arXiv:2601.09391v1 [math.OA] 14 Jan 2026

乘积系统的C^*-对应的扭曲表示：沃尔德分解与酉扩张

BARUCH SOLEL 和 MANSI SURYAWANSHI

Abstract. 我们研究与 C^*-对应的乘积系统相关的多变量等距协变表示的 Wold 型分解和酉扩张问题。首先，我们为元组（σ，T_1，T_2，……，T_n）存在 Wold 分解建立算子论刻画，其中每个（σ，T_i）都是一个 C^*-对应的等距协变表示。随后，我们引入乘积系统的扭曲协变表示和双重扭曲协变表示。对于双重扭曲等距表示，我们证明了 Wold 分解的存在性，从而将先前关于双重交换表示的结果作为特例纳入其中。我们还对由此得到的 Wold 直和项给出明确描述，并构造具体的 Fock 型模型来实现各个分量。我们展示了这些类的非平凡实例。最后，我们通过直接极限过程构造酉扩张。作为应用，我们为若干先前研究过的算子元组类构造酉扩张，包括双重扭曲、双重非交换和双重交换的等距算子，以及乘积系统的一类特殊双重扭曲表示。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 5 3. Wold 分解的刻画 9 4. 双重扭曲表示 11 5. 示例 15 6. Wold 分解 28 7. 福克空间上的模型算子 34 8. 酉扩张 41 致谢 55 参考文献 55

1. Introduction

经典沃尔德分解定理是希尔伯特空间上等距算子结构理论的基石。设 $\mathcal{H}$ 是复平面$\mathbb{C}$上的无限维可分希尔伯特空间，并设 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子构成的代数。算子 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Date：2026年1月15日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 46L08, 47A13, 47A20, 47A56, 47L05, 47L30, 47L55。*Key words and phrases.* C^*-对应；完全压缩表示；乘积系统；酉扩张。

若 $V^*V = I_{\mathcal{H}}$.，则称其为等距算子。若等距算子 V 满足 $\|V^{*m}h\| \longrightarrow 0$，则称其为移位算子；若 $VV^* = I_{\mathcal{H}}$，则称其为酉算子。Wold 分解指出，每个等距算子 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 都存在唯一的正交分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{H}_s$，其中 $V|_{\mathcal{H}_u}$ 是酉算子，$V|_{\mathcal{H}_s}$ 是移位算子 [14]。这一典范分解在算子理论、随机过程 [10], 预测理论 [5], 时间序列分析 [9], 算子模型 [14],C^*-代数 [2, 15, 27]等领域都具有深远影响。

这种分解在分析上的优雅性十分令人称道，但将其推广到多变量算子系统，具体而言，推广到作用于共同空间 $\mathcal{H}$ 上的等距算子组 $\{V_1, \ldots, V_k\}$ $k \geq 2$，却极具挑战性。早期的多变量类比通常需要额外的结构性假设。特别是，S-loci´nski 为一对双重交换等距算子 [25]建立了这种分解。这一结果及其后续推广，后来被用于 [1] 中构造交换等距算子组的模型，并分析它们所生成的 C^*-代数的结构。Popovici 研究了一对交换等距算子的 Wold 分解 [17]。Popescu 将 Wold 分解推广到了行等距算子 $V = (V_1, \ldots\ldots, V_n)$的非交换情形，其中这些算子的值域两两正交，由此得到唯一的正交分解，分为行酉算子部分和纯（移位型）部分，后者由 $\mathbb{C}^n$ [16]上的全福克空间建模。关于高维情形下双重交换及其扭曲类比的系统而详细的研究，以及相关的一般框架，参见 [4, 6, 7, 18, 21]。

为了在超越经典希尔伯特空间框架的统一体系中研究算子元组，希尔伯特 C^*-模和 C^*-对应提供了一种自然且有效的框架 [8, 11]。随后，P. Muhly 和 B. Solel 在一系列论文中深入发展了这些思想，建立了 C^*-对应上的张量代数理论。在这一背景下，穆利和索莱尔 [12] 为 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的 C^*-对应的等距协变表示建立了 Wold 型分解。他们证明，每个等距协变表示都能唯一地分解为两类表示的直和：一类是由 $\mathcal{A}$ 的表示所诱导的表示，其意义见 Rieffel [20], ；另一类则导出 Cuntz–Pimsner 代数的表示。诱导等距协变表示具有许多与移位算子相似的性质。在很大程度上，移位算子体现了 $\mathbb{C}$ 的表示论；事实上，移位算子本质上是由 $\mathbb{C}$ 的表示诱导的。然而，在一般情形下，情况要比经典的移位算子情形复杂得多。Popescu 的沃尔德分解定理 [16]，可以通过考虑 C^*-对应 E 为 $\mathbb{C}$ 上的希尔伯特空间，并将左作用定义为 $\varphi(\lambda) = \lambda I_E$ （$\lambda \in \mathbb{C}$）而作为该分解的一个特例得到。Skalski 和 Zacharias [22] 随后建立了 [12] 主要结果的高秩版本。他们证明了 $\mathbb{Z}_+^k$ 上 C^*- 对应乘积系统的双重交换 等距表示的沃尔德分解，从而得到预期的 2^k 重正交分解。$\mathbb{N}_0^k$ 上 C^*- 对应乘积系统这一相应的关键概念是在 [3] 中引入的。B. Solel 最近关于交换完全正映射膨胀的研究进一步运用了这一概念（见 [23, 24]）。

尽管这些 Wold 型定理提供了规范的结构分解，但它们并未给出判定一个给定的多变量等距表示何时具有此类分解的标准。在希尔伯特空间上等距算子组的经典情形中，这一问题已在 [19,定理 2.1] 中得到解决，其依据是纯粹的算子论刻画：等距算子元组 $V = (V_1, \ldots\ldots, V_n)$ 具有冯·诺依曼–Wold 分解，当且仅当各个 Wold 分量$\mathcal{H}_{V_i,\ u}$（或等价地，$\mathcal{H}_{V_i,\ s}$）约化每个 V_j，对所有 $1 \leq i,\ j \leq k$均如此。对于可交换的等距算子三元组$\{V_1, V_2, V_3\}$，其存在性结果由 Gaspar 和 Suciu 得出（见 [4, 定理 2]）。

第3节旨在将这一刻画从希尔伯特空间上的 n-元等距算子组情形推广到如下形式的族 $(\sigma,\ T_1,\ T_2,\ \ldots\ldots,\ T_n)$：对于每个 $i \in I_n$，$(\sigma,\ T_i)$ 都是 C^*-对应 E_i 在 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上作用于 $\mathcal{H}$ 的等距协变表示，而 $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个固定的非退化 $*$-表示（参见定理 3.2）。在这一高秩框架中，“移位算子”部分和“酉算子”部分的对应物，分别是每个协变对的诱导的和完全余等距分量。我们证明，元组 $(\sigma,\ T_1,\ \ldots\ldots,\ T_k)$ 存在沃尔德分解，当且仅当这些分量具有相互约化性，从而将冯·诺依曼–Wold 判据推广到乘积系统的范畴框架。

在第4节中，我们引入乘积系统的扭曲表示和双重扭曲表示的概念，它们构成了本文研究的核心对象。扭曲表示扩展了通常的协变表示框架，允许坐标映射 T_i 满足交换关系，而这些关系经由一族预先给定的酉算子 $\{U_{ij}\}_{i\neq j}$ 加以修正；这族酉算子作用于底层希尔伯特空间。这种额外的扭曲刻画了坐标方向之间不一定对称或交换的相互作用。作为第3节中所建立的刻画定理的应用，我们证明乘积系统的双重扭曲等距表示存在沃尔德分解（参见定理 4.6）。作为特例，我们重新得到 Skalski 和 Zacharias [22] 针对双重交换等距表示所获得的沃尔德分解。

在第5节中，我们给出一系列说明性示例，证实这一框架内容丰富且并非平凡。本文的核心是一个针对双扭协变表示的具体 Fock型模型。该模型提供了一个统一框架，使诱导分量与完全余等距分量能够以受控的方式共存。更确切地说，给定一个子集 $A \subseteq I_k$，由 A 标记的坐标产生一个诱导（移位型）部分，而其余坐标 A^{c} 则贡献一个全余等距部分，该部分由辅助希尔伯特空间上的扭曲表示所支配。这一构造得到了一大类灵活的双重扭曲表示，将经典的 Fock表示及其变体推广到扭曲积系统的情形。此外，对应于不同 A 选择的此类模型的直和仍然产生双重扭曲表示，体现了该框架的稳健性。我们在例5.4中明确给出这一模型（见 (5.7)），它为后续章节发展的普遍理论提供了一个引导性示例。随后，我们构造了明确的非平凡算子族示例，由此得到扭曲表示和双重扭曲表示，并说明相应关系如何在不同情形中自然产生。在标量情形 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$和自同构情形 $E_i = \alpha_i\mathcal{A}$ 下，扭曲关系转化为明确的算子恒等式，并拓展了 Solel 对双重交换表示的刻画 [23]。此外，我们还给出后者情形中的两个具体算子示例。综合而言，这些结果表明，可以由满足明确代数关系的具体算子族构造（双重）扭曲表示。

在第6节中，我们给出了乘积系统的双重扭曲等距表示的 Wold 分解中各直和项的具体表示。从一个等距协变 k元组 $(\sigma、\ T^{(1)}、\ \ldots\ldots、\ T^{(k)})$ 出发，我们引入游荡子空间 $W_A = \bigcap_{i\in A} W_i$，其中 $W_i := \mathrm{Ran}(I - T_iT_i^*)$. 接下来，我们为每个沃尔德直和项 $\mathcal{H}_A$给出显式表示，

$$\mathcal{H}_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} T_A^{(n)} \left(I_{E_A^n} \otimes \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^{k-|A|}} T^{(m)}_{I_k\setminus A} \left(I_{E^m_{I_k\setminus A}} \otimes W_A \right) \right).$$

在每个直和项 $\mathcal{H}_A$ 上，由 A 索引的坐标表示诱导部分（类似移位算子），而由 A^c 索引的坐标则是完全余等距的。作为推论， $A = I_k$ 的情形给出诱导 Fock 部分，而 $A = \varnothing$ 则给出全余等距部分。

受经典单变量理论的启发，在第 7 节中，我们转而研究多变量双重扭曲情形下的福克空间模型。在单变量情形中，沃尔德分解通过典范酉算子，将等距算子的移位部分识别为向量值 Hardy 空间上的 z 乘法，从而给出一个具体的函数模型。这一理念一直是算子理论中的指导主题。在本节中，我们的目标是为双重扭曲等距协变表示 $(\sigma, T_1, \ldots\ldots, T_k)$ 的沃尔德分解所得到的每个直和项 $\mathcal{H}_A$ 描述一个显式模型。利用典范酉算子 $\Pi_A\colon \mathcal{H}_A \to \mathcal{F}(E_A) \otimes \mathcal{D}_A$，我们将限制表示 $(\sigma, \{T_i\}_{i\in I_k})|_{\mathcal{H}_A}$ 传输到福克空间模型上。由此得到一组新的算子元组 $(\sigma_A, \{M_{A,i}\}_{i\in I_k})$，它们作用于 $\mathcal{F}(E_A) \otimes \mathcal{D}_A$，并与原来作用于 $\mathcal{H}_A$ 上的算子组酉等价（参见命题 7.8）。在该模型中，满足 $i \in A$ 的分量 $M_{A,\,i}$ 表现为创造算子，而对应 $i \in A^c$ 的分量则作为完全余等距部分作用。

Wold 分解的一个基本推论是，每个等距算子都有酉扩张。众所周知，每个压缩算子也都有余等距扩张。在 [11, 第 5], 节中，P. Muhly 和 B. Solel 通过为 C^*-对应的完全压缩协变表示构造一种显式的归纳扩张过程，对后一结果作出了影响深远的推广（另见 [13], ，其中讨论了由 $\mathcal{A}$ 上的含幺单射自同态诱导的 C^*-对应这一特殊情形）。他们的方法受到经典算子理论方法的启发，在适当的技术假设下，可以构造完全压缩表示的完全余等距扩张。然而，除某些特殊情形外，尚不清楚以这种方式从等距表示得到的完全余等距扩张本身是否也是等距的。另一方面，Skalski 和 Zacharias（参见 [22, 第 5]节）指出，可以得到同时满足等距和完全余等距性质的扩张，并将其称为酉扩张。在单变量情形下，他们证明了此类酉扩张的存在，并指出了在高秩情形中构造类似扩张所面临的困难。

鉴于这些发展，寻求一种针对高秩表示的酉扩张系统构造是很自然的，尤其是在存在扭曲交换关系的情况下。这正是第 8 节的目标。

我们通过直接极限构造，针对乘积系统的双重扭曲等距协变表示提出了一种新方法。从一个相容直接系统 $\{(\mathcal{H}_m,\phi_{n,m})\}_{m\le n}$ 出发，该系统由带有双重扭曲等距协变表示 $(\sigma_m, T_{m,1}, \ldots, T_{m,k})$ 的希尔伯特空间组成，并带有扭曲 $\{t_{ij} \otimes U_{m,ij}\}_{i\neq j}$，我们在定理 8.7 中证明，存在一个定义在直接极限希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\infty$ 上的极限扭曲等距协变表示 $(\sigma_\infty, T_{\infty,1}, \ldots, T_{\infty,k})$，以及酉算子 $\{U_{\infty,ij}\}_{i\neq j}$，从而扩张所有给定数据。我们确定了连接映射所需的一个自然且本质上最小的假设，该假设确保极限表示是完全余等距的，因而是双重扭曲的。

由此，我们得到了若干著名算子类的酉扩张，包括 Sarkar、Rakshit 和 Suryawanshi 研究的双重扭曲等距算子 [18], Jeu 和 Pinto 引入的双重非交换等距算子组 [6], 以及 Sarkar [21] 和 S-loci´nski [25]所研究的双重交换等距算子组。作为一项应用，我们证明乘法算子 $(M_{z_1}, \cdots, M_{z_n})$ 在 $H^2(\mathbb{D}^n)$ 上有酉扩张。当 $\mathcal{A}$ 为阿贝尔群且每个 $E_i = \mathcal{A}$ 时，我们还在 $\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})$ 上给出了一个显式模型 $\otimes \mathcal{D}_A$，并证明在此情形下，每个双重扭曲等距协变表示都存在双重扭曲酉扩张（参见例 8.14）。

下一节将汇总本文中会用到的基本定义和已知结果。

2. Preliminaries

本文中，所有希尔伯特空间均假定为可分的，且定义在 $\mathbb{C}$ 上；我们令 $\mathcal{A}$ 表示 C^*-代数。记 $\mathbb{Z}_+ := \{0,1,2,\ldots\}$，对于 $k \in \mathbb{Z}_+$，记 $I_k := \{1,2,\ldots,k\}$。希尔伯特空间上的内积对第一个变量共轭线性，对第二个变量线性。此外，$I_{\mathcal{H}}$ 表示希尔伯特空间 $\mathcal{H}$. 上的恒等算子。给定 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其值域和核分别定义为 $\mathrm{Ran}T = T(\mathcal{H})$ 和 $\ker T = \{h \in \mathcal{H} : Th = 0\}$。

定义 2.1. 一个（右）希尔伯特 $\mathcal{A}$-模 是一个复向量空间 E，配备右 $\mathcal{A}$-模结构以及一个 $\mathcal{A}$-值内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} : E \times E \to \mathcal{A}$，该内积关于第二个变量线性、关于第一个变量共轭线性，并满足

$$\langle \xi, \eta a \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{A}} a, \qquad \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{A}}^*,$$

以及 $\langle \xi、\ \xi \rangle_{\mathcal{A}} \geq 0$，当且仅当 $\xi = 0$ 时取等号。当 E 关于范数$\|\xi\| := \|\langle \xi、\ \xi \rangle_{\mathcal{A}}\|^{1/2}$ 完备时，称其为 Hilbert C^*-模 $\mathcal{A}$，或简称为 Hilbert $\mathcal{A}$-模。

对于 Hilbert $\mathcal{A}$-模 E，算子 $T : E \to E$ 称为 可伴随算子，如果存在算子$T^* : E \to E$，使得 $\langle T\xi,\ \eta \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \xi,\ T^*\eta \rangle_{\mathcal{A}},\ \xi,\ \eta \in E.$。所有作用在上的可伴随算子的集合记为 $\mathcal{L}(E)$（见 [8]）。可伴随算子的存在使得可以在 Hilbert$\mathcal{A}$-模上定义 $\mathcal{A}$ 的左作用，从而引出 C^*-对应的概念。

定义 2.2. C^*-对应是一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的对应，它由右 *Hilbert* $\mathcal{A}$-模 E 以及一个非退化的 $*$-同态 $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$组成，后者称为左作用。我们将 $a \cdot \xi := \varphi(a)\xi$记作 $a \in \mathcal{A}$ 和 $\xi \in E$。

本文中，所有 C^*-对应都假设作为左 $\mathcal{A}$-模是本质的，即 $\varphi(\mathcal{A})E$ 的闭线性张成等于 E，并且假设 $\mathcal{A}$的所有表示都是非退化的。关于 Hilbert C*-模，一部优秀、全面且与时俱进的参考资料是 Lance 的专著 [8]。

设 E 和 F 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的 C^*-对应，其左作用分别为 φ_E 和 φ_F。那么，平衡张量积 $E \otimes_{\mathcal{A}} F$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个 C^*-对应。它定义为代数平衡张量积的豪斯多夫完备化，并赋予如下由 $\mathcal{A}$ 值内积:

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1,\ \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \eta_1,\ \varphi_F\big(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_E\big)\eta_2 \rangle_F.$$

$\mathcal{A}$ 的右作用和左作用分别定义为 $(\xi \otimes \eta)\ a := \xi \otimes (\eta a)$ $a \cdot (\xi \otimes \eta) := (\varphi_E(a)\ \xi) \otimes \eta$.在底层对应已明确的情况下，我们省略下标，并将左作用记为 φ。令 $E^0 := \mathcal{A}$。对于 $n \geq 1$，归纳定义 $E^n := E \otimes_{\mathcal{A}} E^{n-1}.$。每个 E^n 仍然是一个在 $\mathcal{A}$ 上的C^*-对应，其左作用 $\varphi^{(n)} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(E^n)$ 定义为

$$\varphi^{(n)}(a)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = \varphi(a)\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n, \qquad a \in \mathcal{A},$$

其中 $\varphi^{(0)} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$。相应的 福克模定义为 $\mathcal{F}(E) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} E^n$，它是一个关于 $\mathcal{A}$ 的 C^*-对应，其左作用 $\varphi_\infty : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{F}(E))$ 定义为

$$\varphi_\infty(a)\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \xi_n\right) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \varphi^{(n)}(a)\xi_n, \qquad a \in \mathcal{A}.$$

对于 $\xi \in E$ 和 $\eta \in E^n$， $\mathcal{F}(E)$ 上的创造算子 T_ξ 定义为 $T_\xi(\eta) := \xi \otimes \eta$. 若 E 是关于 $\mathcal{A}$ 的C^*-对应，且 $(\sigma, \mathcal{H})$ 是 $\mathcal{A}$的非退化表示，则记 $E \otimes_\sigma \mathcal{H}$为代数张量积 $E \odot \mathcal{H}$ 关于内积$\langle \xi \otimes h, \ \eta \otimes k\rangle := \langle h, \ \sigma(\langle \xi, \ \eta\rangle_{\mathcal{A}})k\rangle$， $\xi, \ \eta \in E$， $h, \ k \in \mathcal{H}$.的希尔伯特空间完备化

定义 2.3。 [20] 设 E 是定义在 $\mathcal{A}$ 上、带有左作用 φ 的 C^*-对应，且 $\pi : \ \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的非退化表示。相应的诱导（等距协变）表示（ρ, S）将 E 表示在希尔伯特空间 $\mathcal{F}(E) \otimes_\pi \mathcal{H}$ 上，定义为

$$\rho(a) := \varphi_\infty(a) \otimes I_{\mathcal{H}}, \quad a \in \mathcal{A}, \quad S(\xi) := T_\xi \otimes I_{\mathcal{H}}, \quad \xi \in E.$$

现在我们来定义穆利和索莱尔所考虑的表示:

定义 2.4。 [12] E 在 $\mathcal{H}$ 上的完全压缩协变表示是一个有序对(σ, T)，其中 $\sigma : \ \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个非退化的 $*$-表示，而 $T : \ E \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个线性完全压缩映射，并满足

$$T(a\,\xi\,b) = \sigma(a)T(\xi)\sigma(b), \qquad a, b \in \mathcal{A}, \ \xi \in E.$$

若对每个 $\xi, \eta \in E$，均有 $T(\xi)^*T(\eta) = \sigma(\langle \xi, \eta\rangle_{\mathcal{A}})$，则称表示$(\sigma, T)$ 为等距的。与(σ, T) 相应的压缩算子 $T : \ E \otimes_\sigma \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 定义为 $T(\xi \otimes h) := T(\xi)h$, $\xi \in E$, $h \in \mathcal{H}$，且满足协变关系

$$\widetilde{T}(\varphi(a)\xi \otimes h) = \sigma(a)\widetilde{T}(\xi \otimes h), \qquad a \in \mathcal{A}. \tag{2.1}$$

~对于固定的 σ，对应 $T \leftrightarrow \widetilde{T}$ 给出了 E的协变~表示 (σ, T) 与满足 (2.1) 的压缩算子 T之间的一一对应（见 [11]）。

此外是一个等距算子的若当且仅当，则称表示 (σ, T) 为~~完全余等距。

~除了 $\widetilde{T}$之外，我们还需要它的广义高次幂。对于 $i \in I_k$ 和 $l \geq 1$，我们递归地定义

$$\widetilde{T}_i^{(1)} := \widetilde{T}_i, \qquad \widetilde{T}_i^{(l)} := \widetilde{T}_i\big(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_i^{(l-1)}\big).$$

等价地， $\widetilde{T}_i^{(l)} = \widetilde{T}_i(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_i) \cdots \big(I_{E_i^{l-1}} \otimes \widetilde{T}_i\big) : \ E_i^l \otimes_\sigma \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$

经典 Wold 分解的典范单变量类比（对应于半群 $\mathbb{Z}_+$）是 ***Muhly–Solel Wold*** 分解。它为单个 C^*-对应 [12] 的等距协变表示提供了结构性分解。首先，回顾一下：若子空间 $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ 满足它约化表示 (σ, T)，且 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}^\perp$ 在所有算子 $T_i(\xi_i)$（ $i \in I_k$ 和 $\xi_i \in E_i$）下均左不变，则称其为该表示的约化 子空间。

定理 2.5. [12, 定理 2.9] 设 (σ, T) 是复数域上的 C^*-对应 E 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的等距协变表示，其中 C^*-代数为 $\mathcal{A}$ 。那么存在唯一的正交分解

$$(\sigma, T) \ \cong \ (\sigma_1, T_1) \oplus (\sigma_2, T_2), \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,$$

使得

(1) $(\sigma_1, T_1) := (\sigma, T)|_{\mathcal{H}_1}$ 是一个诱导协变表示；(2) $(\sigma_2, T_2) := (\sigma, T)$ $|_{\mathcal{H}_2}$ 是完全余等距的。

该分解在如下意义下是唯一的：如果闭子空间 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ 约化 (σ, T) 和$(\sigma, T)|_{\mathcal{K}}$ 是诱导的（分别地，完全余等距的），那么 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_1$ （分别地， $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_2$）。此外，各直和项可明确表示为

$$\mathcal{H}_1 = \overline{\operatorname{span}}\big\{\widetilde{T}^{(n)}(\xi \otimes w) : \ \xi \in E^n, \ w \in W, \ n \in \mathbb{Z}_+\big\}, \qquad \mathcal{H}_2 = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{T}^{(n)}\left(E^n \otimes_\sigma \mathcal{H}\right),$$

其中 $W\colon = \operatorname{Ran}(I - \widetilde{T}\widetilde{T}^*)$ 且 $\widetilde{T}^{(0)}\colon = \sigma$。

它是高秩推广的基础性单变量情形。随后，Skalski 和 Zacharias [22], 为半群 $\mathbb{Z}_+^k$上的 C^*-对应的乘积系统的双重交换等距表示建立了沃尔德分解，取得了重要进展。本工作的基本对象是 $\mathbb{Z}_+^k$ [3]上的 C^*-对应的乘积系统 $\mathbb{E}$。如 [23, 24]中所述， $\mathbb{E}$ 可视为一族 C^*-对应 $\{E_1, \ldots, E_k\}$，并配备酉同构 $t_{ij}\colon \ E_i \otimes E_j \longrightarrow E_j \otimes E_i, \ \ i > j$、从而得到规范同一 $E^n \simeq E_1^{n_1} \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} E_k^{n_k}$，对于 $n =$ （n_1、.....、 n_k）$\in \mathbb{Z}_+^k$. 我们进一步假设 $t_{ii} = \mathrm{id}_{E_i \otimes E_i}$， $t_{ij} = t_{ji}^{-1}$对于$i < j$，以及辫子（六边形）关系

$$(I_{E_\ell} \otimes t_{ij})(t_{i\ell} \otimes I_{E_j})(I_{E_i} \otimes t_{j\ell}) = (t_{j\ell} \otimes I_{E_i})(I_{E_j} \otimes t_{i\ell})(t_{ij} \otimes I_{E_\ell})$$

对所有互不相同的 i、 j、 ℓ。

现在，我们通过希尔伯特空间上的相容协变表示，将乘积系统的代数结构转向其解析实现。

定义 2.6。 [22, 定义 1.2、2。1] 设 $\mathbb{E}$ 是一个在 $\mathbb{Z}_+^k$上的乘积系统。我们称 $\mathbb{E}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的（协变完全压缩）表示为一个元组 $(\sigma, T_1$、...、 $T_k)$，其中 $(\sigma, \mathcal{H})$ 是 $\mathcal{A}$的一个表示，且 $T_i\colon \ E_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是满足以下条件的线性完全压缩映射

$$T_i(a\,\xi_i\,b) = \sigma(a)T_i(\xi_i)\sigma(b), \qquad a, b \in \mathcal{A}, \ \xi_i \in E_i,$$

并且对所有 $1 \le i \ne j \le k$,

$$\widetilde{T}_i(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_j) = \widetilde{T}_j(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i)(t_{ij} \otimes I_{\mathcal{H}}). \tag{2.2}$$

如果每个 (σ, T_i) 作为 E_i的表示都是等距的，则称该表示为等距的；如果每个 (σ, T_j) 都是完全余等距的，则称其为完全余等距。

此外，如果对于每一对互不相同的 i、 $j \in I_k$，表示 $(\sigma, T_1$、...、 $T_k)$ 满足以下条件，则称其为双重交换：

$$\widetilde{T}_j^{\,*}\,\widetilde{T}_i = (I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i)\,(t_{ij} \otimes I_{\mathcal{H}})\,(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_j^{\,*}). \tag{2.3}$$

注 2.7。 T_ξ 表示作用在 $\mathcal{F}(E)$上的创造算子；而对于 $i \in I_k$, $T_i\colon \ E_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，它们是协变表示中的映射；这些符号彼此无关。

现在，我们将与 C^*-对应 E 相关联的福克模概念推广到乘积系统的情形。对于由 C^*-对应 $\mathbb{E} = \{E^n\}_{n\in\mathbb{Z}_+^k}$ 构成、定义在 $\mathcal{A}$ 和$A \subseteq I_k$上的乘积系统，我们用 $\mathbb{E}_A = \{E_A^n\}_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}}$ 表示由 $\{E_i : \ i \in A\}$ 生成的乘积子系统。与之相关联的福克模 为

$$\mathcal{F}(E_A) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} E_A^n, \qquad E_A^0 := \mathcal{A}.$$

对于每个 $n \in \mathbb{Z}_+^{|A|}$，左作用 $\varphi^{(n)}\colon \ \mathcal{A} \to \mathcal{L}(E_A^n)$ 递归定义为 $\varphi^{(0)}(a)b := ab$ 于 $\mathcal{A}$ 上；对于 $n \ne 0$, 取满足 $n_i > 0$ 的 $i \in A$，并认定 $E_A^n \cong E_i \otimes_{\mathcal{A}} E_A^{n-e_i}$，然后定义 $\varphi^{(n)}(a)(\eta_i \otimes \zeta) :=$

$(\varphi_i(a)\eta_i)\otimes\zeta$， $a\in\mathcal{A}$. 此定义与 i 的选取无关，因为每个 t_{ij} 都是双模同构。 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{F}(E_A)$ 上诱导的 *Fock* 左作用 为

$$\varphi_\infty(a):=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}}\varphi^{(n)}(a),\qquad a\in\mathcal{A}.$$

现在我们将约化子空间的概念扩展到表示 $(\sigma,T_1,\dots,T_k)$。首先回顾，给定一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和一个子集 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H})$，我们将 $\mathcal{S}$ 的交换子 定义为

$$\mathcal{S}'=\{\,X\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):XS=SX\text{ for every }S\in\mathcal{S}\,\}.$$

定义 2.8。 若子空间 $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$ 约化表示$(\sigma,T_1,\dots,T_k)$ 且约化 $\sigma(\mathcal{A})$ （因此投影到 $\mathcal{K}$上的投影算子记为 $P_\mathcal{K}$，属于 $\sigma(\mathcal{A})'$），并且 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}^\perp$ 在所有算子 $T_i(\xi_i)$ 作用下均左不变，其中 $i\in I_k$ 且 $\xi_i\in E_i$，则称子空间 $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$ 是该表示的约化 子空间。

容易看出，显然的限制过程给出 E 在 $\mathcal{K}$上的一个表示，称为 $(\sigma,T_1,\dots,T_k)$ 的直和项，记作 $(\sigma,T_1,\dots,T_k)|_\mathcal{K}$. 下面的分解推广了单变量沃尔德分解 [12]，并为满足双重交换关系的多变量等距算子提供了规范模型。

定理 2.9。 [22, 定理 2。4] 每个乘积系统 $\mathbb{E}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的双重交换等距表示 $(\sigma,T_1,\dots,T_k)$都存在唯一的正交分解 $\mathcal{H}=\bigoplus_{\alpha\subseteq I_k}\mathcal{H}_\alpha$，使得对于每个子集 $\alpha=\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}\subseteq I_k$:

(1) $\mathcal{H}_\alpha$ 约化 $(\sigma,T_1,\dots,T_k)$；(2) 限制元组 $(\sigma,T_{\alpha_1},\dots,T_{\alpha_r})|_{\mathcal{H}_\alpha}$ 与乘积子系统 $\mathbb{E}_\alpha$ 在 $\mathbb{Z}_+^r$上的诱导表示同构，该乘积子系统由对应 $E_{\alpha_1},\dots,E_{\alpha_r}$ 及相关同构 t_{α_i,α_j}生成；(3) 对于每个 $i\in I_k\setminus\alpha$，E_i 的表示 $(\sigma,T_i)|_{\mathcal{H}_\alpha}$ 是完全余等距的。

A. Talker [26] 引入了 λ–双重交换行等距算子的概念，并通过直接极限构造证明了其酉扩张的存在性。尽管我们的设定有很大不同，但其基本方法——即使用希尔伯特空间的归纳极限——尤为有效。我们将这一技巧应用于乘积系统框架，并在第 8 节中用它为若干类表示构造酉扩张。

首先回顾希尔伯特空间 [26]直接极限的一种范畴构造。设 $\mathcal{H}=\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$是由非空有向集 I索引的一族希尔伯特空间。假设对所有满足 $i\le j$ 的 $i,j\in I$，存在一个等距算子$\varphi_{ji}:\mathcal{H}_i\to\mathcal{H}_j$，并且只要 $i\le j\le k$,

$$\varphi_{kj}\circ\varphi_{ji}=\varphi_{ki},\quad\text{and}\quad\varphi_{ii}=\mathrm{id}_{\mathcal{H}_i}.$$

直接极 限（$\mathcal{H}_\infty,\psi_i$）是一个希尔伯特空间，带有等距算子 $\psi_i:\mathcal{H}_i\to\mathcal{H}_\infty$，它们满足 y

$$\psi_j\circ\varphi_{ji}=\psi_i,$$

并具有以下泛性质：对于任意一族从 $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ 到希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 的压缩算子 $\{\pi_i\}_{i\in I}$，使得 $\pi_j\circ\varphi_{ji}=\pi_i$，存在唯一的压缩算子 $\pi_\infty:\mathcal{H}_\infty\to\mathcal{K}$，满足

$$\pi_i=\pi_\infty\circ\psi_i\quad\forall i\in I.$$

命题 2.10。 [26, 命题 3.3。2] 设 $\mathcal{H}_\infty$ 为直接系统 $(\mathcal{H}_i,\varphi_{ji})$的直接极限。则集合 $\bigcup_{i\in I}\psi_i(\mathcal{H}_i)$ 在 $\mathcal{H}_\infty$ 中稠密。

引理 2.11。 [26, 引理 3.3.3–3.3。4] 设 $\mathcal{H}_\infty$ 为直接系统 $(\mathcal{H}_i, \varphi_{ji})$ 的直接极限。假设对于所有 $i \in I$，存在一个压缩算子 $V_i\colon \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$，使得 $V_j \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ji} \circ V_i$，对于所有 $i \le j$. 。那么存在一个压缩算子 $V_\infty\colon \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty$，使得 $V_\infty \circ \psi_i = \psi_i \circ V_i$，对于所有 $i \in I$. 。此外，如果每个 V_i 都是等距算子，那么 V_∞ 也是等距算子。

3. Characterization of the Wold Decomposition

Muhly–Solel 的 Wold 型定理 [12]（针对单个 C^*对应）和 Skalski– Zacharias 的定理 [22]（针对乘积系统）证明，每个等距表示都能唯一分解为诱导部分和完全余等距部分。尚未解决的问题是，确定一个内在的算子论条件，以保证此类分解的存在。

本节给出一个充要判据，用于判断由一族 C^*对应 $E_1, \dots, E_n$构成的等距表示（$\sigma, T_1, \dots, T_n$）是否存在沃尔德分解，且不对它们之间施加任何先验关系（如双重交换性）。我们的方法推广了 [19], 的经典结果。该结果表明，对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的等距算子元组 $V =$（$V_1, \dots, V_n$），存在冯·诺依曼–Wold 分解等价于各个等距算子的酉部分（或移位部分）相互约化。

将 V_i 替换为协变对 (σ, T_i) 后，我们证明同一原则同样支配着C^*-对应与积系统的情形：当且仅当每个 (σ, T_i) 的诱导部分和完全余等距部分约化其他每个 (σ, T_j) 时，沃尔德分解才存在。

为阐明这一刻画，回顾单变量情形： C^*-对应的每个等距协变表示 (σ, T) 都有一个唯一的正交分解，分解为诱导部分和完全余等距部分（定理 2.5）。在多个变量的情形中，这种分解是否存在取决于各个表示 (σ, T_i) 之间如何相互作用。现在我们引入沃尔德分解的概念，以明确表示能够具有 Wold 型分解所需的结构性质。该定义将 [19] 的定义 1.2 推广到当前情形（另见 [17, 25, 28]）。

定义 3.1。 设 E_1、E_2、$\cdots$、E_k 是定义在 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的 C^*-对应。对于每个 $i \in I_k$，设$(\sigma$、$T_i)$ 是 E_i 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个（非退化）协变表示，其中 $\sigma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个固定的 $*$- 表示。若对于每个子集 $A \subseteq I_k$，都存在 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间 $\mathcal{H}_A$（其中某些子空间可能是平凡的），使得我们称族 $(\sigma$、T_1、…、$T_k)$ 具有沃尔德分解。

(1) $\mathcal{H} = \bigoplus_{A \subseteq I_k} \mathcal{H}_A$; (2) 每个 $\mathcal{H}_A$ 都约化 $(\sigma$、$T_i)$ 对所有 $i \in I_k$均成立；(3) σ、$T_i)|_{\mathcal{H}_A}$是关于 $i \in A$ 的诱导表示，而 $(\sigma$、$T_j)|_{\mathcal{H}_A}$关于$j \in A^c$是完全余等距的。

对于 $i \in I_k$，设 (σ, T_i) 是单个对应 E_i 在 $\mathcal{H}$ 上的等距协变表示。Muhly–Solel Wold 分解给出

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_i^1 \oplus \mathcal{H}_i^2,$$

其中 $(\sigma, T_i)|_{\mathcal{H}_i^1}$是诱导等距协变表示，而 $(\sigma, T_i)|_{\mathcal{H}_i^2}$是完全余等距的。我们首先确定一个简单而有力的判据，用以刻画所有具有沃尔德分解的表示。

定理 3.2。 设 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 是 C^*-对应，定义在 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上。对每个 $i \in I_n$，设(σ, T_i) 是 E_i 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的等距协变表示，其中 $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个固定的非退化 $*$-表示。以下陈述等价:

(1) 族 $(\sigma, T_1, T_2, \ldots, T_n)$ 存在沃尔德分解。(2) 对于所有 $i, j \in I_n$，子空间 $\mathcal{H}_i^1$
约化协变对 (σ, T_j)。(3) 对于所有 $i, j \in I_n$，子空间 $\mathcal{H}_i^2$约化协变对 (σ, T_j)。

证明。 只需证明 (1) 与 (2) 等价。假设 $(\sigma, T_1, \ldots, T_n)$ 存在沃尔德分解。那么，对于固定的 $i \in I_n$，我们有

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{A \subseteq I_n} \mathcal{H}_A = \left(\bigoplus_{\substack{B \subseteq I_n \\ i \in B}} \mathcal{H}_B \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{B \subseteq I_n \\ i \notin B}} \mathcal{H}_B \right) = \mathcal{H}_i^1 \oplus \mathcal{H}_i^2.$$

根据定义 3.1，每个 $\mathcal{H}_B$ 都约化 $(\sigma, T_1, \ldots, T_n)$，因此它们的直和也如此。此外，对于 $i \in B$，限制 $(\sigma, T_i)|_{\mathcal{H}_B}$ 是诱导的。因此，$(\sigma, T_i)|_{\bigoplus_{B \subseteq I_n} \mathcal{H}_B}$ 是一个（可能无限的）$_{i \in B}$

诱导表示的正交直和，因此其自身也是诱导的。类似地，对于 $i \notin B$，$(\sigma, T_i)|_{\bigoplus_{B \subseteq I_n} \mathcal{H}_B}$ 是完全余等距的。因此，$_{i \notin B}$ 的 Wold 分解的唯一性对于 $_{i \notin B}($

$\sigma, T_i)$ implies that

$$\mathcal{H}_i^1 = \bigoplus_{\substack{B \subseteq I_n \\ i \in B}} \mathcal{H}_B, \qquad \mathcal{H}_i^2 = \bigoplus_{\substack{B \subseteq I_n \\ i \notin B}} \mathcal{H}_B.$$

由于对于每个 $j \in I_n$，每个 $\mathcal{H}_A$ 都约化 (σ, T_j)，因此对于所有 $i, j \in I_n$，$\mathcal{H}_i^1$（从而 $\mathcal{H}_i^2$）都约化 (σ, T_j)。

反过来，假设对于所有 $i, j \in I_n$，$\mathcal{H}_i^2$（从而 $\mathcal{H}_i^1$）都约化 (σ, T_j)。我们断言，族 $(\sigma, T_1, T_2, \ldots, T_n)$ 存在 Wold 分解。对于每个 $A \subseteq I_n$，定义

$$\mathcal{H}_A = \left(\bigcap_{i \in A} \mathcal{H}_i^1 \right) \cap \left(\bigcap_{j \in A^c} \mathcal{H}_j^2 \right). \tag{3.1}$$

于是，对于所有 $i \in I_n$，每个 $\mathcal{H}_A$ 都约化 (σ, T_i)。此外，根据 $\mathcal{H}_A$ 的结构，显然对于 $i \in A$，限制 $(\sigma, T_i)|_{\mathcal{H}_A}$ 是诱导的；而对于 $j \in A^c$，限制 $(\sigma, T_j)|_{\mathcal{H}_A}$ 是完全余等距的。还需证明

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{A \subseteq I_n} \mathcal{H}_A.$$

由于 $\bigoplus_{A \subseteq I_n} \mathcal{H}_A \subseteq \mathcal{H}$，我们只需证明反向包含。

~我们断言，对于任意 $A \subseteq I_m \subsetneq I_n$ 和 $j \notin I_m$，如果 A 表示将 A 视为 $I_m \cup \{j\}$ 的子集，那么

$$\mathcal{H}_A \subseteq \mathcal{H}_{\widetilde{A} \cup \{j\}} \oplus \mathcal{H}_{\widetilde{A}}.$$

由于 $\mathcal{H}_A$约化了（σ，T_j），我们可以将限制（σ，T_j）$|_{\mathcal{H}_A}$分解为

$$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{A,j}^1 \oplus \mathcal{H}_{A,j}^2,$$

其中 $(\sigma,\ T_j)\ |_{\mathcal{H}^1_{A,\ j}}$ 是诱导的，而 $(\sigma,\ T_j)\ |_{\mathcal{H}^2_{A,\ j}}$ 是完全余等距的。于是

$$\mathcal{H}^1_{A,j} \subseteq \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}^1_j \subseteq \mathcal{H}_{\widetilde{A\cup\{j\}}}, \qquad \mathcal{H}^2_{A,j} \subseteq \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}^2_j \subseteq \mathcal{H}_{\widetilde{A}}.$$

因此，结论成立。将这一观察反复应用于 $A \subseteq I_m \subsetneq I_n$ 及指标 $j,\ k \notin I_m$，我们得到

$$\mathcal{H}_A \subseteq \mathcal{H}_{\widetilde{A\cup\{j,k\}}} \oplus \mathcal{H}_{\widetilde{A\cup\{j\}}} \oplus \mathcal{H}_{\widetilde{A\cup\{k\}}} \oplus \mathcal{H}_{\widetilde{A}},$$

$\widetilde{\ }$其中 $A = A$，被视为 $I_m \cup \{j,k\}$的子集。

现在考虑对应于 $(\sigma,\ T_1)$ 的分解，并令 $\mathcal{H}_{\{1\}} := \mathcal{H}^1_1$ 和 $\mathcal{H}_\emptyset := \mathcal{H}^2_1$。于是

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\{1\}} \oplus \mathcal{H}_\emptyset,$$

其中 $\{1\}$ 和 $\emptyset$是 $I_1 = \{1\}$的子集。将上述论证递归地应用于 $\mathcal{H}_{\{1\}}$，我们得到

$$\mathcal{H}_{\{1\}} \subseteq \bigoplus_{A\subseteq J} \mathcal{H}_{\widetilde{\{1\}\cup A}},$$

$\widetilde{\ \ }$其中 $J = \{2,\dots,n\}$ 和 $\{1\} = \{1\}$ 被视为 I_n的子集。同样地，

$$\mathcal{H}_\emptyset \subseteq \bigoplus_{A\subseteq J} \mathcal{H}_A.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_{\{1\}} \oplus \mathcal{H}_\emptyset \\ &\subseteq \left(\bigoplus_{A\subseteq J} \mathcal{H}_{\widetilde{\{1\}\cup A}}\right) \oplus \left(\bigoplus_{A\subseteq J} \mathcal{H}_A\right) \\ &= \bigoplus_{A\subseteq I_n} \mathcal{H}_A,\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

4. Doubly Twisted Representations

现在我们引入本文研究的主要对象——乘积系统的双重扭曲表示。作为上一节所建立的刻画定理的一个应用，我们证明了这一类表示存在 Wold 型分解。特别地，我们恢复了双重交换表示的经典分解。

备注 4.1. 我们首先记录一组本文中将频繁用到的基本恒等式。其证明可直接由空间张量积$\widetilde{\ }$的函子性以及与乘积系统的协变表示$(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 相关的映射 T_i 的定义推出：

(1) 设 $\mathcal{H}\ _1,\ \mathcal{H}_2$、$\mathcal{H}_3$和 $\mathcal{K}$ 为希尔伯特空间。若 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ 和 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$，则

$$I_\mathcal{K} \otimes (BC) = (I_\mathcal{K} \otimes B)(I_\mathcal{K} \otimes C).$$

(2) 设 $\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{Z}_+^k$上的乘积系统，且$(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 为 $\mathbb{E}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的（完全压缩）协变表示。对于任意酉同构 $t_{ji} : E_j \otimes_{\mathcal{A}} E_i \longrightarrow E_i \otimes_{\mathcal{A}} E_j$, $i \neq j$以及任意算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，有

$$(t_{ji} \otimes I_{\mathcal{H}})(I_{E_j \otimes E_i} \otimes X) = (I_{E_i \otimes E_j} \otimes X)(t_{ji} \otimes I_{\mathcal{H}}).$$

特别地，此恒等式对 $X = \widetilde{T}_{i}^{(n)} \widetilde{T}_{i}^{(n)*}$，$n \in \mathbb{Z}_+$ 成立。

定义 4.2。设 $\mathbb{E} = \{E_i\}_{i=1}^k$ 是一个定义在 $\mathcal{A}$ 上、由 C^*-对应构成的乘积系统，其典范积系统同构为 t_{ij} : $E_i \otimes_{\mathcal{A}} E_j \longrightarrow E_j \otimes_{\mathcal{A}} E_i$, $i \neq j$. 设 $(\sigma, \mathcal{H})$ 是一个非退化
$*$- $\mathcal{A}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的表示。 $\mathbb{E}$ 的一个（协变完全压缩）扭曲表示 作用于 $\mathcal{H}$，是一个元组 $(\sigma, T_1, \dots, T_k)$，其中每个 T_i : $E_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 都是线性完全压缩映射，并且对于 $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi_i \in E_i$,

$$T_i(a\, \xi_i\, b) = \sigma(a)\, T_i(\xi_i)\, \sigma(b).$$

~ ~每个 T_i 都会诱导一个压缩算子 T_i : $E_i \otimes_\sigma \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $T_i(\xi \otimes h) = T_i(\xi)h$，它满足交织关系

$$\widetilde{T}_i(\varphi_i(a)\xi \otimes h) = \sigma(a)\widetilde{T}_i(\xi \otimes h),\ a \in \mathcal{A}.$$

并且对所有 $i, j \in I_k$ 满足 $i \neq j$ 的情形，

$$\widetilde{T}_i(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_j) = \widetilde{T}_j(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i)\,(t_{ij} \otimes U_{ij}), \tag{4.1}$$

其中 $\{U_{ij}\}_{i \neq j}$ 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的一族酉算子，使得对于所有 $i \neq j$、所有 $\ell \in I_k$以及所有 $a \in \mathcal{A}$，都有

$$U_{ji} = U_{ij}^*, \qquad U_{ij}\, \widetilde{T}_\ell = \widetilde{T}_\ell\, (I_{E_\ell} \otimes U_{ij}), \qquad U_{ij}\, \sigma(a) = \sigma(a)\, U_{ij}.$$

若每一对 (σ, T_i) 都是 E_i的等距协变表示，则称该表示为等距的；若对所有 $i \in I_k$.都有 $T_i\, T_i^* = I_{\mathcal{H}}$，则称其为完全余等距

定义 4.3。 $\mathbb{E}$ 的扭曲表示$(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 若对所有满足 $i \neq j$ 的$i, j \in I_k$，

$$\widetilde{T}_j^*\, \widetilde{T}_i = (I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i)\, (t_{ij} \otimes U_{ij})\, (I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_j^*). \tag{4.2}$$

注 4.4。对于 双重扭曲的（完全压缩）表示，我们观察到以下几点 $ng.$

(1) 当每个扭曲酉算子 U_{ij} 都等于恒等算子时，上述框架便退化为双重交换表示的经典情形（参见 [22]）。(2) 对于每个 $m \in I_k$ 和 $n \in \mathbb{Z}_+$，定义

$$P_m^{(n)} := \widetilde{T}_m^{(n)}\, \widetilde{T}_m^{(n)*}.$$

每个算子 $P_m^{(n)}$都是 $\mathcal{H}$ 上的正压缩算子（事实上，当(σ, T_m)为等距的时，它是一个投影），表示 $\widetilde{T}_m^{(n)}$的值域投影。族 $\{P_{(n)m}\}_{n \geq 0}$构成一个递减的压缩算子序列；特别地，

$$P_m^{(0)} = I_{\mathcal{H}} \quad and \quad P_m^{(n+1)} \leq P_m^{(n)} \quad for\ all\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

现在我们转而证明双重扭曲表示存在沃尔德分解。首先，我们验证扭曲酉算子与值域投影 $P_m^{(n)}$ 之间的若干交换关系。以下引理记录了这些恒等式，并构成了后续证明的技术基础。

引理 4.5. 设 $(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上乘积系统 $\mathbb{E}$ 的双重扭曲表示。那么，对于所有满足 $i \neq j$ 的 $i, j, m \in I_k$，以及每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们有

(1) $U_{ij}\widetilde{T}_m^{(n)} = \widetilde{T}_m^{(n)}(I_{E_m^n} \otimes U_{ij})$。(2) $U_{ij}P_m^{(n)} = P_m^{(n)}U_{ij}$，

其中 $P_{(n)m} := \widetilde{T}_m^{(n)}\widetilde{T}_m^{(n)*}$；(3) $\left(I_{E_i \otimes E_j} \otimes P_m^{(n)}\right) = \left(I_{E_j \otimes E_i} \otimes P_m^{(n)}\right)(t_{ij} \otimes U_{ij})$。

证明。(1) 我们通过对 n 作归纳法来证明该恒等式。对于 $n = 1$，我们已有 $U_{ij}T_m = \widetilde{T}_m(I_{E_m} \otimes U_{ij})$。假设该恒等式对 $n-1$ 成立，也就是说，

$$U_{ij}\widetilde{T}_m^{(n-1)} = \widetilde{T}_m^{(n-1)}\left(I_{E_m^{n-1}} \otimes U_{ij}\right).$$

现在我们证明 n 的结果。根据备注 4.1 以及 $n = 1$ 的情形，

$$U_{ij}\widetilde{T}_m^{(n)} = U_{ij}\widetilde{T}_m\left(I_{E_m} \otimes \widetilde{T}_m^{(n-1)}\right) = \widetilde{T}_m\left(I_{E_m} \otimes U_{ij}\widetilde{T}_m^{(n-1)}\right).$$

利用归纳假设，右边可化简为 $\widetilde{T}_m\left(I_{E_m} \otimes \widetilde{T}_m^{(n-1)}\left(I_{E_m^{n-1}} \otimes U_{ij}\right)\right)$，因此备注 4.1 推出

$$U_{ij}\widetilde{T}_m^{(n)} = \widetilde{T}_m^{(n)}\left(I_{E_m^n} \otimes U_{ij}\right).$$

（2）由上面的关系（1），我们得到

$$\left(I_{E_m^n} \otimes U_{ij}\right)\widetilde{T}_m^{(n)*} = \widetilde{T}_m^{(n)*}U_{ij}.$$

利用这两个关系，我们得到

$$U_{ij}\widetilde{T}_m^{(n)}\widetilde{T}_m^{(n)*} = \widetilde{T}_m^{(n)}\left(I_{E_m^n} \otimes U_{ij}\right)\widetilde{T}_m^{(n)*} = \widetilde{T}_m^{(n)}\widetilde{T}_m^{(n)*}U_{ij}.$$

（3）由上面的（2）和备注 4.1（2）可直接得出该断言。

□

有了这个引理，我们现在将沃尔德分解存在性的刻画（定理 3.2）应用于乘积系统的双重扭曲表示情形。因此，这自然地将单个等距协变表示的经典 Wold 分解（σ，T）推广到当前的多变量扭曲框架，如下所述。

定理 4.6. 乘积系统 $\mathbb{E}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的每个双重扭曲等距协变表示$(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 都具有唯一的沃尔德分解。

证明. 只需证明，对所有 $i, j \in I_k$，子空间 $\mathcal{H}_2^i$ 约化 T_j；也就是说，对于所有 $e \in E_j$.，$T_j(e)\mathcal{H}_2^i \subseteq \mathcal{H}_2^i$ 且 $T_j(e)^*\mathcal{H}_2^i \subseteq \mathcal{H}_2^i$。由于 $\mathcal{H}_2^i := \bigcap \mathrm{Ran}(\widetilde{T}_i^{(l)}\widetilde{T}_i^{(l)*})$, 只需证明，对于任意 $l \geq 0$ $l \in \mathbb{Z}_+$,

$$T_j(e)\widetilde{T}_i^{(l)}\widetilde{T}_i^{(l)*}(h) = \widetilde{T}_i^{(l)}\widetilde{T}_i^{(l)*}T_j(e)(h), \qquad \forall\, h \in \mathcal{H}.$$

因此，只需证明以下算子恒等式

$$\widetilde{T}_j(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i^{(l)}\widetilde{T}_i^{(l)*}) = \widetilde{T}_i^{(l)}\widetilde{T}_i^{(l)*}\widetilde{T}_j. \tag{4.3}$$

We p对 l 进行归纳。对于 $l = 1$，扭曲关系 (4.1) 和 (4.2) 推出

$$\widetilde{T}_j(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*) = \widetilde{T}_i(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_j)(t_{ji} \otimes U_{ji})(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i^*) = \widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*\widetilde{T}_j.$$

假设对于某个 $l=n$，(4.3) 成立，即

$$\widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)}\widetilde{T}_i^{(n)*})=\widetilde{T}_i^{(n)}\widetilde{T}_i^{(n)*}\widetilde{T}_j.$$

我们证明它对 $l=n+1$ 成立。利用递归恒等式 $\widetilde{T}_i^{(n+1)}=\widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)})$，计算得：

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i^{(n+1)}\widetilde{T}_i^{(n+1)*}) &= \widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)}\widetilde{T}_i^{(n)*})\widetilde{T}_i^*)\\
&= \widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i)(I_{E_j\otimes E_i}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)}\widetilde{T}_i^{(n)*})(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i^*)\\
&= \widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes \widetilde{T}_j)(t_{ji}\otimes U_{ji})(I_{E_j\otimes E_i}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)}\widetilde{T}_i^{(n)*})(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i^*) \quad \text{(by (4.1))}\\
&= \widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes \widetilde{T}_j)(I_{E_i\otimes E_j}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)}\widetilde{T}_i^{(n)*})(t_{ji}\otimes U_{ji})(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i^*) \quad \text{(by Lemma 4.5)}\\
&= \widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes \widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)}\widetilde{T}_i^{(n)*}))(t_{ji}\otimes U_{ji})(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i^*)\\
&= \widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)}\widetilde{T}_i^{(n)*}\widetilde{T}_j)(t_{ji}\otimes U_{ji})(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i^*) \quad \text{(induction hypothesis)}\\
&= \widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)})(I_{E_i}\otimes \widetilde{T}_i^{(n)*})(I_{E_i}\otimes \widetilde{T}_j)(t_{ji}\otimes U_{ji})(I_{E_j}\otimes \widetilde{T}_i^*)\\
&= \widetilde{T}_i^{(n+1)}\widetilde{T}_i^{(n+1)*}\widetilde{T}_j \quad \text{(by (4.2))}.
\end{aligned}$$

归纳步骤至此完成。因此，根据定理 3.2，我们得出每个双重扭曲等距表示都存在唯一分解。□

当每个扭曲酉算子 U_{ij} 都是恒等算子时，定理 4.6 立即归结为双重交换表示的情形。因此，作为上述定理的推论，我们重新得到 Skalski 和 Zacharias 关于双重交换等距表示的以下经典结果 [22]。

推论 4.7。希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上乘积系统 $\mathbb{E}$ 的每个双重交换等距协变表示 $(\sigma,T_1,\dots,T_k)$ 都存在沃尔德分解。

上述结果也可以直接由刻画定理 3.2 得出。需要注意的是，在我们的框架中，沃尔德分解的概念是按坐标逐一表述的：对每个 $i\in A\subseteq I_k$，有序对 $(\sigma,\ T_i)|_{\mathcal{H}_A}$ 作为E_i的诱导协变表示。在此相对照，Skalski 和 Zacharias [22] 以由对应 E_{α_1}、.....、E_{α_r}生成的子系统 $\mathbb{E}_\alpha$来描述他们的分解，并指出限制 $(\sigma,\ T_{(\alpha_1)}\ .....、\ T_{(\alpha_r)})\big|_{\mathcal{H}_\alpha}$同构于乘积子系统 $\mathbb{E}_\alpha$ 在 $\mathbb{Z}_+^r$上的诱导表示。当扭曲酉算子 U_{ij} 全都是恒等算子时，这两个概念便一致：子系统$\mathbb{E}_\alpha$ 的诱导表示，恰好是单变量诱导表示 $(\sigma,\ T_i)$ 对 $i\in\alpha$的张量积。也就是说，福克模可以典范地分解为

$$\mathcal{F}(\mathbb{E}_\alpha)\ \cong\ \mathcal{F}(E_{\alpha_1})\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}(E_{\alpha_r}),$$

其中，$\otimes$ 表示希尔伯特 $\mathcal{A}$–模的内部张量积。在这一认同下，$\mathcal{F}(\mathbb{E}_\alpha)$上的第$i$个创造算子对应于第 i 个因子上的创造算子。因此，来自 σ 的子系统 $\mathbb{E}_\alpha$ 的诱导表示酉等价于单变量诱导表示的张量积：

$$\mathbb{E}_\alpha(\sigma)\ \cong\ E_{\alpha_1}(\sigma)\otimes\cdots\otimes E_{\alpha_r}(\sigma).$$

因此，我们的表述将 Skalski–Zacharias 分解作为一般扭曲情形的一个特例重新获得。

5. Examples

在本节中，我们构造由算子族产生的扭曲表示和双重扭曲表示的显式非平凡例子。回顾一下，对于 $i \neq j \in I_k$、 t_{ij}： $E_i \otimes E_j \longrightarrow E_j \otimes E_i$，翻转两个张量因子。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，为交换张量块 $E_i \otimes E_j^n$和 $E_j^n \otimes E_i$，我们递归地定义一个同构 $t_{ij}^{(n)}$： $E_i \otimes E_j^n \longrightarrow E_j^n \otimes E_i$

$$t_{ij}^{(n)} := \prod_{k=1}^{n} \left(I_{E_j^{n-k}} \otimes t_{ij} \otimes I_{E_j^{k-1}} \right). \tag{5.1}$$

引理 5.1. 设 $1 \leq i \neq j \leq k$。则映射 $t_{ij}^{(n)} : E_i \otimes E_j^n \longrightarrow E_j^n \otimes E_i$ 满足递归关系

$$t_{ij}^{(n+1)} = \left(I_{E_j^n} \otimes t_{ij} \right) \left(t_{ij}^{(n)} \otimes I_{E_j} \right), \qquad n \geq 1.$$

证明. 根据定义，

$$\begin{aligned} t_{ij}^{(n+1)} &= \prod_{k=1}^{n+1} \left(I_{E_j^{n+1-k}} \otimes t_{ij} \otimes I_{E_j^{k-1}} \right) = \left(I_{E_j^n} \otimes t_{ij} \right) \prod_{k=1}^{n} \left(I_{E_j^{n-k}} \otimes t_{ij} \otimes I_{E_j^{k-1}} \right) \\ &= \left(I_{E_j^n} \otimes t_{ij} \right) \left(t_{ij}^{(n)} \otimes I_{E_j} \right) \end{aligned}$$

这就是所需的递归关系。 □

注 5.2. 该引理表明，族 $\{t_{ij}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ 满足自然的递归关系：每个更高次幂 $t_{ij}^{(n+1)}$ 都是通过在 $t_{ij}^{(n)}$ 左侧添加 t_{ij} 得到的，并适当地与恒等算子进行张量化。这个恒等式常用于归纳地处理涉及交织算子 t_{ij}的乘积。

一般而言，对于任意的 m， $n \in \mathbb{Z}_+$，我们定义 $t_{ij}^{(m,n)}$： $E_i^m \otimes E_j^n \longrightarrow E_j^n \otimes E_i^m$如下：

$$t_{ij}^{(m,n)} := \prod_{k=1}^{m} \left(I_{E_i^{k-1}} \otimes t_{ij}^{(n)} \otimes I_{E_i^{m-k}} \right). \tag{5.2}$$

映射 $t_{ij}^{(m,n)}$ 也可以按第二个指标递归定义。具体而言，对于 $n \geq 1$,

$$t_{ij}^{(m,n)} = \left(I_{E_j^{n-1}} \otimes t_{ij}^{(m,1)} \right) \left(t_{ij}^{(m,n-1)} \otimes I_{E_j} \right) : E_i^m \otimes E_j^n \longrightarrow E_j^n \otimes E_i^m. \tag{5.3}$$

对于迭代族 $\{t_{ij}^{(n)}\}$，现在我们建立相应的辫子关系（或块六边形关系）。

命题 5.3。 对于所有互不相同的 $i > j > \ell$ 以及所有 $n \geq 1$，迭代翻转 $t_{i\ell}^{(n)}$： $E_i \otimes E_\ell^n \to E_\ell^n \otimes E_i$ 和 $t_{j\ell}^{(n)}$： $E_j \otimes E_\ell^n \to E_\ell^n \otimes E_j$ 满足

$$\left(I_{E_\ell^n} \otimes t_{ij} \right) \left(t_{i\ell}^{(n)} \otimes I_{E_j} \right) \left(I_{E_i} \otimes t_{j\ell}^{(n)} \right) = \left(t_{j\ell}^{(n)} \otimes I_{E_i} \right) \left(I_{E_j} \otimes t_{i\ell}^{(n)} \right) \left(t_{ij} \otimes I_{E_\ell^n} \right),$$

作为映射 $E_i \otimes E_j \otimes E_\ell^n \to E_\ell^n \otimes E_j \otimes E_i$.

