cl}_n^{\text{bip}}(\mathcal{F}) := \{F \mid \forall (n,n)\text{-vertex } G, H.\ G \equiv_{\mathcal{F}} H \implies \hom(F,G) = \hom(F,H)\}$$

这里，F 遍历二分简单图，G 和 H 遍历二分简单图，$\hom(F,G)$ 表示从F 到G的保持二分划分的同态数量，并且$\equiv_{\mathcal{F}}$ 表示关于 $\mathcal{F}$的同态不可区分性。

对于 $k \in \mathbb{N}$，设 $\mathcal{F}_k := \{F \text{ 为满足 } \mid w(F) \leq k\}$ 的二分简单图。必须证明，对于所有充分大于 k 的 n，$\text{cl}_n^{\text{bip}}(\mathcal{F}_k) \subseteq \mathcal{F}_k$。这可仿照 [DPS25, Theorem 7.1] 的证明，在以下假设下得出，见 [DPS25, Proviso 7.2]: 对于所有简单图（不一定是二分图）F，F', F_1, F_2,

1. 若 F 是 F' 的子式，则 $w(F) \leq w(F')$；2. $w(F_1 + F_2) \leq \max\{w(F_1), w(F_2)\}$，其中 $F_1 + F_2$ 表示 F_1 与 F_2, 的不交并；3. 若存在弱奇同态 $F \to F'$，见 [Rob22], ，则 $w(F') \leq w(F)$。

前两个假设是 $w \in \{\text{tw、pw、td}\}$ 的公知性质，见 [NO12]。最后一个假设相当复杂，详见 [Sep24a] ，了解更多背景。树宽情形的这一结论已在 [Neu24，推论 13], 中得到证明；路径宽情形见 [Sep24a，定理 6。4。6], 树深度情形则见 [FSS24，定理 3]。 □

定理 3.5. 设(p_n) 是由模式的同态多项式线性组合构成的族，其中这些模式不含孤立顶点，且体积为 $o(n)$。

1. $(p_n) \in$ 属于symVP，当且仅当，$max\ tw(p_n) \in$ 为$O(1)$。
2. $(p_n) \in$ 属于symVBP，当且仅当，$maxpw(p_n) \in$ 为$O(1)$。
3. $(p_n) \in$ 属于symVF，当且仅当，$maxtd(p_n) \in$ 为$O(1)$。

证明。 根据 [DPS25，定理 7。11] 以及定理 3。4 ，回想 [DPS25，条件 7。2] 满足这一条件，正如定理3。4的证明中所论证的。 □

8 同态多项式及其线性组合的经典代数复杂性

本节将探讨我们的对称复杂性类 symVP、symVBP 和 symVF 与 Valiant 的复杂性类 VNP、VP、VBP 和 VF 之间的联系。受 symVP、symVBP 和 symVF 中多项式可表示为有界树宽模式的同态多项式的线性组合这一刻画的启发,

路径宽度和树深度，分别参见定理 6。1 以及定理 B 和C，我们研究同态多项式的经典代数复杂性。本节的安排如下：

在第 8.1 节中，我们引入多彩同态多项式，用这种语言重新表述 [Dur+16；Hru17] 中的困难性结果，并证明引理 8.6 ，该引理刻画了模式 F 和F' 对应的多彩同态多项式之间的关系，其中F是F'的子式。主要结果是定理 8.8，它是定理D的多彩版本。

第 8.2 节关注如何按照公式（1）将多彩同态多项式归约为无色同态多项式。主要技术贡献是引理 8.16，它将模式 S 对应的多彩同态多项式 $\mathrm{colhom}_{S,n}$ 归约为模式 F 对应的同态多项式 $\mathrm{hom}_{F,2^{\Delta(S)}\cdot|V(S)|\cdot n}$，其中 F 包含 S 作为子式。关键在于只需将变量数量膨胀 $2^{\Delta(S)}\cdot|V(S)|$ ，其中 $\Delta(S)$ 表示 S 的最大度。然而，将 [Cur24] 的主要结果直接转化为代数复杂性，只能得到归约到 $\mathrm{hom}_{F,2^{\Delta(S)}\cdot|V(F)|\cdot n}$。当证明本节的任何结果时，都无法承受这种膨胀。我们借助 [Sep24b] 中的思想克服了这一问题。最后，我们证明定理 D。

定理 D。设 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个二分多重图的 p-族。设 $\varepsilon > 0$。

1. 如果对所有 $n \geq 2$ 都有 $tw(F_n) \geq n^{\varepsilon}$ ，则 (hom_{F_n}, n) 是 *VNP* 完全。*2.* 如果 $tw(F_n) \in O(1)$ 且对所有 $n \geq 2$ 都有 $pw(F_n) \geq \varepsilon log(n)$，则 (hom_{F_n}, n) 是 *VP*-完全。*3.* 如果 $pw(F_n) \in O(1)$ 且对所有 $n \geq 2$ 都有 $td(F_n) \geq \varepsilon log(n)$，则 (hom_{F_n}, n) 是 *VBP*-完全。

在所有情况下，困难性均在特征为零的任意域上、通过常深度 c-归约成立。

在第 8。3 节中，我们设计了引理 8。20 ，将模式 F 的同态多项式归约为同态多项式的线性组合，其中包含 F 且系数非零。该引理基于一个插值论证，而该插值论证又基于体积为次线性的模式的同态多项式的线性无关性，参见引理8。18。引理 8。20给出了定理3。7的证明。

定理3。7。对于 $\varepsilon > 0$，令 $(p_n) := (\sum_F \alpha_{F,n}\text{同态}_{F,n})$ 为一个 p-族，其中各项是二分多重图（无孤立顶点，体积至多为 $n^{1-\varepsilon}$ ）的同态多项式的线性组合，且多项式维数为 $\text{维数}(n) := |\{F \mid \alpha_{F,n} \neq 0\}|$。则以下结论成立：

1. 若对所有 $n \geq 2$，$max\ tw(p_n) \geq n^{\varepsilon}$ ，则 (p_n) 为 *VNP* 完全。*2.* 若对所有 $n \geq 2$，$max\ tw(p_n) \in$ 为 $O(1)$，且 $max\ pw(p_n) \geq \varepsilon$ 为 $log(n)$，则 (p_n) 为 *VP*-完全。*3.* 若对所有 $n \geq 2$，$max\ pw(p_n) \in$ 为 $O(1)$，且 $max\ td(p_n) \geq \varepsilon$ 为 $log(n)$，则 (p_n) 为 *VBP*-完全。

在所有情况下，在任意特征为零的域上，困难性都在常深度 c-归约下成立。

剩余部分第 8.4 节在假设 $\mathsf{VFPT} \neq \mathsf{VW}[1]$的条件下，为同态多项式给出下界。剩余定理 3.8、定理 E以及推论 3.6 的证明将使用第 8.1 节至第 8.3节中发展的多数方法。

定理 E. 设$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由二分多重图组成的 p-族，且$\mathrm{tw}(F_n)$ 是非递减的。除非$\mathsf{VFPT} = \mathsf{VW}[1]$，，否则$(\mathrm{hom}_{F_n}, n) \in \mathsf{VP}$ 当且仅当$\mathrm{tw}(F_n) \in O(1)$。

推论 3.6. 当且仅当对于每个由二分多重图构成的 p-族(F_n) ，且树宽(F_n) 是非递减的，均成立：$\mathsf{VFPT} \neq \mathsf{VW}[1]$

$$(\mathrm{hom}_{F_n,n}) \in \mathsf{VP} \iff \mathrm{tw}(F_n) \in O(1) \iff (\mathrm{hom}_{F_n,n}) \in \mathsf{symVP}.$$

定理3.8. 对于 $\varepsilon > 0$，设 (p_n) 是一个由二分多重图的同态多项式线性组合构成的 p-族，其中这些图不含孤立顶点、体积至多为 $n^{1-\varepsilon}$，具有多项式维数，并且 最大树宽(p_n)非递减。除非 VFPT $=$ VW[1],，否则 $(p_n) \in$ VP 当且仅当 最大树宽$(p_n) \in O(1)$.

8.1 多彩同态多项式

我们将 [CM14a；Cur24] 中发展的工具转化为代数复杂性。第一步是引入多彩同态多项式。与普通同态多项式不同，它们不仅记录同态的像顶点，还记录这些顶点的原像。文献 [KPR23的定义 7] 也在单调代数复杂性的背景下讨论了多彩同态多项式，称之为有色同构多项式，另见 [Bha+25]。

定义 8.1. 对于一个二分划分为F 的二分多重图$A \uplus B = V(F)$ 以及一个数$n \in \mathbb{N}$，考虑其第 n 个多彩同态多项式

$$\operatorname{colhom}_{F,n} := \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \prod_{\substack{ab\in E(F)\\ a\in A, b\in B}} x_{(a,h(a)),(b,h(b))}$$

其变量由$(A \times [n]) \times (B \times [n])$索引。

这种多项式的输入可视为一个二分、有边权的F有色图。也就是说，一个二分图G 带有一个同态$c\colon G \to F$ 以及边权$E(G) \to \mathbb{K}$。此处，对于$v \in V(F)$，每个颜色类 $c^{-1}(v)$ 的大小均为n。

引理8.2. 对于每个二分多重图的 p-族$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$，

1.（着色同态$_{F_n,n}$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 *VNP*。*2.* 若 *tw*$(F_n) \in O(1)$，则（着色同态$_{F_n,n}$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 *VP*；*3.* 若 *pw*$(F_n) \in O(1)$，则（着色同态$_{F_n,n}$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 *VBP*；*4.* 若 *td*$(F_n) \in O(1)$，则（着色同态$_{F_n,n}$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 *VF*。

证明。第一项结论由 Valiant 判据 [Büro，命题 2。20]。其余结论可通过检查 [DPS25，定理 5。3] 以及引理 6。13 和6。21的证明得出，另见 [KPR23，定理 11]。

□

8.1.1 多彩同态多项式的困难族

通过重新表述 Hrubeš 的结果 [Hru17] 以及 Durand、Mahajan、Malod、de Rugy-Altherre 和 Saurabh 的结果 [Dur+16]，我们得到以下多彩同态多项式族，它们分别是 VNP、VP 和 VBP 的完备族。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $G_{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 网格。

引理 8.3. 族 $($着色同态$_{G_{n\times n},4n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ 在任意域上关于 p-投影是 VNP-完备的。

证明。根据引理 VNP，可知其属于 8。2。我们沿用将参数化团计数问题归约为参数化彩色网格计数问题的归约 [CM14b，定理 3。2]。根据 [Hru17，定理5。5], 该族

$$\operatorname{clique}_n := \sum_{\substack{A\subseteq[2n]\\ |A|=n}} \prod_{\substack{i,j\in A\\ i<j}} y_{i,j} \tag{11}$$

在任意域上，在 p-投影下是 VNP 完全。我们将团多项式$_n$ 从 colhom 多项式$_{G_{n\times n},4n^2}$投影得到。令 $y_{u,v}$ 表示 $1 \le u < v \le 2n$ 中的变量，它们是 clique$_n$的变量。

通过定义一个二分有边权的$G_{n\times n}$-有色图G，即可给出一个p-投影。为此，令$V(G_{n\times n}) = [n] \times [n]$。$G$ 的顶点定义如下：

- 对于每个$i \in [n]$和$v \in [2n]$,，颜色类(i,i) 包含顶点(i,i,v,v)。
- 对于每个i、$j \in [n], i \neq j$，以及满足$u \neq v$的每一对u、$v \in [2n]$，颜色类(i,j) 包含顶点(i,j,u,v)。