证明。 我们对 n 作归纳法。对于 $n=1$，该恒等式约化为积系统同构通常满足的六边形关系。假设该恒等式对某个 $n\geq 1$ 成立。我们证明它对 $n+1$ 也成立。记

$$E_i\otimes E_j\otimes E_\ell^{n+1}=\big(E_i\otimes E_j\otimes E_\ell^{n}\big)\otimes E_\ell.$$

将归纳假设应用于因子 $E_i\otimes E_j\otimes E_\ell^n$，即可得到下图左侧的交换方块。将情形 $n=1$ 应用于剩余因子 $E_i\otimes E_j\otimes E_\ell$，则得到右侧的交换方块。将这两个方块合并，并应用引理 5.1，即完成证明。

$$\begin{array}{ccccccc}
E_i\otimes E_j\otimes E_\ell^{(n+1)} & \longrightarrow & E_\ell^{(n)}\otimes E_i\otimes E_j\otimes E_\ell & \longrightarrow & E_\ell^{(n)}\otimes E_i\otimes E_\ell\otimes E_j & \longrightarrow & E_\ell^{(n+1)}\otimes E_i\otimes E_j \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
E_j\otimes E_i\otimes E_\ell^{(n+1)} & \longrightarrow & E_\ell^{(n)}\otimes E_j\otimes E_i\otimes E_\ell & \longrightarrow & E_\ell^{(n)}\otimes E_j\otimes E_\ell\otimes E_i & \longrightarrow & E_\ell^{(n+1)}\otimes E_j\otimes E_i
\end{array}$$

□

引入一个便于使用的记号。在本节余下部分，固定一个集合 $A=\{i_1<i_2<\cdots<i_p\}\subseteq I_k$ 和一个多重指标 $n=(n_1,\ .....,\ n_p)\in\mathbb{Z}_+^{|A|}$。对于固定的 A 和 n，以及 $1\leq j\leq m\leq p$，定义如下（此后省略对 A 和 n 的明确引用）：

$$\begin{aligned}
&E_{j,m}:=E_{i_j}^{n_j}\otimes E_{i_{j+1}}^{n_{j+1}}\otimes\cdots\otimes E_{i_{m-1}}^{n_{m-1}}\otimes E_{i_m}^{n_m},\qquad E_{j,j}:=E_{i_j}^{n_j},\\
&\widetilde{T}_{j,m}:=\widetilde{T}_{i_j}^{(n_j)}\Big(I_{E_{j,j}}\otimes\widetilde{T}_{i_{j+1}}^{(n_{j+1})}\Big)\cdots\Big(I_{E_{j,m-1}}\otimes\widetilde{T}_{i_m}^{(n_m)}\Big):E_{j,m}\otimes\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}.
\end{aligned}\tag{5.4}$$

当 $j=1$ 和 $m=p$ 时，我们采用标准简写 $\widetilde{T}_A^{(n)}\ (=\widetilde{T}_{1,\ p})$ 和 $E_A^n(=E_{1,\ p})$。对于任意 $l\in I_k$，以及 $i_j\in A$，，定义 $\theta^{(n_j)}{}_{l,\ i_j}:\ E_{1,\ j-1}\otimes E_l\otimes E_{i_j}^{n_j}\otimes E_{j+1,\ p}\longrightarrow E_{1,\ j}\otimes E_l\otimes E_{j+1,\ p}$ 如下

$$\theta_{l,i_j}^{(n_j)}\ :=\ I_{E_{1,\,j-1}}\otimes t_{li_j}^{(n_j)}\otimes I_{E_{j+1,\,p}}.\tag{5.5}$$

我们设 $W_{l,\ i_j}:=\theta_{l,\ i_j}\otimes U_{li_j}$ 并且对给定的 n，定义酉算子 $D_j[W_{l,i_j}]:E_{1,\ j-1}\otimes E_l\otimes E_{i_j}^{n_j}\otimes E_{j+1,\ p}\otimes\mathcal{H}\longrightarrow E_{1,\ j}\otimes E_l\otimes E_{j+1,\ p}\otimes\mathcal{H}$ 如下

$$D_j[W_{l,i_j}]\ :=\ \theta_{l,i_j}^{(n_j)}\otimes U_{li_j}^{n_j}.\tag{5.6}$$

现在我们给出第一个例子，它为上文引入的双重扭曲表示这一类提供了一个模型。该构造生成一个与固定子集 $A\subseteq I_k$ 相关联的双扭协变表示，其中 A 中的坐标产生诱导部分，而 A^{c} 中的坐标则构成完全余等距部分。利用这一模型，可以生成一大类双重扭曲表示。此外，对不同的 A 取这些模型的直和，仍可得到一个双重扭曲表示。

例5.4。 设 $\mathbb{E}=\{E(\mathbf{n})\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^k}$ 是一个以 $\mathcal{A}$ 为底、由 C^*-对应构成的乘积系统，其左作用由 $\varphi_i:\ \mathcal{A}\to\mathcal{L}(E_i)$ 给出。对 $i\neq j$，令 $t_{ij}:\ E_i\otimes_{\mathcal{A}}E_j\longrightarrow E_j\otimes_{\mathcal{A}}E_i$ 为典范酉翻转。设 $\mathcal{D}$ 为一个希尔伯特空间，且 $\sigma:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{D})$ 为一个非退化的 $*$- 表示。此外，设 $\{U_{ij}\}_{i\neq j}\subset\mathcal{B}(\mathcal{D})$ 为一族两两可交换的酉算子，满足

$$U_{ji}=U_{ij}^*,\qquad U_{ij}\sigma(a)=\sigma(a)U_{ij}\quad(a\in\mathcal{A}).$$

固定 $m\in I_k$。令 $A=I_m=\{1,\dots,m\}$，因此 $A^{\mathrm{c}}=I_k\backslash I_m=\{m+1,\dots,k\}$. 令 $(\sigma,W_{m+1},\dots,W_k)$ 为子系统 $\mathbb{E}_{A^{\mathrm{c}}}$ 在 $\mathcal{D}$ 上的一个完全余等距扭曲协变表示，其相应的

扭曲为 $\{t_{ij}\otimes U_{ij}:\ \ i,j\in A^{\mathrm{c}}, i\neq j\}$。考虑希尔伯特空间 $\mathcal{H}:=\mathcal{F}(E_A)\otimes_\sigma\mathcal{D}$，并定义表示 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如下：

$$\tau(a):=\varphi_{(\infty)}(a)\otimes I_{\mathcal{D}},\ \textit{where}\ \varphi_{(\infty)}(a)=\bigoplus_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^m}\varphi^{(\mathbf{n})}(a).$$

由于 $\varphi_{(\infty)}$ 和 σ 均为非退化的，因此 τ 也如此。对于 $x_i\in E_i,\ \ i\in I_k$，定义完全压缩算子 $M_i:E_i\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如下

$$M_i(x_i)=\begin{cases}T_{x_i}\otimes I_{\mathcal{D}}, & i=1,\\ D_{i-1}[W_{i,i-1}]\cdots D_1[W_{i1}]\,(T_{x_i}\otimes I_{\mathcal{D}}), & 2\le i\le m,\\ (I_{\mathcal{F}(E_A)}\otimes\widetilde{W_i})\,D_m[W_{im}]\cdots D_1[W_{i1}]\,(T_{x_i}\otimes I_{\mathcal{D}}), & m+1\le i\le k.\end{cases}\tag{5.7}$$

对于 $i\neq j$，定义 $U_{A,\ ij}:=I_{\mathcal{F}(E_A)}\otimes U_{ij}$. 于是，对所有 $\ell\in I_k$ 和 $a\in\mathcal{A}$,

$$U_{A,ji}=U_{A,ij}^*,\qquad U_{A,ij}\,\widetilde{M_\ell}=\widetilde{M_\ell}(I_{E_\ell}\otimes U_{A,ij}),\qquad U_{A,ij}\tau(a)=\tau(a)U_{A,ij},$$

且 $(\tau,\ M_1,\ \ldots,\ M_k)$ 是乘积系统 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{H}$ 上、带有扭曲 $\{t_{ij}\otimes U_{A,ij}\}_{i\neq j}$ 的双扭曲协变等距表示。此外，对于 $i\in A$，$(\tau,\ M_i)$ 是诱导的；而对于每个 $i\in A^{\mathrm{c}}$，$(\tau,\ M_i)$ 是完全余等距的。

在下面的定理 *5.7* 中，我们将验证该例子的细节。

注5.5。上述构造仅针对较简单的情形 $A=I_m=\{1,\ldots,m\}$ 展示，这只是为了方便记号。对于任意子集 $A\subseteq I_k$，通过相应地重新编号乘积系统和扭曲酉算子，可以得到相同的模型。所有陈述和证明均可逐字照搬。

引理 5.6。设 $a\in\mathcal{A}$。固定 $\ell\in A$ 和 $i\in I_k$，满足 $i\neq\ell$。设 $n_\ell\ge1$。则对于 $D_\ell[W_{i,\ell}]=\theta^{(n_\ell)\,i,\ell}\otimes U_{i\ell}^{n_\ell}$，有

$$(\varphi_{(\infty)}(a)\otimes I_{\mathcal{D}})\,D_\ell[W_{i,\ell}]=D_\ell[W_{i,\ell}]\,(\varphi_{(\infty)}(a)\otimes I_{\mathcal{D}}).$$

证明。由于 $U_{i\ell}^{n_\ell}$仅作用于 $\mathcal{D}$，只需证明 $\theta^{(n_\ell)\,i,\ell}$ 与 $\varphi_{(\infty)}(a)$ 在 $\mathcal{F}(E_A)$ 上可交换。由 $t_{i\ell}:E_i\otimes_{\mathcal{A}}E_\ell\to E_\ell\otimes_{\mathcal{A}}E_i$ 的 $\mathcal{A}$–双线性性可知，对所有 $a\in\mathcal{A}$,

$$(\varphi_\ell(a)\otimes I_{E_i})\,t_{i\ell}=t_{i\ell}\,(\varphi_i(a)\otimes I_{E_\ell}).$$

I重复应用此恒等式（等价地，使用引理 5.1）可得，对每个 $n_\ell\ge1$,

$$(\varphi_\ell^{(n_\ell)}(a)\otimes I_{E_i})\,t_{i\ell}^{(n_\ell)}=t_{i\ell}^{(n_\ell)}\,(\varphi_i(a)\otimes I_{E_\ell^{n_\ell}}).$$

在剩余因子上与恒等算子张量化，得到

$$\varphi^{(\mathbf{n})}(a)\,\theta_{i,\ell}^{(n_\ell)}=\theta_{i,\ell}^{(n_\ell)}\,\varphi^{(\mathbf{n})}(a)\quad\text{on each summand } E(\mathbf{n})\subseteq\mathcal{F}(E_A),$$

因此，由于 $\varphi_{(\infty)}(a)=\bigoplus_{\mathbf{n}}\varphi^{(\mathbf{n})}(a)$,

$$\varphi_{(\infty)}(a)\,\theta_{i,\ell}^{(n_\ell)}=\theta_{i,\ell}^{(n_\ell)}\,\varphi_{(\infty)}(a).$$

Co将此与 $U_{i\ell}^{n_\ell}$与 $\varphi_{(\infty)}(a)\otimes I_{\mathcal{D}}$ 可交换这一事实结合起来，即可证明所述结论 . □

定理 5.7。乘积系统 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的表示（τ、M_1、.....、M_k），带有扭曲 $\{t_{ij}\otimes U_{A,\ ij}\}_{i\neq j}$，满足以下性质：

(1) 对于所有的 $i\in I_k$，M_i 满足协变关系。

(2) 对于满足 $i \neq j$的 i、 $j \in I_k$，映射 M_i、 M_j满足扭曲关系：

$$\widetilde{M_i}\big(I_{E_i} \otimes \widetilde{M_j}\big) = \widetilde{M_j}\big(I_{E_j} \otimes \widetilde{M_i}\big)\,\big(t_{ij} \otimes U_{A,ij}\big) \qquad on\ E_i \otimes E_j \otimes_\tau \mathcal{H}. \tag{5.8}$$

(3) 对于 $i, j \in I_k$，其中 $i \neq j$，映射 M_i, M_j满足双扭关系：

$$\widetilde{M_j}^*\widetilde{M_i} = \big(I_{E_j} \otimes \widetilde{M_i}\big)\big(t_{ij} \otimes U_{A,ij}\big)\big(I_{E_i} \otimes \widetilde{M_j}^*\big) \qquad on\ E_i \otimes_\tau \mathcal{H}. \tag{5.9}$$

证明。(1) 为验证协变性，固定某个 $i \in I_k$ 的 $a, b \in \mathcal{A}$ 和 $x_i \in E_i$。我们首先注意到，对于任意创造算子，

$$T_{a\cdot x\cdot b} = \varphi_{(\infty)}(a)\, T_x\, \varphi_{(\infty)}(b).$$

因此， $M_1(a \cdot x_1 \cdot b) = \tau(a)\ M_1(x_1)\ \tau(b)$。现在，对于 $1 < i \leq m$ 和 $x_i \in E_i$，令$M_i(x_i) = Q_i(T_{x_i} \otimes I_{\mathcal{D}})$，其中 $Q_i = D_{i-1}[W_{i,i-1}] \cdots D_1[W_{i1}]$. 引理 5.6 表明， Q_i与 $\varphi_{(\infty)}(a) \otimes I_{\mathcal{D}}$可交换。因此，对于 $a, b \in \mathcal{A}$，利用创造算子的协变性，

$$\begin{aligned} M_i(a \cdot x_i \cdot b) &= Q_i\big((\varphi_{(\infty)}(a)\, T_{x_i}\, \varphi_{(\infty)}(b)) \otimes I_{\mathcal{D}}\big) \\ &= (\varphi_{(\infty)}(a) \otimes I_{\mathcal{D}})\, Q_i\, (T_{x_i} \otimes I_{\mathcal{D}})\, (\varphi_{(\infty)}(b) \otimes I_{\mathcal{D}}) \\ &= \tau(a)\, M_i(x_i)\, \tau(b). \end{aligned}$$

现在我们验证 $m+1 \leq i \leq k$ 的协变性。令 $R_i := D_m[W_{im}] \cdots D_1[W_{i1}]$，使得$\sim M_i(x_i) = (I \otimes W_i)\, R_i\, (T_{x_i} \otimes I_{\mathcal{D}})$。根据引理 5.6， R_i 与 $\varphi_{(\infty)}(a) \otimes I_{\mathcal{D}}$ 可交换。此外，$\sim^{\varphi_{(\infty)}(a)}$作用于 $\mathcal{F}(E_A)$ 张量因子，而 W_i 作用于 $\mathcal{D}$–因子，因此二者可交换。因此，对于 a， $b \in \mathcal{A}$，利用创造算子的协变性，我们得到

$$\begin{aligned} M_i(a \cdot x_i \cdot b) &= (I \otimes \widetilde{W_i})\, R_i\big((\varphi_{(\infty)}(a)\, T_{x_i}\, \varphi_{(\infty)}(b)) \otimes I_{\mathcal{D}}\big) \\ &= (\varphi_{(\infty)}(a) \otimes I_{\mathcal{D}})\, (I \otimes \widetilde{W_i})\, R_i\, (T_{x_i} \otimes I_{\mathcal{D}})\, (\varphi_{(\infty)}(b) \otimes I_{\mathcal{D}}) \\ &= \tau(a)\, M_i(x_i)\, \tau(b). \end{aligned}$$

(2) 固定 $i, j \in I_m$ 其中 $i \leq j$ （ $i \geq j$ 的情形是对称的）。首先注意到，根据定义 5.7 以及酉算子 $\{U_{pq}\}_{p\neq q}$ 两两交换这一事实， $\mathcal{D}$–分量在 $\widetilde{M_i}\big(I_{E_i} \otimes \widetilde{M_j}\big)$和 $\widetilde{M_j}\big(I_{E_j} \otimes \widetilde{M_i}\big)\big(t_{ij} \otimes U_{A,ij}\big)$ 中相同。事实上，$U_{A,ij} = I_{\mathcal{F}(E_A)} \otimes U_{ij}$ 仅作用于 $\mathcal{D}$–张量因子，而由交换性可知，由酉算子 $\{U_{pq}\}_{p\neq q}$ 组成的乘积相同。因此，要验证扭曲关系，只需比较两边在福克空间分量 $\mathcal{F}(E_{I_m})$上的作用。令 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 分别表示左侧和右侧对应的福克空间分量。具体而言

$$\mathcal{L} = \theta_{i,i-1}^{(n_{i-1})} \cdots \theta_{i,1}^{(n_1)} \left(I_{E_i} \otimes \theta_{j,j-1}^{(n_{j-1})} \cdots \theta_{j,1}^{(n_1)}\right),$$

and

$$\mathcal{R} = \theta_{j,j-1}^{(n_{j-1})} \cdots \theta_{j,i}^{(n_i+1)} \cdots \theta_{j,1}^{(n_1)} \left(I_{E_j} \otimes \theta_{i,i-1}^{(n_{i-1})} \cdots \theta_{i,1}^{(n_1)}\right) (t_{ij} \otimes I_{\mathcal{F}(E_A)}).$$

等式 $\mathcal{L}=\mathcal{R}$ 由交换六边形编码，而根据翻转 t_{ij}所满足的分块六边形（辫）关系，该六边形是交换的。

$$\begin{array}{ccccc} E_i\otimes E_j\otimes E_{I_m}^{\boldsymbol{n}} & \longrightarrow & E_i\otimes E_{I_m}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{e}_j} & \longrightarrow & E_{I_m}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j} \\ \downarrow & & & & \\ E_j\otimes E_i\otimes E_{I_m}^{\boldsymbol{n}} & \longrightarrow & E_j\otimes E_{I_m}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{e}_i} & \longrightarrow & E_{I_m}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}. \end{array} \tag{5.10}$$

为了给出更明确的论证，注意到 $\mathcal{L}$ 先插入 E_j 块到 $E_A^{\mathbf{n}}$ 中，然后再插入 E_i 块。由于对于 $p\neq q$，算子 $\theta_{i,\,p}$ 和 $\theta_{j,\,q}$ 作用于不同的张量分量，因此可以通过交替应用 $\theta^{(n_\ell)}{}_{j,\,\ell}$ 和 $\theta^{(n_\ell)}{}_{i,\,\ell}$ $(\ell=1,\dots,i-1)$ 来实现这一作用，如下所示：

$$E_i\otimes E_j\otimes E_A^{n}\longrightarrow E_i\otimes E_{i_1}^{n_1}\otimes E_j\otimes E_{2,m}\longrightarrow E_{i_1}^{n_1}\otimes E_i\otimes E_j\otimes E_{2,m}\longrightarrow\cdots\longrightarrow E_A^{n+e_i+e_j}.$$

形式上，稍微滥用一下记号（省略映射不作用于其上的张量分量上的恒等算子），我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\theta_{j,j-1}^{(n_{j-1})}\cdots\theta_{j,i}^{(n_i)}\Big[\theta_{i,i-1}^{(n_{i-1})}\,\theta_{j,i-1}^{(n_{i-1})}\Big]\cdots\Big[\theta_{i,1}^{(n_1)}\,\theta_{j,1}^{(n_1)}\Big]\\&=\theta_{j,j-1}^{(n_{j-1})}\cdots\theta_{j,i}^{(n_i)}\Big[t_{ji}\,\theta_{j,i-1}^{(n_{i-1})}\,\theta_{i,i-1}^{(n_{i-1})}\,t_{ij}\Big]\cdots\Big[t_{ji}\,\theta_{j,1}^{(n_1)}\,\theta_{i,1}^{(n_1)}\,t_{ij}\Big]\quad\text{(Proposition5.3)}\\&=\theta_{j,j-1}^{(n_{j-1})}\cdots\theta_{j,i}^{(n_i+1)}\Big[\theta_{j,i-1}^{(n_{i-1})}\,\theta_{i,i-1}^{(n_{i-1})}\Big]\cdots\Big[\theta_{j,1}^{(n_1)}\,\theta_{i,1}^{(n_1)}\Big]t_{ij}\\&=\theta_{j,j-1}^{(n_{j-1})}\cdots\theta_{j,i}^{(n_i+1)}\cdots\theta_{j,1}^{(n_1)}\Big(I_{E_j}\otimes\theta_{i,i-1}^{(n_{i-1})}\cdots\theta_{i,1}^{(n_1)}\Big)\,t_{ij}\\&=\mathcal{R},\end{aligned}$$

其中倒数第二个等号成立，是因为 $\theta^{(n_l)}{}_{i,\,l}\;\theta^{(n_k)}{}_{j,\,k}=\theta^{(n_k)}{}_{j,\,k}\;\theta^{(n_l)}_{i\,l)\,,}$，$\forall k<l$，它们作用于不同的分量。

现在考虑 $i\in A$ 和 $j\in A^{\mathrm{c}}$ 的情形。由于 W_j 在福克空间 $\mathcal{F}(E_A)$ 上作用平凡，因此它与作用于福克空间分量上的算子 $D_{i-r}[W_{ir}]$可交换。因此，

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_i\big(I_{E_i}\otimes\widetilde{M}_j\big)(x_i\otimes x_j\otimes\xi\otimes h)&=\prod_{r=1}^{i-1}D_{i-r}[W_{ir}]\,(I_{\mathcal{F}(E_A)}\otimes\widetilde{W}_j)\prod_{r=1}^{m}D_{m+1-r}[W_{jr}](x_i\otimes x_j\otimes\xi\otimes h)\\&=(I_{\mathcal{F}(E_A)}\otimes\widetilde{W}_j)\prod_{r=1}^{i-1}D_{i-r}[W_{ir}]\prod_{r=1}^{m}D_{m+1-r}[W_{jr}](x_i\otimes x_j\otimes\xi\otimes h).\end{aligned}$$

与前一种情况一样，根据定义 5.7 以及酉算子 $\{U_{pq}\}_{p\neq q}$的交换性，$\widetilde{M}_i\big(I_{E_i}\otimes\widetilde{M}_j\big)$ 和 $\widetilde{M}_j\big(I_{E_j}\otimes\widetilde{M}_i\big)$$(t_{ij}\otimes U_{A,\,ij})$的 $\mathcal{D}$分量相同。因此，只需比较福克空间分量 $\mathcal{F}(E_A)$上的诱导映射。令 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$表示相应的福克空间映射。于是

$$\mathcal{L}=\theta_{i,i-1}^{(n_{i-1})}\cdots\theta_{i,1}^{(n_1)}\Big(I_{E_i}\otimes\theta_{j,m}^{(n_m)}\cdots\theta_{j,1}^{(n_1)}\Big),$$

而

$$\mathcal{R}=\theta_{j,m}^{(n_m)}\cdots\theta_{j,i}^{(n_i+1)}\cdots\theta_{j,1}^{(n_1)}\Big(I_{E_j}\otimes\theta_{i,i-1}^{(n_{i-1})}\cdots\theta_{i,1}^{(n_1)}\Big)(t_{ij}\otimes I_{\mathcal{F}(E_A)}).$$

等式 $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ 的推导与情形 $i, j \in A$ 完全相同，使用了翻转 t_{ij} 所满足的辫子（六边形）关系。至此，$i \in A$ 和 $j \in A^c$ 的证明完成。

最后，设 $i, j \in A^c$。由于 W_j 在福克空间 $\mathcal{F}(E_A)$ 上平凡作用，因此它与作用于福克空间分量上的算子 $D_{i-r}[W_{ir}]$ 交换。因此，在$i-1$表达式 $\widetilde{M}_i\big(I_{E_i} \otimes \widetilde{M}_j\big)$ 中，因子 $(I_{\mathcal{F}(E_A)} \otimes \widetilde{W}_j)$ 可以移过 $\prod D_{i-r}[W_{ir}]$，而不会$r=1$影响福克空间部分。

由此可知，$\widetilde{M}_i\big(I_{E_i} \otimes \widetilde{M}_j\big)$ 和 $\widetilde{M}_j\big(I_{E_j} \otimes \widetilde{M}_i\big)(t_{ij} \otimes U_{A,ij})$ 在福克空间分量 $\mathcal{F}(E_A)$ 上的作用完全相同，因此，对扭曲关系的验证完全归结为在 $\mathcal{D}$ 上与六边形关系一起验证相应的扭曲关系 (W_i, W_j)。这就完成了 $i, j \in A^c$ 情形下的证明。

(3) 我们验证 $(\sigma, M_1, \dots, M_m)$ 满足双重扭曲关系。若指标 i 或 j 至少有一个属于 A^c，所需关系便可直接由相应的扭曲关系推出。在剩下的情形 $i, j \in A$ 中，注意到 $U_{A,ij} = I_{\mathcal{F}(E_A)} \otimes U_{ij}$，且族 $\{U_{pq}\}_{p \neq q}$ 由可交换酉算子组成。因此，两边的 $\mathcal{D}$ 分量相同，只需比较福克空间 $\mathcal{F}(E_A)$ 上的诱导映射。注意，

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{M}_j^*(\xi \otimes h), x_j \otimes \eta \otimes h_1 \rangle &= \langle \xi \otimes h, \widetilde{M}_j(x_j \otimes \eta \otimes h_1) \rangle \\ &= \langle \xi \otimes h, D_{j-1}[W_{jj-1}] \cdots D_1[W_{j1}](x_j \otimes \eta \otimes h_1) \rangle \\ &= \langle D_1[W_{1j}] \cdots D_{j-1}[W_{j-1j}](\xi \otimes h), x_j \otimes \eta \otimes h_1 \rangle\end{aligned}$$

固定 $i \neq j$。两边都定义了有界映射 $E_i \otimes H \to E_j \otimes H$，因此只需比较它们在初等张量上的矩阵系数。令 $x_i \in E_i$, $x_j \in E_j$, $\xi, \eta \in \mathcal{F}(E_A)$，且 $h, h_1 \in \mathcal{D}$。由伴随算子的定义性质，

$$\big\langle \widetilde{M}_j^* \widetilde{M}_i(x_i \otimes \xi \otimes h),\, x_j \otimes \eta \otimes h_1 \big\rangle = \big\langle \widetilde{M}_i(x_i \otimes \xi \otimes h),\, \widetilde{M}_j(x_j \otimes \eta \otimes h_1) \big\rangle.$$

由此得到的 Fock 空间恒等式恰好对应分块六边形图中的两条路径，因此根据翻转的编织关系 t_{ij}（命题 5.3），两者相等。于是这两个算子在初等张量上相等，所需的恒等式也就成立。

□

现在我们着手解决如何根据给定的算子族构造双重扭曲表示这一问题。为此，我们建立了两个框架：自同构情形 $E_i = \alpha_i \mathcal{A}$ 和标量情形 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$。在这两种情形下，我们都用具体的算子关系明确刻画（双重）扭曲表示，从而将 Solel 关于双重交换表示 [23] 的理论扩展到双重扭曲情形。

例 5.8. 设 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$，并设 $\mathbb{E} = \{E_i\}_{i=1}^k$ 是定义在 $\mathbb{Z}_+^k$ 上的 C^*-对应乘积系统。我们将每个纤维 E_i 视为配备固定标准正交基 $\{e_\alpha^i : \alpha \in J_i\}$ 的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_i$。设 $t_{ij} : \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j \longrightarrow \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_i$ 表示决定乘积系统结构的酉翻转映射。设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，且 $\{U_{ij}\}_{i \neq j} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为酉算子族。假设对每个 $i \in I_k$，给定算子族 $\{S_\alpha^i : \alpha \in J_i\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得

$\sum_{\beta\in J_j,\ \alpha\in J_i} S^i_\alpha (S^i_\alpha)^* \le I_{\mathcal{H}}$，并且对所有 i、$j\in I_k$ 以及 $\alpha\in J_i$、

$$S^i_\alpha S^j_\beta = \sum_{\gamma\in J_j,\ \delta\in J_i} \left\langle e^j_\gamma\otimes e^i_\delta,\, t_{ij}(e^i_\alpha\otimes e^j_\beta)\right\rangle S^j_\gamma S^i_\delta\, U_{ij}; \tag{5.11}$$

$$(S^j_\beta)^* S^i_\alpha = \sum_{\delta\in J_i,\ \gamma\in J_j} \left\langle e^j_\beta\otimes e^i_\delta,\, t_{ij}(e^i_\alpha\otimes e^j_\gamma)\right\rangle S^i_\delta\, U_{ij}\,(S^j_\gamma)^*. \tag{5.12}$$

那么，存在乘积系统 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的双重扭曲表示$(\sigma, T_1, \dots, T_k)$，使得

$$S^i_\alpha h = \widetilde{T}_i(e^i_\alpha\otimes h),\qquad h\in\mathcal{H}.$$

这里，$\sigma:\ \mathbb{C}\to B(\mathcal{H})$ 由 $\sigma(\lambda)=\lambda I_{\mathcal{H}}$ 给出。我们在命题 *5.10* 中验证上述例子的细节。

注 5.9. 在应用中，我们将假设族 $\{U_{ij}\}_{i\neq j}$ 由两两对易且满足 $U_{ji}=U_{ij}^*$ 的酉算子组成。构造下文并不需要这些附加假设，但它们属于（双重）扭曲表示的标准概念。

命题 5.10. 在例 *5.8* 的情形下，设族 $\{S^i_\alpha:\ \alpha\in J_i\}\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 (5.11) 和 (5.12)。那么，存在乘积系统 $\mathbb{E}$在 $\mathcal{H}$ 上的双重扭曲表示$(\sigma, T_1, \dots, T_k)$，使得

$$\widetilde{T}_i(e^i_\alpha\otimes h) = S^i_\alpha h,\qquad h\in\mathcal{H}.$$

~证明。对每个 i，在初等张量上定义线性算子 $T_i:\ \mathcal{H}_i\otimes\mathcal{H}\to\mathcal{H}$

$$\widetilde{T}_i(\xi\otimes h) := \sum_{\alpha\in J_i}\langle e^i_\alpha,\xi\rangle\, S^i_\alpha h,\qquad \xi\in\mathcal{H}_i,\ h\in\mathcal{H}. \tag{5.13}$$

令 $R_i:\ \bigoplus_{\alpha\in J_i}\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 为行算子 $R_i((h_\alpha)_\alpha)=\sum_\alpha S^i_\alpha h_\alpha$。由于 $\{S^i_\alpha\}_{\alpha\in J_i}$ 是行压缩算子，我们有 $R_iR_i^*\le I_{\mathcal{H}}$，因此 $\|R_i\|\le 1$。令 $U_i:\ \mathcal{H}_i\otimes\mathcal{H}\to\bigoplus_{\alpha\in J_i}\mathcal{H}$ 为典范酉算子

$U_i(\xi\otimes h)=(\langle e^i_\alpha,\ \xi\rangle h)_{\alpha\in J_i}$。于是 $\widetilde{T}_i = R_iU_i$，所以 $\widetilde{T}_i$ 是压缩算子。

固定 i,j。首先我们证明此时乘性扭曲关系 $\widetilde{T}_i(I_{\mathcal{H}_i}\otimes\widetilde{T}_j)=\widetilde{T}_i(\widetilde{T}_j\otimes I_{\mathcal{H}})$ 在初等张量上成立。由线性与连续性可知，对所有 $\mathcal{H}_i\otimes\mathcal{H}_j\otimes\mathcal{H}$ 都成立。设 $\xi\in\mathcal{H}_i$、$\eta\in\mathcal{H}_j$和 $h\in\mathcal{H}$。利用（5.13），

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_i(I_{\mathcal{H}_i}\otimes\widetilde{T}_j)(\xi\otimes\eta\otimes h) &= \widetilde{T}_i\left(\xi\otimes\sum_{\beta\in J_j}\langle e^j_\beta,\eta\rangle\, S^j_\beta h\right)\\
&= \sum_{\alpha\in J_i}\sum_{\beta\in J_j}\langle e^i_\alpha,\xi\rangle\,\langle e^j_\beta,\eta\rangle\, S^i_\alpha S^j_\beta h\\
&= \sum_{\alpha,\beta}\langle e^i_\alpha,\xi\rangle\,\langle e^j_\beta,\eta\rangle\sum_{\gamma,\delta}\left\langle e^j_\gamma\otimes e^i_\delta,\, t_{ij}(e^i_\alpha\otimes e^j_\beta)\right\rangle S^j_\gamma S^i_\delta\, U_{ij}h \quad [\text{by (5.11)}]\\
&= \sum_{\gamma,\delta}\Big\langle e^j_\gamma\otimes e^i_\delta,\, t_{ij}(\xi\otimes\eta)\Big\rangle\, S^j_\gamma S^i_\delta\, U_{ij}h.
\end{aligned}$$

$= \sum_{\gamma,\ \delta} c_{\gamma\delta}\, e^j_\gamma \otimes e^i_\delta$ 其中 $c_{\gamma\delta} = \langle e^j_\gamma \otimes e^i_\delta,\ \ t_{ij}(\xi \otimes \eta)\rangle$，最后一个表达式变为记作 $t_{ij}(\xi \otimes \eta)$

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_i(I_{\mathcal{H}_i} \otimes \widetilde{T}_j)(\xi \otimes \eta \otimes h) &= \sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma\delta}\, S^j_\gamma S^i_\delta\, U_{ij} h \\ &= \widetilde{T}_j\left(\sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma\delta}\, e^j_\gamma \otimes \widetilde{T}_i(e^i_\delta \otimes U_{ij}h)\right) \\ &= \widetilde{T}_j(I_{\mathcal{H}_j} \otimes \widetilde{T}_i)\,(t_{ij} \otimes U_{ij})(\xi \otimes \eta \otimes h).\end{aligned}$$

因此，$(\sigma,\ T_1,\ \ldots,\ T_k)$ 是 $\mathbb{E}$ 的扭曲表示。

现在假设 (5.12) 成立。我们证明该条件等价于双重扭曲协变关系。只需验证等式在初等张量上成立。为此，首先注意，对于每个 $j \in I_k$ 和 $h \in \mathcal{H}$,

$$\langle \xi \otimes h',\, \widetilde{T}^*_j h\rangle = \left\langle \sum_{\gamma\in J_j} \langle e^j_\gamma, \xi\rangle\, S^j_\gamma h',\, h \right\rangle = \sum_{\gamma\in J_j} \langle \xi, e^j_\gamma\rangle\, \langle h',\, (S^j_\gamma)^* h\rangle = \left\langle \xi \otimes h',\, \sum_{\gamma\in J_j} e^j_\gamma \otimes (S^j_\gamma)^* h \right\rangle,$$

其中收敛于强算子拓扑。由于初等张量的有限线性组合在 $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}$ 中稠密，我们得到 $\widetilde{T}^*_j h = \sum_{\gamma\in J_j} e^j_\gamma \otimes (S^j_\gamma)^* h$. 现在我们计算，

$$\begin{aligned}(I_{\mathcal{H}_j} \otimes \widetilde{T}_i)\,(t_{ij} \otimes U_{ij})\,(I_{\mathcal{H}_i} \otimes \widetilde{T}^*_j)(e^i_\alpha \otimes h) &= (I_{\mathcal{H}_j} \otimes \widetilde{T}_i)\,(t_{ij} \otimes U_{ij})\left(\sum_{\gamma\in J_j} e^i_\alpha \otimes e^j_\gamma \otimes (S^j_\gamma)^* h\right) \\ &= (I_{\mathcal{H}_j} \otimes \widetilde{T}_i)\left(\sum_{\gamma\in J_j} t_{ij}(e^i_\alpha \otimes e^j_\gamma) \otimes U_{ij}(S^j_\gamma)^* h\right) \\ &= \sum_{\delta\in J_i,\ \gamma\in J_j} \langle e^j_\beta \otimes e^i_\delta,\, t_{ij}(e^i_\alpha \otimes e^j_\gamma)\rangle\, e^j_\beta \otimes \widetilde{T}_i(e^i_\delta \otimes U_{ij}(S^j_\gamma)^* h).\end{aligned}$$

应用 $\widetilde{T}_i(e^i_\delta \otimes k) = S^i_\delta k$ 并对 β 求和，该表达式变为

$$\sum_{\beta\in J_j} e^j_\beta \otimes \left(\sum_{\delta\in J_i,\ \gamma\in J_j} \langle e^j_\beta \otimes e^i_\delta,\, t_{ij}(e^i_\alpha \otimes e^j_\gamma)\rangle\, S^i_\delta U_{ij}(S^j_\gamma)^* h\right).$$

由 (5.12)，内层求和等于 $(S^j_\beta)^* S^i_\alpha h$，因此上述表达式化简为

$$\sum_{\beta\in J_j} e^j_\beta \otimes (S^j_\beta)^* S^i_\alpha h = \widetilde{T}^*_j S^i_\alpha h = \widetilde{T}^*_j \widetilde{T}_i(e^i_\alpha \otimes h).$$

因此，表示 $(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 是双重扭曲的。 □

前一个命题说明，满足坐标关系 (5.11)–(5.12) 的算子族 $\{S^i_\alpha\}$ 如何导出乘积系统 $\mathbb{E}$ 的双重扭曲表示。现在我们建立~逆向构造。首先计算算子 T_j 的伴随。

引理 5.11. 对于每个 $j \in I_k$，其伴随 $T_j^*\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}$ 由下式给出

$$\widetilde{T}_j^* h = \sum_{\gamma \in J_j} e_\gamma^j \otimes (S_\gamma^j)^* h, \qquad h \in \mathcal{H},$$

其中级数在强算子拓扑下收敛。

证明：令 $x \in \mathcal{H}_j$ 和 $h,\ h' \in \mathcal{H}$。利用 x 关于固定标准正交基 $\{e_\gamma^j\}_{\gamma \in J_j}$的展开，我们有 $\widetilde{T}_j(x \otimes h) = \sum_{\gamma \in J_j} \langle e_\gamma^j,\ x\rangle\, S_\gamma^j h$. 因此，对于任意 $h' \in \mathcal{H}$,

$$\langle x \otimes h,\, \widetilde{T}_j^* h' \rangle = \left\langle \sum_{\gamma \in J_j} \langle e_\gamma^j, x\rangle\, S_\gamma^j h,\, h' \right\rangle = \left\langle x \otimes h,\, \sum_{\gamma \in J_j} e_\gamma^j \otimes (S_\gamma^j)^* h' \right\rangle.$$

因此，对于所有 $h \in \mathcal{H}$，$\widetilde{T}_j^* h = \sum_{\gamma \in J_j} e_\gamma^j \otimes (S_\gamma^j)^* h$. 右端的级数在强算子拓扑下收敛。

□

定理 5.12。在例 *5.8* 的设定下，$(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 是乘积系统 $\mathbb{E}$ 相对于扭曲 $\{t_{ij} \otimes U_{ij}\}_{i \neq j}$ 的扭曲表示，当且仅当存在一个算子族 $\{S_\alpha^i :\ i \in I_k,\ \alpha \in J_i\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得对于所有 $i, j \in I_k$ 和 $\alpha \in J_i,\ \beta \in J_j$,

$$\sum_{\alpha \in J_i} S_\alpha^i (S_\alpha^i)^* \leq I_{\mathcal{H}}, \qquad S_\alpha^i S_\beta^j = \sum_{\gamma \in J_j,\ \delta \in J_i} \left\langle e_\gamma^j \otimes e_\delta^i,\, t_{ij}(e_\alpha^i \otimes e_\beta^j) \right\rangle S_\gamma^j S_\delta^i\, U_{ij}.$$

此外，$(\sigma、\ T_1、\ldots、\ T_k)$ 是一个双重扭曲表示，当且仅当除此之外，

$$(S_\beta^j)^* S_\alpha^i = \sum_{\delta \in J_i,\ \gamma \in J_j} \left\langle e_\beta^j \otimes e_\delta^i,\, t_{ij}(e_\alpha^i \otimes e_\gamma^j) \right\rangle S_\delta^i\, U_{ij}\, (S_\gamma^j)^*.$$

证明。“如果”方向由命题 5.10 得出。反之，设 $(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 是关于扭曲 $\{t_{ij} \otimes U_{ij}\}_{i \neq j}$ 的 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的扭曲表示。对于每个 $i \in I_k$ 和 $\alpha \in J_i$，定义

$$S_\alpha^i h := \widetilde{T}_i(e_\alpha^i \otimes h), \qquad h \in \mathcal{H}.$$

由于每个 $\widetilde{T}_i$ 都是压缩算子，族 $\{S_\alpha^i\}_{\alpha \in J_i}$ 是一个行压缩算子，即 $\sum_{\alpha \in J_i} S_\alpha^i (S_\alpha^i)^* \leq I_{\mathcal{H}}$.固定 i, $j \in I_k$ 和 $\alpha \in J_i$、$\beta \in J_j$。利用 $(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 的扭曲协变关系，并相对于固定的标准正交基展开 $t_{ij}(e_\alpha^i \otimes e_\beta^j) = \sum_{\gamma \in J_j, \delta \in J_i} \langle e_\gamma^j \otimes e_\delta^i,\, t_{ij}(e_\alpha^i \otimes e_\beta^j)\rangle e_\gamma^j \otimes e_\delta^i$,我们得到

$$S_\alpha^i S_\beta^j = \sum_{\gamma \in J_j,\ \delta \in J_i} \left\langle e_\gamma^j \otimes e_\delta^i,\, t_{ij}(e_\alpha^i \otimes e_\beta^j) \right\rangle S_\gamma^j S_\delta^i\, U_{ij},$$

在强算子拓扑下收敛。因此，关系式 (5.11) 成立。

现在假设 $(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 是一个双重扭曲表示。对于 $\beta \in J_j$，定义算子$L_\beta^j\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}$，令 $L_\beta^j(h) := e_\beta^j \otimes h,\ h \in \mathcal{H}$. 于是 $S_\beta^j = \widetilde{T}_j L_\beta^j$，因此 $(S_\beta^j)^* = (L_\beta^j)^* \widetilde{T}_j^*$. 对于 $x \in \mathcal{H}_j$ 和 $h \in \mathcal{H}$，我们有 $(L_\beta^j)^*(x \otimes h) = \langle e_\beta^j, x\rangle\, h$. 利用双重扭曲协变关系，以及 L_β^j 和 $\widetilde{T}_j^*$ 的伴随算子的上述表达式（参见引理 5.11），并将 $t_{ij}(e_\alpha^i \otimes e_\beta^j)$ 按照固定的标准正交基展开，可得

$$(S_\beta^j)^* S_\alpha^i = \sum_{\delta \in J_i,\ \gamma \in J_j} \left\langle e_\beta^j \otimes e_\delta^i,\, t_{ij}(e_\alpha^i \otimes e_\gamma^j) \right\rangle S_\delta^i\, U_{ij}\, (S_\gamma^j)^*.$$

因此，关系 (5.12) 成立。 □

因此，上述例子表明，固定纤维 $\mathcal{H}_i$ 的一组标准正交基后，$\mathbb{E}$ 的扭曲表示（分别为双重扭曲表示）与满足 (5.11)（分别还满足 (5.12)）的算子族 $\{S_\alpha^i\}$ 之间存在一一对应关系。因此，（双重）扭曲表示这一抽象概念等价于一个具体的算子模型。

现在我们专门讨论自同构情形，其中乘积系统的每个纤维都由系数代数的一个 $*$-自同构诱导。在此情形下，扭曲表示和双重扭曲表示可以用满足自然协变性关系及（交换）关系的算子元组作具体描述。

例*5.13.* 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，且 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in Aut(\mathcal{A})$ 是可交换的 $*$-自同构。令 $\mathbb{E}$ 表示 $\mathbb{Z}_+^k$ 上相应的自同构乘积系统，其纤维为 $E_i = {}_{\alpha_i}\mathcal{A}$。因此，每个 $E_i = \mathcal{A}$ 都是一个向量空间，右作用为乘法，左作用为 $\varphi_i(a)c = \alpha_i(a)c$，内积为 $\langle c_1, c_2\rangle = c_1^* c_2$。设 $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个非退化的 $*$-表示，且 $\{U_{ij}\}_{i\neq j} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一族两两可交换的酉算子，使得 $U_{ji} = U_{ij}^*$ 且 $U_{ij}\sigma(a) = \sigma(a)U_{ij}$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$ 均成立。设 $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是压缩算子，并且对所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $i \neq j$,

$$\sigma(a)S_i = S_i\sigma(\alpha_i(a)), \qquad S_iS_j = U_{ij}S_jS_i, \qquad S_i^*S_j = U_{ij}^*S_jS_i^*.$$

定义算子 $T_i : E_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如下：

$$T_i(a) := S_i\sigma(a), \qquad a \in E_i = {}_{\alpha_i}\mathcal{A}.$$

那么，$(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 是乘积系统 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的双重扭曲表示，其对应的扭曲为 $\{t_{ij} \otimes U_{ij}\}_{i\neq j}$。其中（在自然同一的意义下，且利用自同构可交换这一事实）对应同构 t_{ij}：
$E_i \otimes_{\mathcal{A}} E_j \longrightarrow E_j \otimes_{\mathcal{A}} E_i$ 由下式给出：

$$t_{ij}(a \otimes b) = \alpha_i^{-1}\alpha_j(a) \otimes b, \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

我们在定理 5.14 中验证这一构造的细节，并以具体的算子关系为依据，建立刻画自同构乘积系统的（双重）扭曲表示的充要判据。

定理 5.14. 在例*5.13*的设定下，$(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 是关于扭曲 $\{t_{ij} \otimes U_{ij}\}_{i\neq j}$ 的双重扭曲表示，当且仅当存在压缩算子 $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得对所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $i \neq j$,

$$\sigma(a)S_i = S_i\sigma(\alpha_i(a)), \quad S_iS_j = U_{ij}S_jS_i, \quad S_i^*S_j = U_{ij}^*S_jS_i^*,$$

与 $T_i(a) = S_i\sigma(a)$。

证明。 设 $(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 是 $\mathbb{E}$ 的（分别为双重）扭曲表示。对于 $i \neq j$，内张量积 $E_i \otimes_{\mathcal{A}} E_j$ 可规范地识别为 ${}_{\alpha_j\circ\alpha_i}\mathcal{A}$。对应同构 t_{ij}：$E_i \otimes_{\mathcal{A}} E_j \longrightarrow E_j \otimes_{\mathcal{A}} E_i$ 满足乘积系统所要求的相干关系，因此确定了 $\mathbb{E}$ 上的乘积系统结构（参见 [23] 的第4节 (4.3)）。

固定 $i \in I_k$，并令 (u_λ) 为 $\mathcal{A}$ 中的一个压缩近似单位。由于 $(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 是 $\mathbb{E}$ 的完全压缩表示，因此每个算子 $T_i(u_\lambda)$ 都是压缩算子。于是网 $\{T_i(u_\lambda)\}$ 一致有界，我们定义

$$S_i := SOT\text{-}\lim_\lambda T_i(u_\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

极限存在且满足 $\|S_i\| \le 1$。此外，对于每个 $b \in \mathcal{A}$，我们有

$$T_i(u_\lambda)\sigma(b) = T_i(u_\lambda b) \longrightarrow T_i(b) \quad \text{in norm.}$$

取极限得 $T_i(b) = S_i\sigma(b)$ $b \in \mathcal{A}$. 此外，对于所有 a， $b \in \mathcal{A}$，我们计算得

$$S_i\sigma(\alpha_i(b))\sigma(a) = T_i(\alpha_i(b)a) = T_i(\varphi_i(b)a) = \sigma(b)T_i(a) = \sigma(b)S_i\sigma(a).$$

由于 σ 是非退化的，我们得到协变关系

$$\sigma(a)\, S_i = S_i\, \sigma(\alpha_i(a)), \qquad a \in \mathcal{A},\ i = 1, \dots, k. \tag{5.14}$$

令 $a \otimes b \otimes h \in E_i \otimes E_j \otimes \mathcal{H}$。根据 T_i 和 T_j的定义，我们计算得

$$\widetilde{T}_i(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_j)(a \otimes b \otimes h) = T_i(a)T_j(b)h = S_i\sigma(a)\, S_j\sigma(b)h = S_iS_j\, \sigma(\alpha_i(a)b)h.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_j(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i)(t_{ij} \otimes U_{ij})(a \otimes b \otimes h) &= \widetilde{T}_j(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i)\big(\alpha_i^{-1}\alpha_j(a) \otimes b \otimes U_{ij}h\big) \\ &= S_j\sigma(\alpha_i^{-1}\alpha_j(a))\, S_i\sigma(b)\, U_{ij}h \\ &= S_jS_i\, \sigma(\alpha_j(a)b)\, U_{ij}h.\end{aligned}$$

扭曲关系意味着

$$S_iS_j\, \sigma(\alpha_i(a)b)h = S_jS_i\, \sigma(\alpha_j(a)b)\, U_{ij}h, \qquad a, b \in \mathcal{A},\ h \in \mathcal{H}. \tag{5.15}$$

由于 $U_{ij}\, T_\ell = T_\ell\, (I_{E_\ell} \otimes U_{ij})$，对于 i， j， $\ell \in I_k$， $i \ne j$，因此，对于 $a \in E_\ell$和 $h \in \mathcal{H}$，

$$U_{ij}T_\ell(a)h = U_{ij}\, \widetilde{T}_\ell(a \otimes h) = \widetilde{T}_\ell(a \otimes U_{ij}h) = T_\ell(a)\, U_{ij}h.$$

因此，对于所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $h \in \mathcal{H}$， $U_{ij}S_\ell\sigma(a)h = S_\ell\sigma(a)U_{ij}h$. 由于 σ 是非退化的，这意味着 $U_{ij}S_\ell = S_\ell U_{ij}$，对于 $1 \le i \ne j$， $\ell \le k$. 将其与 (5.15) 结合，并再次利用 σ的非退化性，我们得出

$$S_iS_j = S_jS_iU_{ij}, \qquad 1 \le i \ne j \le k.$$

由于 σ 是非退化的，对于 $\mathcal{A}$ 中的任意压缩近似单位 (u_λ)，我们有 $\sigma(u_\lambda) \to I_{\mathcal{H}}$ 在强算子拓扑下收敛。因此， $S_j\sigma(u_\lambda) \to S_j$ 强收敛。在前述关系中取 $\ell = j$，得到 $U_{ij}S_j\sigma(u_\lambda) = S_j\sigma(u_\lambda)U_{ij}$，对于所有 λ. 对两边取强极限，得到$U_{ij}S_j = S_jU_{ij}$. 将其与关系 (5.15) 结合，可得

$$S_iS_j = U_{ij}S_jS_i, \qquad 1 \le i \ne j \le k.$$

回顾一下，对于 $E_j = {}_{\alpha_j}\mathcal{A}$，有如下伴随公式

$$T_{e_j}^*h = \text{SOT-}\lim_\lambda\, \mu_\lambda \otimes S_j^*h, \qquad h \in \mathcal{H},$$

其中 (μ_λ) 是 $\mathcal{A}$ 的压缩近似单位（参见 [23]）。令 $a \in \mathcal{A}$ 和 $h \in \mathcal{H}$。利用 T_j^* 的伴随 $\widetilde{}$ 公式以及 $T_i(a) = S_i\sigma(a)$ 这一事实，我们计算得

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_j^*\widetilde{T}_i(a \otimes h) &= \widetilde{T}_j^*\big(S_i\sigma(a)h\big) \\ &= SOT\text{-}\lim_\lambda \mu_\lambda \otimes S_j^*S_i\sigma(a)h \\ &= SOT\text{-}\lim_\lambda \mu_\lambda \otimes \sigma(\alpha_j\alpha_i^{-1}(a))S_j^*S_ih \\ &= \alpha_j\alpha_i^{-1}(a) \otimes S_j^*S_ih.\end{aligned}$$

接下来，我们计算

$$\begin{aligned}
&(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i)(t_{ij}\otimes U_{ij})(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j^*)(a\otimes h)\\
&\quad=(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i)(t_{ij}\otimes U_{ij})\Big(a\otimes SOT\text{-}\lim_\lambda\mu_\lambda\otimes S_j^*h\Big)\\
&\quad=(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i)\Big(\alpha_i^{-1}\alpha_j(a)\otimes SOT\text{-}\lim_\lambda\mu_\lambda\otimes U_{ij}S_j^*h\Big)\\
&\quad=\alpha_i^{-1}\alpha_j(a)\otimes SOT\text{-}\lim_\lambda\widetilde{T}_i(\mu_\lambda\otimes U_{ij}S_j^*h)\\
&\quad=\alpha_i^{-1}\alpha_j(a)\otimes SOT\text{-}\lim_\lambda T_i(\mu_\lambda)U_{ij}S_j^*h\\
&\quad=\alpha_i^{-1}\alpha_j(a)\otimes S_iU_{ij}S_j^*h.
\end{aligned}$$

双扭关系蕴含

$$S_j^*S_i=S_iU_{ij}S_j^*=U_{ij}^*S_jS_i^*,\qquad 1\le i\ne j\le k.$$

反过来，假设 σ 是 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathcal{A}$ 非退化表示，并且 $S_1,\dots,S_k\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足给定条件。对于 $i\in I_k$，定义算子 $T_i\colon E_i\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如下：

$$T_i(a)=S_i\sigma(a),\qquad a\in E_i={}_{\alpha_i}\mathcal{A}.$$

那么，每个 T_i 都是完全压缩的，并且协变关系 $\sigma(a)T_i(b)=T_i(\varphi_i(a)b)$ 可由 σ 与 S_i 之间的定义关系直接推出。此外，利用 S_i 之间的关系以及映射 t_{ij} 的定义，直接计算可得算子 $(\sigma,T_1,\dots,T_k)$ 满足扭曲（分别地，双扭曲）交换关系。因此，$(\sigma,T_1,\dots,T_k)$ 是乘积系统 $\mathbb{E}$的（双）扭曲表示。□

现在我们给出一个算子 S_i 的具体例子，它满足定理 5.14 的假设。根据该定理，这将得到相关乘积系统的（双）扭曲表示。

例 5.15。 设 $\mathcal{A}=\mathbb{C}^3$ 和 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^3$。对于 $i=12$，定义自同构 $\alpha_i\in Aut(\mathcal{A})$ 如下：

$$\alpha_1(a_1,a_2,a_3)=(a_2,a_3,a_1),\qquad \alpha_2(a_1,a_2,a_3)=(a_3,a_1,a_2).$$

注意， α_1 和 α_2 可交换。考虑表示 σ： $\mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$，其定义为：

$$\sigma(a_1,a_2,a_3)=\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}.$$

定义算子 S_1、$S_2\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如下：

$$S_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad S_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

那么 S_1 和 S_2 是置换矩阵，因而是酉算子。直接计算可得：

$$\sigma(a)S_i=S_i\sigma(\alpha_i(a)),\qquad a\in\mathcal{A},\ i=1,2.$$

此外， $S_1S_2=S_2S_1=I$。由于 S_1 和 S_2 可交换且是酉算子，因此可得 $S_2^*S_1=S_1S_2^*$。因此，数对 (S_1,S_2) 连同 σ 满足定理 *5.14* 的所有假设（其中$U_{12}=I$），从而确定了相关乘积系统$\mathbb{E}$的一个（双重）扭曲表示。

回忆一下，复数域中的单位多圆盘为 $\mathbb{D}^k := \{z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k : |z_i| < 1,\ 1 \le i \le k\}$. 对于希尔伯特空间 $\mathcal{D}$，多圆盘 $\mathbb{D}^k$上的 $\mathcal{D}$-值哈代空间 $k \ge 1$ 为

$$H^2_{\mathcal{D}}(\mathbb{D}^k) = H^2(\mathbb{D}^k) \otimes \mathcal{D} = \left\{ f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^k} z^n \eta_n : \eta_n \in \mathcal{D},\ \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^k} \|\eta_n\|^2 < \infty \right\}.$$

单项式 $\{z^n \eta : n \in \mathbb{Z}_+^k,\quad \eta \in \mathcal{D}\}$ 构成 $H^2_{\mathcal{D}}(\mathbb{D}^k)$ 的标准正交基。

例5.16。 固定 $\lambda \in \mathbb{T}$，并通过下式定义 $D[\lambda] \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$：

$$D[\lambda] z^m = \lambda^m z^m \qquad (m \in \mathbb{Z}_+).$$

考虑希尔伯特空间 $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D}^2) \oplus H^2(\mathbb{D}^2)$，以及作用在 $\mathcal{H}$ 上的等距算子 $V_1 = \mathrm{diag}(M_z \otimes I_{H^2(\mathbb{D})},\ D[\lambda] \otimes M_z)$ 和 $V_2 = \mathrm{diag}(D[\lambda] \otimes M_z, M_z \otimes I_{H^2(\mathbb{D})})$。那么 (V_1, V_2) 是 $\mathcal{H}$ 上的双重扭曲等距算子，其中$U = \mathrm{diag}(\bar{\lambda} I_{H^2(\mathbb{D}^2)},\ \lambda I_{H^2(\mathbb{D}^2)})$ （见 [18, 例2.1]）。

令 $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$。定义自同构 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 为

$$\alpha_1(a) = U_1 a U_1^*, \quad \alpha_2(a) = U_2 a U_2^*,$$

其中

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $\mathcal{K} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$。定义一个表示 $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 为 $\sigma(a) = a \otimes I$。此外，定义

$$S_1 := U_1 \otimes V_1, \text{ and } S_2 := U_2 \otimes V_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}).$$

显然，每个 S_i 都是等距算子。令 $W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，则

$$S_1 S_2 = (U_1 \otimes V_1)(U_2 \otimes V_2) = U_1 U_2 \otimes V_1 V_2 = W U_2 U_1 \otimes U V_2 V_1 = (W \otimes U) S_2 S_1.$$

And

$$S_1^* S_2 = (U_1 \otimes V_1)^* (U_2 \otimes V_2) = U_1^* U_2 \otimes V_1^* V_2 = W U_2 U_1^* \otimes U^* V_2 V_1^* = (W \otimes U)^* S_2 S_1^*.$$

因此，二元组 (S_1, S_2) 是 $\mathcal{H}$ 上的双重扭曲等距算子，对应的扭曲为 $W \otimes U$.此外， $\sigma(a) S_i = a U_i \otimes V_i$，且 $S_i \sigma(\alpha_i(a)) = U_i \alpha_i(a) \otimes V_i = U_i U_i a U_i^* \otimes V_i = a U_i \otimes V_i$，其中最后一个等式是因为 $U_i^2 = I$和 $U_i^* = U_i$。因此，协变关系 $\sigma(a) S_i = S_i \sigma(\alpha_i(a))$成立。由此，该例构造出了乘积系统 $\mathbb{E}$的一个非平凡双重扭曲表示。

在定理 5.14 的设定下，存在一个相对于扭曲 $\{t_{ij} \otimes U_{ij}\}_{i \ne j}$的双重扭曲表示$(\sigma,\ T_1,\ \dots\dots,\ T_k)$，等价于存在如定理所述的压缩算子 $S_1,\ \dots\dots,\ S_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，且满足 $T_i(a) = S_i \sigma(a)$。现在我们证明，如果该双重扭曲表示是等距的，那么它就具有显式的哈代空间模型，并可恢复 [18]的分解。