边权如下：

- 对于每个$i \in [n]$,、$i \le j \le n-1$、$u \in [2n]$,以及 $1 \le v < v' \le 2n$，边$(i,j,u,v)(i,j+1,u,v')$ 的权重为$y_{v,v'}$。
- 对于每个$j \in [n]$、$1 \le i \le j-1$、$v \in [2n]$,以及 $1 \le u < u' \le 2n$，边$(i, j, u, v)(i+1, j, u', v)$ 的权重为 1。
- 所有其他边的权重均为零。

按照此赋值，colhom 多项式$_{G_{n\times n},4n^2}$ 的计算结果如下：

$$\mathrm{colhom}_{G_{n\times n},4n^2}(G) = \sum_{h\colon [n]\times[n]\to[2n]\times[2n]} \prod_{uv\in E(F)} x_{(u,h(u)),(v,h(v))}$$

设 A $\subseteq$ [2n] 且 |A| = n，并记 A = {v_1, ..., v_n}，其中 $v_1 < v_2 < \cdots < v_n$。对变量重命名后，团$_n$中的单项式$\prod_{i,j\in A, i<j} y_{i,j}$等于 colhom$_{G_{n\times n},4n^2}$(G) 的单项式，其中 h : [n] × [n] → [2n] × [2n] 由 (i, j) ↦ (v_i, v_j) 给出。

反过来，必须论证在对 G 求值着色同态$_{G_{n\times n},4n^2}$ 的多项式时，只有这类单项式能够保留下来。每个映射 h : [n] × [n] → [2n] × [2n] 都相当于为对角顶点 (i, i) ∈ V(F) 选取一个顶点 (i, i, v, v)。令 $v_i \in$ [2n] 表示该顶点 v。对于非对角顶点 (i, j) ∈ V(F)，i ≠ j，映射 h 选择一个顶点 (i, j, u, w)。根据 G 中边的定义可知，u = v_i，且 w = v_j。此外，$v_1 < v_2 < \cdots < v_n$。最后注意，权重符合要求。 □

对于 $n \in \mathbb{N}$，将具有至多 n 个叶子的最大完全（二叉）树记为 B_n s.

引理 8.4. 族 (着色同态$_{B_n,n^6}$)$_{n\in\mathbb{N}}$ 在任意特征为零的域上关于常深度 c-归约是 VP-完全的。

证明。 属于 VP 由引理 8。2 得出。根据 [Dur+16，定理 3.8 和 4.5], 多项式族(p_m)

$$p_m := \sum_{h\colon V(B_m)\to[m^6]} \prod_{v\in R(T_m)} X_{h(v)} \prod_{uv\in E(F)} Y_{h(u),h(v)}$$

在常深度 c-归约下是 VP-完全的：这里，变量 X_i 按 i ∈ [m^6],编索引，变量Y^{ij} 按无序对 ij ∈ $\binom{[m^6]}{2}$ 编索引。集合 R(B$_m$) ⊆ V(B$_m$) 表示 B$_m$ 中所有非根顶点的集合，这些顶点是各自父节点的右孩子。我们证明，p$_m$ 可由一个带有指向着色同态$_{B_m,m^6}$的预言机门的常深度 $m^{O(1)}$-规模电路计算。为此，定义一个 B$_m$-着色边加权图 G = (x$_{(i,u),(j,v)}$)$_{i,j\in V(B_m)}$,u,v∈[m^6]。

- 若j 是i的右孩子，则令$x_{(i,u),(j,v)} := X_v Y_{u,v}$。
- 如果j 是i的左孩子，则令$x_{(i,u),(j,v)} := Y_{u,v}$。
- 否则，令$x_{(i,u),(j,v)} := 0$。

根据这一赋值，可知着色同态$_{B_m,m^6}$ 的取值为p_m。 □

对于自然数集 ∈ ℕ中的P_n，令其表示具有自然数集 个顶点的路径。

引理 8.5. 族$(\text{着色同态}_{P_n}, \text{自然数集}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ 在任意特征为零的域上，关于常深度 c-归约是VBP-完全的。

证明。属于 VBP 由引理 8 得出。2。根据 [Dur+16，定理 5。1], 多项式族

$$\sum_{h\colon [m+1]\to[m^2]} X_{h(1)}X_{h(m+1)}\prod_{i\in[m]} Y_{h(i)h(i+1)} \tag{12}$$

在常数深度 c-归约下是 VBP-完全的。对于每个 $i \in [m^2]$，都有一个变量 X_i；对于每个无序对 $ij\in\binom{[m^2]}{2}$，都有一个变量 Y_{ij}。因此，隐含地，对于所有 $i \in [m]$，$h(i) \neq h(i+1)$。该多项式族可投影到 $(\text{着色同态}_{P_n,n^2})_{n\in\mathbb{N}}$。定义一个 P_{m+2}-着色边加权图
$G = (x_{(i,u),\ (i+1,v)})_{i\in[n-1],u,v\in[m^2]}$ by 设置

- $x_{(1,u),(2,v)}$ 若 $u \neq v$ 则将其设为零，否则设为 X_u。
- $x_{(i,\ u),\ (i+1,\ v)}$，对于 $1 < i < m-1$，当 $u \neq v$ 时取 Y_{uv}，否则取零。
- $x_{(m+1,\ u),\ (m+2,\ v)}$ 在 $u \neq v$ 时取零，否则取 X_u。

由此赋值可知，着色同态$_{P_{m+2},\ m^2}$ 恰好计算出方程（12）中的多项式。通过填充，这进一步化为着色同态$_{P_{m+2}}\ (m+2)^2$。 □

沿着图子式投影彩色同态多项式

下面的引理8.6 联系了模式F 和F'的彩色同态多项式，其中F 是F'的子式。它是 [CM14b，引理3.1] 的代数类比。

引理8.6。设 F 和 F是二分简单图，且 F 是 F的子式。对于 n，着色同态$_{F,\ n}$是着色同态$_{F',\ n}$ 在任意域上的投影。

证明。我们沿用 [CM14b, 引理 3.1] 的证明。令 $V(F) = \{1, \ldots, k\}$。令 $B_0, B_1, \ldots, B_k \subseteq V(F')$ 表示 F' 中 F 的分支集。也就是说，对每个 $i \in [k]$，诱导子图 $F'[B_i]$ 都是连通的；并且对每个 $ij \in E(F)$，F' 中都存在一条边，其一端是 B_i 中的某个顶点，另一端是 B_j 中的某个顶点。对 $i \in [k]$，任选 $w_i \in B_i$。我们希望构造一个 F'-着色边加权图 G'，使得每个颜色类至多包含 n 个顶点，并满足 $\text{colhom}_{F,n} = \text{colhom}_{F',n}(G')$。将 $y_{(i,u),(j,v)}$ 记作 $\text{colhom}_{F,n}$ 的变量，其中 $i, j \in V(F)$，且 $u, v \in [n]$。图 G' 的构造如下：

1. 对于每个 $i \in V(F)$ 和 $v \in [n]$，，它包含 F'-有色图 $F'[B_i]$ 的一个副本，记作 $L_{i,v}$。2. 对于 $ij \in E(F)$，u、$v \in [n]$，，在 $L_{i,u}$ 与 $L_{j,v}$ 之间插入所有边，权重均为 1；但从 $L_{i,u}$ 中 w_i 的副本连到 $L_{j,v}$ 中 w_j 的边除外，其权重为 $y_{(i,u),(j,v)}$。3. 对于 $ij \notin E(F)$，u、$v \in [n]$，，在 $L_{i,u}$ 与 $L_{j,v}$ 之间插入所有权重为 1 的边。4. 将 $F'[B_0]$ 的一个副本加入 G'，并以权重 1 的边将其与所有其他顶点相连。

注意，所得图是 F'-有色图，每个颜色类至多有 n 个顶点。

映射 $h\colon V(F)\to[n]$ 诱导出映射 $h'\colon V(F')\to[n]$，其将 i' 映射为 $h(j)$，其中 $i' \in B_j$。相应的单项式在 $\text{colhom}_{F',n}(G')$ 中为 $\prod_{ij\in E(F)} y_{(i,h(i)),(j,h(j))}$，如 $\text{colhom}_{F,n}$ 中所示。

反过来，设 $h'\colon V(F')\to[n]$ 是为 $\text{colhom}_{F',n}(G')$ 中一个单项式确定索引的映射。我们证明，h' 必定由上述某个 $h\colon V(F)\to[n]$ 诱导。设 $r, s \in B_i$，其中某个 $i \in [k]$。若 $h'(r) \neq h'(s)$，则由 h' 确定索引的单项式为零，因为 $F'[B_i]$ 是连通的，而构件 $L_{i,h'(r)}$ 和 $L_{i,h'(s)}$ 互不相交。 □

借助引理 8。6，我们可以证明定理 8。8，该定理描述了多彩同态多项式的复杂性。为此，我们回顾方程 (2) 以及树宽、路径宽度和树深度之间的如下关系。对于每个有 n 个顶点的图 F，根据 [NO12，推论 6。1]，

$$\mathrm{td}(F) \leq (\mathrm{tw}(F)+1)\log(n). \tag{13}$$

关键的是，公式 (2) 和 (13) 意味着，任何树宽有界的 p-族 (F_n) 都满足 $\mathrm{pw}(F_n) \in O(\log n)$。类似地，若 $\mathrm{pw}(F_n) \in O(1)$，则根据公式 (2)，$\mathrm{td}(F_n) \in O(\log n)$。因此，为了证明具有 $\mathrm{pw}(F_n) \in \Theta(\log n)$ 的多彩同态多项式族，以及具有 $\mathrm{pw}(F_n) \in O(1)$ 和 $\mathrm{td}(F_n) \in \Theta(\log n)$ 的多彩同态多项式族分别是 VP-困难和 VBP-困难，我们需要以下最新的图子式定理。 [KR21] 关于树深度以及 [Gro+23] 关于路径宽度的图子式定理所保证的界，对于这一目的而言过于粗糙。

定理 8.7 ([CC16; Gro+23; Hat+24])。 存在一个普适常数 $\tau > 0$使得，对于每个图 F 和每个 $k \in \mathbb{N}$，

1. 若 $\mathrm{tw}(F) \geq k^{\tau}$，则 F 含有一个以 $k \times k$ 网格为子式，2. 若 $\mathrm{pw}(F) \geq \tau(\mathrm{tw}(F)+1)k$，则 F 含有一棵高度为 k 的完全二叉树作为子式，3. 若 $\mathrm{td}(F) \geq \tau(\mathrm{pw}(F)+1)k$，则 F 含有一条包含 2^k 个顶点的路径作为子图。

以下定理 8.8 是关于着色同态多项式代数复杂性的主要结果。

定理 8.8. 设 $\varepsilon > 0$和 (F_n) 是一个二分简单图的 *p*-族。

1. 若对所有 $n \geq 2$，$tw(F_n) \geq n^{\varepsilon}$，则 (着色同态$_{F_n}$,n) 在任意域上关于 p-投影均为 VNP 完全。2. 若对所有 $n \geq 2$，$tw(F_n) \in O(1)$ 且 $pw(F_n) \geq \varepsilon log(n)$，则 (着色同态$_{F_n}$,n) 在任意特征为零的域上关于常深度 c-归约均为 VP-完全。3. 若对所有 $n \geq 2$，$pw(F_n) \in O(1)$ 且 $td(F_n) \geq \varepsilon log(n)$，则 (着色同态$_{F_n}$,n) 在任意特征为零的域上关于常深度 c-归约均为 VBP-完全。