定理 5.17。 假设定理 *5.14* 的设定成立。那么，$(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 是关联的自同构乘积系统 $\mathbb{E}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个相对于扭曲 $\{t_{ij} \otimes U_{ij}\}_{i \ne j}$ 的双重扭曲等距表示，当且仅当存在一个正交分解 $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_B$$^{B \subseteq I_k}$

以及一个酉算子 $\pi :\ \mathcal{H} \longrightarrow \bigoplus_{B \subseteq I_k} H^2_{\mathcal{D}_B}(\mathbb{D}^{|B|})$ 使得该元组

$$(M_1, \dots, M_k) := (\pi S_1 \pi^*, \dots, \pi S_k \pi^*)$$

是 [18, 命题 43] 中所述的双扭曲模型元组，并且对于 $\sigma'(a)\colon = \pi\sigma(a)\pi^*$，有

$$\sigma'(a)M_i = M_i\sigma'(\alpha_i(a)), \qquad a \in \mathcal{A},\ i \in I_k.$$

证明。假设该表示是等距的。根据定理 5.14，存在压缩算子$S_1, \dots, S_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得对所有 $a \in \mathcal{A}$和 $i \neq j$,

$$\sigma(a)S_i = S_i\sigma(\alpha_i(a)), \quad S_iS_j = U_{ij}S_jS_i, \quad S_i^*S_j = U_{ij}^*S_jS_i^*.$$

由于 $(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 是等距的，每个 S_i都是等距算子，因此 $(S_1, \dots, S_k)$ 是一个 k-元组，由 [18] 意义下的双扭曲等距算子组成。根据 [18, 定理 3.6], $\mathcal{H}$ 有一个正交分解$\mathcal{H} = \bigoplus_{B\subseteq I_k} \mathcal{H}_B$，其中

$$\mathcal{H}_B = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+^{|B|}} S_B^n(\mathcal{D}_B), \qquad \mathcal{D}_B = \bigcap_{l\in\mathbb{Z}_+^{k-|B|}} S_{I_k\setminus B}^l\Big(\bigcap_{i\in B} \ker S_i^*\Big),$$

并且对每个 $B \subseteq I_k$，都存在一个酉算子 $\pi_B : \mathcal{H}_B \to H^2_{\mathcal{D}_B}(\mathbb{D}^{|B|})$，使得对所有$\eta \in \mathcal{D}_B$，$\pi_B(S_B^n\eta) = z^n\eta$。令 $B = \{p_1, \dots, p_m\}$和 $B^c = \{q_1, \dots, q_{k-m}\}$。在 $H^2_{\mathcal{D}_B}(\mathbb{D}^{|B|})$ 上定义 $M_{B,t}$如下:

$$M_{B,t} = \begin{cases} M_{z_1}, & t = p_1, \\ M_{z_i}\, D_1[U_{p_ip_1}]\cdots D_{i-1}[U_{p_ip_{i-1}}], & t = p_i,\ 1 < i \leq m, \\ D_1[U_{q_jp_1}]\cdots D_m[U_{q_jp_m}]\big(I_{H^2(\mathbb{D}^m)} \otimes (S_{q_j}|_{\mathcal{D}_B})\big), & t = q_j,\ 1 \leq j \leq k-m. \end{cases} \tag{5.16}$$

根据 [18, 命题 4.3], $S|_{\mathcal{H}_B}$与 $(M_{B,\ 1},\ \dots\dots,\ M_{B,\ k})$ 酉等价。令 $M_i := \bigoplus_{B\subseteq I_k} M_{B,\ i}$和

$\pi := \bigoplus_{B} \pi_B$。那么，对所有 i，$\pi S_i = M_i\pi$。定义 $\sigma'(a) := \pi\sigma(a)\pi^*$。利用 $\sigma(a)S_i = S_i\sigma(\alpha_i(a))$, 我们得到

$$\sigma'(a)M_i = \pi\sigma(a)\pi^*M_i = \pi\sigma(a)S_i\pi^* = \pi S_i\sigma(\alpha_i(a))\pi^* = M_i\,\pi\sigma(\alpha_i(a))\pi^* = M_i\sigma'(\alpha_i(a)),$$

这就证明了我们的断言。反向结论由定理 5.14 得出。 □

6. The Wold Decomposition

给定希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的一个 C^*-对应 E 的等距的 协变表示 $(\sigma,\ T)$，存在一个分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$，其中 $(\sigma,\ \widetilde{T})\big|_{\mathcal{H}_1}$ 是诱导协变表示，而 $(\sigma,\ \widetilde{T})\big|_{\mathcal{H}_2}$是完全余等距的。令 $\mathcal{W}:=\mathrm{Ran}\left(I - \widetilde{T}\widetilde{T}^*\right)$.那么，根据定理 2.5，我们有

$$P_{\mathcal{H}_1} = \text{SOT-}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{T}^{(n)}(I_{E^{(n)}} \otimes P_{\mathcal{W}})\widetilde{T}^{(n)*}, \qquad P_{\mathcal{H}_2} = \text{SOT-}\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}^{(n)}\widetilde{T}^{(n)*}. \tag{6.1}$$

现在考虑在 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathbb{E}$ 的双重扭曲等距协变表示（$\sigma,\ T^{(1)},\ \dots,\ T^{(k)}$）。那么，根据定理 4.6，这个表示具有 Wold 型分解，即 $\mathcal{H} = \bigoplus_{A\subseteq I_k} \mathcal{H}_A$.

现在我们着重描述与每个子空间 $\mathcal{H}_A$ 相对应的表示。对于每个 $i \in I_k$，定义

$$\mathcal{W}_i := \mathrm{Ran}\left(I - \widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*\right).$$

令 $P_{\mathcal{W}_i} := I - T_iT_i^*$ 表示到 $\mathcal{W}_i$ 上的正交投影。

Lemma 6.1. 族 $\{P_{\mathcal{W}_i}\}_{i\in I_k}$ 由互相交换的正交投影组成 .

证明。 对于 $i,\ j\in I_k$，由扭曲关系和双重扭曲关系可得

$$\begin{aligned}(\widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*)(\widetilde{T}_j\widetilde{T}_j^*) &= \widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j)(t_{ji}\otimes U_{ji})(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i^*)\widetilde{T}_j^*\\ &= \widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i)(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i^*)\widetilde{T}_j^*\\ &= \widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i)(t_{ij}\otimes U_{ij})(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j^*)\widetilde{T}_i^*\\ &= (\widetilde{T}_j\widetilde{T}_j^*)(\widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*).\end{aligned}$$

因此，投影 $P_{\mathcal{W}_i}=I-T_iT_i^*$两两交换:

$$(I-\widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*)(I-\widetilde{T}_j\widetilde{T}_j^*)=(I-\widetilde{T}_j\widetilde{T}_j^*)(I-\widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*).$$ □

令 $\mathcal{W}_\varnothing=\mathcal{H}$。对于每个非空子集 $A\subseteq I_k$，由上述引理可定义

$$\mathcal{W}_A:=\mathrm{Ran}\left(\prod_{i\in A}(I-\widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*)\right)=\bigcap_{i\in A}\mathrm{Ran}(I-\widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*)=\bigcap_{i\in A}\mathcal{W}_i,\qquad P_{\mathcal{W}_A}=\prod_{i\in A}P_{\mathcal{W}_i}. \tag{6.2}$$

为了分析子空间 $\mathcal{H}_A$的结构，我们首先注意到，若 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{H}$的一个闭子空间，并且该闭子空间约化（见定义 2.8 ） $\sigma,\ T_1,\ \ldots,\ T_k$ 在 $\mathcal{H}$ 上的双扭协变表示 $\mathbb{E}$，则限制元组 $\sigma,\ T_1,\ \ldots,\ T_k|_{\mathcal{K}}$ 仍然是 $\mathcal{K}$上的 $\mathbb{E}$ 的双扭协变表示。此外，由于 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}^\perp$ 在每个算子 $T_i(\xi_i)$下均左不变，对于 $i\in I_k$ 和 $\xi_i\in E_i$，因此可得

$$\widetilde{T}_i^*\mathcal{K}\subseteq E_i\otimes\mathcal{K},\qquad \widetilde{T}_i^*\mathcal{K}^\perp\subseteq E_i\otimes\mathcal{K}^\perp.$$

此外，扭曲关系给出 $t_{ij}\otimes U_{ij}=(I_{E_j}\otimes T_i^*)\ T_j^*\ T_i\ (I_{E_i}\otimes T_j)$。 因此，若 $\mathcal{K}$约化 $(\sigma,\ T_1,\ \ldots\ldots,\ T_k)$，则

$$(t_{ij}\otimes U_{ij})(E_i\otimes E_j\otimes\mathcal{K})\subseteq E_j\otimes E_i\otimes\mathcal{K},\quad (t_{ij}\otimes U_{ij})(E_i\otimes E_j\otimes\mathcal{K}^\perp)\subseteq E_j\otimes E_i\otimes\mathcal{K}^\perp. \tag{6.3}$$

引理 6.2。 设 $A\subsetneq I_k$。则对于每个 $j\in A^{\mathrm{c}},\ \mathcal{W}_A$ 约化 T_j 。

证明。 对于 $i\in A$ 和 $j\in A^{\mathrm{c}}$，双重扭曲关系给出

$$(\widetilde{T}_i\widetilde{T}_i^*)\widetilde{T}_j=\widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j)(t_{ji}\otimes U_{ji})(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i^*)=\widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i)(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i^*).$$

因此 $\mathcal{W}_A$ 约化 T_j，因为 ， $P_{\mathcal{W}_i}T_j=T_j(I_{E_j}\otimes P_{\mathcal{W}_i})$，且由方程 (6.2) 可知,

$$P_{\mathcal{W}_A}\widetilde{T}_j=\widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes P_{\mathcal{W}_A}). \tag{6.4}$$

□

对于定义在 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathbb{E}$ 的双重扭曲等距表示 $(\sigma,\ T_1,\ \ldots\ldots,\ T_k)$，设 $\mathcal{H}_i^1$ 和 $\mathcal{H}_i^2$ 为约化子空间，使得 $(\sigma,\ T_i)|_{\mathcal{H}_i^1}$ 是诱导协变表示，而 $(\sigma,\ T_i)|_{\mathcal{H}_i^2}$ 是完全余等距的。于是我们有:

引理 6.3。 设 A 是 I_k 的一个非空真子集。那么，对于每个 $j\in A^c$ ，

$$P_{\mathcal{H}_j^1},\ P_{\mathcal{H}_j^2}\in\{P_{\mathcal{W}_A}\}'.$$

证明。 由等式 6.4 可知，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $j \in A^c$,

$$P_{\mathcal{W}_A}\widetilde{T}_j^{(n)} = \widetilde{T}_j^{(n)}\left(I_{E_j^n} \otimes P_{\mathcal{W}_A}\right), \text{ and } \widetilde{T}_j^{(n)*}P_{\mathcal{W}_A} = \left(I_{E_j^n} \otimes P_{\mathcal{W}_A}\right)\widetilde{T}_j^{(n)*}. \tag{6.5}$$

因此,

$$\widetilde{T}_j^{(n)}\widetilde{T}_j^{(n)*}P_{\mathcal{W}_A} = \widetilde{T}_j^{(n)}\left(I_{E_j^n} \otimes P_{\mathcal{W}_A}\right)\widetilde{T}_j^{(n)*} = P_{\mathcal{W}_A}\widetilde{T}_j^{(n)}\widetilde{T}_j^{(n)*}.$$

(6.1) 意味着 $P_{\mathcal{H}_j^2} \in \{P_{\mathcal{W}_A}\}'$。由于 $P_{\mathcal{H}_j^1} = I - P_{\mathcal{H}_j^2}$，可推出 $P_{\mathcal{H}_j^1} \in \{P_{\mathcal{W}_A}\}'$. □

引理 6.4。 对于任意 i、$j \in I_k$，有 $P_{\mathcal{H}_i^1}P_{\mathcal{H}_j^2} = P_{\mathcal{H}_j^2}P_{\mathcal{H}_i^1}$.

证明。 对于每个 $i \in I_k$，显然 $P_{\mathcal{H}_i^1}P_{\mathcal{H}_i^2} = 0 = P_{\mathcal{H}_i^2}P_{\mathcal{H}_i^1}$. 假设 $i \neq j$。根据定理 4.6，元组 $(\sigma, T^{(1)}, \ldots\ldots, T^{(k)})$ 存在沃尔德分解。于是，定理 3.2 表明 $\mathcal{H}_j^1$ 约化 $\widetilde{T}_i$；也就是说，$P_{\mathcal{H}_j^1}T_i = T_i(I_{E_i} \otimes P_{\mathcal{H}_j^1})$。因此，对于任意 $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$P_{\mathcal{H}_j^1}\widetilde{T}_i^{(m)} = \widetilde{T}_i^{(m)}\left(I_{E_i^m} \otimes P_{\mathcal{H}_j^1}\right), \qquad \widetilde{T}_i^{(m)*}P_{\mathcal{H}_j^1} = \left(I_{E_i^m} \otimes P_{\mathcal{H}_j^1}\right)\widetilde{T}_i^{(m)*}. \tag{6.6}$$

利用（6.1）和（6.6），结合引理 6.3，我们得到

$$P_{\mathcal{H}_i^1}P_{\mathcal{H}_j^1} = \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} \widetilde{T}_i^{(m)}(I_{E_i^m} \otimes P_{\mathcal{W}_i})\widetilde{T}_i^{(m)*}\right)P_{\mathcal{H}_j^1} = P_{\mathcal{H}_j^1}P_{\mathcal{H}_i^1}.$$

类似的论证可得 $P_{\mathcal{H}_i^1}P_{\mathcal{H}_j^2} = P_{\mathcal{H}_j^2}P_{\mathcal{H}_i^1}$，以及 $P_{\mathcal{H}_i^2}P_{\mathcal{H}_j^2} = P_{\mathcal{H}_j^2}P_{\mathcal{H}_i^2}$. □

回忆引理 4.5 的（1）指出，对于所有的 i，j，$m \in I_k$ 满足 $i \neq j$，且对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，$U_{ij}\widetilde{T}^{(n)}_m = \widetilde{T}^{(n)m}_m(I_{E_m^n} \otimes U_{ij})$。这进一步意味着 $\widetilde{T}_m^{(n)*}U_{ij} = (I_{E_m^n} \otimes U_{ij})\widetilde{T}_m^{(n)*}$.。此外，对于 m，$n \in \mathbb{Z}_+$，回忆映射 $t_{ij}^{(m,n)}$ (5.2)，它将 $E_i^m \otimes E_j^n$ 翻转为 $E_j^n \otimes E_i^m$.

引理 6.5. 设 $(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 是乘积系统 $\{E_i\}_{i=1}^k$ 的双重扭曲表示。对于 $i \neq j$ 和 $p, q \in \mathbb{Z}_+$,

$$\widetilde{T}_i^{(p)*}\widetilde{T}_j^{(q)} = \left(I_{E_i^p} \otimes \widetilde{T}_j^{(q)}\right)\left(t_{ji}^{(q,p)} \otimes U_{ji}^{qp}\right)\left(I_{E_j^q} \otimes \widetilde{T}_i^{(p)*}\right). \tag{6.7}$$

证明。 我们对 $r(p, q)$ 使用归纳法证明 (6.7) 中的恒等式：$= p + q$. 若 $p = 0$ 或 $q = 0$，则该恒等式显然成立，因为 $t_{ji}^{(q,0)} = I_{E_j^q}$, $U_{ji}^{q0} = I$, $t_{ji}^{(0,p)}$ 同理。当 $p = q = 1$ 时，该命题化为定义性的扭曲协变关系：

$$\widetilde{T}_i^*\widetilde{T}_j = \left(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_j\right)(t_{ji} \otimes U_{ji})\left(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i^*\right).$$

假设对于每一对 (p', q')（其中 $r(p', q') < r(p, q)$），(6.7) 均成立。我们讨论 $p \geq 1$ 的情形；$q \geq 1$ 的情形是对称的。由于 $E_i^p = E_i \otimes E_i^{p-1}$, $\widetilde{T}_i^{(p)*} = \left(I_{E_i^{p-1}} \otimes \widetilde{T}_i^*\right)\widetilde{T}_i^{(p-1)*}$. 对这对 $(p-1, q)$ 应用归纳假设：

$$\widetilde{T}_i^{(p-1)*}\widetilde{T}_j^{(q)} = \left(I_{E_i^{p-1}} \otimes \widetilde{T}_j^{(q)}\right)\left(t_{ji}^{(q,p-1)} \otimes U_{ji}^{q(p-1)}\right)\left(I_{E_j^q} \otimes \widetilde{T}_i^{(p-1)*}\right).$$

代入该式并利用公式（5.3）可得

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{T}_i^{(p)*}\widetilde{T}_j^{(q)}\\
&=\left(I_{E_i^{p-1}}\otimes\widetilde{T}_i^{*}\right)\left(I_{E_i^{p-1}}\otimes\widetilde{T}_j^{(q)}\right)\left(t_{ji}^{(q,p-1)}\otimes U_{ji}^{q(p-1)}\right)\left(I_{E_j^q}\otimes\widetilde{T}_i^{(p-1)*}\right)\\
&=\left(I_{E_i^{p}}\otimes\widetilde{T}_j^{(q)}\right)\left(I_{E_i^{p-1}}\otimes t_{ji}^{(q,1)}\otimes U_{ji}^{q}\right)\left(I_{E_i^{p-1}\otimes E_j^q}\otimes\widetilde{T}_i^{*}\right)\left(t_{ji}^{(q,p-1)}\otimes U_{ji}^{q(p-1)}\right)\left(I_{E_j^q}\otimes\widetilde{T}_i^{(p-1)*}\right)\\
&=\left(I_{E_i^{p}}\otimes\widetilde{T}_j^{(q)}\right)\left(I_{E_i^{p-1}}\otimes t_{ji}^{(q,1)}\otimes U_{ji}^{q}\right)\left(t_{ji}^{(q,p-1)}\otimes I_{E_i}\otimes U_{ji}^{q(p-1)}\right)\left(I_{E_j^q\otimes E_i^{p-1}}\otimes\widetilde{T}_i^{*}\right)\left(I_{E_j^q}\otimes\widetilde{T}_i^{(p-1)*}\right)\\
&=\left(I_{E_i^{p}}\otimes\widetilde{T}_j^{(q)}\right)\left(t_{ji}^{(q,p)}\otimes U_{ji}^{qp}\right)\left(I_{E_j^q}\otimes\widetilde{T}_i^{(p)*}\right).
\end{aligned}
$$

□

Lem命题 6.6。 令 $A\subseteq I_k$ 非空，且 $m=(m_1、\ m_2、\ldots、\ m_{|A|})\in\mathbb{Z}_+^{|A|}$。 n

$$\prod_{i\in A}\left(\widetilde{T}_i^{(m_i)}(I_{E_i^{m_i}}\otimes P_{\mathcal{W}_i})\widetilde{T}_i^{(m_i)*}\right)\ =\ \widetilde{T}_A^{(m)}\left(I_{E_A^m}\otimes P_{\mathcal{W}_A}\right)\widetilde{T}_A^{(m)*}.$$

证明。 我们对 $A=\{i,j\}$ 证明该结果；一般情形由归纳法得出。固定 $m=(m_i,m_j)\in\mathbb{Z}_+^2$。我们需要证明

$$\left(\widetilde{T}_i^{(m_i)}(I_{E_i^{m_i}}\otimes P_{\mathcal{W}_i})\widetilde{T}_i^{(m_i)*}\right)\left(\widetilde{T}_j^{(m_j)}(I_{E_j^{m_j}}\otimes P_{\mathcal{W}_j})\widetilde{T}_j^{(m_j)*}\right)=\widetilde{T}_A^{(m)}(I_{E_A^m}\otimes P_{\mathcal{W}_A})\widetilde{T}_A^{(m)*}.$$

令 **X** 表示上述等式的左端。根据引理 6.5,

$$
\begin{aligned}
X&=\widetilde{T}_i^{(m_i)}\left(I_{E_i^{m_i}}\otimes P_{\mathcal{W}_i}\right)\left(I_{E_i^{m_i}}\otimes\widetilde{T}_j^{(m_j)}\right)\left(t_{ji}^{(m_j,m_i)}\otimes U_{ji}^{m_jm_i}\right)\left(I_{E_j^{m_j}}\otimes\widetilde{T}_i^{(m_i)*}\right)\left(I_{E_j^{m_j}}\otimes P_{\mathcal{W}_j}\right)\widetilde{T}_j^{(m_j)*}\\
&=\widetilde{T}_A^{(m)}\left(I_{E_A^m}\otimes P_{\mathcal{W}_i}\right)\left(t_{ji}^{(m_j,m_i)}\otimes U_{ji}^{m_jm_i}\right)\left(I_{E_j^{m_j}}\otimes\widetilde{T}_i^{(m_i)*}\right)\left(I_{E_j^{m_j}}\otimes P_{\mathcal{W}_j}\right)\widetilde{T}_j^{(m_j)*}\quad\text{(by (6.5))}\\
&=\widetilde{T}_A^{(m)}\left(I_{E_A^m}\otimes P_{\mathcal{W}_i}\right)\left(t_{ji}^{(m_j,m_i)}\otimes U_{ji}^{m_jm_i}\right)\left(I_{E_j^{m_j}\otimes E_i^{m_i}}\otimes P_{\mathcal{W}_j}\right)\left(I_{E_j^{m_j}}\otimes\widetilde{T}_i^{(m_i)*}\right)\widetilde{T}_j^{(m_j)*}\quad\text{(by (6.5))}\\
&=\widetilde{T}_A^{(m)}\left(I_{E_A^m}\otimes P_{\mathcal{W}_i}\right)\left(t_{ji}^{(m_j,m_i)}\otimes U_{ji}^{m_jm_i}\right)\left(I_{E_j^{m_j}\otimes E_i^{m_i}}\otimes P_{\mathcal{W}_j}\right)\left(\widetilde{T}_j^{(m_j)}(I_{E_j^{m_j}}\otimes\widetilde{T}_i^{(m_i)})\right)^*\\
&=\widetilde{T}_A^{(m)}\left(I_{E_A^m}\otimes P_{\mathcal{W}_i}\right)\left(t_{ji}^{(m_j,m_i)}\otimes U_{ji}^{m_jm_i}\right)\left(I_{E_j^{m_j}\otimes E_i^{m_i}}\otimes P_{\mathcal{W}_j}\right)\left(t_{ji}^{m_jm_i}\otimes U_{ji}^{m_jm_i}\right)^*\left(\widetilde{T}_A^{(m)*}\right)\\
&=\widetilde{T}_A^{(m)}\left(I_{E_A^m}\otimes P_{\mathcal{W}_i}\right)\left(I_{E_A^m}\otimes P_{\mathcal{W}_j}\right)(\widetilde{T}_A^{(m)*})\qquad\text{(Lemma 4.5)}\\
&=\widetilde{T}_A^{(m)}(I_{E_A^m}\otimes P_{\mathcal{W}_A})(\widetilde{T}_A^{(m)*})\quad\text{(by (6.2))}.
\end{aligned}
$$

因此，所需等式成立。 □

引理 6.7。 设 $\mathcal{S}$ 是 $(\sigma,T_1,\ldots,T_k)$ 的约化子空间。那么

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+^{|A|}}\widetilde{T}_A^{(m)}(I_{E_A^m}\otimes\mathcal{S})=\bigcap_{i\in A}\bigcap_{m_i\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{T}_i^{(m_i)}(I_{E_i^{m_i}}\otimes\mathcal{S}).$$

证明。 只需证明 $A=\{1,2\}$ 的情形；一般情形可由归纳法得出。设 (σ,T_1,T_2) 是一个扭曲为 U 的双重扭曲表示。由 (6.3),

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+^{|A|}}\widetilde{T}_A^{(m)}\left(I_{E_A^m}\otimes\mathcal{S}\right)\subseteq\bigcap_{i\in A}\bigcap_{m_i\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{T}_i^{(m_i)}\left(I_{E_i^{m_i}}\otimes\mathcal{S}\right).$$

对于反向包含，取

$$y\in\left(\bigcap_{m_1\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{T}_1^{(m_1)}\left(I_{E_1^{m_1}}\otimes\mathcal{S}\right)\right)\cap\left(\bigcap_{m_2\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{T}_2^{(m_2)}\left(I_{E_2^{m_2}}\otimes\mathcal{S}\right)\right).$$

那么，对于 $m=(m_1,\ m_2)\in\mathbb{Z}_+^2$，存在 $e_i\in E_i^{m_i}$ 和 $x_i\in\mathcal{S}$，使得 $y=\widetilde{T}_{(m_1)1}(e_1\otimes x_1)=\widetilde{T}_{2}^{(m_2)}(e_2\otimes x_2)$。因此，引理 6.5 表明

$$e_1\otimes x_1=\widetilde{T}_1^{(m_1)*}\widetilde{T}_2^{(m_2)}(e_2\otimes x_2)=\left(I_{E_1^{m_1}}\otimes\widetilde{T}_2^{(m_2)}\right)\left(t_{21}^{(m_2,m_1)}\otimes U_{21}^{m_2m_1}\right)\left(I_{E_2^{m_2}}\otimes\widetilde{T}_1^{(m_1)*}\right)(e_2\otimes x_2).$$

由于 $\mathcal{S}$约化 $\widetilde{T}_1$, $\left(I_{E_2^{m_2}}\otimes\widetilde{T}^{(m_1)}{}_1{}^{*}\right)(e_2\otimes x_2)\in E_2^{m_2}\otimes E_1^{m_1}\otimes\mathcal{S}$. 由 (6.3),

$$\left(t_{21}^{(m_2,m_1)}\otimes U_{21}^{m_2m_1}\right)\left(I_{E_2^{m_2}}\otimes\widetilde{T}_1^{(m_1)*}\right)(e_2\otimes x_2)\in E_1^{m_1}\otimes E_2^{m_2}\otimes\mathcal{S}.$$

令该元素为 $\eta\otimes x$，其中 $\eta\in E_1^{m_1}\otimes E_2^{m_2}$ 和 $x\in\mathcal{S}$。那么

$$y=\widetilde{T}_1^{(m_1)}\left(I_{E_1^{m_1}}\otimes\widetilde{T}_2^{(m_2)}\right)(\eta\otimes x)=\widetilde{T}_A^{(m)}(\eta\otimes x).$$

由于 m 是任意的，因此，$y\in\bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+^2}\widetilde{T}_A^{(m)}\left(I_{E_A^m}\otimes\mathcal{S}\right)$. 于是,

$$\bigcap_{i\in A}\bigcap_{m_i\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{T}_i^{(m_i)}\left(I_{E_i^{m_i}}\otimes\mathcal{S}\right)\subseteq\bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+^{|A|}}\widetilde{T}_A^{(m)}\left(I_{E_A^m}\otimes\mathcal{S}\right).$$

□

定理 4.6 保证了希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上任意双重扭曲等距协变表示 $(\sigma,T_1,\ldots,T_k)$ 都存在 Wold 分解 $\mathcal{H}=\bigoplus$。现在我们来描述 Wold 分解 $\mathcal{H}=\bigoplus_{A\subseteq I_k}\mathcal{H}_A$ 中直和项 $\mathcal{H}_A$ 的表示.

定理 6.8。 对于每个子集 $A\subseteq I_k$，我们有

$$\mathcal{H}_A=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}}\widetilde{T}_A^{(n)}\left(I_{E_A^n}\otimes\bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+^{k-|A|}}\widetilde{T}_{I_k\setminus A}^{(m)}\left(I_{E_{I_k\setminus A}^m}\otimes\mathcal{W}_A\right)\right).$$

证明。 由 (3.1) 可得 $\mathcal{H}_A=\left[\bigcap_{i\in A}\mathcal{H}_i^1\right]\cap\left[\bigcap_{j\in A^c}\mathcal{H}_j^2\right]$. 取 I_k 的一个非空子集 A，由引理 6.4 可得

$$\mathcal{H}_A=\left(\prod_{i\in A}P_{\mathcal{H}_i^1}\right)\left(\prod_{j\in A^c}P_{\mathcal{H}_j^2}\right)\mathcal{H}.$$

对于每个 $i \in A$,

$$\begin{aligned}\prod_{i\in A} P_{\mathcal{H}_i^1} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} \prod_{i\in A} \widetilde{T}_i^{(n_i)} \left(I_{E_i^{n_i}} \otimes P_{\mathcal{W}_i}\right) \widetilde{T}_i^{(n_i)*} \qquad \text{(by (6.1))} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} \widetilde{T}_A^{(n)} \left(I_{E_A^n} \otimes P_{\mathcal{W}_A}\right) \widetilde{T}_A^{(n)*} \qquad \text{(by Lemma 6.6).}\end{aligned}$$

若 $A = I_k$, 则 $\mathcal{H}_{I_k} = \prod_{i\in I_k} P_{\mathcal{H}_i^1}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+^k} \widetilde{T}_{(n)}(I_{E^n} \otimes \mathcal{W}_{I_k})$。

现在假设 $A \subsetneq I_k$。则

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i\in A} P_{\mathcal{H}_i^1}\right)\left(\prod_{j\in A^c} P_{\mathcal{H}_j^2}\right) &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} \widetilde{T}_A^{(n)} \left(I_{E_A^n} \otimes P_{\mathcal{W}_A}\right) \widetilde{T}_A^{(n)*}\right) \prod_{j\in A^c} P_{\mathcal{H}_j^2} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} \widetilde{T}_A^{(n)} \left(I_{E_A^n} \otimes P_{\mathcal{W}_A}\right) \left(I_{E_A^n} \otimes \prod_{j\in A^c} P_{\mathcal{H}_j^2}\right) \widetilde{T}_A^{(n)*} \quad \text{(by (6.6))} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} \widetilde{T}_A^{(n)} \left(I_{E_A^n} \otimes \prod_{j\in A^c} P_{\mathcal{H}_j^2}\right) \left(I_{E_A^n} \otimes P_{\mathcal{W}_A}\right) \widetilde{T}_A^{(n)*} \quad \text{(by Lemma 6.3).}\end{aligned}$$

因此，引理 6.7 蕴含

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} \widetilde{T}_A^{(n)} \left(I_{E_A^n} \otimes \left(\prod_{j\in A^c} P_{\mathcal{H}_j^2}\right)(P_{\mathcal{W}_A})\right)\right)\mathcal{H} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} \widetilde{T}_A^{(n)} \left(I_{E_A^n} \otimes \bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+^{k-|A|}} \widetilde{T}_{I_k\setminus A}^{(m)} \left(I_{E_{I_k\setminus A}^m} \otimes \mathcal{W}_A\right)\right).\end{aligned}$$

最后，当 $A = \emptyset$、$\mathcal{W}_A = \mathcal{H}$ 时，因而 $\mathcal{H}_\emptyset = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+^k} \widetilde{T}^{(m)}(I_{E^m} \otimes \mathcal{H})$。 □

设 $\mathcal{D}_A :=$ $\bigcap$ $\widetilde{T}_{I_k\setminus A}^{(m)} \left(I_{E_{I_k\setminus A}^m} \otimes \mathcal{W}_A\right)$.，则上述定理使我们能够表示$^{m\in\mathbb{Z}_+^{k-|A|}}$

$$\mathcal{H}_A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}} \widetilde{T}_A^{(n)} \left(I_{E_A^n} \otimes \mathcal{D}_A\right).$$

Wold 分解（定理 3.1）确保每个$\mathcal{H}_A$ 约化 σ（$\mathcal{A}$） .