证明。 在所有情况下，包含关系均由引理 8.2 得出。应用引理 8.3 至 8.6，证明方法是将网格、完全二叉树和路径的多彩同态多项式从着色同态多项式$_{F_n,\ n}$ 投影得到。令 $\tau > 0$ 表示定理 8.7 中的普适常数。

1. 假设对于所有 $n \geq 2$，$\mathrm{tw}(F_n) \geq n^{\varepsilon}$。令 p 为多项式 $n^{\max\{\lceil \tau/\varepsilon \rceil, 3\}}$。则 $\mathrm{tw}(F^{p(n)}) \geq p(n)^{\varepsilon} \geq n^{\tau}$，且 $p(n) \geq 4n^2$。根据定理 8.7，$F^{p(n)}$ 包含一个 $n \times n$ 网格作为子式。因此，根据引理 8.6，$\mathrm{colhom}_{F_{p(n)}}$,p(n) 可归约为 $\mathrm{colhom}_{G_{n\times n}}$,$4n^2$。根据引理 8.3，后一族是 VNP 完全的。2. 假设对于所有 n，$\mathrm{tw}(F_n \in 1_n \geq \varepsilon \geq 2 = \{ \ _n \}+)$ $1^{\max\{\lceil \tau t/\varepsilon \rceil, 6\}} \geq \varepsilon \geq \tau$ 为 O( )，且 pw(F) 为 log(n)。令 t : max tw(F)。令 p 为多项式 n。则 $\mathrm{pw}(F^{p(n)})$ 为 log(p(n))，即 t log(n)。因此，根据定理 8.7，$F^{p(n)}$ 包含完全二叉树 B_n 作为子式。此外，$p(n) \geq n^6$。因此，根据引理 8.6，$\mathrm{colhom}_{F_{p(n)}}$,p(n) 可归约为 colhom_{B_n},n^6。根据引理 8.4，后一族是 VP-完全的。3. 假设对于所有 $n \geq 2$，$\mathrm{pw}(F_n) \in O(1)$，且 $\mathrm{td}(F_n) \geq \varepsilon\log(n)$。令 $t := \max\{\mathrm{pw}(F_n)\}+1$。令 p 为多项式 $n^{\max\{\lceil \tau t/\varepsilon \rceil, 2\}}$。则 $\mathrm{tw}(F^{p(n)}) \geq \varepsilon\log(p(n)) \geq t\tau\log(n)$。因此，根据定理 8.7，$F^{p(n)}$ 包含 n 顶点路径作为子式。此外，$p(n) \geq n^2$。因此，根据引理 8.6，$\mathrm{colhom}_{F_{p(n)}}$,p(n) 可归约为 colhom_{P_n},n^2。根据引理 8.5，后一族是 VBP-完全的。

□

顺带一提，我们注意到定理 8.8 的陈述对多重图也成立。在这种情况下，即使对于 c-归约，完备性也是在常数深度下的 VNP。

引理 8.9. 设 (F_n) 是一个二分多重图的 p-族，(F'_n) 是其底层二分简单图的族。那么，在任意域上，(着色同态$_{F'_n}$,n) 可通过常数深度 c-归约到(着色同态$_{F_n}$,n)。

证明。 固定某个 $F := F_n$ 和 $F' := F'_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$。令 $A \uplus B = V(F) = V(F')$ 表示它们的二分划分。对于边 $uv \in E(F)$，记 $\nu(uv) \in \mathbb{N}$ 为其在F中的重数。于是

$$\begin{aligned}\operatorname{colhom}_{F_n,n} &= \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \prod_{uv\in E(F)} x_{(u,h(u)),(v,h(v))} \\ &= \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \prod_{uv\in E(F')} \left(x_{(u,h(u)),(v,h(v))}\right)^{\nu(uv)}.\end{aligned}$$

右侧为着色同态$_{F'_n,n}$，其中变量 $x^{\nu(uv)}_{(u,a),(v,b)}$ 已被代换为$x_{(u,a),(v,b)}$，其中 $u,v \in V(F)$ 且 a、$b \in [n]$。由于(F_n) 是一个p-族，所有重数 $\nu(uv)$ 至多为n的多项式。因此，这一代换可通过深度为 2 的 c-归约实现。 □

8.2 无色同态多项式

在本节中，我们证明定理 D。为此，我们借鉴 Curticapean [Cur24]中的思路，构造从多彩到无色同态多项式的代数归约。主要归约由引理8.16给出。作为中间步骤，我们引入带颜色的同态多项式。

定义 8.10. 设 F 是一个二分多重图，其二分划分为 $V(F) = A \uplus B$，且 C 是一个有限集。设 $c\colon V(F) \to V(C)$ 是一个映射。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义第 n 个带颜色同态多项式

$$\operatorname{colhom}_{F,c,n} = \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \prod_{\substack{ab\in E(F)\\ a\in A,b\in B}} x_{(c(a),h(a)),(c(b),h(b))}$$

其变量由 $(C \times [n]) \times (C \times [n])$ 索引。

注意，按照定义 8.1 中的定义，图 F 的多彩同态多项式 $\operatorname{colhom}_{F,n}$ of F 如定义8.1中所定义，与 $\operatorname{colhom}_{F,\mathrm{id},n}$相同。下面的引理8.11 说明了多彩同态多项式与无色同态多项式之间的关系。

引理 8.11. 设 C 表示一个有限颜色集，且 $n \in \mathbb{N}$。设 F 为一个二分多重图。将变量索引 $[|C| \cdot n]^2$ 与左侧的$(C \times [n])^2$ 对应后，有

$$\hom_{F,|C|\cdot n} = \sum_{c\colon V(F)\to C} \operatorname{colhom}_{F,c,n}.$$

证明。 证明只需展开求和即可。

$$\begin{aligned}\hom_{F,|C|\cdot n} &= \sum_{h\colon V(F)\to C\times[n]} \prod_{ab\in E(F)} x_{h(a),h(b)} \\ &= \sum_{c\colon V(F)\to C} \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \prod_{ab\in E(F)} x_{(c(a),h(a)),(c(b),h(b))} \\ &= \sum_{c\colon V(F)\to C} \operatorname{colhom}_{F,c,n}.\end{aligned}$$

□

为使引理表述得更明确，对于 $G \in \mathbb{K}^{(C\times[n])\times(C\times[n])}$，将 G° 记作 $G \in \mathbb{K}^{(|C|\cdot n)\times(|C|\cdot n)}$中对应的矩阵。用 [Cur24]，的术语来说，G 是一个 C-着色图，每个颜色类有 n 个顶点；而 G° 是一个有 $|C|\cdot n$ 个顶点的无色图。引理 8.11 断言，$\hom_{F,|C|\cdot n}(G^\circ) = \sum_{c\colon V(F)\to C}$ 着色同态$_{F,c,n}(G)$。

为了便于进行插值，我们证明下面的引理 8.12，该引理描述了带颜色的同态多项式在积图上的求值。它对应于图的范畴积的同态计数中一个众所周知的恒等变换 [Lov12, (5.30)]。设 C 为有限颜色集，且 $n, m \in \mathbb{N}$。对于 C-带颜色的边加权二分图 $G = (x_{(c,i),(c',i')})_{c,c'\in C,i,i'\in[n]}$ 和 $H = (y_{(c,j),(c',j')})_{c,c'\in C,j,j'\in[m]}$，定义 $G \times H$，其中 $z_{(c,i,j),(c',i',j')} := x_{(c,i),(c',i')} \cdot y_{(c,j),(c',j')}$，对于 $c, c' \in C$, $i, i' \in [n]$, 以及 $j, j' \in [m]$均成立。这是一个 C-带颜色的边加权二分图，每个颜色类有 $n \cdot m$ 个顶点。

引理 8.12. 设 C 是一个有限颜色集。设 F 是一个二分多重图，且 $c\colon V(F) \to C$。对于 $n,m \in \mathbb{N}$ 以及如上所述的 G、H 和 $G \times H$,

$$\operatorname{colhom}_{F,c,nm}(G \times H) = \operatorname{colhom}_{F,c,n}(G) \operatorname{colhom}_{F,c,m}(H).$$

证明。证明的思路是将 $[nm]$ 视为 $[n] \times [m]$，并重新排列求和 .

$$\begin{aligned}
&\operatorname{colhom}_{F,c,nm}(G \times H)\\
&= \sum_{h\colon V(F)\to[n]\times[m]} \prod_{uv\in E(F)} z_{(c(u),h(u)),(c(v),h(v))}\\
&= \sum_{h_1\colon V(F)\to[n]} \sum_{h_2\colon V(F)\to[m]} \prod_{uv\in E(F)} z_{(c(u),h_1(u),h_2(u)),(c(v),h_1(v),h_2(v))}\\
&= \sum_{h_1\colon V(F)\to[n]} \sum_{h_2\colon V(F)\to[m]} \prod_{uv\in E(F)} x_{(c(u),h_1(u)),(c(v),h_1(v))} \cdot y_{(c(u),h_2(u)),(c(v),h_2(v))}\\
&= \operatorname{colhom}_{F,c,n}(G) \operatorname{colhom}_{F,c,m}(H).
\end{aligned}$$

□

下面的引理 8.13 使用标准插值论证，将同态多项式的线性组合限制在具有特定边数的模式上。关键洞见是，$\operatorname{colhom}_{F,n}$ 是一个次数为 $|E(F)|$的齐次多项式。

引理 *8.13*。设 C 是一个有限颜色集，且 N、$r \in \mathbb{N}$。对于 $i \in [r]$, , 设 F_i 为满足 $\|F_i\| \le N$ 的二分多重图，且 $c_i\colon V(F_i) \to C$。设 α_i 为系数。对于 n、$k \in \mathbb{N}$，记 $p := \sum_{i\in[r]} \alpha_i$ 着色同态$_{F_i,c_i,n}$，且 $p_k := \sum_{|E(F_i)|=k} \alpha_i$着色同态$_{F_i,c_i,n}$。在任意无限域上，存在一个计算 p_k 的深度-3电路，其规模关于 N 和 n 为多项式级，并使用计算 p 的预言机门。

证明。 令t 为一个新的变量。对于C着色边加权图G，记tG 为将每条边的权重乘以t后得到的C着色边加权图。对于任意F 和$c\colon V(F) \to C$,

$$\operatorname{colhom}_{F,c,n}(tG) = \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \prod_{uv\in E(F)} \left(t \cdot x_{(c(u),h(u)),(c(v),h(v))}\right) = t^{|E(F)|} \operatorname{colhom}_{F,c,n}(G).$$

因此，只需在至多自然数集个点上计算 $p(tG) = \sum t^{|E(F_i)|}\alpha_i$ 着色同态$_{F_i,c_i,n}(G) = \sum_k p_k(G)t^{|E(F_i)|}$，便可插值得到 $p_k(G)$。换句话说，存在域元素 $t_0, \ldots, t_N$ 以及系数 $\beta_0, \ldots, \beta_N$，使得 $p_k(G) = \sum_{i=0}^{N} \beta_i p(t_i G)$。该电路的规模关于自然数集 $+n$ 为多项式级，深度为 3。

□

现在，我们将前述观察结合起来，以证明主要的归约引理 8.14 和 8.16。第一个引理允许我们从多重图 F ⊇ S 的同态多项式中提取简单图 S 的多彩同态多项式，其中 F 含有 S 作为子图。证明与 [Cur23, 定理 9(b)] 的证明有些相似，但采用了针对多项式的论证，因此得到了更高效的归约。具体而言，将 [Cur23, 定理 9(b)] 直接转化到代数复杂性中，在引理 8.14 的假设下，可得到从 $\mathrm{colhom}_{S,n}$ 到 $\mathrm{hom}_{F,2^{d-1}\cdot|V(F)|\cdot n}$ 的归约。然而，后一个多项式对 |V(F)| 的依赖代价过高，无法据此证明第 3.3 节中的任何结果。