7. Model Operators on the Fock Space

回顾单变量情形，设 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个等距算子。那么，根据经典的沃尔德分解，我们有正交分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\{1\}} \oplus \mathcal{H}_{\emptyset}$，其中 $\mathcal{H}_{\{1\}} = \bigoplus V^j(\ker V^*)$，$j=0\infty$以及 $\mathcal{H}_{\emptyset} = \bigcap V^j\mathcal{H}$. 令 $\mathcal{W} = \ker V^*$. 。利用典范酉算子 $\Pi : \mathcal{H}_{\{1\}} \longrightarrow H^2_{\mathcal{W}}(\mathbb{D})$ $\Pi(V^m\eta) = j=0 z^m\eta$，$m \in \mathbb{Z}_+$，$\eta \in \mathcal{W}$，我们得到交织关系 $\Pi\, V|_{\mathcal{H}_{\{1\}}} = M_z\Pi$. 这展示了希尔伯特空间上等距算子的经典模型，其中沃尔德分解将移位算子部分与酉部分分离。

给定乘积系统$\mathbb{E}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的双重扭曲等距协变表示 $(\sigma, T_1, \ldots\ldots, T_k)$，我们得到 Wold 型正交分解。类似地，对于多变量双重扭曲表示，如果将其限制到 $(\sigma, T_1, \ldots\ldots, T_k)|_{\mathcal{H}_A}$，我们再次得到一个双重扭曲等距协变表示，使得 $(\sigma, T_i)|_{\mathcal{H}_A}$ 对于 $i \in A$ 是诱导的，而 $(\sigma, T_j)|_{\mathcal{H}_A}$ 对于 $j \in A^c$ 是完全余等距的。本节旨在为每个这样的直和项构造一个酉等价模型，该模型由作用在相应福克空间上的创造算子（对应于诱导部分）和酉算子（对应于余等距部分）组成。

为了在福克空间上构造模型算子，我们首先定义几个关键映射，并证明若干引理。

引理 7.1。 设 i，j，$l \in I_k$ 满足 $i \neq j$. 则对于任意 m，$n \in \mathbb{Z}_+$，$U_{ij}^n \widetilde{T}_l^{(m)} = \widetilde{T}($

$_l{}^m \left(I_{E_l^m} \otimes U_{ij}^n\right)$.)

证明。 我们分两个阶段进行。对于每个固定的 $n \in \mathbb{Z}_+$，首先证明

$$U_{ij}^n \widetilde{T}_l = \widetilde{T}_l \left(I_{E_l} \otimes U_{ij}^n\right). \tag{7.1}$$

我们对 n 使用归纳法。 $n = 1$ 的情形由定义直接得到。假设 (7.1) 对某个 $n \geq 1$ 成立。则

$$U_{ij}^{n+1} \widetilde{T}_l = U_{ij} \left(U_{ij}^n \widetilde{T}_l\right) = U_{ij} \widetilde{T}_l \left(I_{E_l} \otimes U_{ij}^n\right) = \widetilde{T}_l \left(I_{E_l} \otimes U_{ij}\right) \left(I_{E_l} \otimes U_{ij}^n\right) = \widetilde{T}_l \left(I_{E_l} \otimes U_{ij}^{n+1}\right),$$

这就证明了 (7.1) 对所有 n 都成立。

现在，对每个固定的 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们通过对 m 使用归纳法，证明该结论对所有 $m \in \mathbb{Z}_+$ 都成立。对于 $m = 1$，这正是 (7.1)。假设对于某个 $m \geq 1$，有

$$U_{ij}^n \widetilde{T}_l^{(m)} = \widetilde{T}_l^{(m)} \left(I_{E_l^m} \otimes U_{ij}^n\right).$$

利用递归 $\widetilde{T}_{l}^{(m+1}=\widetilde{T}_{l}^{(m)}\left(I_{E_l{}^m}\otimes\widetilde{T}_l\right)$，我们计算得

$$\begin{aligned}
U_{ij}^n\,\widetilde{T}_l^{(m+1)} &= U_{ij}^n\,\widetilde{T}_l^{(m)}\left(I_{E_l{}^m}\otimes\widetilde{T}_l\right)\\
&= \widetilde{T}_l^{(m)}\left(I_{E_l{}^m}\otimes U_{ij}^n\right)\left(I_{E_l{}^m}\otimes\widetilde{T}_l\right) \qquad \text{(by induction hypothesis)}\\
&= \widetilde{T}_l^{(m)}\left(I_{E_l{}^m}\otimes(U_{ij}^n\,\widetilde{T}_l)\right)\\
&= \widetilde{T}_l^{(m)}\left(I_{E_l{}^m}\otimes\widetilde{T}_l\,(I_{E_l}\otimes U_{ij}^n)\right) \qquad \text{(by (7.1))}\\
&= \widetilde{T}_l^{(m)}\,(I_{E_l{}^m}\otimes\widetilde{T}_l)\,(I_{E_l{}^{m+1}}\otimes U_{ij}^n)\\
&= \widetilde{T}_l^{(m+1)}\left(I_{E_l{}^{m+1}}\otimes U_{ij}^n\right).
\end{aligned}$$

这就完成了关于 m 的归纳。由于 n 是任意的，该结论对所有 $m,\ n\in\mathbb{Z}_+$ 都成立。 □

引理 7.2. 设 $i,j,l\in I_k$ 满足 $i\neq j$，且 $n,m\in\mathbb{Z}_+$。则有如下交换关系：

$$\left(t_{ij}^{(n)}\otimes U_{ij}^n\right)\left(I_{E_i\otimes E_j{}^n}\otimes\widetilde{T}_l^{(m)}\right)\ =\ \left(I_{E_j{}^n\otimes E_i}\otimes\widetilde{T}_l^{(m)}\right)\left(t_{ij}^{(n)}\otimes I_{E_l{}^m}\otimes U_{ij}^n\right).$$

证明. 利用基本恒等式 $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$（只要张量积有定义），我们计算得：

$$\begin{aligned}
\left(t_{ij}^{(n)}\otimes U_{ij}^n\right)\left(I_{E_i\otimes E_j{}^n}\otimes\widetilde{T}_l^{(m)}\right) &= t_{ij}^{(n)}(I_{E_i\otimes E_j{}^n})\otimes\left(U_{ij}^n\widetilde{T}_l^{(m)}\right)\\
&= t_{ij}^{(n)}\otimes\left(\widetilde{T}_l^{(m)}\left(I_{E_l{}^m}\otimes U_{ij}^n\right)\right) \qquad \text{(by Lemma 7.1)}\\
&= \left(I_{E_j{}^n\otimes E_i}\otimes\widetilde{T}_l^{(m)}\right)\left(t_{ij}^{(n)}\otimes I_{E_l{}^m}\otimes U_{ij}^n\right),
\end{aligned}$$

由此得到了所需的恒等式。 □

前述引理证明中使用的技巧，再加上反复应用引理 7.1，可得以下结果。

引理 7.3。 设有 $A\subseteq I_k$ 和 $q\in\mathbb{Z}_+^{|A|}$。那么，对于所有满足 $i\neq j$ 的 i、$j\in I_k$，以及每个 $n\in\mathbb{Z}_+$，都有

$$\left(t_{ij}^{(n)}\otimes U_{ij}^n\right)\left(I_{E_i\otimes E_j{}^n}\otimes\widetilde{T}_A^{(q)}\right)\ =\ \left(I_{E_j{}^n\otimes E_i}\otimes\widetilde{T}_A^{(q)}\right)\left(t_{ij}^{(n)}\otimes I_{E_A^q}\otimes U_{ij}^n\right).$$

引理 7.4。 对于每个 $n\in\mathbb{Z}_+$ 和 $i,\ j\in I_k$ 满足 $i\neq j$，我们有

$$\widetilde{T}_i\left(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j^{(n)}\right)\ =\ \widetilde{T}_j^{(n)}\left(I_{E_j{}^n}\otimes\widetilde{T}_i\right)\left(t_{ij}^{(n)}\otimes U_{ij}^n\right).$$

证明。我们对 n 使用归纳法。对于 $n=1$，根据定义，我们有 $\widetilde{T}_i(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j)=\widetilde{T}_j(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i)(t_{ij}\otimes U_{ij})$。假设该结论对某个 $n\geq 1$ 成立。利用 $\widetilde{T}_j^{(n+1)}=\widetilde{T}_j^{(n)}\left(I_{E_j^n}\otimes\widetilde{T}_j\right)$，我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_i\left(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j^{(n+1)}\right)&=\widetilde{T}_i\left(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j^{(n)}\right)\left(I_{E_i\otimes E_j^n}\otimes\widetilde{T}_j\right)\\
&=\widetilde{T}_j^{(n)}\left(I_{E_j^n}\otimes\widetilde{T}_i\right)\left(t_{ij}^{(n)}\otimes U_{ij}^n\right)\left(I_{E_i\otimes E_j^n}\otimes\widetilde{T}_j\right)\quad\text{(by induction hypothesis)}\\
&=\widetilde{T}_j^{(n)}\left(I_{E_j^n}\otimes\widetilde{T}_i\right)\left(I_{E_j^n}\otimes I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j\right)\left(t_{ij}^{(n)}\otimes I_{E_j}\otimes U_{ij}^n\right)\quad\text{(by Lemma 7.2)}\\
&=\widetilde{T}_j^{(n)}\left(I_{E_j^n}\otimes\widetilde{T}_j\right)\left(I_{E_j^n}\otimes I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i\right)\left(I_{E_j^n}\otimes t_{ij}\otimes U_{ij}\right)\left(t_{ij}^{(n)}\otimes I_{E_j}\otimes U_{ij}^n\right)\\
&=\widetilde{T}_j^{(n+1)}\left(I_{E_j^{n+1}}\otimes\widetilde{T}_i\right)\left(t_{ij}^{(n+1)}\otimes U_{ij}^{n+1}\right)\quad\text{(by Lemma 5.1).}
\end{aligned}$$

这就完成了归纳法。 □

利用定义 5.6，可得以下关系：

引理 7.5。设 $A=\{i_1<i_2<\cdots<i_p\}\subseteq I_k$ 和 $n=(n_1,\ldots,n_p)\in\mathbb{Z}_+^{|A|}$。对于 $2\leq j\leq p$，

$$\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_A^{(n)}\right)\;=\;\widetilde{T}_A^{(n+e_j)}\prod_{r=1}^{j-1}D_{j-r}[W_{i_j,i_{j-r}}].$$

类似地，若 $A^c=\{l_1<l_2<\cdots<l_{k-p}\}$，且 $m=(m_1,\cdots,m_{k-p})\in\mathbb{Z}_+^{|A^c|}$. 则对于 $2\leq j\leq k-p$，

$$\widetilde{T}_{l_j}\left(I_{E_{l_j}}\otimes\widetilde{T}_{A^c}^{(m)}\right)\;=\;\widetilde{T}_{A^c}^{(m+e_j)}\prod_{r=1}^{j-1}D_{j-r}[W_{l_j,l_{j-r}}].$$

证明。我们对 $r\in\{1,2,\ldots,j-1\}$（因子 $\widetilde{T}^{(n_1)\,i_1},\ldots,\widetilde{T}^{(n_r)\,i_r}$ 的数量）进行归纳法来证明该结论，即 $\widetilde{T}_{i_j}$ 必须在 $\widetilde{T}_A^{(n)}$ 内穿过这些因子。我们断言，若 $\widetilde{T}_{i_j}$ 已穿过前 r 个因子，则

$$\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_A^{(n)}\right)=\widetilde{T}_{1,r}\left(I_{E_{1,r}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{r+1,p}\right)\right)\prod_{m=1}^{r}D_{r+1-m}[W_{i_j,i_{r+1-m}}]$$

对于 $r=1$，由引理 7.4 可知

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_A^{(n)}\right)&=\widetilde{T}_{i_1}^{(n_1)}\left(I_{E_{i_1}^{n_1}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\right)\left(t_{i_ji_1}^{(n_1)}\otimes U_{i_ji_1}^{n_1}\right)\left(I_{E_{i_j}}\otimes I_{E_{i_1}^{n_1}}\otimes\widetilde{T}_{2,p}\right)\\
&=\widetilde{T}_{i_1}^{(n_1)}\left(I_{E_{i_1}^{n_1}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\right)\left(I_{E_{i_1}^{n_1}}\otimes I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{2,p}\right)\left(t_{i_ji_1}^{(n_1)}\otimes I_{E_{2,p}}\otimes U_{i_ji_1}^{n_1}\right)\quad\text{(by Lemma 7.3)}\\
&=\widetilde{T}_{i_1}^{(n_1)}\left(I_{E_{i_1}^{n_1}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{2,p})\right)D_1[W_{i_j,i_1}]\quad\text{(by (5.5), (5.6))}
\end{aligned}$$

假设当 T_{i_j} 越过前 r 个因子时，该关系成立。现在我们将 T_{i_j} 与下一个块 $\widetilde{T}^{(n_{r+1})\;i_{r+1}}$ 交换。根据引理 7.4，并利用 (5.4)，可得

$$\widetilde{T}_{1,r}\left(I_{E_{1,r}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{i_{r+1}}^{(n_{r+1})}\right)\right)=\widetilde{T}_{1,r+1}\left(I_{E_{1,r+1}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\right)\left(I_{E_{1,r}}\otimes t_{i_ji_{r+1}}^{(n_{r+1})}\otimes U_{i_ji_{r+1}}^{n_{r+1}}\right).$$

再次由引理 7.3 可知

$$\begin{aligned}
&\widetilde{T}_{1,r}\left(I_{E_{1,r}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{r+1,p}\right)\right)\\
&=\widetilde{T}_{1,r+1}\left(I_{E_{1,r+1}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\right)\left(I_{E_{1,r}}\otimes\left(t_{i_ji_{r+1}}^{(n_{r+1})}\otimes U_{ij i_{r+1}}^{n_{r+1}}\right)\left(I_{E_{i_j}}\otimes I_{E_{i_{r+1}}^{n_{r+1}}}\otimes\widetilde{T}_{r+2,p}\right)\right)\\
&=\widetilde{T}_{1,r+1}\left(I_{E_{1,r+1}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{r+2,p}\right)\right)\left(I_{E_{1,r}}\otimes t_{i_ji_{r+1}}^{(n_{r+1})}\otimes I_{E_{r+2,p}}\otimes U_{i_ji_{r+1}}^{n_{r+1}}\right)\\
&=\widetilde{T}_{1,r+1}\left(I_{E_{1,r+1}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{r+2,p}\right)\right)\left(\theta_{i_j,i_{r+1}}^{(n_{r+1})}\otimes U_{i_ji_{r+1}}^{n_{r+1}}\right)\\
&=\widetilde{T}_{1,r+1}\left(I_{E_{1,r+1}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{r+2,p}\right)\right)D_{r+1}[W_{i_j,i_{r+1}}]
\end{aligned}$$

将其代入归纳假设，即可得到 $r+$ 的公式 1.

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_A^{(n)}\right)&=\widetilde{T}_{1,r}\left(I_{E_{1,r}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{r+1,p}\right)\right)D_{r+1}[W_{i_j,i_{r+1}}]\prod_{m=1}^{r}D_{r+1-m}[W_{i_j,i_{r+1-m}}]\\
&=\widetilde{T}_{1,r}\left(I_{E_{1,r}}\otimes\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_{r+1,p}\right)\right)\prod_{m=1}^{r+1}D_{r+2-m}[W_{i_j,i_{r+2-m}}],
\end{aligned}$$

因此，对于 $r+1$，结论成立，从而证明了我们的断言。特别地，当 $r=j-1$ 时，也就是当 $\sim T_{i_j}$ 首先经过 $j-1$ 个块时，我们得到

$$\widetilde{T}_{i_j}\left(I_{E_{i_j}}\otimes\widetilde{T}_A^{(n)}\right)=\widetilde{T}_A^{(n+e_j)}\prod_{m=1}^{j-1}D_{j-m}[W_{i_j,i_{j-m}}],$$

这就完成了证明。第二个断言同理可得。 □

引理 7.6。 对于任意 $l\in A^c$， $\widetilde{T}_l\left(I_{E_l}\otimes\widetilde{T}_A^{(n}\right)=\widetilde{T}^{)}($

$_A^n\left(I_{E_A^n}\otimes\widetilde{T}_l\right)\prod_{r=1}^{p}D_{p+1-r}[W_{l,i_{p+1-r}}].^{)}$

证明。 该证明由引理 7.3 和引理 7.4 立即得到。 □

引理 7.7. 对每个 $A\subseteq I_k$，以下陈述均成立。

(1) $\mathcal{W}_A$ 和 $\mathcal{D}_A$ 约化 $\sigma(\mathcal{A})$。(2) 对所有 $i\neq j$、 $U_{ij}\mathcal{W}_A=\mathcal{W}_A$ 和 $U_{ij}\mathcal{D}_A=\mathcal{D}_A$.

(3) 对所有 $j\in A^c$、 $T_j(E_j\otimes\mathcal{W}_A)\subseteq\mathcal{W}_A$ 和 $T_j^*\mathcal{W}_A\subseteq E_j\otimes\mathcal{W}_A$。此外， $T_j(E_j\otimes\mathcal{D}_A)\subseteq\mathcal{D}_A$，且$\sim T_j^*\mathcal{D}_A\subseteq E_j\otimes\mathcal{D}_A$。

证明。 ***(1)*** 的证明： 对每个 $i\in I_k$，协变条件给出 $\sigma(a)T_i=T_i(\varphi_i(a)\otimes I_{\mathcal{H}})\ \forall a\in\mathcal{A}$。对两边取伴随，

$$\widetilde{T}_i^*\sigma(a)=(\varphi_i(a)\otimes I_{\mathcal{H}})\widetilde{T}_i^*. \tag{7.2}$$

对于 $h\in\mathcal{W}_A$, $T_j^*h=0,\forall j\in A$。因此，对于每个 $a\in\mathcal{A}$, $T_j^*\sigma(a)h=(\varphi_j(a)\otimes I)T_j^*h=0$. 因此$\sigma(a)\mathcal{W}_A\subseteq\mathcal{W}_A$，对所有 $a\in\mathcal{A}$ 均成立，从而证明了我们的断言。

现在我们断言， $\mathcal{D}_A$ 约化 $\sigma(\mathcal{A})$。令 $B := I_k \setminus A$ ，并令 $\varphi_B^{(m)}$ 表示 $\mathcal{A}$ 在 E_B^m 上的左作用。那么 $\sigma(a)\widetilde{T}_{B}^{(m}=\widetilde{T}_B^{(m)}\left(\varphi_B^{(m)})(a)\otimes I_{\mathcal{H}}\right)$ 意味着

$$\left(\widetilde{T}_B^{(m)}\right)^*\sigma(a)=\left(\varphi_B^{(m)}(a)\otimes I_{\mathcal{H}}\right)\left(\widetilde{T}_B^{(m)}\right)^*.$$

设 $x\in\mathcal{D}_A$。则 $x=\widetilde{T}_B^{(m)}(\xi\otimes w)$，其中 $\xi\in E_B^m$ 和 $w\in\mathcal{W}_A$。

$$\sigma(a)x=\sigma(a)\widetilde{T}_B^{(m)}(\xi\otimes w)=\widetilde{T}_B^{(m)}\left(\varphi_B^{(m)}(a)\xi\otimes w\right)\in\widetilde{T}_B^{(m)}\left(I_{E_B^m}\otimes\mathcal{W}_A\right).$$

因此，每个 $\widetilde{T}_B^{(m)}\left(I_{E_B^m}\otimes\mathcal{W}_A\right)$ 在 $\sigma(a)$ 和 $\sigma(a)^*$下都是不变的。因此， $\mathcal{D}_A$ 约化 $\sigma(\mathcal{A})$。

~ ~ ~ ~*(2)* 的证明：注意到 $T_k(I_{E_k}\otimes U_{ij})=U_{ij}T_k$，因此对于所有 $i\neq j$ 以及所有 $k\in I_k$，都有 $(I_{E_k}\otimes U_{ij})T_k^*=T_k^*U_{ij}$。从而 $\mathcal{W}_A$， $\mathcal{D}_A$ 约化 U_{ij}。

(3) 的证明：假设 $h\in\mathcal{W}_A$。那么，对于每个 $x\in E_j$， $j\in A^c$，我们有

$$\widetilde{T}_i^*\widetilde{T}_j(x\otimes h)=(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}_j)(t_{ji}\otimes U_{ij})(I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_i^*)x\otimes h=0,\qquad\forall i\in A.$$

~ ~ ~因此， $T_j(E_j\otimes\mathcal{W}_A)\subseteq\mathcal{W}_A$。此外，双重扭曲关系意味着，$(I_{E_i}\otimes T_j^*)T_i^*=(t_{ij}\otimes U_{ij})^*(I_{E_j}\otimes\sim$ ~ ~$T_i^*)T_j^*$，因此， $T_j^*\mathcal{W}_A\subseteq E_j\otimes\mathcal{W}_A$.

现在我们声称 $\mathcal{D}_A$ 约化 T_j, $j\in A^c$. 首先假设 $A=\emptyset$。那么，按照约定，$\sim\mathcal{W}_A=\mathcal{H}$，故由定理 6.8 可得 $\mathcal{D}_A=\mathcal{H}_A$。在这种情况下，对于所有 $j\in I_k$， $\mathcal{D}_A$ 都平凡地约化 T_j。若 $A=I_k$，则 $\mathcal{D}_A=\mathcal{W}_{I_k}$，此时结论由第一部分得出。现在假设 $A=\{i_1,\dots,i_p\}$且 $1\leq p<k$。令 $A^{\mathrm{c}}=\{l_1,\dots,l_{k-p}\}$ 并固定一个指标 $s\in\{1,\dots,k-p\}$。设 $j:=l_s$。给定$x\in E_j$和 $h\in\mathcal{D}_A$，我们声称 $\widetilde{T}_j(x\otimes h)\in\mathcal{D}_A$。回顾 $\mathcal{D}_A:=\bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+^{k-p}}\widetilde{T}_{A^{\mathrm{c}}}^{(m)}(I_{E_A^m\mathbf{c}}\otimes\mathcal{W}_A)$。固定 $m=(m_1,\dots,m_{k-p})\in\mathbb{Z}_+^{k-p}$。由于 $h\in\mathcal{D}_A$，对于某个 $\xi\in E_{A^{\mathrm{c}}}^m$和$w\in\mathcal{W}_A$，有 $h=\widetilde{T}_{A^{\mathrm{c}}}^{(m)}(\xi\otimes w)$。应用引理 7.5（对有序集合 A^{c}应用），

$$\widetilde{T}_{l_s}\left(I_{E_{l_s}}\otimes\widetilde{T}_{A^{\mathrm{c}}}^{(m)}\right)=\widetilde{T}_{A^{\mathrm{c}}}^{(m+e_{l_s})}\prod_{r=1}^{s-1}D_{s-r}[W_{l_s,l_{s-r}}].$$

因此，

$$\widetilde{T}_j(x\otimes h)=\widetilde{T}_{A^{\mathrm{c}}}^{(m+e_j)}\left(\prod_{r=1}^{s-1}D_{s-r}[W_{l_s,l_{s-r}}]\right)(x\otimes\xi\otimes w).$$

由于 $\mathcal{W}_A$约化每个 U_{ij}，算子 $\prod_{r=1}^{s-1}D_{s-r}[W_{l_s,l_{s-r}}]$将 $E_j\otimes E_{A^{\mathrm{c}}}^m\otimes\mathcal{W}_A$映射到 $E_{A^{\mathrm{c}}}^{m+e_j}\otimes\mathcal{W}_A$中。因此

$$\widetilde{T}_j(x\otimes h)\in\widetilde{T}_{A^{\mathrm{c}}}^{(m+e_j)}\left(I_{E_{A^{\mathrm{c}}}^{m+e_j}}\otimes\mathcal{W}_A\right)\subseteq\widetilde{T}_{A^{\mathrm{c}}}^{(m)}\left(I_{E_{A^{\mathrm{c}}}^m}\otimes\mathcal{W}_A\right),$$

~并且由于 m 是任意的，我们得出 $T_j(E_j\otimes\mathcal{D}_A)\subseteq\mathcal{D}_A$。类似的论证（利用~伴随关系和引理 7.7(2) ）表明 $T_j^*\mathcal{D}_A\subseteq E_j\otimes\mathcal{D}_A$。

□

现在假设对于此 $A\subseteq I_k$，相应的 $\mathcal{H}_A\neq\{0\}$. 根据定理 6.8， $\mathcal{H}_A=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}}\widetilde{T}^{(}_{A}{}^{n}\left(I_{E_A^n}\otimes\mathcal{D}_A\right)\cdot)$定义映射 $\Pi_A\colon\mathcal{H}_A\to\mathcal{F}(E_A)\otimes\mathcal{D}_A$，其定义为

$$\Pi_A\left(\widetilde{T}_A^{(n)}(\xi\otimes h)\right)=\xi\otimes h,\tag{7.3}$$

映射 Π_A 显然定义良好。对于 $\xi,\eta\in E_A^n$ 和 $h,g\in\mathcal{D}_A$，每个 (σ,T_i) 的等距性质给出

$$\big\langle \widetilde{T}_A^{(n)}(\xi\otimes h),\,\widetilde{T}_A^{(n)}(\eta\otimes g)\big\rangle=\big\langle h,\,\sigma(\langle\xi,\eta\rangle_{\mathcal{A}})\,g\big\rangle=\big\langle \xi\otimes h,\,\eta\otimes g\big\rangle.$$

因此，每个 $\widetilde{T}_A^{(n)}$ 都是等距算子。根据定义，满射性显然成立。因此， Π_A 是酉算子。

命题 7.8。 设 $(\sigma,T_1,\dots,T_k)$ 是乘积系统 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的双重扭曲等距协变表示，并设 $A=\{i_1<\cdots<i_p\}\subseteq I_k$ 满足 $\mathcal{H}_A\neq 0$。那么，对于典范酉算子 $\Pi_A\colon\mathcal{H}_A\to\mathcal{F}(E_A)\otimes\mathcal{D}_A$，有

(1) 对于 $x_i\in E_i$，有

$$\Pi_A T_i(x_i)\Pi_A^*=\begin{cases}T_{x_{i_1}}\otimes I_{\mathcal{D}_A}, & i=i_1,\\ \left(\prod\limits_{r=1}^{j-1}D_{j-r}\big[W_{i_j,i_{j-r}}\big]\right)(T_{x_{i_j}}\otimes I_{\mathcal{D}_A}), & i=i_j,\ 2\le j\le p,\\ \left(I_{\mathcal{F}(E_A)}\otimes\widetilde{T}_i\right)\left(\prod\limits_{r=1}^{p}D_{p+1-r}\big[W_{i,i_{p+1-r}}\big]\right)(T_{x_i}\otimes I_{\mathcal{D}_A}), & i\in A^{\mathrm{c}}.\end{cases}$$

(2) 对于 $a\in\mathcal{A}$,

$$\Pi_A\sigma(a)\Pi_A^*=\sigma_A(a)\otimes I_{\mathcal{D}_A},\qquad \sigma_A(a):=\varphi_\infty(a)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}}\varphi_A^{(n)}(a).$$

(3) 对于 $i\neq j$ 中的元素,

$$U_{A,ij}:=\Pi_A U_{ij}\Pi_A^*=I_{\mathcal{F}(E_A)}\otimes U_{ij}.$$

特别地，若我们令 $M_{A,i}:=\Pi_A T_i(\cdot)\Pi_A^*$，则 $(\sigma_A,\{M_{A,i}\}_{i\in I_k})$ 仍是一个扭曲为 $\{t_{ij}\otimes U_{A,ij}\}_{i\neq j}$ 的双重扭曲等距协变表示，它与 $(\sigma,\{T_i\}_{i\in I_k})|_{\mathcal{H}_A}$ 酉等价。此外，$(\sigma_A,M_{A,i})$ 对 $i\in A$ 是诱导的，并且对 $i\in A^{\mathrm{c}}$ 是完全余等距的。

证明。 令 $\xi\otimes h\in\mathcal{F}(E_A)\otimes_\sigma\mathcal{D}_A$,其中 $\xi=\xi_1\otimes\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_p\in E_A^n$,且 $h\in\mathcal{D}_A$。此外，令 $A^{\mathrm{c}}=\{l_1,\dots,l_{k-p}\}$。

(1) 对于 $x_{i_1}\in E_{i_1}$，我们计算得

$$\begin{aligned}\Pi_A T_{i_1}(x_{i_1})\Pi_A^*(\xi\otimes h)&=\Pi_A T_{i_1}(x_{i_1})\left(T_{i_1}^{(n_1)}(\xi_1)T_{i_2}^{(n_2)}(\xi_2)\cdots T_{i_p}^{(n_p)}(\xi_p)h\right)\\&=\Pi_A\widetilde{T}_A^{(n+e_{i_1})}(x_{i_1}\otimes\xi\otimes h)\\&=x_{i_1}\otimes\xi\otimes h\\&=(T_{x_{i_1}}\otimes I_{\mathcal{D}_A})(\xi\otimes h).\end{aligned}$$