引理 8.14. 设 F 是一个二分多重图，$S \subseteq F$ 是 F 的一个连通简单子图，且最大度不超过 d。令 $n \in \mathbb{N}$。对于任意特征为零的域，都存在一个常深度电路，能够计算着色同态$_{S,\ n}$ 其大小关于 $\|F\| + n$ 为多项式，并使用针对 同态$_{F,\ 2^{d-1}\cdot|V(S)|\cdot n}$ 的预言机门。

证明。 我们首先通过引理$_{F,\ n}$ 将 hom$S$-着色同态多项式的线性组合8.11. 也就是说，

$$\mathrm{hom}_{F,|V(S)|\cdot n} = \sum_{c\colon V(F)\to V(S)} \mathrm{colhom}_{F,c,n}\,. \tag{14}$$

令 $x_{(a,i),(b,j)}$ 表示该多项式中对应 $a,b \in V(S)$ 以及 $i,j \in [n]$ 的变量。接下来，我们进行代换 $x_{(a,i),(b,j)} := 1 + y_{(a,i),(b,j)}$。在此代换下，

$$\begin{aligned}
\mathrm{colhom}_{F,c,n}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}) &= \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \prod_{uv\in E(F)} \left(1 + x_{(c(u),h(u)),(c(v),h(v))}\right) \\
&= \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \sum_{E\subseteq E(F)} \prod_{uv\in E} x_{(c(u),h(u)),(c(v),h(v))} \\
&= \sum_{F'\subseteq F} \mathrm{colhom}_{F',c,n}(\boldsymbol{x}).
\end{aligned} \tag{15}$$

其中，最后一个求和遍历所有子图 F'，它们是 F 的子图，顶点集为 $V(F') = V(F)$。将引理8.13 应用于方程 (14) 和 (15)，我们得到一个电路来计算

$$q_n := \sum_{c\colon V(F)\to V(S)} \sum_{\substack{F'\subseteq F \\ |E(F')|=|E(S)|}} \mathrm{colhom}_{F',c,n}\,. \tag{16}$$

设 S_0 和 S_1 分别表示 CFI图 S，视为 S-有色图，如 [Rob22 中所述；Cur24]。注意，S_0 和 S_1 每个颜色类至多有 2^{d-1} 个顶点。

命题8.14a。 设 S 是一个连通简单图。设 H 是一个没有孤立顶点且含有 $|E(S)|$ 条边的S-有色多重图。在计算保色同态时，$\mathrm{hom}(H,S_0) \neq \mathrm{hom}(H,S_1)$ 当且仅当，$H \cong S$ 作为S-有色图。

命题证明。记 h : H → S 为 H 的 S-着色。根据 [Rob22，定理 3.13], , 有 hom(H, S_0) ≠ hom(H, S_1) 当且仅当 h 是一个弱奇同态。这里，在计算 hom(H, S_0) 时，H 中的边重数无关紧要，因为 S_0 和 S_1 是简单图。逆向蕴含由 [Rob22，引理 3.14] 立即可得。对于正向推导，若 h 是一个弱奇同态，则对于每个 $h^{-1}(s)$，其中 s ∈ V(S)，都包含一个满足 $\deg_H(v) \geq \deg_S(s)$ 的顶点 v。更准确地说，对于每个 t ∈ $N_S(s)$，在 $h^{-1}(t)$ 中都有一个邻点。由于 H 与 S 的边数相同，这意味着 H ≅ S 作为 S- 着色图是同构的。 ⌟

为了应用命题 8，14a，必须处理孤立顶点。这是直接的，因为

$$\operatorname{colhom}_{F+K_1,c,n} = n \cdot \operatorname{colhom}_{F,c|_{V(F)},n}. \tag{17}$$

根据断言 8.14a 和引理8.12，对于公式 (q_n ，如方程 (16) 所示，

$$\begin{aligned}
&q_{2^{d-1}\cdot n}(G \times S_0) - q_{2^{d-1}\cdot n}(G \times S_1) \\
&= \sum_{c\colon V(F)\to V(S)} \sum_{\substack{F'\subseteq F \\ |E(F')|=|E(S)|}} \operatorname{colhom}_{F',c,n}(G) \cdot \big(\hom(F', S_0) - \hom(F', S_1)\big) \\
&= \sum_{c\colon V(F)\to V(S)} \sum_{\substack{F'\subseteq F \\ |E(F')|=|E(S)|}} \alpha_{F'} \operatorname{colhom}_{F'',c|_{V(F'')},n}(G) \cdot \big(\hom(F'', S_0) - \hom(F'', S_1)\big) \qquad (18) \\
&= \sum_{\substack{c\colon V(F)\to V(S) \\ F'\subseteq F \\ (F'',c|_{V(F'')})\cong S}} \beta_{F'} \operatorname{colhom}_{S,\mathrm{id},n}(G) \\
&= \operatorname{colhom}_{S,\mathrm{id},n}(G) \sum_{\substack{c\colon V(F)\to V(S) \\ F'\subseteq F \\ (F'',c|_{V(F'')})\cong S}} \beta_{F'}. \qquad (19)
\end{aligned}$$

在公式 (18) 中，F′ 表示从 F′ 中删除所有孤立顶点后得到的图。正系数 $\alpha_{F'}$ 取决于 F′、S 和 S，并可通过公式 (17) 计算。类似地，$\beta_{F'} :=$ $\alpha_{F'}$ ·(同态(F′, S0) − 同态(F′, S1)) > 0 对于 (F′, c|V(F′)) ≅(S,id)。因此，公式 (19) 给出了一个用于着色同态$_{S,\mathrm{id},n}$(G) 的电路。总而言之，我们得到一个用于着色同态$_{S,\mathrm{id},n}$ 的电路，其大小为多项式 ||F|| +n，且深度为常数，并使用针对同态$_{F,2^{d-1}\cdot|V(S)|\cdot n}$ 的预言机门。 □

接下来，我们通过证明一个针对子式而非子图的类似结果，来加强引理 8.14 。与公式 (15) 类似，我们通过适当的代换，构造一个用于子式的同态多项式的线性组合的电路。

关键在于以下关于 [Sep24b、定理 10]的代数与二分图类比。对于一个具有$G = (x_{i,j})_{i,j\in[n]}$个顶点的$n$、$n$)二分图，记$G^-$ 为由(2n、2n)个顶点组成的图$G^- = (y_{(s,i),(t,j)})_{i,j\in[n],s,t\in\{A,B\}}$ ，其定义为

$$y_{(s,i),(t,j)} := \begin{cases} 1, & \text{if } s = t \text{ and } i = j, \\ 0, & \text{if } s = t \text{ and } i \neq j, \\ x_{i,j}, & \text{if } s = A \text{ and } t = B, \\ x_{j,i}, & \text{if } s = B \text{ and } t = A. \end{cases}$$

该构造的目的是得到以下表达式，其中包含来自F的子式的同态计数。

引理 8.15. 设 F 是一个二分多重图。对于 $n \in \mathbb{N}$ 以及如上所述的 G 和 G^- ，

$$\hom_{F,2n}(G^-) = \sum_{s\colon V(F)\to\{A,B\}} \hom_{F\oslash s,n}(G).$$

这里，F ⊘s 定义如下。对于 s ∈V(F) → {A, B}，定义 L := {uv ∈E(F) | s(u) =s(v)}。在 V(F) 上定义等价关系 $\sim_L$ ：若 u 和 v 属于由顶点集 V(F) 和边集 L 构成的 F 的子图的同一个连通分量，则 u $\sim_L$ v。多重图的边

F ⊘ s 的边是由 E(F)\ L 诱导的边。二分划分由 s 给出。事实上，若 u $\sim_L$ v，则 s(u) = s(v)。此外，若 u $\not\sim_L$ v 相邻，则存在 uv ∈ E(F)\ L，因此 s(u) ≠ s(v)。

引理的证明*8.15*。有

$$\begin{aligned}
\hom_{F,2n}(G^-) &= \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \sum_{s\colon V(F)\to\{A,B\}} \prod_{uv\in E(F)} y_{(s(u),h(u)),(s(v),h(v))} \\
&= \sum_{h\colon V(F)\to[n]} \sum_{s\colon V(F)\to\{A,B\}} \prod_{\substack{uv\in E(F)\\ s(u)=s(v)}} \delta_{h(u),h(v)} \prod_{\substack{uv\in E(F)\\ s(u)=A\\ s(v)=B}} x_{h(u),h(v)} \prod_{\substack{uv\in E(F)\\ s(u)=B\\ s(v)=A}} x_{h(v),h(u)} \\
&= \sum_{s\colon V(F)\to\{A,B\}} \sum_{h\colon V(F\oslash s)\to[n]} \prod_{uv\in E(F\oslash s)} x_{h(u),h(v)} \\
&= \sum_{s\colon V(F)\to\{A,B\}} \hom_{F\oslash s,n}\,.
\end{aligned}$$

□

引理 8.15 可以证明引理8.14的以下改进。

引理 8.16。设 F 为一个二分多重图，S 为 F 的一个最大度至多为 d 的连通简单二分子式。设 $n \in \mathbb{N}$。在任意特征为零的域上，存在一个常深度电路，其大小关于 $\|F\| + n$ 为多项式，并使用针对 $\hom_{F,\ 2^{d\cdot|V(S)|}\cdot n}$ 的预言机门来计算着色同态$_{S,\ n}$。

证明。我们首先论证，F 的每个简单子式 S 都具有 F′ ⊘s 的形式，其中 F′ ⊆ F 是某个子图，满足 V(F′) = V(F)，且 s : V(F) → {A, B} 是某个映射。设 $B_0, B_1, \ldots, B_k$ 为 S 在 F 中的分支集，即 [k] 与 S 对应，$B_0 \uplus \cdots \uplus B_k$ 是 V(F) 的一个划分；对于 i ∈ [k]，每个 F[B_i] 都是连通的；对于 ij ∈ E(S)，存在一条边 uv ∈ E(F)，其中 u ∈ B_i 且 v ∈ B_j。

记 t : [k] → {A, B} 为 S 的给定二分划分。令 F′ 表示 F 的子图，其顶点集 V(F′) = V(F)，包含 B_i 中顶点之间的所有边（i ∈ [k],），以及对于 ij ∈ E(S)，B_i 与 B_j 之间唯一的一条边，且不包含其他边。令 s : V(F′) → {A, B} 表示由 t 诱导的映射，它在 B_0 上取任意值。采用这样的 F′ 和 s 后，二分简单图 F′ ⊘s 与 S 的差异仅在于可能存在孤立顶点。

证明的其余部分遵循引理 8.14 的证明结构。类似于方程（15），有

$$\hom_{F,n}(\mathbf{1} + x) = \sum_{F'\subseteq F} \hom_{F',n}(x)$$

其中，求和遍及所有子图 F'，它们属于 F 且顶点集为 $V(F') = V(F)$。根据引理 8.15，这使得我们能够为其构造一个多项式规模的常深度电路：

$$q_n := \sum_{F'\subseteq F} \sum_{s\colon V(F)\to\{A,B\}} \hom_{F'\oslash s,n} \tag{20}$$

使用用于同态的预言机门$_{F,\ 2n}$。接下来，我们应用引理8。11 来处理方程（20），从而得到一个电路，用于

$$\begin{aligned}
q_{|V(S)|\cdot n} &= \sum_{F'\subseteq F} \sum_{s\colon V(F)\to\{A,B\}} \hom_{F'\oslash s,|V(S)|\cdot n} \\
&= \sum_{F'\subseteq F} \sum_{s\colon V(F)\to\{A,B\}} \sum_{c\colon V(F'\oslash s)\to V(S)} \operatorname{colhom}_{F'\oslash s,c,n}\,.
\end{aligned}$$

最后，根据引理 8。13 和断言 8。14a，如引理8。14的证明中那样，我们得到一个计算着色同态$_{S,n}$ 的电路，其规模为多项式、深度为常数，并且需要用于 $\hom_{F,2^{d\cdot|V(S)|\cdot n}}$的预言机门，其中$d$ 是S中任意顶点的最大次数。

□

在证明定理 D之前，我们指出，无色同态多项式也满足引理 8。2 的类似结论。

引理 8.17. 对于每个二分多重图的 p-族$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$，

1. $(\hom_{F_n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 *VNP*。*2. 若* $tw(F_n) \in O(1)$，
则 $(\hom_{F_n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 *VP*；*3. 若* $pw(F_n) \in O(1)$，
则 $(\hom_{F_n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 *VBP*；*4. 若* $td(F_n) \in O(1)$，
则 $(\hom_{F_n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 *VF*。

证明。 第一条断言由 [Sau16，命题 3.3.1] 根据 Valiant 判据 [Val79],第二条由 [DPS25，定理 5.3], 第三条由引理 6.21，第四条由引理 6.13。

□

至此，定理D的证明准备工作全部完成。

定理 D.设$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个二分多重图的 p-族。设 $\varepsilon > 0$。

1. 如果对于所有 $n \geq 2$，$tw(F_n) \geq n^{\varepsilon}$，那么 $(\hom_{F_n,n})$ 是 *VNP* 完全。*2.* 如果对于所有 $n \geq 2$，$tw(F_n) \in O(1)$，且 $pw(F_n) \geq \varepsilon log(n)$，那么 $(\hom_{F_n,n})$ 是 *VP*-完全。*3.* 如果对于所有 $n \geq 2$，$pw(F_n) \in O(1)$，且 $td(F_n) \geq \varepsilon log(n)$，那么 $(\hom_{F_n,n})$ 是 *VBP*-完全。

在所有情况下，在任意特征为零的域上，困难性均在常深度 c-归约下成立。

证明。 包含关系由引理8。17证明。与定理 8。8的证明一样，存在一个多项式 p 使得，根据待证明的命题，对于每个充分大的$n \in \mathbb{N}$,

1. $F^{p(n)}$ 包含网格 $G_{n\times n}$ 作为子式，2. $F^{p(n)}$ 包含完全二叉树 B_n 作为子式，3. $F^{p(n)}$ 包含路径 P_n 作为子式。

分别用 $S_n \in \{G_{n\times n}、B_n、P_n\}$ 表示相应的子式。注意，在每种情况下，S_n 中任意顶点的最大度至多为4，且S_n 中的顶点数至多为n^2。此外，可以选择p 使得

$$2^4 \cdot n \cdot |V(S_n)| \leq 16n^3 \leq p(n)$$

对于所有充分大的$n \in \mathbb{N}$均成立。根据引理8.16，$(\mathrm{colhom}_{S_n、n})_{n\in\mathbb{N}}$ 可通过常数深度c-归约归约到$(\mathrm{hom}_{F_n、n})_{n\in\mathbb{N}}$。根据定理8.8，$(\mathrm{colhom}_{S_n、n})_{n\in\mathbb{N}}$ 分别是 VNP-困难、VP-困难或 VBP-困难的，具体取决于初始假设。 □

8.3 同态多项式的线性组合

最后，我们转向（未着色）同态多项式的线性组合。在这里，我们采用基于以下引理的插值论证8.18。

在例 3.1中，我们观察到，非同构模式的同态多项式不一定线性无关。不过，如果模式的大小不超过宿主大小，且模式中没有孤立顶点，则它们线性无关。以下引理可由 [Lov12，命题 5。44 和习题5。47]推出。为完整起见，我们给出证明。

假设模式中没有孤立顶点并不失一般性，因为如果将孤立顶点 K_1 加入二分划分的左侧，则 $\hom_{F+K_1,n,m} = n \cdot \hom_{F,n,m}$。换言之，在我们的非一致设定中，可以通过重新缩放系数来处理孤立顶点。

引理 8.18. 设 $\mathbb{K}$ 表示一个特征为零的域。设 $n, m \in \mathbb{N}$。设 $F_1, \ldots, F_r$ 是顶点数至多为 (n, m) 且没有孤立顶点的二分多重图。若 $F_1, \ldots, F_r$ 两两不同构，[7]则多项式 $\hom_{F_1,n,m}, \ldots, \hom_{F_r,n,m} \in \mathbb{K}[\mathcal{X}_{n,m}]$ 线性无关。

证明。 考虑 [DPS25，附录 A]中的嵌入多项式。对于一个二分多重图 F，其二分划分为 $A \uplus B$，令

$$\mathrm{emb}_{F,n,m} := \sum_{h\colon A\uplus B \hookrightarrow [n]\uplus[m]} \prod_{ab\in E(F)} x_{h(a),h(b)}.$$

由于可以从 $\mathrm{emb}_{F,n,m}$ 的任一单项式中读出 F 的同构类型，因此对于所有顶点数至多为 (n, m) 且没有孤立顶点的二分多重图 F 和 F′，均有 $\mathrm{emb}_{F,n,m} = \mathrm{emb}_{F',n,m} \iff F \cong F'$。因此，多项式 $\mathrm{emb}_{F_1,n,m}, \ldots, \mathrm{emb}_{F_r,n,m} \in \mathbb{K}[\mathcal{X}_{n,m}]$ 线性无关。根据 [DPS25，附录 A]，

$$\hom_{F,n,m} = \sum_{\pi\in\Pi(A)} \sum_{\sigma\in\Pi(B)} \mathrm{emb}_{F/(\pi,\sigma),n,m} \tag{21}$$

其中，π 和 σ 分别遍历A 和B的划分，而$F/(\pi,\sigma)$ 是F 根据(π,σ)得到的二分商图。假设图F_i（其中$i \in [r]$）的顶点集为$A_i \uplus B_i$。令α_1，...，$\alpha_r \in \mathbb{K}$ 为满足以下条件的系数

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \hom_{F_i,n,m} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\pi\in\Pi(A_i)} \sum_{\sigma\in\Pi(B_i)} \alpha_i \,\mathrm{emb}_{F_i/(\pi,\sigma),n,m}.$$

根据前面的观察，$\mathrm{emb}_{F_i/(\pi,\sigma),n,m}$ 线性无关。因此，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$，证毕。

□

为了将引理8.18 转化为插值论证，我们需要以下标准事实。

事实8.19. 设 $\mathbb{K}$ 是一个特征为零的域。对于 $n, d \in \mathbb{N}$，设 $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}$ 为函数。若 $f_1, \ldots, f_n$ 线性无关，则存在点$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^d$，使得矩阵$(f_i(x^j))_{i,j\in[n]}$ 可逆。</output>

Proof. 我们给出一个受 [Gro20b]启发的自洽证明。考虑子空间

$$U := \mathrm{span}\{(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \mid x \in \mathbb{K}^d\} \subseteq \mathbb{K}^n.$$

如果$U = \mathbb{K}^n$，那么存在求值点x_1,.....，x_n，使得它们在U 中的对应向量张成 $\mathbb{K}^n$。对于这些向量，矩阵$(f_i(x^j))_{i,j\in[n]}$ 是可逆的。否则，存在一个非零向量$c \in U^\perp$，它属于U的正交补。对于每个$x \in \mathbb{K}^d$，

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

这与函数f_1, ..., f_n 线性无关矛盾。 □

[7]一个同构 二分多重图的同态保持固定二分部和边重数。

引理证明的准备工作至此完成8。20，这使得我们能够将单个模式的同态多项式化为包含该模式的次线性体积子图的同态多项式的线性组合。在此，我们利用代数计算的非一致性来获得插值系数。在 [Cur24], 的设置中，这无法在给定的计算边界内完成。

引理 8.20. 设 $n,r,N \in \mathbb{N}$。设 F_i （$i \in [r]$）为一组两两不同构的二分多重图，均不含孤立顶点，且顶点数至多为 N。设 α_i （$i \in [r]$）为非零系数。对于每个特征为零的域，以及每个 $\ell \in [r],$，都存在一个大小关于 n、N 和 r 为多项式的常深度电路，其预言机门可调用 $\sum_{i\in[r]} \alpha_i$ 同态$_{F_i,n\cdot N}$，并能计算多项式 同态$_{F_\ell,n}$。

证明。 根据引理 8.18，多项式 $\hom_{F_1,N}, \ldots, \hom_{F_r,N}$ 线性无关。特别地，它们作为函数 $\mathbb{K}^{N\times N} \to \mathbb{K}$ 也线性无关。根据事实 8.19，存在点$\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_r \in \mathbb{K}^{N\times N}$，使得矩阵 $M := (\hom_{F_i,N}(\boldsymbol{x}_j))_{i,j} \in \mathbb{K}^{r\times r}$ 可逆。因此，存在系数向量 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{K}^r$，使得 $M\boldsymbol{\beta} = e_\ell$，其中 $e_\ell \in \mathbb{K}^r$ 表示第 ℓ 个标准基向量。换言之，

$$\sum_{j\in[r]} \beta_j \hom_{F_i,N}(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{i,\ell} \tag{22}$$

对于所有 $i \in [r]$。设 G 是一个任意的边加权(n,n)-顶点二分图。于是，根据引理 8。12，

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in[r]} \beta_j \sum_{i\in[r]} \alpha_i \hom_{F_i,n\cdot N}(G \times \boldsymbol{x}_j) &= \sum_{j\in[r]} \beta_j \sum_{i\in[r]} \alpha_i \hom_{F_i,n}(G) \hom_{F_i,N}(\boldsymbol{x}_j) \\
&= \sum_{i\in[r]} \alpha_i \hom_{F_i,n}(G) \sum_{j\in[r]} \beta_j \hom_{F_i,N}(\boldsymbol{x}_j) \\
&\overset{(22)}{=} \sum_{i\in[r]} \alpha_i \hom_{F_i,n}(G) \cdot \delta_{i,\ell} \\
&= \alpha_\ell \hom_{F_\ell,n}(G).
\end{aligned}$$

由于 $\alpha_\ell \neq 0$，我们可以除以 α_ℓ，从而得到一个计算 $\hom_{F_\ell}$ 的电路，$_n(G)$。 □

我们证明定理3。7，讨论二分多重图的同态多项式线性组合的复杂度。证明采用引理8。20，将问题归约到定理D。

定理 3。7。 对于 $\varepsilon > 0$，令 $(p_n) := (\sum_F \alpha_{F,n}$同态$_{F,n})$ 为一个 p-族，其成员是二分多重图（无孤立顶点、体积至多为 $n^{1-\varepsilon}$）的同态多项式的线性组合，且多项式维数 $\dim(n) := |\{F \mid \alpha_{F,n} \neq 0\}|$。则有以下结论：

1. 若对所有 $n \geq 2$，*max tw*$(p_n) \geq n^\varepsilon$，则 (p_n) 为 *VNP* 完全。*2.* 若 *max tw*$(p_n) \in O(1)$，且对所有 $n \geq 2$，*max pw*$(p_n) \geq \varepsilon$ *log*(n)，则 (p_n) 为 *VP*-完全。*3.* 若 *max pw*$(p_n) \in O(1)$，且对所有 $n \geq 2$，*max td*$(p_n) \geq \varepsilon$ *log*(n)，则 (p_n) 为 *VBP*-完全。