因此

$$T_{i_1}(x_{i_1})\ \cong\ T_{x_{i_1}}\otimes I_{\mathcal{D}_A}.$$

对于 $2 \le j \le p$ 和 $x_{i_j} \in E_{i_j}$，我们利用引理 7.5 得到

$$\begin{aligned}\Pi_A T_{i_j}(x_{i_j})\Pi_A^*(\xi \otimes h) &= \Pi_A T_{i_j}(x_{i_j}) T_{i_1}^{(n_1)}(\xi_1)\cdots T_{i_p}^{(n_p)}(\xi_p)h \\ &= \Pi_A \widetilde{T}_A^{(n+e_{i_j})} \prod_{r=1}^{j-1} D_{j-r}[W_{i_j,i_{j-r}}](x_{i_j}\otimes\xi\otimes h) \\ &= \left(\prod_{r=1}^{j-1} D_{j-r}[W_{i_j,i_{j-r}}]\right)\left(T_{x_{i_j}}\otimes I_{\mathcal{D}_A}\right)(\xi\otimes h).\end{aligned}$$

Thus

$$T_{i_j}(x_{i_j}) \;\cong\; \left(\prod_{r=1}^{j-1} D_{j-r}[W_{i_j,i_{j-r}}]\right)\left(T_{x_{i_j}}\otimes I_{\mathcal{D}_A}\right).$$

现在，对于 $i \in A^{\mathrm{c}}$ 和 $x_i \in E_i$，我们有

$$\begin{aligned}\Pi_A T_i(x_i)\Pi_A^*(\xi\otimes h) &= \Pi_A T_i(x_i)\widetilde{T}_A^{(n)}(\xi\otimes h) \\ &= \Pi_A \widetilde{T}_A^{(n)}\left(I_{E_A^n}\otimes\widetilde{T}_i\right)\prod_{r=1}^{p} D_{p+1-r}[W_{i,i_{p+1-r}}](x_i\otimes\xi\otimes h) \\ &= \left(I_{E_A^n}\otimes\widetilde{T}_i\right)\prod_{r=1}^{p} D_{p+1-r}[W_{i,i_{p+1-r}}](T_{x_i}\otimes I_{\mathcal{D}_A})(\xi\otimes h).\end{aligned}$$

一般而言，

$$T_i(x_i) \;\cong\; \left(I_{\mathcal{F}(E_A)}\otimes\widetilde{T}_i\right)\prod_{r=1}^{p} D_{p+1-r}[W_{i,i_{p+1-r}}]\,(T_{x_i}\otimes I_{\mathcal{D}_A}),$$

引理 7.7(3) 表明上述映射是良定义的。

(2) 对于任意 $a \in \mathcal{A}$，

$$(\Pi_A\sigma(a)\Pi_A^*)(\xi\otimes h) = \Pi_A\sigma(a)\widetilde{T}_A^{(n)}(\xi\otimes h) = \Pi_A\widetilde{T}_A^{(n)}\left(\varphi_A^{(n)}(a)\xi\otimes h\right) = \varphi_A^{(n)}(a)\xi\otimes h.$$

因此

$$\Pi_A\sigma(a)\Pi_A^* = \sigma_A(a)\otimes I_{\mathcal{D}_A},\ \text{where } \sigma_A(a) := \varphi_\infty(a).$$

(3) 对于任意 $i \ne j$，我们知道 $U_{ij}\widetilde{T}_A^{(n)} = \widetilde{T}_{(n)\,A}(I_{E_A^n}\otimes U_{ij})$。因此，

$$(\Pi_A U_{ij}\Pi_A^*)(\xi\otimes h) = \Pi_A U_{ij}\widetilde{T}_A^{(n)}(\xi\otimes h) = \Pi_A\widetilde{T}_A^{(n)}(\xi\otimes U_{ij}h) = \xi\otimes U_{ij}h = \left(I_{E_A^n}\otimes U_{ij}\right)(\xi\otimes h).$$

因此，

$$U_{A,ij} = \Pi_A U_{ij}\Pi_A^* = I_{\mathcal{F}(E_A)}\otimes U_{ij}.$$

引理 7.7(2) 表明上述映射是良定义的。

由于 Π_A 是酉算子，且$(\sigma,\ \{T_i\}_{i\in I_k})|_{\mathcal{H}_A}$满足双重扭曲关系，因此，$(\sigma_A,\ \{M_{A,i}\})$也是双重扭曲等距协变表示。这还意味着，$(\sigma_A,\ M_{A,\ i})$在 $i \in A$时是诱导的，在 $i \in A^{\mathrm{c}}$时是完全余等距的。□

8. Unitary Extensions

本节的目标是通过直接极限构造，为特定类别构造酉扩张。首先，我们回顾希尔伯特空间 [26] 直接极限的一种范畴构造。设$\mathcal{H}=\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ 是由非空有向集 I索引的希尔伯特空间族。假设对于所有满足 $i\le j$ 的 $i,\ j\in I$，都存在一个等距算子φ_{ji}： $\mathcal{H}_i\to\mathcal{H}_j$，且当 $i\le j\le k$时，

$$\varphi_{kj}\circ\varphi_{ji}=\varphi_{ki},\quad \text{and}\quad \varphi_{ii}=\mathrm{id}_{\mathcal{H}_i}.$$

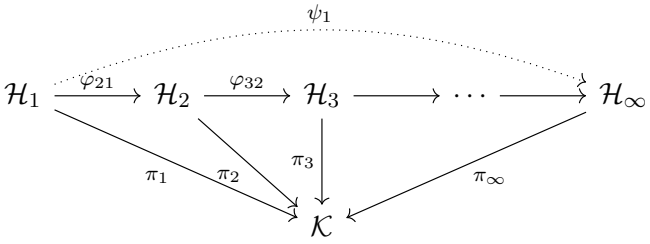
直接极限 ct $(\mathcal{H}_\infty,\ \psi_i)$ 是一个带有等距算子 ψ_i：$\mathcal{H}_i\to\mathcal{H}_\infty$ 的希尔伯特空间，满足 y

$$\psi_j\circ\varphi_{ji}=\psi_i,$$

并且具有以下泛性质：对于从 $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ 到希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 的每个压缩算子族 $\{\pi_i\}_{i\in I}$，使得 $\pi_j\circ\varphi_{ji}=\pi_i$，存在唯一的压缩算子 π_∞：$\mathcal{H}_\infty\to\mathcal{K}$，使得

$$\pi_i=\pi_\infty\circ\psi_i\quad\forall i\in I.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \arrow[r, "\varphi_{21}"] \arrow[drr, "\pi_1"'] \arrow[rrrr, dotted, bend left, "\psi_1"] & \mathcal{H}_2 \arrow[r, "\varphi_{32}"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \mathcal{H}_3 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_\infty \arrow[dll, "\pi_\infty"] \\
 & & \mathcal{K} & &
\end{tikzcd}$$



现在，给定一个直接系统 $(\mathcal{H}_m,\ \varphi_{nm})$ 及其直接极限 $(\mathcal{H}_\infty,\ \psi_m)$，对于每个 $m\in I$，，令 $(\sigma_m,\ T_{m,\ 1}$、……、$T_{m,\ k})$ 表示 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{H}_m$ 上的双重扭曲等距协变表示，其相应的扭曲为 $\{t_{ij}\otimes U_{m,ij}\}_{i\neq j}$。假设此元组满足以下条件：对于所有 $m\le n$ 和 $i,\ j\in I_k,\ i\neq j$，以及每个 $a\in\mathcal{A}$，

$$\varphi_{nm}\,\widetilde{T}_{m,i}=\widetilde{T}_{n,i}\,(I_{E_i}\otimes\varphi_{nm}),\quad \varphi_{nm}\,U_{m,ij}=U_{n,ij}\,\varphi_{nm},\quad \text{and}\quad \varphi_{nm}\,\sigma_m(a)=\sigma_n(a)\,\varphi_{nm}. \tag{8.1}$$

因此，引理 2.11 表明存在一个压缩算子 σ_∞，并且对于所有 $i,\ j\in I_k$，存在$\widetilde{\ }$等距算子 $\{T_{\infty,i}\}_{i\in I_k}$，以及酉算子 $\{U_{\infty,ij}\}_{i\neq j}$，使得对于每个 $m\in I$ 和 $a\in\mathcal{A}$，

$$\psi_m\,\widetilde{T}_{m,i}=\widetilde{T}_{\infty,i}(I_{E_i}\otimes\psi_m),\quad \psi_m\,U_{m,ij}=U_{\infty,ij}\,\psi_m,\quad \text{and}\quad \psi_m\,\sigma_m(a)=\sigma_\infty(a)\,\psi_m. \tag{8.2}$$

因此，对于每个 $x_i\in E_i$ 和 $a\in\mathcal{A}$，限制到 $\psi_m(\mathcal{H}_m)\subseteq\mathcal{H}_\infty$ 可得

$$T_{\infty,i}(x_i)|_{\mathcal{H}_m}=T_{m,i}(x_i),\quad U_{\infty,ij}|_{\mathcal{H}_m}=U_{m,ij},\quad \text{and}\quad \sigma_\infty(a)\big|_{\mathcal{H}_m}=\sigma_m(a). \tag{8.3}$$

方程 8.2 还意味着

$$U^*_{\infty,ji}\,\psi_m=\psi_m U^*_{m,ji}=\psi_m U_{m,ij}=U_{\infty,ij}\psi_m.$$

类似地，对于任意 $l\in I_k$，

$$U_{\infty,ij}\,\widetilde{T}_{\infty,l}(I_{E_l}\otimes\psi_m)=U_{\infty,ij}\,\psi_m\,\widetilde{T}_{m,l}=\psi_m U_{m,ij}\,\widetilde{T}_{m,l}=\psi_m\,\widetilde{T}_{m,l}(I_{E_l}\otimes U_{m,ij})=\widetilde{T}_{\infty,l}(I_{E_l}\otimes U_{\infty,ij}).$$

Since $\psi_m(\mathcal{H}_m)$对于 d ∞，这些方程延拓到所有 i ∞。因此，d 我们得到 $\mathcal{H}$ Th f

$$U_{\infty,ji}=U^*_{\infty,ij},\quad \text{and}\quad U_{\infty,ij}\,\widetilde{T}_{\infty,l}=\widetilde{T}_{\infty,l}\,(I_{E_l}\otimes U_{\infty,ij})\,. \tag{8.4}$$

引理 8.1. 映射 σ_∞：$\mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H}_\infty)$ 是一个 C^*-表示。

证明。 根据直接极限的泛性质， $\sigma_\infty : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\infty)$ 是一个压缩算子。乘法性在稠密集 $\bigcup_m \psi_m(\mathcal{H}_m)$:

$$\sigma_\infty(ab)\psi_m(h) = \psi_m(\sigma_m(ab)h) = \psi_m(\sigma_m(a)\sigma_m(b)h) = \sigma_\infty(a)\sigma_\infty(b)\psi_m(h),$$

因此，由连续性可知，这对所有的 $\mathcal{H}_\infty$ 都成立。

对于 $*$-性质，固定 $m,\ n \in I$并选取 $\ell \geq m,\ n$。回忆一下， $\varphi_{\ell n}\sigma_n(a) = \sigma_\ell(a)\varphi_{\ell n}$ 且$\psi_\ell\varphi_{\ell n} = \psi_n$, $\psi_\ell\varphi_{\ell m} = \psi_m$。那么，对于 $g \in \mathcal{H}_m$, $h \in \mathcal{H}_n$，结合 ψ_m， $\forall m \in I$， 是等距算子这一事实可得

$$\begin{aligned}\langle\sigma_\infty(a^*)\psi_n(h), \psi_m(g)\rangle &= \langle\psi_n(\sigma_n(a^*)h), \psi_m(g)\rangle = \langle\varphi_{\ell n}\sigma_n(a^*)h,\ \varphi_{\ell m}g\rangle_{\mathcal{H}_\ell} \\ &= \langle\sigma_\ell(a^*)\varphi_{\ell n}h,\ \varphi_{\ell m}g\rangle = \langle\varphi_{\ell n}h,\ \sigma_\ell(a)\varphi_{\ell m}g\rangle \\ &= \langle\psi_n(h),\ \psi_m(\sigma_m(a)g)\rangle = \langle\psi_n(h),\ \sigma_\infty(a)\psi_m(g)\rangle,\end{aligned}$$

因此， $\sigma_\infty(a^*) = \sigma_\infty(a)^*$。

如果每个 σ_m 都是非退化的，那么对任意 m, $\overline{\sigma_\infty(\mathcal{A})\psi_m(\mathcal{H}_m)} = \psi_m(\mathcal{H}_m)$； $\bigcup \psi_m(\mathcal{H}_m)_m$在 $\mathcal{H}_\infty$ 中的稠密性表明 σ_∞是非退化的。因此， σ_∞ 是一个 $*$-表示。 □

现在我们验证，极限表示 $(\sigma_\infty,\ \{T_{\infty,i}\}_{i\in I_k})$ 保持每个 $(\sigma_m,\ \{T_{m,i}\}_{i\in I_k})$ 所满足的协变关系。

引理 8.2. 对于所有 a、 $b \in \mathcal{A}$、 $i \in I_k$ 和 $x_i \in E_i$，我们有

$$T_{\infty,i}(ax_ib) \ = \ \sigma_\infty(a)\, T_{\infty,i}(x_i)\, \sigma_\infty(b).$$

证明。对于一个 y $m \in I$ 和 $h \in \mathcal{H}_m$，利用 $(\sigma_m,\ T_{m,\ i})$ 的协变性以及方程 (8.2) ,

$$T_{\infty,i}(ax_ib)\,\psi_m(h) = \psi_m\, T_{m,i}(ax_ib)\, h = \psi_m\, \sigma_m(a)\, T_{m,i}(x_i)\, \sigma_m(b) = \sigma_\infty(a)\, T_{\infty,i}(x_i)\, \sigma_\infty(b)\, \psi_m(h).$$

S由于子空间 $\psi_m(\mathcal{H}_m)$ 在 $\mathcal{H}_\infty$中稠密，因此等式在 $\mathcal{H}_\infty$上处处成立 . □

现在我们证明，极限表示 $(\sigma_\infty,\ \{T_{\infty,i}\}_{i\in I_k})$ 保持扭曲交换关系。

引理 8.3。 对于每个 $i \neq j$，以下扭曲关系成立:

$$\widetilde{T}_{\infty,i}\left(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_{\infty,j}\right) = \widetilde{T}_{\infty,j}\left(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_{\infty,i}\right)\ (t_{ij} \otimes U_{\infty,ij}).$$

证明。固定 $i \neq j$, 令并令 $m \in I$、 $\xi \in E_i$、 $\eta \in E_j$、 $g \in \mathcal{H}_m$。那么，根据交织关系 (8.2),

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{\infty,i}\left(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_{\infty,j}\right)(\xi \otimes \eta \otimes \psi_m g) &= \psi_m\, \widetilde{T}_{m,i}\left(I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_{m,j}\right)(\xi \otimes \eta \otimes g) \\ &= \psi_m\, \widetilde{T}_{m,j}\left(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_{m,i}\right)\ (t_{ij} \otimes U_{m,ij})(\xi \otimes \eta \otimes g) \\ &= \widetilde{T}_{\infty,j}\left(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_{\infty,i}\right)\ (t_{ij} \otimes U_{\infty,ij})(\xi \otimes \eta \otimes \psi_m g).\end{aligned}$$

由 $\bigcup_m \psi_m(\mathcal{H}_m)$ 的有界性和稠密性，该恒等式可延拓至所有 $E_i \otimes E_j \otimes \mathcal{H}_\infty$。 □

引理 8.4。 固定 $j \in I_k$。假设对于每个 $m \in I$，存在 $n > m$ 使得

$$\widetilde{T}_{n,j}\, \widetilde{T}^*_{n,j}\, \varphi_{n,m} \ = \ \varphi_{n,m}.$$

Th则直极限表示$(\sigma_\infty, T_{\infty,j})$ 是完全余等距的。此外，如果

$$\widetilde{T}_{n,j}\, \widetilde{T}^*_{n,j} = I_{\mathcal{H}_n} \qquad \forall\, n \in I,$$

那么$(\sigma_\infty, T_{\infty,j})$ 是完全余等距的。

证明。我们已经知道，$T_{\infty,j}: E_j \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\infty)$ 是一个等距表示，并且 $\operatorname{Ran} T_{\infty,j}$ 是 $\mathcal{H}_\infty$ 的一个闭子空间。因此，$T_{\infty,j}$ 是余等距算子，当且仅当 $\operatorname{Ran} T_{\infty,j} = \mathcal{H}_\infty$。由于 $\bigcup_m \psi_m(\mathcal{H}_m)$ 的稠密性，只需证明对于每个 $m \in I$, $\psi_m(\mathcal{H}_m) \subseteq \operatorname{Ran} T_{\infty,j}$。固定 $m \in I$。根据假设，存在 $n > m$ 使得 $T_{n,j} T_{n,j}^* \varphi_{n,m} = \varphi_{n,m}$。因此，$\varphi_{n,m}(\mathcal{H}_m) \subseteq \operatorname{Ran} T_{n,j}$。结合 $\psi_m = \psi_n \varphi_{n,m}$ 与 $\psi_n T_{n,j} = T_{\infty,j}(I_{E_j} \otimes \psi_n)$，得到

$$\psi_m(\mathcal{H}_m) = \psi_n \varphi_{n,m}(\mathcal{H}_m) \subseteq \psi_n\left(\operatorname{Ran} \widetilde{T}_{n,j}\right) \subseteq \operatorname{Ran} \widetilde{T}_{\infty,j}.$$

因此，对所有 $m \in I$，$\psi_m(\mathcal{H}_m) \subseteq \operatorname{Ran} T_{\infty,\,j}$，故 $\operatorname{Ran} T_{\infty,\,j} = \mathcal{H}_\infty$。等价地，$T_{\infty,\,j} T_{\infty,\,j}^* = I_{\mathcal{H}_\infty}$，也就是说，$(\sigma_\infty,\ T_{\infty,\,j})$ 是完全余等距的。

最后，若 $T_{n,\,j} T_{n,\,j}^* = I_{\mathcal{H}_n}$，$\forall\, n \in I$，则每个 $T_{n,\,j}^*$ 都是等距算子。由引理 2.11 可知，$T_{\infty,\,j}^*$ 也是等距算子，因此 $(\sigma_\infty,\ T_{\infty,\,j})$ 是完全余等距的。□

注8.5。对所有 $m \in I$，存在 $n > m$ 使得 $T_{n,\,j} T_{n,\,j}^* \varphi_{n,\,m} = \varphi_{n,\,m}$ 是确保对所有 $m \in I$，$\psi_m(\mathcal{H}_m) \subseteq \operatorname{Ran} T_{\infty,\,j}$，进而使得 $T_{\infty,\,j}$ 余等距的自然（且最小）条件。

更强的假设 $T_{n,j} T_{n,j}^* = I_{\mathcal{H}_n}$ 对某个 n 成立，意味着上述关系对每个 $m \le n$ 都成立，但通常并不能保证对所有 $p \ge n$ 都覆盖 $\psi_p(\mathcal{H}_p)$。如果改为假设对每个 m，都存在 $n \ge m$ 使得 $T_{n,j} T_{n,j}^* = I_{\mathcal{H}_n}$（即最终余等距性），那么所需的假设便自动成立。

引理 8.6. 设$(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 是 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的完全共变扭曲等距表示，具有相应的扭曲 $\{t_{ij} \otimes U_{ij}\}_{i \neq j}$，且该表示是完全余等距的。那么，该表示是双重扭曲的。

证明。对每个 $i,$，我们有 $T_i T_i^* = I_{\mathcal{H}_\circ}$ 此外，对 I_k 中所有 $i \neq j$，我们有 $T_i(I_{E_i} \otimes T_j) = T_j(I_{E_j} \otimes T_i)\,(t_{ij} \otimes U_{ij})$. 这意味着 $(I_{E_i} \otimes T_j)(t_{ij} \otimes U_{ij})^* = T_i^* T_j (I_{E_j} \otimes T_i)$. 因此，

$$\widetilde{T}_i^* \widetilde{T}_j = (I_{E_i} \otimes \widetilde{T}_j)(t_{ji} \otimes U_{ji})(I_{E_j} \otimes \widetilde{T}_i^*),$$

证明我们的断言。 □

结合（8.4）与引理 8.1—8.4，我们得到以下结果：

定理 8.7。设 $\{(\mathcal{H}_m, \varphi_{n,\,m})\}_{m \in I}$ 是希尔伯特空间的一个直接系统，其直接极限为 $(\mathcal{H}_\infty, \psi_m)$。对于每个 $m \in I$，设 $(\sigma_m, T_{m,\,1}, \dots, T_{m,\,k})$ 是乘积系统 $\mathbb{E} = \{E_i\}_{i=1}^k$ 在 $\mathcal{H}_m$上的双重扭曲等距协变表示，其扭曲为 $\{t_{ij} \otimes U_{m,ij}\}_{i \neq j}$。假设对于所有 $m \le n$、$a \in \mathcal{A}$以及所有 $i \neq j$,

$$\varphi_{n,m} \widetilde{T}_{m,i} = \widetilde{T}_{n,i}(I_{E_i} \otimes \varphi_{n,m}), \quad \varphi_{n,m} U_{m,ij} = U_{n,ij} \varphi_{n,m}, \quad \varphi_{n,m} \sigma_m(a) = \sigma_n(a) \varphi_{n,m}.$$

则存在乘积系统 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{H}_\infty$上的扭曲等距协变表示 $(\sigma_\infty, T_{\infty,\,1}, \dots, T_{\infty,\,k})$，以及酉算子 $\{U_{\infty,ij}\}_{i \neq j}$，使得 $\{t_{ij} \otimes U_{\infty,ij}\}_{i \neq j}$ 是满足以下条件的相应的扭曲：

(1) 对于任意 $m \in I$、$a \in \mathcal{A}$ 和 $i \neq j$,

$$\psi_m \widetilde{T}_{m,i} = \widetilde{T}_{\infty,i}(I_{E_i} \otimes \psi_m), \qquad \psi_m U_{m,ij} = U_{\infty,ij} \psi_m, \qquad \psi_m \sigma_m(a) = \sigma_\infty(a) \psi_m.$$

等价地，对于每个 $m \in I$，

$$T_{\infty,i}(x_i)|_{\mathcal{H}_m} = T_{m,i}(x_i), \quad U_{\infty,ij}|_{\mathcal{H}_m} = U_{m,ij}, \quad \sigma_\infty(a)|_{\mathcal{H}_m} = \sigma_m(a).$$

(2) 对于某个 $j \in I_k$，以及每个 $m \in I$，若存在 $n > m$ 使得

$$\widetilde{T}_{n,j}\,\widetilde{T}^*_{n,j}\,\varphi_{n,m} = \varphi_{n,m},$$

则 $(\sigma_\infty, T_{\infty,j})$ 是完全余等距的。此外，若

$$\widetilde{T}_{n,j}\,\widetilde{T}^*_{n,j} = I_{\mathcal{H}_n} \qquad \textit{for all } n \in I,$$

~则 $T_{\infty,j}$ 是一个余等距算子。特别地，若对每个 $j \in I_k$，这些条件中任一条件成立，则表示 $(\sigma_\infty, T_{\infty,1}, \dots, T_{\infty,k})$ 是完全余等距的，因而是双重扭曲的。

作为上述定理的直接推论，我们得到关于由 [18] 构成的 n 元组双扭曲等距算子的以下优美结果。回顾一下，若复数域 n 上的等距算子元组 $(V_1, \dots, V_n)$ 关于酉算子的交换族 $\{U_{ij}\}_{i<j}$（其中 $U_{ji} := U_{ij}^*$）是双重扭曲的，当且仅当

$$V_iV_j = U_{ij}V_jV_i, \qquad V_i^*V_j = U_{ij}^*V_jV_i^*, \quad V_kU_{ij} = U_{ij}V_k \quad (i,j,k = I_n,\, i \neq j).$$

定理 8.8。设 $V = (V_1, \dots, V_k)$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的双重扭曲等距算子元组，其相应的扭曲为 $\{U_{ij}\}_{i\neq j} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么 V 有一个双重扭曲酉扩张。

证明。取 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ 和 $E_i = \mathbb{C}$，使得 $t_{ij} = I$。我们的目标是构造一个希尔伯特空间的直接系统 $(\mathcal{H}_m, \varphi_{n,m})_{m\in\mathbb{Z}_+}$，其直接极限为 $(\mathcal{H}_\infty, \psi_m)$。对每个 $m \in \mathbb{Z}_+$，令 $\mathcal{H}_m = \mathcal{H}$，，并定义 $\sigma_m : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如下：

$$\sigma_m(\lambda) = \lambda I_{\mathcal{H}}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Also 令 $U_{m,ij} := U_{ij}$. 对于 $i \in I_k$，，令 $Z_i := \prod_{j\neq i} U_{ji}$，，并定义 $T_{m,i} : E_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如下：

$$T_{m,i}(1) := M_{m,i} := Z_i^m V_i, \qquad \text{so that} \qquad \widetilde{T}_{m,i}(\lambda \otimes h) = \lambda\, Z_i^m V_i h, \quad (\lambda \in \mathbb{C},\, h \in \mathcal{H}).$$

~由于每个 V_i 都是等距算子且 Z_i 是酉算子，因此每个 $T_{m,i}$ 都是等距算子。现在验证，对每个 $m \in \mathbb{Z}_+$，元组 $(\sigma_m, T_{m,1}, \dots, T_{m,k})$ 构成 $\mathbb{E}$的双重扭曲等距协变表示。令 $a, b, \xi_i \in \mathbb{C}$，则

$$T_{m,i}(a\xi_i b) = a\xi_i b\, Z_i^m V_i = \sigma_m(a)\,\xi_i\, Z_i^m V_i\, \sigma_m(b) = \sigma_m(a)\, T_{m,i}(\xi_i)\, \sigma_m(b).$$

我们检查每个 $m \in \mathbb{Z}_+$ 的扭曲关系：首先注意，由于 $\{U_{ij}\}_{i\neq j}$ 是一个交换族，因此 $Z_iZ_j = Z_jZ_i$, $\forall i,\ j \in I_k$. 此外 $U_{ij} \in \{V_\ell\}'$, $\forall i \neq j,\ \ell \in I_k$. 因此，对于 $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$ 和$h \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{m,i}(I \otimes \widetilde{T}_{m,j})(\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes h) &= \lambda_1\, Z_i^m V_i \left(\lambda_2\, Z_j^m V_j h\right) = \lambda_1\lambda_2\, Z_i^m Z_j^m V_iV_j h = \lambda_1\lambda_2\, U_{ij}\, Z_j^m Z_i^m V_jV_i h \\ &= \widetilde{T}_{m,j}(I \otimes \widetilde{T}_{m,i})(I \otimes U_{ij})(\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes h).\end{aligned}$$

对于伴随关系，请注意，对每个 $j \in I_k$,

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{T}^*_{m,j}h,\ \lambda \otimes h_1 \right\rangle &= \left\langle h,\ \widetilde{T}_{m,j}(\lambda \otimes h_1) \right\rangle = \left\langle h,\ \lambda Z_j^m V_j h_1 \right\rangle = \lambda \left\langle h,\ Z_j^m V_j h_1 \right\rangle = \lambda \left\langle V_j^* Z_j^{*m} h,\ h_1 \right\rangle \\ &= \left\langle 1 \otimes V_j^* Z_j^{*m} h,\ \lambda \otimes h_1 \right\rangle.\end{aligned}$$

~因此 $\widetilde{T}^*_{m,\ j}h = 1\otimes V_j^* Z_j^{*m}h$. 所以,

$$\begin{aligned}\widetilde{T}^*_{m,j}\widetilde{T}_{m,i}(\lambda\otimes h) &= \lambda\widetilde{T}^*_{m,j}Z_i^m V_i h\\ &= \lambda(1\otimes Z_j^{*m}V_j^* Z_i^m V_i h)\\ &= \lambda(1\otimes Z_i^m V_j^* V_i Z_j^{*m}h)\\ &= \lambda\otimes 1\otimes Z_i^m V_i U_{ji}^* V_j^* Z_j^{*m}h\\ &= (I_{E_j}\otimes Z_i^m V_i U_{ij})(I_{E_i\otimes E_j}\otimes V_j^* Z_j^{*m})(\lambda\otimes 1\otimes h)\\ &= (I_{E_j}\otimes Z_i^m V_i)(t_{ij}\otimes U_{ij})(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}^*_{m,j})(\lambda\otimes h)\\ &= (I_{E_j}\otimes\widetilde{T}_{m,i})(t_{ij}\otimes U_{ij})(I_{E_i}\otimes\widetilde{T}^*_{m,j})(\lambda\otimes h).\end{aligned}$$

~ ~ ~ ~ ~因此，$\widetilde{T}^*_{m,\ j}\widetilde{T}_{m,\ i} = (I_{E_j}\otimes T_{m,\ i})(I\otimes U_{ij})(I_{E_i}\otimes T^*_{m,\ j})$。此外，很容易证明$U_{m,\ ij}\widetilde{T}_{m,\ i} = \widetilde{T}_{m,\ i}(I_{E_i}\otimes U_{m,\ ij})$。

现在我们构造连接映射 φ_{nm}，$n\geq m$。令 $\Phi := V_1V_2\cdots V_k$ 并定义平稳连接映射:

$$\varphi_{m+1,m} := \Phi \Longrightarrow \varphi_{n,m} := \Phi^{n-m}\quad (n\geq m).$$

我们断言，对于所有 $m\leq n$、$a\in\mathcal{A}$ 以及所有 $i\neq j$，以下条件成立:

$$\varphi_{n,m}\widetilde{T}_{m,i} = \widetilde{T}_{n,i}(I_{E_i}\otimes\varphi_{n,m}),\quad \varphi_{n,m}U_{m,ij} = U_{n,ij}\varphi_{n,m},\quad \varphi_{n,m}\sigma_m(a) = \sigma_n(a)\varphi_{n,m}.$$