在所有情况下，在特征为零的任意域上，困难性在常深度 c-归约下成立。 *o.*

证明。 根据引理 8.17 并注意到 VNP、VP 和 VBP 在对多项式多个项进行线性组合时封闭，即可得到包含关系。直观地说，多项式$(\hom_{F_n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ 可通过引理 8.20常数深度 c-归约到 $(\sum \alpha_{F,n} \hom_{F,n})_{n\in\mathbb{N}}$。困难性随后由定理D得出。

对于 $n \in \mathbb{N}$，记线性组合中系数 α_{F_n},n 非零的大宽度图为 F_n。由于 $|V(F_n)| \cdot n^{\varepsilon} \leq n^{1-\varepsilon} \cdot n^{\varepsilon} = n$，根据引理 8.20，$(\mathrm{hom}_{F_n}, n^{\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ 可常数深度 c-归约到 (p_n)。此处，预言机电路的规模是 $\mathrm{vol}(n) + \dim(n) + n$ 的多项式，假设它关于 n 是多项式。最后，注意到

1. 路径宽（$F_{n^{1/\varepsilon}}$）$\geq$（$n^{1/\varepsilon}$）$^{\varepsilon} = n$,
2. 路径宽（$F_{n^{1/\varepsilon}}$）$\geq \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \log$（$n$）$= \log$（$n$），3. 树深度（$F_{n^{1/\varepsilon}}$）$\geq \log$（$n$）。

因此，根据定理D，（同态$_{F_{n^{1/\varepsilon}}, n}$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 分别是 VNP-、VP- 或 VBP-完全的。 □

8.4 参数化 Valiant 类的困难性

最后，我们证明定理E 和定理3。8 以及推论3。6。与引理8。3一样，出发点是从团多项式进行归约；Bläser 和 Engels [BE19], 已证明团多项式是 VW[1]-完全的，将其归约为网格的多彩同态多项式。注意，（着色同态$_{G_{k\times k},\ n^2}$）不是定义 5p-族，因为变量数为5。8，即k^2n^2,，而这在p-意义下并不受n有界。因此，（着色同态$_{G_{k\times k},\ n^2}$）不属于 VW[1]。

引理 8.21. 族(着色同态$_{G_{k\times k}}$,n) 在任意域上均为VW[1]-难问题，且关于 *fpt-c*-归约封闭。

证明。 根据 [BE19], 的主要结果，族(团$_{n,k}$) 在任意域上均为 VW[1]-完全问题，且关于 fpt-c-归约封闭，其中

$$\mathrm{clique}_{n,k} := \sum_{\substack{C\subseteq[n]\\ |C|=k}} \prod_{\substack{i,j\in C\\ i<j}} y_{i,j} \prod_{i\in C} x_i.$$

注意，这个多项式与 VNP-完全多项式 (团$_n$) 方程 (11) 中的多项式不同之处在于参数 k 以及乘积 $\prod_{i\in C} x_i$。 引理 8.3 的证明可相应调整如下。令 $G^{k\times(k+1)}$ 表示顶点集为 $[k] \times \{0, \ldots, k\}$ 的网格。我们定义一个G-着色边加权图，使得着色同态$_{G_{k\times(k+1)},n^2}$ 在G 处的取值等于团$_{n,k}$。G的顶点定义如下：

- 对于每个 $i \in [k]$ 和 $v \in [n]$,，颜色类(i,i) 包含顶点(i,i,v,v)。
- 对于每个i、$j \in \{0, \ldots\ldots k\}$，$i \neq j$，以及满足$u \neq v$的每个$u$、$v \in [n]$，颜色类$(i,\ j)$包含顶点$(i,\ j,\ u,\ v)$。

边权如下：

- 对于每个$i \in \{0, \ldots\ldots k\}$、$u$、$v$、$v' \in [n]$,，边$(i,\ 0,\ u,\ v)(i,\ 1,\ u,\ v')$ 的权重为x_u。
- 对于每个$i \in [k], i \leq j \leq n-1$、$u \in [n]$, 以及 $1 \leq v < v' \leq n$，边$(i,\ j,\ u,\ v)(i,\ j+1,\ u,\ v')$的权重为$y_{v,\ v'}$。
- 对于每个$j \in [k]$，$1 \leq i \leq j-1$、$v \in [n]$, 以及 $1 \leq u < u' \leq n$，边$(i,\ j,\ u,\ v)(i+1,\ j,\ u',\ v)$的权重为1。
- 所有其他边的权重均为零。

根据引理 8.3 中的分析，这表明 clique$_{n,k}$ 是 colhom$_{G_{k\times(k+1)},n^2}$的一个投影。根据引理 8.6, colhom$_{G_{k\times(k+1)},n^2}$ 是 colhom$_{G_{(k+1)\times(k+1)},n^2}$的一个投影。最后，通过重新缩放参数，(colhom$_{G_{(k+1)\times(k+1)},n^2}$)$_{n,k}$固定参数可投影到 (colhom$_{G_{(k)\times(k)},n}$)$_{n,k}$，参见定义 5.10。 □

我们不证明VW[1]-困难性对于任何同态多项式。正如 [Cur21], 以下较弱的结论足以排除无界树宽模式对应的同态多项式具有多项式规模代数电路。

引理 8。22。 设 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个函数，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$f^{-1}(\{n\})$ 均为有限值。如果 (着色同态$_{G_{f(n)\times f(n)},\ n}$) $\in$ VP，那么VFPT $=$ VW[1]。

证明。 我们证明该假设意味着 (着色同态$_{G_{k\times k},\ n}$) $\in$ VFPT，从而使 VFPT和 VW[1] 相等，因为 VFPT在 fpt-c- 归约下封闭，根据 [BE19，引理 4。17]。

令 $F(k) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq k\} = \max(f^{-1}([k]))$，根据假设，该定义良好。令 $k,n \in \mathbb{N}$。分两种情况讨论：

1. 若 f (n) $\leq$ k，则定义 8.1 中着色同态$_{G_{k\times k}}$,n 的定义给出一个大小关于 $n^{k^2}k^2 \leq F(k)^{k^2}k^2$, 为多项式的电路，该电路关于 k、n 是 fpt-有界的。 2. 若 f (n) $>$k，则 $G_{k\times k}$是 $G_{f(n)}$×f (n) 的子图。因此，根据引理 8.6，着色同态$_{G_{k\times k}}$,n 是着色同态$_{G_{f(n)\times f(n)}}$,n 的投影。特别地，着色同态$_{G_{k\times k}}$,n 存在一个大小关于 n 为多项式的电路。

在这两种情况下，(着色同态$_{G_{k\times k},\ n}$) $\in$VFPT。由引理 8.21 可知，VFPT $=$ VW[1]。 □

观察 8.23. 设 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 无界且单调不减。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$f^{-1}(\{n\})$ 都是有限的。

证明。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\ell \in \mathbb{N}$ 使得 $f(\ell) > n$，因为 f 无界。由于 f单调不减，因此对所有 $\ell' \geq \ell$，都有 $f(\ell') > n$。因此，映射到 f 下的值为 ℓ 的数至多有有限多个。

□

至此，定理E证明所需的准备工作已经完成。

定理 E。 设 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个二分多重图的 p-族，且 tw(F_n) 单调不减。除非VFPT $=$ VW[1]，，否则 (同态$_{F_n,\ n}$) $\in$ VP 当且仅当 tw(F_n) $\in O(1)$。

定理 E 的证明。 由引理 8.17可知，接下来只需说明：若 tw(F_n) 非递减且属于$\Omega(1)$，则 (hom$_{F_n,n}$) $\notin$ VP，除非 VFPT $=$ VW[1]。

令 $\tau > 0$ 表示定理 8.7 中的普适常数。[8] 令 g(n) := (tw(F$_n$))$^{1/\tau}$ 为一个函数，使得 F$_n$ 包含一个边长为 g(n) × g(n) 的网格子式。根据假设，函数 g 无界且非递减，因此满足引理 8.22 的要求（由观察 8.23 可知）。最后，令 h(n) := min{g(n), n$^{1/4}$}。由引理 8.6 和 8.16 可知，对所有 n $\in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\text{size}(\text{colhom}_{G_{h(n)\times h(n)},\frac{1}{8}\sqrt{n}}) &= \text{size}(\text{colhom}_{G_{h(n)\times h(n)},\frac{n}{8(n^{1/4})^2}})\\ &\leq \text{size}(\text{colhom}_{G_{h(n)\times h(n)},\frac{n}{8h(n)^2}})\\ &\leq \text{size}(\text{colhom}_{F_n,n}) + \text{poly}(n).\end{aligned}$$

令 $\ell := \frac{1}{8}\sqrt{n}$，

$$\text{size}(\text{colhom}_{G_{h(64\ell^2)\times h(64\ell^2)},\ell}) \leq \text{poly}(\ell).$$

函数 $\ell \mapsto h(64\ell^2)$ 满足引理 8.22的假设。因此，VFPT $=$ VW[1], 如所需。

□

为了得到推论 3。6，我们注意到，将无色同态多项式视为参数化多项式族时，它们属于 V W[1]，参见定义5。8。

Lem引理 8.24。 对于每个二分简单图的 p-族 (F_k)，$(\text{hom}_{F_k,\ n})_{n,\ k\in\mathbb{N}} \in$ VW[1].

[8]对于此证明而言，原始的网格次要定理 [RS86] 就足够了。

证明。首先注意到 $(\hom_{F_k,n})_{n,k\in\mathbb{N}}$ 是一个参数化 p-族，参见定义 5.8。$\hom_{F_k,n}$ 中变量的数量为 n^2。$\hom_{F_k,n}$ 的次数等于 F_k 中边的数量，因此关于 k 是多项式，因为 (F_k) 是一个 p-族。属于 VW[1] 可通过推广 [BE19] 中的论证得出，即 $(\text{clique}_{n,k}) \in \mathsf{VW}[1]$。回顾定义 5.11。我们定义如下通用多项式 g_n，其变量为 $x_{i,j}$、$y_{u,v}$、$z_{u,i}$，其中 i、j、u、v $\in [n]$。

$$g_n := \prod_{u,v\in[n]} \prod_{i,j\in[n]} (x_{i,j}y_{u,v}z_{u,i}z_{v,j} + 1 - z_{u,i}z_{v,j}y_{u,v}) \cdot \alpha_n^n \cdot \prod_{u\in[n]} \prod_{1\le i<j\le n} (z_{u,i} + z_{u,j} - 2) \tag{23}$$

对于 $\alpha_n := (-2)^{-(n-1)(n-2)}(-1)^{n-1}$。变量 $x_{i,j}$ 将成为同态多项式的变量。变量 $y_{u,v}$ 表示模式图中的边，并将被赋值为 0 或 1。最后，变量 $z_{u,i}$ 通过指示顶点 u 映射到顶点 i来编码该同态。

命题 8.24a. $(\hom_{F_k,n})$ 可通过 FPT-s-归约到 $(\sum_{z\in\langle n^2{}_k\rangle} g_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))$。

命题证明。 固定 $n,k \in \mathbb{N}$。记 $\ell := |V(F_k)|$，且 自然数集 $:= \max\{n,\ell\}$。我们描述一个代换 $\sum_{z\in\langle N^2{}_\ell\rangle} g_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$，其计算结果为 $\hom_{F_k,n}$。

为简化记号，假设 自然数集 $= n = \ell$。一般情况可通过填充论证处理。$\hom_{F_k,n}$ 的输入值被赋给 $\boldsymbol{x}$。当且仅当 $uv \in E(F)$时，$y_{u,v} = 1$。

注意，z $\in \{0,1\}^{V(F)\times n}$ 遍历恰好含有 |V(F)| 个 1 的比特向量。条目 $z_{u,i}$表示 u $\in$ V(F) 被映射到 i $\in$ [n]。方程 (23) 右侧的两个嵌套乘积保证，对于每个 u $\in$ V(F)，在 i $\in$ [n] 范围内恰有一个 $z_{u,i}$ 为 1。换言之，z 编码了一个映射 V(F) $\to$ [n]。」

通过重命名变量，可以将方程 (23) 中的四个无界扇入乘积合并为一个乘积。因此，g_n 可由常深度多项式规模的 weft-1 电路计算。由此可知，$(\hom_{F_k,n})_{n,k\in\mathbb{N}} \in \mathsf{VW}[1]$ 根据定义 5。11。 □

推论 3。6。 当且仅当对于每个满足 $\mathrm{tw}(F_n)$ 非递减的二分多重图 p-族 (F_n)，均有$\mathsf{VFPT} \neq \mathsf{VW}[1]$，这一结论成立，

$$(\hom_{F_n,n}) \in \mathsf{VP} \iff \mathrm{tw}(F_n) \in O(1) \iff (\hom_{F_n,n}) \in \mathsf{symVP}.$$

证明。回顾以下无条件成立的蕴含关系。根据定理 3.4，对于每个由二分多重图组成的族 (F_n)，

$$\mathrm{tw}(F_n) \in O(1) \iff (\hom_{F_n,n}) \in \mathsf{symVP}.$$

根据引理 8.17，对于每个由二分多重图组成的 p-族 (F_n)，

$$(\hom_{F_n,n}) \in \mathsf{VP} \impliedby \mathrm{tw}(F_n) \in O(1).$$

假设 $\mathsf{VFPT} \neq \mathsf{VW}[1]$，并令 (F_n) 为一个由树宽非递减的二分多重图组成的p-族(F_n)。根据定理 E，

$$(\hom_{F_n,n}) \in \mathsf{VP} \implies \mathrm{tw}(F_n) \in O(1) \tag{24}$$

如所需。

反过来，假设 $\mathsf{VFPT} = \mathsf{VW}[1]$。令 $(G_{k\times k})$ 表示该 p-族，由 $k \times k$ 网格构成。其树宽为 $\mathrm{tw}(G_{k\times k}) = k$。根据引理 8。24 以及 [BE19，引理 4。17]，存在一个

函数 f：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 以及一个多项式有界函数 q，使得对于所有 n、k $\in \mathbb{N}$，size(hom$_{G_{k\times k}}$,n) $\leq$ f(k)q(n)。不失一般性，假设对于所有 k $\in \mathbb{N}$，k $\leq$ f(k)。令 g(n) :=max{k $\in \mathbb{N}$ | f(k) $\leq$ q(n)}。则 g(n) $\leq$ f(g(n)) $\leq$ q(n)，因此，(G$_{g(n)\times g(n)}$) 是一个 p-族。根据构造，size(hom$_{G_{g(n)\times g(n)}}$, n) $\leq$ f(g(n)) $\cdot$ q(n) $\leq$ (q(n))^2。因此，(hom$_{G_{g(n)\times g(n)}}$,n) $\in$ VP。最后，(G$_{g(n)\times g(n)}$)$_{n\in\mathbf{N}}$ 的树宽无界且非递减，因为 g 无界且非递减。因此，(G$_{g(n)\times g(n)}$)$_{n\in\mathbf{N}}$ 是方程（24）的一个反例。 □

定理 3.8的证明现在按照定理 3.7的证明进行类似的论证。

定理 3.8。 对于 $\varepsilon > 0$，设(p_n) 是一个 p-族，由二分多重图（不含孤立顶点、体积至多为 $n^{1-\varepsilon}$）的同态多项式的线性组合构成，且具有多项式维数，并且最大树宽(p_n)非递减。除非 VFPT $=$VW[1], , 否则$(p_n) \in$VP 当且仅当最大树宽$(p_n) \in O(1)$。

证明。 首先设 maxtw$(p_n) \in O(1)$。由于(p_n) 是一个p-族且体积次线性，因此每个组成图同态多项式都计数来自某个模式F 的同态，其中$\|F\|$ 在 nn中多项式有界，见引理8.18。因此，根据引理 8.17，每个组成图同态多项式都属于 VP。由于(p_n) 具有多项式维数，它本身属于 VP。

反之，设 max tw(p$_n$) $\in \Omega(1)$ 且 (p$_n$) $\in$ VP。对于每个 n $\in \mathbb{N}$，令 F$_n$ 表示一个满足 tw(F$_n$) $=$ max tw(p$_n$) 且具有非零系数 α_{F_n},n $\neq 0$ 的模式，该系数出现在 p$_n$中。如定理 3.7 的证明所示，由引理 8.20 可得，size(hom$_{F_n}$,n$^\varepsilon$) $\leq$ size(p$_n$) $+$ poly(n) $\leq$ poly(n)。 (F$_{n^{1/\varepsilon}}$)$_{n\in\mathbb{N}}$的树宽无界且不减。因此，根据定理 E，(hom$_{F_n}$,n$^\varepsilon$) $\in$VP 蕴含 VFPT $=$VW[1], ，如 desired。 □

9 致谢

感谢 Radu Curticapean 和 Meena Mahajan 富有成效的讨论与反馈。

Prateek Dwivedi 感谢丹麦独立研究基金（资助协议编号：10.46540/3103-00116B）以及哥本哈根基础算法研究（BARC）的支持；该项目由 VILLUM基金会 Grant54451 资助。

Benedikt Pago 获得了英国研究与创新署（UKRI）依据英国政府的地平线欧洲计划资助保障机制提供的资金：资助编号 EP/X028259/1。

Tim Seppelt 的研究经费由欧盟资助（CountHom，101077083）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行机构的立场。欧盟及其拨款机构均不对此承担责任。

参考文献

[AD17] Matthew Anderson 和 Anuj Dawar。《对称电路与不动点逻辑》。载于：《理论计算机系统》60.3（2017年），第521–551页（参见第7、8页）。[Bha+25] C.S. Bhargav、Shiteng Chen、Radu Curticapean 和 Prateek Dwivedi。《同态多项式的单调有界深度复杂性》。载于：第50届计算机科学数学基础国际研讨会（MFCS 2025）。Paweł Gawrychowski、Filip Mazowiecki 和 Michał Skrzypczak 编。第345卷。《莱布尼茨国际信息学会议录》（LIPIcs）。国际标准连续出版物号：1868-8969。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2025年，第19:1–19:18页（参见第5、38页）。[Bha+24] Somnath Bhattacharjee、Markus Bläser、Pranjal Dutta 和 Saswata Mukherjee。《通过指数和得到指数下界》。载于：第51届国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP 2024）。Karl Bringmann、Martin Grohe、Gabriele Puppis 和 Ola Svensson 编。第297卷。《莱布尼茨国际信息学会议录》（LIPIcs）。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2024年，第24:1–24:20页（参见第13页）。[Bie+91] Dan Bienstock、Neil Robertson、Paul Seymour 和 Robin Thomas。《快速排除一个森林》。载于：《组合理论杂志 B 辑》 52.2 （ 1991 年 7 月），第274–283页（参见第11页）。[BE19] Markus Bläser 和 Christian Engels。《参数化瓦利安特类》。载于：第14届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC 2019）。Bart M. P. Jansen 和 Jan Arne Telle 编。第148卷。《莱布尼茨国际信息学会议录》（LIPIcs）。国际标准连续出版物号：1868-8969。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2019年，第3:1–3:14页（参见第6、13、15–17、50–52页）。[Bod98] Hans L. Bodlaender。《有界树宽图的一个部分 k-树木园》。载于：《理论计算机科学》209.1（1998年12月），第1–45页（参见第5、9页）。[Bür00] Peter Bürgisser。《代数复杂性理论中的完备性与归约》。E. Becker、M. Bronstein、H. Cohen、D. Eisenbud 和 R. Gilman 编。第7卷。《数学中的算法与计算》。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg，2000年（参见第15、38页）。[CFI92] Jin-Yi Cai、Martin Fürer 和 Neil Immerman。《图识别所需变量数的最优下界》。载于：Combinatorica 12.4（1992年），第389–410页（参见第5、10、11页）。[CLV19] Prasad Chaugule、Nutan Limaye 和 Aditya Varre。《完备于代数复杂性类的同态多项式变体》。载于：《计算与组合》。Ding-Zhu Du、Zhenhua Duan 和 Cong Tian 编。第11653卷。丛书名：计算机科学讲义。Cham：Springer International Publishing，2019年，第90–102页（参见第5页）。[CC16] Chandra Chekuri 和 Julia Chuzhoy。《网格子式定理的多项式界》。载于：ACM杂志 63.5（2016年12月），第1–65页（参见第6、12、41页）。[CM15] Hubie Chen 和 Moritz Müller。《合取查询与参数化对数空间的精细分类》。载于：ACM 计算理论汇刊7.2（2015年5月），第1–27页（参见第14页）。

[Cur21] Radu Curticapean.《不可约特征标族的完整复杂性二分》。载于：第53届ACM SIGACT计算理论年会论文集。STOC 2021。美国纽约州纽约市：计算机协会，2021年，第1770–1783页（引文见第13、50页）。[Cur23] Radu Curticapean. 利用 CFI 图研究 #P-困难性。arXiv:2305.04767 [cs, math]。2023年5月（引文见第44页）。[Cur24] Radu Curticapean.《利用 CFI 图研究 #P- 困难性》。载于：2024 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，SODA 2024，美国弗吉尼亚州亚历山德里亚，2024年1月7日至10日。David P. Woodruff 编。工业与应用数学学会，2024年，第1854–1871页（引文见第6、12、37、38、42–44、49页）。[CDM17] Radu Curticapean、Holger Dell 和 Dániel Marx.《同态是计数小子图的良好基底》。载于：第49届ACM SIGACT计算理论年会论文集。STOC 2017。美国纽约州纽约市：计算机协会，2017年，第210–223页（引文见第5、10页）。[CM14a] Radu Curticapean 和 Dániel Marx.《子图计数的复杂性：只有顶点覆盖数的有界性才重要》。载于：IEEE第55届计算机科学基础年会。国际标准连续出版物号：0272-5428。2014年10月，第130–139页（引文见第6、12、38页）。[CM14b] Radu Curticapean 和 Dániel Marx. 子图计数的复杂性：只有顶点覆盖数的有界性才重要。arXiv:1407.2929 [cs]。2014年7月（引文见第38、40页）。[CN25] Radu Curticapean 和 Daniel Neuen.《计数小诱导子图：通过傅里叶分析证明困难性》。载于：2025年ACM-SIAM离散算法年会（SODA）论文集。2025年，第3677–3695页（引文见第5页）。[Cyg+15] Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Łukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michał Pilipczuk 和 Saket Saurabh.《参数化算法》。Cham：Springer International Publishing，2015年（引文见第6、13、16页）。[DJ04] Víctor Dalmau 和 Peter Jonsson.《从另一视角看同态计数的复杂性》。载于：《理论计算机科学》329.1（2004年12月），第315–323页（引文见第13页）。[Daw25] Anuj Dawar.《宽度概念：变量、卵石与支撑集》。载于：EATCS通报。《计算机科学逻辑专栏》147（2025年10月）（引文见第8页）。[DPS25] Anuj Dawar、Benedikt Pago 和 Tim Seppelt.《对称代数电路与同态多项式》。载于：CoRR abs/2502.06740（2025年）。arXiv：2502.06740v2（引文见第4–11、14、20–26、29–34、36、38、47、48页）。[DW17] Anuj Dawar 和 Pengming Wang.《半定规划的可定义性与CSP的拉瑟尔下界》。载于：第32届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会（LICS）。冰岛雷克雅未克：IEEE，2017年6月，第1–12页（引文见第10、35页）。[DW20] Anuj Dawar 和 Gregory Wilsenach.《对称算术电路》。载于：第47届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2020）。Artur Czumaj、Anuj Dawar 和 Emanuela Merelli 编。第168卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。国际标准连续出版物号：1868-8969。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2020年，36:1–36:18（引文见第3、4、10页）。

[DW22] Anuj Dawar 和 Gregory Wilsenach.《对称电路的下界：行列式》。载于：第13届理论计算机科学创新会议（ITCS 2022）。第215卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2022年，52:1–52:22（引文见第3、4页）。[DGR18] Holger Dell、Martin Grohe 和 Gaurav Rattan.《Lovász 遇见 Weisfeiler–Leman》。载于：第45届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2018）。Ioannis Chatzigiannakis、Christos Kaklamanis、Dániel Marx 和 Donald Sannella 编。第107卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。国际标准连续出版物号：1868-8969。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2018年，40:1–40:14（引文见第10、35页）。[Dör+21] Julian Dörfler、Marc Roth、Johannes Schmitt 和 Philip Wellnitz.《计数诱导子图：#W[1]-困难性的代数方法》。载于：Algorithmica（2021年12月）（引文见第5页）。[DMW24] Simon Döring、Dániel Marx 和 Philip Wellnitz.《利用边单调性质计数小诱导子图》。载于：第56届ACM年度计算理论研讨会论文集。加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华：ACM，2024年6月，第1517–1525页（引文见第5页）。[Dur+16] Arnaud Durand、Meena Mahajan、Guillaume Malod、Nicholas de Rugy-Altherre 和 Nitin Saurabh.《对 VP 完备的同态多项式》。载于：《芝加哥理论计算机科学杂志》22.1（2016年），第1–25页（引文见第5、6、12、37–40页）。[Dvo10] Zdeňek Dvořák.《通过同态数量识别图》。载于：《图论杂志》64.4（2010年8月），第330–342页（引文见第10、35页）。[FSS24] Eva Fluck、Tim Seppelt 和 Gian Luca Spitzer.《深入与拓宽：有界树深度和树宽图上的计数逻辑与同态不可区分性》。载于：第32届EACSL计算机科学逻辑年会（CSL2024）。Aniello Murano 和 Alexandra Silva 编。第288卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。国际标准连续出版物号：1868-8969。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2024年，27:1–27:17（引文见第9–11、21、36页）。[FG06] Jörg Flum 和 Martin Grohe.《参数化复杂性理论》。柏林、海德堡：Springer-Verlag Berlin Heidelberg，2006年（引文见第6页）。[Gro+23] Carla Groenland、Gwenaël Joret、Wojciech Nadara 和 Bartosz Walczak.《为小树宽图近似路径宽度》。载于：《ACM算法汇刊》19.2（2023年4月），第1–19页（引文见第6、12、41页）。[Gro17] Martin Grohe.《描述复杂性、规范化与可定义图结构理论》。剑桥：剑桥大学出版社，2017年（引文见第10页）。[Gro20a] Martin Grohe.《计数有界树深度同态》。载于：第35届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会论文集。LICS '20。美国纽约州纽约市：计算机协会，2020年，第507–520页（引文见第10、35页）。[Gro21] Martin Grohe.《图神经网络的逻辑》。载于：第36届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会，LICS。意大利罗马：IEEE，2021年，第1–17页（引文见第10页）。

[Gro20b] Ben Grossmann. 证明存在一组求值点，使得该矩阵的行列式非零。数学问答网站 Mathematics Stack Exchange。2020年1月20日（引自第48页）。[Hat+24] Meike Hatzel、Gwenaël Joret、Piotr Micek、Marcin Pilipczuk、Torsten Ueckerdt 和 Bartosz Walczak。《关于以路径宽度和最长路径表示树深度的紧界》。载于：Combinatorica 44.2（2024年4月），第417–427页（引自第6、12、41页）。[Hru17] Pavel Hrubeš。《关于特征2下多线性化的困难性与VNP完全性》。载于：ACM 计算理论汇刊 9.1（2017年3月），第1–14页（引自第5、6、12、37、38页）。[Kar+25] Prem Nigam Kar、David E. Roberson、Tim Seppelt 和 Peter Zeman。《用于量子同构与同态不可区分性的NPA 层级》。载于：第52届国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP 2025）。Keren Censor-Hillel、Fabrizio Grandoni、Joël Ouaknine 和 Gabriele Puppis 编。第334卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。国际标准连续出版物号：1868-8969。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2025，105:1–105:19（引自第10页）。[KR21] Ken-ichi Kawarabayashi 和 Benjamin Rossman。《树深度的多项式排除子图近似》。载于：欧洲数学学会杂志 24.4（2021年10月），第1449–1470页（引自第41页）。[KS14] Neeraj Kayal 和 Ramprasad Saptharishi。《算术电路若干下界选讲》。载于《计算复杂性展望》。Manindra Agrawal 和 Vikraman Arvind 编。Cham：Springer International Publishing，2014，第77–115页（引自第3页）。[Kie20] Sandra Kiefer。《魏斯费勒-莱曼算法：探索其能力》。载于：ACM SIGLOG 新闻 7.3（2020年11月），第5–27页（引自第10页）。[KPR23] Balagopal Komarath、Anurag Pandey 和 Chengot Sankaramenon Rahul。《图同态多项式的单调算术复杂性》。载于：Algorithmica 85.9（2023年），第2554–2579页（引自第5、9、27、38页）。[LST25] Nutan Limaye、Srikanth Srinivasan 和 Sébastien Tavenas。《针对低深度代数电路的超多项式下界》。载于：ACM杂志 72.4（2025年），第1–35页。ECCC：TR21-081（引自第3页）。[Lov67] László Lovász。《对结构的运算》。载于：Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica 18.3（1967年9月），第321–328页（引自第5、10、35页）。[Lov12] László Lovász。《大型网络与图极限》。美国数学学会讨论会出版物第60卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会，2012年（引自第43、47页）。[Mah13] Meena Mahajan。《代数复杂性类》。arXiv:1307.3863 [cs]。2013年12月（引自第3、16页）。[MS18] Meena Mahajan 和 Nitin Saurabh。《代数复杂度理论中的若干完全与中间多项式》。载于：计算机系统理论 62.3（2018年4月），第622–652页（引自第5页）。[MR20] Laura Manˇcinska 和 David E. Roberson。《量子同构等价于从平面图出发的同态计数相等》。载于：IEEE 第 61 届年度计算机科学基础研讨会（FOCS）。2020年，第661–672页（引自第10页）。

[MS24] Yoàv Montacute 和 Nihil Shah。《有限模型论中的Pebble-Relation余单子》。载于：计算机科学中的逻辑方法，第20卷，第2期（2024年5月）（引自第10、35页）。[Mor+19] Christopher Morris、Martin Ritzert、Matthias Fey、William L. Hamilton、Jan Eric Lenssen、Gaurav Rattan 和 Martin Grohe。《Weisfeiler 和 Leman 走向神经网络：高阶图神经网络》。载于：AAAI人工智能会议论文集 33（2019年7月），第4602–4609页（引自第10页）。[NO06] Jaroslav Nešetˇril 和 Patrice Ossona De Mendez。《树深度、子图着色与同态界》。载于：欧洲组合数学杂志 27.6（2006年8月），第1022–1041页（引自第5、20页）。[NO12] Jaroslav Nešetˇril 和 Patrice Ossona de Mendez。《稀疏性：图、结构与算法》。算法与组合数学 28。海德堡；纽约：Springer，2012年（引自第5、11、20、36、41页）。[Neu24] Daniel Neuen。《有界树宽图的同态判别闭性》。载于：第41届理论计算机科学国际研讨会（STACS 2024）。Olaf Beyersdorff、Mamadou Moustapha Kanté、Orna Kupferman 和 Daniel Lokshtanov 编。第289卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。国际标准连续出版物号：1868-8969。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2024，53:1–53:12（引自第11、36页）。[PY96] Christos H. Papadimitriou 和 Mihalis Yannakakis。《有限非确定性与V-C维数的复杂性》。载于：计算机与系统科学杂志 53.2（1996年10月），第161–170页（引自第6页）。[Raz04] Ran Raz。《永久式与行列式的多线性公式具有超多项式规模》。载于：第36届ACM计算理论年度研讨会论文集，美国伊利诺伊州芝加哥，2004年6月13–16日。László Babai 编。ACM，2004年，第633–641页（引自第3页）。[Rob22] David E. Roberson。《有界度图上的奇同态与同态不可区分性》。2022年6月（引自第5、10–12、36、44页）。[RS86] Neil Robertson 和 P.D Seymour。《图小项 V：排除平面图》。载于：组合理论杂志B辑 41.1（1986年8月），第92–114页（引自第51页）。[RS20] Marc Roth 和 Johannes Schmitt。《计数诱导子图：一种针对#W[1]-困难性的拓扑方法》。载于：Algorithmica 82.8（2020年8月），第2267–2291页（引自第5页）。[RSW21] Marc Roth、Johannes Schmitt 和 Philip Wellnitz。《检测和计数小子图，以及求值参数化Tutte多项式：基于环面网格与Cayley图扩展子的下界》。载于：第48届国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP 2021）。Nikhil Bansal、Emanuela Merelli 和 James Worrell 编。第198卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2021，108:1–108:16（引自第5页）。[Sap21] Ramprasad Saptharishi。《算术电路复杂性中的若干下界选讲》。版本9.0.3。社区综述，可在GitHub获取。2021年。网址：https://github.com/dasarpmar/lowerbounds-survey/releases/tag/v9.0.3（引自第14页）。

[Sau16] Nitin Saurabh。《代数复杂性类与布尔函数分析》。博士论文。金奈：数学科学研究所，2016年12月（引用见第5、6、12、47页）。[Sch25] Georg Schindling。《受限合取与重新量化的同态不可区分性和博弈余单子》。载于：第50届计算机科学数学基础国际研讨会（MFCS 2025），2025年8月25日至29日，波兰华沙。Pawel Gawrychowski、Filip Mazowiecki 和 Michal Skrzypczak 编。第345卷。LIPIcs。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2025年，89:1–89:19（引用见第10页）。[Sep24a] Tim Seppelt。《同态不可区分性》。博士论文。亚琛：亚琛工业大学，2024年（引用见第5、10、11、36页）。[Sep24b] Tim Seppelt。《逻辑等价、同态不可区分性与禁用子式》。载于：《信息与计算》301（2024年12月），第105224页（引用见第12、37、45页）。[ST93] Paul D. Seymour 和 Robin Thomas。《图搜索与树宽的极大极小定理》。载于：《组合理论杂志B辑》58.1（1993年），第22–33页（引用见第5、11页）。[Val79] L. G. Valiant。《代数中的完备性类》。载于：第十一届 ACM 计算理论年度研讨会论文集——STOC ’79。美国佐治亚州亚特兰大：美国计算机协会出版社，1979年，第249–261页（引用见第3、15、47页）。[Xu+19] KeyuluXu、Weihua Hu、Jure Leskovec 和 Stefanie Jegelka。《图神经网络的表达能力有多强？》。载于：国际学习表征会议。2019年（引用见第10页）。