由于对于所有 m 都有$U_{m,\ ij} = U_{ij}$，因此相容条件$\varphi_{n,\ m}U_{m,\ ij} = U_{n,\ ij}\varphi_{n,\ m}$ 显然成立。同样地，根据 σ_m 的定义，$\varphi_{n,\ m}\sigma_m(a) = \sigma_n(a)\varphi_{n,\ m}$ 自动成立。接下来，注意到对于每个 i，$Z_i\Phi = \Phi Z_i$. 因此，对于 $\lambda\otimes h\in E_i\otimes\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\varphi_{n,m}\widetilde{T}_{m,i}(\lambda\otimes h) &= \Phi^{n-m}(\lambda Z_i^m V_i h) = \lambda Z_i^m(V_1\cdots V_k)^{n-m}V_i h = \lambda Z_i^m Z_i^{n-m}V_i\Phi^{n-m}h\\ &= \widetilde{T}_{n,i}(\lambda\otimes\varphi_{n,m}h) = \widetilde{T}_{n,i}(I_{E_i}\otimes\varphi_{n,m})(\lambda\otimes h).\end{aligned}$$

因此，定理 8.7 的所有假设均已满足。于是，我们得到一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\infty$ 以及其上的扭曲等距协变表示 $(\sigma_\infty, T_{\infty,1},\ldots,T_{\infty,k})$，其相应的扭曲为$\{t_{ij}\otimes U_{\infty,ij}\}_{i\neq j}$，使得

$$T_{\infty,i}(\lambda)|_{\mathcal{H}} = T_{m,i}(\lambda),\qquad U_{\infty,ij}|_{\mathcal{H}} = U_{ij},\qquad \sigma_\infty(a)|_{\mathcal{H}} = \sigma(a).$$

特别地，令 $\lambda = 1$ 和 $m = 0$，即可得到

$$T_{\infty,i}(1)|_{\mathcal{H}} = V_i,\qquad U_{\infty,ij}|_{\mathcal{H}} = U_{ij},\qquad \sigma_{(\infty)}(a)\big|_{\mathcal{H}} = \sigma(a).$$

此外，由伴随公式可得,

$$\widetilde{T}_{n,j}\widetilde{T}^*_{n,j} = Z_j^n V_j V_j^* Z_j^{*n} = V_j V_j^*,\qquad \text{for all } n.$$

~ ~因此，对于每个 $m\in I$和 $j\in I_k$，双重扭曲关系推出 $T_{m+1,j}T^*_{m+1,j}\circ\varphi_{m+1,m} = \varphi_{m+1,m}$.~这意味着对于每个 $j\in I_k$，有序对 $(\sigma,T_{\infty,j})$ 都是完全余等距的。因此，表示 $(\sigma,T_{\infty,1},\ldots,T_{\infty,k})$ 是完全余等距的。由此，$(T_{\infty,1}(1)\ldots,T_{\infty,k}(1))$ 是 $(V_1,\ldots,V_k)$ 的扭曲酉扩张。因此，由引理 8.6 可知，它是一个双重扭曲酉扩张。□

注 8.9。如果存在一个子集 $A\subseteq I_n$，使得对于每个 $i\in A$，V_i 都是移位算子（否则为酉算子），那么只需取

$$\Phi := \prod_{i\in A} V_i,$$

在上述证明中。

当对所有 $i \neq j$ 都有 $U_{ij} = z_{ij}$ 时，上述定理便恢复了 Jeu 和 Pinto [6] 所研究的双重非交换等距算子类的酉扩张。

Co论8.10. 设 $V = (V_1, \dots, V_n)$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个满足条件的 n–元组等距算子

$$V_j V_i = z_{ji} V_i V_j, \qquad V_i^* V_j = \overline{z_{ij}} V_j V_i^* \qquad (i \neq j),$$

对于满足 $z_{ij}\, z_{ji} = 1$ 和 $z_{ii} = 1$ 的标量 $z_{ij} \in \mathbb{T}$，则 V 存在酉扩张。

此外，当 $U_{ij} = I$ 对所有 $i \neq j$成立时，该定理给出了双重交换的k等距算子组的酉扩张，Sarkar [21] 和 S-loci´nski [25]曾对此进行研究。

推论 8.11. 如果 $V = (V_1, \dots, V_k)$ 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的双重交换 k–元组等距算子，也就是说，

$$V_i V_j = V_j V_i \quad and \quad V_i^* V_j = V_j V_i^* \qquad (i \neq j),$$

那么 V 具有酉扩张。

下面的例子直接展示了上述推论的应用。

例 8.12。 $H^2(\mathbb{D}^n)$ 上的乘法算子$(M_{z_1}、 \cdots、 M_{z_n})$ 具有酉扩张。

设 $(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上乘积系统 $\mathbb{E}$ 的 $\mathbb{Z}_+^k$ 上的 C^*-对应的双重扭曲等距协变表示。由定理 4.6，可写为 $\mathcal{H} = \bigoplus_{A \subseteq I} \mathcal{H}_A$.

固定满足 $\mathcal{H}_A \neq \{0\}$ 的 $A = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq I_k$。命题 7.8 保证存在酉算子$\sim \Pi_A$: $\mathcal{H}_A \xrightarrow{=} \mathcal{F}(E_A)^{\otimes_\sigma k} \otimes_\sigma \mathcal{D}_A$，以及 $\mathcal{F}(E_A)$ 上的元组 $(\sigma_A, M_{A,1}, \dots, M_{A,k})$，使其通过 Π_A 与限制表示 $\left(\sigma|_{\mathcal{H}_A}, T_1|_{\mathcal{H}_A}, \dots, T_k|_{\mathcal{H}_A}\right)$ 酉等价。

对每个 $i \in I_k$，令 $M_i = \bigoplus_{A \subseteq I_k} M_{A,\, i}$ 和 $\sigma' = \bigoplus_{A \subseteq I_k} \sigma_A$。对每个 $A \subseteq I_k$，若 $(\sigma_A, M_{A,\,1}, \dots, M_{A,\,k})_{A \subseteq I_k}$ 在 $\mathcal{F}(E_A)$ 上 $\otimes_\sigma \mathcal{D}_A$ 存在双重扭曲酉扩张，则 $(\sigma', M_1, \dots, M_k)$ 在$\bigoplus \mathcal{F}(E_A)$ 上$\otimes_\sigma \mathcal{D}_A$也存在双重扭曲酉扩张。因此，我们得到 $(\sigma, T_1, \dots, T_k)$ 的双重扭曲酉扩张。 因此-$_{A \subseteq I_k}$

，只需为 $A \subseteq I_k$ 建立定理 8.7 的一个类似结论。由于在整个构造过程中我们固定了子集$A \subseteq I_k$，此后将省略下标“A”。因此，我们用 $(\sigma_m, M_{m,\,1}, \dots, M_{m,\,k})$ 表示 $\mathcal{H}_m$ 上的表示，其扭曲为 $t_{ij} \otimes U_{m,\,ij}$。

推论 *8.13.* 设 $\{(\mathcal{H}_m, \varphi_{n,m})\}_{m \leq n \in I}$ 是希尔伯特空间的一个直接系统，其直接极限为 $(\mathcal{K}_A, \psi_m)$。对每个 $m \in I$，设 $(\sigma_m, M_{m,1}, \dots, M_{m,k})$ 是乘积系统 $\mathbb{E} = \{E_i\}_{i \in I_k}$ 在 $\mathcal{H}_m$ 上的一个双重扭曲等距协变表示，扭曲为 $\{\, t_{ij} \otimes U_{m,ij} \,\}_{i \neq j}$. 。令 $\mathcal{K}_A = \mathcal{F}(E_A) \otimes_\sigma \mathcal{D}_A$，初始表示为 $(\sigma_1, M_{1,1}, \dots, M_{1,k}) = (\sigma_A, M_{A,1}, \dots, M_{A,k})$。假设对所有 $m \leq n$、所有 $a \in \mathcal{A}$ 以及所有 $i \neq j$,

$$\varphi_{n,m}\, \widetilde{M}_{m,i} = \widetilde{M}_{n,i}\, (I_{E_i} \otimes \varphi_{n,m}), \qquad \varphi_{n,m}\, U_{m,ij} = U_{n,ij}\, \varphi_{n,m}, \qquad \varphi_{n,m}\, \sigma_m(a) = \sigma_n(a)\, \varphi_{n,m}.$$

则存在乘积系统 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{K}_A$ 上的一个扭曲等距协变表示 $(\tau_A, V_{A,1}, \dots, V_{A,k})$，其扭曲为 $\{\, t_{ij} \otimes W_{A,ij} \,\}_{i \neq j}$，使得

$$\widetilde{V}_{A,i}\Big|_{E_i \otimes \mathcal{H}_1} = \widetilde{M}_{A,i}, \qquad W_{A,ij}|_{\mathcal{H}_1} = U_{A,ij}, \qquad \tau_A(a)|_{\mathcal{H}_1} = \sigma_A(a).$$

此外，对于 $j \in I_k$，如果对于所有 $m \in I$，均存在 $n > m$ 使得

$$\widetilde{M}_{n,j}\, \widetilde{M}_{n,j}^*\, \varphi_{n,m} = \varphi_{n,m},$$

or

$$\widetilde{M}_{n,j}\,\widetilde{M}^*_{n,j} = I_{\mathcal{H}_n} \qquad \forall\, n \in I,$$

那么 $(\tau_A, V_{A,j})$ 是余等距的。特别地，如果任一条件对每个 $j \in I_k$ 都成立，那么$(\tau_A, V_{A,1}, \ldots, V_{A,k})$ 是完全余等距的（因此也是双重扭曲的）。

我们通过以下例子来说明这个推论:

例 8.14. 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺交换 C^*代数，且 $\mathbb{E} = \{E_i\}_{i\in I_k}$ 是一个定义在 $\mathbb{Z}_+^k$ 上的 C^*对应乘积系统。对每个 $i \in I_k$，取 $E_i = \mathcal{A}$ 作为定义在 $\mathcal{A}$ 上的对应，其左右作用分别为通常的 $a \cdot x \cdot b := axb$，结构映射为 $t_{ij}: E_i \otimes_{\mathcal{A}} E_j \longrightarrow E_j \otimes_{\mathcal{A}} E_i$, $t_{ij}(a\otimes b) = b\otimes a$, $\forall a, x, b \in \mathcal{A}$. 设$(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 是乘积系统 $\mathbb{E}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的双重扭曲等距协变表示。那么 $(\sigma, T_1, \ldots, T_k)$ 存在酉扩张。

推论 8.13 之前的讨论表明，只需证明元组 $(\sigma_A,\ M_{A,\,1},\ \ldots\ldots,\ M_{A,\,k})$ 在 $\mathcal{F}(E_A) \otimes_\sigma \mathcal{D}_A$ 上的情形即可，其中 $A = \{i_1, \cdots, i_p\} \subseteq I_n$ 是任意的。因此，我们的目标是构造一个希尔伯特空间的直接系统 $\{(\mathcal{H}_m,\ \varphi_{n,\,m})\}_{m\le n\in I}$，并且对于每个 $m \in I$，构造乘积系统 $\mathbb{E} = \{E_i\}_{i\in I_k}$ 在 $\mathcal{H}_m$ 上的一个带扭曲 $\{\, t_{ij} \otimes U_{m,ij}\,\}_{i\neq j}$ 的双重扭曲等距协变表示 $(\sigma_m,\ M_{m,\,1},\ \ldots\ldots,\ M_{m,\,k})$，使得推论的所有假设均得到满足。

由于 $\mathcal{A}$ 是一个带单位的交换 C^*-代数，并且对每个 i 都有 $E_i = \mathcal{A}$，我们通过映射 $a\otimes b \mapsto ab$ 得到 $E_i \otimes_{\mathcal{A}} E_j \cong \mathcal{A}$。由于 $ab = ba$，这一识别是对称的，因此我们可以将 $t_{ij} =$ 识别为 $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$。此外，

$$\mathcal{F}(E_A) \otimes_\sigma \mathcal{D}_A \;=\; \ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A.$$

令 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+^{|A|}}$ 表示 $\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})$ 的典范正交归一基。回忆一下，对于 $n \in \mathbb{Z}_+^{|A|}$、$h \in \mathcal{D}_A$ 和 $\xi \in \mathcal{A}$, 利用识别 $\xi \otimes h = 1 \otimes \sigma(\xi)h$ 在 $\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{D}_A$ 中，我们有

$$\Pi_A\Big(\widetilde{T}_A^n(\xi\otimes h)\Big) = \xi\otimes h = e_n \otimes \sigma(\xi)\, h, \qquad \text{and} \qquad \Pi_A^*(e_n\otimes d) \;=\; \widetilde{T}_A^n(1\otimes d). \tag{8.5}$$

根据命题 7.8 (2)，对于任意的 $a \in \mathcal{A}$、$n \in \mathbb{Z}_+^{|A|}$ 和 $h \in \mathcal{D}_A$，我们得到

$$(\Pi_A\sigma(a)\Pi_A^*)(e_n\otimes h) = \phi_\infty(a)e_n\otimes h = ae_n\otimes h = e_n\otimes\sigma(a)h = (I_{\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})}\otimes\sigma(a))(e_n\otimes h).$$

因此，$\sigma_A(a) = \Pi_A\sigma(a)^{\Pi_A^*} = I_{\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})}\otimes\sigma(a)$. 引理 7.7(1) 表明 $\sigma(\mathcal{A})$ 约化 $\mathcal{D}_A$。因此，σ_A 是良定义的。此外，对于所有 $i \neq j$, 并再次利用引理 7.7 (2)，我们得到一个良定义的 $U_{A,ij}$，其定义如下

$$U_{A,ij} := \Pi_A\, U_{ij}\, \Pi_A^* = I_{\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})} \otimes U_{ij}.$$

令 $S_i \in \mathcal{B}\left(\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\right)$ 由 $S_ie_n = e_{\,n+e_i}$ 给出；这是第 i 个坐标上的单边移位。对于任意 $a \in \mathcal{A}$ 和 $i \in I_k$，算子 $M_{A,\,i}(a) \in \mathcal{B}\left(\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A\right)$ 可明确写为

$$M_{A,i}(a) = \begin{cases} S_{i_1}\otimes\sigma(a), & i = i_1,\\[2mm] S_{i_j}\otimes\sigma(a)\displaystyle\prod_{r=1}^{j-1} D_r[U_{i_j,i_r}], & i = i_j,\ 2\le j\le p,\\[2mm] I_{\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})}\otimes T_l(a)\displaystyle\prod_{r=1}^{p} D_r[U_{l,i_r}], & i = l \in A^{\mathrm{c}}. \end{cases}$$

这些公式由命题 7.8 (1) 得出。事实上，

$M_{A,\ i_1}(a)(e_n\otimes h) = \Pi_A T_{i_1}(a)\,\Pi_A^*(e_n\otimes h) = (T_a\otimes I_{\mathcal{D}_A})(e_n\otimes h) = a\otimes e_n\otimes h = e_{n+e_{i_1}}\otimes\sigma(a)h$. 对于 $2\le j\le p$,

$$\begin{aligned}(\Pi_A T_{i_j}(a)\Pi_A^*)(e_n\otimes h) &= \left(\prod_{r=1}^{j-1} D_{j-r}\big[W_{i_j,i_{j-r}}\big]\right)(T_a\otimes I_{\mathcal{D}_A})(e_n\otimes h)\\ &= \left(\prod_{r=1}^{j-1} D_{j-r}\big[W_{i_j,i_{j-r}}\big]\right)(a\otimes e_n\otimes h)\\ &= e_{n+e_{i_j}}\otimes\sigma(a)\prod_{r=1}^{j-1} D_r\big[U_{i_j,i_r}\big]h.\end{aligned}$$

对于 $l\in A^{\mathrm{c}}$,

$$\begin{aligned}(\Pi_A T_l(a)\Pi_A^*)(e_n\otimes h) &= \Big(I_{\mathcal{F}(E_A)}\otimes\widetilde{T_l}\Big)\left(\prod_{r=1}^{p} D_{p+1-r}\big[W_{l,i_{p+1-r}}\big]\right)(T_a\otimes I_{\mathcal{D}_A})(e_n\otimes h)\\ &= e_n\otimes T_l(a)\prod_{r=1}^{p} D_r\big[U_{l,i_r}\big]h.\end{aligned}$$

因此，我们得到一个双重扭曲等距协变表示 $(\sigma_A,\{M_{A,i}\}_{i\in I_k})$，其扭曲为$\{\,t_{ij}\otimes U_{A,ij}\,\}_{i\neq j}$。

现在，对每个 $m\in I$，令 $\mathcal{H}_m=\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A$，并构造乘积系统 $\mathbb{E}=\{E_i\}_{i\in I_k}$在 $\mathcal{H}_m$上的一个双重扭曲等距协变表示（σ_m，$M_{m,\ 1}$，…，$M_{m,\ k}$），其扭曲为 $\{\,t_{ij}\otimes U_{m,ij}\,\}_{i\neq j}$。首先令

$$X_{i_1}=I_{\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A}.$$

对每个 $i_j\in A\setminus\{i_1\}$，以及对每个 $l\in A^{\mathrm{c}}$，令

$$X_{i_j}=I_{\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})}\otimes\left(\prod_{r<j}U_{i_r i_j}\right),\qquad Y_l=I_{\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})}\otimes\left(\prod_{i\in A}U_{il}\right).$$

对于每个 $m\in I$ 和 $i\in I_k$，定义 $M_{m,i}\colon\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}\Big(\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A\Big)$，其映射为

$$M_{m,i}(a)\ =\ M_{A,i}(a)\,Z_i^m,\qquad\text{where}\qquad Z_i=\begin{cases}X_i, & i\in A,\\ Y_i, & i\in A^{\mathrm{c}}.\end{cases}$$

因此，我们得到一个映射 $\widetilde{M}_{m,i}\colon\mathcal{A}\otimes(\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A)\longrightarrow\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_{A,}$，使得对于 $a\in\mathcal{A}$ 和 $h\in\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A$,

$$\widetilde{M}_{m,i}(a\otimes h)\ =\ M_{A,i}(a)\,Z_i^m h.$$

由于 $\{U_{ij}\}_{i\neq j}$ 是一个交换族，对于所有 $a\in\mathcal{A}$，都有 $U_{ij}\,\sigma(a)=\sigma(a)\,U_{ij}$，并且 $U_{ij}\,T_k=T_k(I_{\mathcal{A}}\otimes U_{ij})$ $\forall k\in I_k$，根据 Z_l的定义，我们得到

$$M_{A,i}(a)\,Z_j^m=Z_j^m\,M_{A,i}(a),\qquad Z_\ell\,U_{A,ij}=U_{A,ij}\,Z_\ell,\qquad\forall\,i,j,\ell\in I_k,\ i\neq j. \tag{8.6}$$

最后，对所有 $m \in I$，定义

$$\sigma_{m,A} := \sigma_A = I \otimes \sigma, \qquad U_{m,A,ij} := U_{A,ij}.$$

注意，对于 $m = 0$，我们恢复了扭曲为 $\{ t_{ij} \otimes U_{A,ij} \}_{i \neq j}$ 的双重扭曲等距协变表示 $(\sigma_A, \{M_{A,i}\}_{i \in I_k})$。

命题 8.15。对于每个 $m \in I$，元组 $(\sigma_m, M_{m,1}, \ldots, M_{m,k})$ 都是乘积系统 $\mathbb{E}$ 的双重扭曲等距协变表示，扭曲为 $\{ t_{ij} \otimes U_{m,ij} \}_{i \neq j}$。

证明。固定 $m \in I$。根据构造，每个 $M_{A,i}$ 都是等距算子（若 $i \in A^c$ 则为酉算子），因此每个 $M_{m,i} = M_{A,i} Z_i^m$ 也都是等距算子（若 $i \in A^c$ 则为酉算子）。由于对所有 $i \neq j$，$[\sigma(\mathcal{A}) \; U_{ij}] = 0$，因此，对所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $i \in I_k$，$[\sigma_m(a) \; Z_i] = 0$。利用 $M_{A,i}$ 的协变性以及这一交换关系，对所有 $a, \; x, \; b \in \mathcal{A}$，

$$M_{m,i}(axb) = M_{A,i}(axb) Z_i^m = \sigma_A(a) \, M_{A,i}(x) \, \sigma_A(b) \, Z_i^m = \sigma_m(a) \, M_{m,i}(x) \, \sigma_m(b).$$

因此，$(\sigma_m, \; M_{m,1}, \ldots, \; M_{m,k})$ 是协变的。现在，对于 $l \in I_k$ 和 $i \neq j$，方程 8.6 蕴含

$$U_{m,ij} M_{m,l}(a) = U_{m,ij} M_{A,l}(a) Z_l^m = M_{A,l}(a) Z_l^m U_{m,ij} = M_{m,l}(a) \, U_{m,ij}, \qquad a \in \mathcal{A}.$$

因此，$\widetilde{U}_{m,ij} \widetilde{M}_{m,l} = \widetilde{M}_{m,l} (I_{\mathcal{A}} \otimes U_{m,ij})$。对于所有 $i \neq j$，$\forall a \in \mathcal{A}$，关系 $\widetilde{U}_{m,ij}^* = \widetilde{U}_{m,ji}$，以及 $\sigma_m(a) \widetilde{U}_{m,ij} = \widetilde{U}_{m,ij} \sigma_m(a)$ 都可由其定义直接得出。为证明扭曲关系，令 $a, \; b \in \mathcal{A}$ 和 $h \in \mathcal{H}_m$，

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_{m,i}(I_{\mathcal{A}} \otimes \widetilde{M}_{m,j})(a \otimes b \otimes h) &= M_{m,i}(a) \, M_{m,j}(b) \, h \\
&= M_{A,i}(a) \, Z_i^m M_{A,j}(b) \, Z_j^m h \\
&= M_{A,i}(a) M_{A,j}(b) \, Z_i^m Z_j^m h \qquad \text{(by (8.6))} \\
&= \widetilde{M}_{A,i}(I_{\mathcal{A}} \otimes \widetilde{M}_{A,j})(a \otimes b \otimes Z_i^m Z_j^m h) \\
&= \widetilde{M}_{A,j}(I_{\mathcal{A}} \otimes \widetilde{M}_{A,i})(t_{ij} \otimes U_{A,ij})(a \otimes b \otimes Z_i^m Z_j^m h) \\
&= M_{A,j}(b) M_{A,i}(a) U_{A,ij} Z_i^m Z_j^m h \\
&= M_{A,j}(b) Z_j^m M_{A,i}(a) Z_i^m U_{A,ij} h \qquad \text{(by (8.6))} \\
&= \widetilde{M}_{m,j}(b \otimes M_{m,i}(a) U_{A,ij} h) \\
&= \widetilde{M}_{m,j}(I_{\mathcal{A}} \otimes \widetilde{M}_{m,i})(t_{ij} \otimes U_{m,ij})(a \otimes b \otimes h)
\end{aligned}$$

因此，$\widetilde{M}_{m,i}(I_{\mathcal{A}} \otimes M_{m,j}) = \widetilde{M}_{m,j}(I_{\mathcal{A}} \otimes M_{m,i})(t_{ij} \otimes U_{m,ij})$。

为证明双重扭曲关系，首先注意到

$$\widetilde{M}_{m,i}^* = (I_{\mathcal{A}} \otimes Z_i^m)^* \, \widetilde{M}_{A,i}^*. \tag{8.7}$$

方程（8.6）表明，对于任意 $i, j \in I_k$，

$$Z_j^m \widetilde{M}_{A,i} = \widetilde{M}_{A,i}(I_{\mathcal{A}} \otimes Z_j^m) \implies Z_j^{*m} \widetilde{M}_{A,i} = \widetilde{M}_{A,i}(I_{\mathcal{A}} \otimes Z_j^{*m}).$$

利用这一等式以及双重扭曲关系，我们得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}^*_{m,i}\,\widetilde{M}_{m,j}(b\otimes h) &= \widetilde{M}^*_{m,i}\left(M_{A,j}(b)\,Z_j^m h\right)\\
&= (I_{\mathcal{A}}\otimes Z_i^m)^*\,\widetilde{M}^*_{A,i}\left(M_{A,j}(b)\,Z_j^m h\right)\\
&= (I_{\mathcal{A}}\otimes Z_i^{*m})\,\widetilde{M}^*_{A,i}\,\widetilde{M}_{A,j}(b\otimes Z_j^m h)\\
&= (I_{\mathcal{A}}\otimes Z_i^{*m})\,(I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}_{A,j})\,(t_{ji}\otimes U_{m,ji})\,(I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}^*_{A,i})\,(b\otimes Z_j^m h)\\
&= (I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}_{A,j})\,(t_{ji}\otimes U_{m,ji})\,(I_{\mathcal{A}}\otimes I_{\mathcal{A}}\otimes Z_i^{*m})\,(I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}^*_{A,i})\,(b\otimes Z_j^m h) \quad (\text{ by (8.6)}\\
&= (I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}_{A,j})\,(t_{ji}\otimes U_{m,ji})\,\left(I_{\mathcal{A}}\otimes (I_{\mathcal{A}}\otimes Z_i^m)^*\,\widetilde{M}^*_{A,i}\right)\,(b\otimes Z_j^m h)\\
&= (I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}_{A,j})\,(t_{ji}\otimes U_{m,ji})\,(I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}^*_{m,i})\,(I_{\mathcal{A}}\otimes Z_j^m)(b\otimes h) \quad (\text{ by (8.7)})\\
&= (I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}_{A,j})\,(t_{ji}\otimes U_{m,ji})\,(I_{\mathcal{A}}\otimes I_{\mathcal{A}}\otimes Z_j^m)\,(I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}^*_{m,i})\,(b\otimes h)\\
&= (I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}_{m,j})\,(t_{ji}\otimes U_{m,ji})\,(I_{\mathcal{A}}\otimes \widetilde{M}^*_{m,i})\,(b\otimes h).
\end{aligned}$$

因此，对每个 $m\in I$，元组 $(\sigma_m,\ M_{m,1},\ \ldots,\ M_{m,k})$ 是一个具有扭曲 $\{t_{ij}\otimes U_{m,ij}\}_{i\neq j}$ 的 $\mathbb{E}=\{E_i=\mathcal{A}\}_{i\in I_k}$ 的双重扭曲等距协变表示。□

现在，对于任意 $n,\ m\in I$，满足 $n\geq m$，定义 $\varphi_{n,m}$：$\ \ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A\longrightarrow\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A$，如下所示

$$\varphi_{m+1,m}:=S_A\otimes I_{\mathcal{D}_A},\quad \text{where } S_A:=\prod_{i_r\in A}S_{i_r}.$$

因此，$\varphi_{n,m}:=(S_A\otimes I_{\mathcal{D}_A})^{n-m},\ \ n\geq m.$。由于 S_A 是一个等距算子，每个 $\varphi_{n,m}$ 都是等距算子，并且对所有 $m\leq n\leq k$，我们有

$$\varphi_{k,n}\circ\varphi_{n,m}=\varphi_{k,m},\qquad \varphi_{m,m}=I_{\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A}.$$

因此，$\{(\mathcal{H}_m,\ \varphi_{n,m})\}_{m\leq n\in I}$，其中 $\mathcal{H}_m:=\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A$，构成一个希尔伯特空间的直接系统。我们将其直接极限记为 $(\mathcal{K}_A,\ \psi_m)_{m\in I}$，也就是说，存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{K}_A$ 和等距算子$\psi_m:\ \mathcal{H}_m\to\mathcal{K}_A$，使得对所有 $m\leq n$、$\psi_n\circ\varphi_{n,m}=\psi_m$，以及 $\mathcal{K}_A=$，$\{\psi_m(\mathcal{H}_m)$ 张成 $m\in I\}$.：根据命题 8.15，对每个 $m\in I$，$(\sigma_m,\ M_{m,1},\ \ldots,\ M_{m,k})$ 是一个具有扭曲 $\{t_{ij}\otimes U_{m,ij}\}_{i\neq j}$ 的双重扭曲等距协变表示。利用上文定义的映射，我们现在提出如下断言。

命题 8.16。带有扭曲$\{t_{ij}\otimes U_{A,ij}\}_{i\neq j}$ 的双重扭曲等距协变表示$(\sigma_A,\{M_{A,i}\}_{i\in I_k})$ 存在一个扭曲等距协变扩张。

证明。对于任意 $i\in I_k$，我们首先断言 $\varphi_{n,m}\widetilde{M}_{m,i}=\widetilde{M}_{n,i}(I_{\mathcal{A}}\otimes\varphi_{n,m})$。固定 $e_s\otimes d\in\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|})\otimes\mathcal{D}_A$，其中 $s=(s_{i_1},\ \ldots,\ s_{i_p})\in\mathbb{Z}_+^{|A|}$。对于 $j=1$、$a\in\mathcal{A}$ 和 $m\in I$，我们有

$$\widetilde{M}_{m,i_1}(a\otimes e_s\otimes d)=(S_{i_1}\otimes\sigma(a))(e_s\otimes d)=e_{s+e_{i_1}}\otimes\sigma(a)d.$$

因此，令 $e(A):=\sum_{i\in A}e_i$，

$$\varphi_{n,m}\widetilde{M}_{m,i_1}(a\otimes e_s\otimes d)=(S_A\otimes I)^{n-m}(e_{s+e_{i_1}}\otimes\sigma(a)d)=e_{s+e_{i_1}+(n-m)e(A)}\otimes\sigma(a)d.$$

另一方面，

$$\widetilde{M}_{n,i_1}(I_{\mathcal{A}}\otimes\varphi_{n,m})(a\otimes e_s\otimes d)=\widetilde{M}_{n,i_1}(a\otimes e_{s+(n-m)e(A)}\otimes d)=e_{s+e_{i_1}+(n-m)e(A)}\otimes\sigma(a)d.$$

Hence,

$$\varphi_{n,m}\widetilde{M}_{m,i_1}=\widetilde{M}_{n,i_1}(I_{\mathcal{A}}\otimes\varphi_{n,m}).$$

现在对于所有 $i_j \in A \setminus \{i_1\}$,

$$\widetilde{M}_{A,i_j}(a \otimes e_s \otimes d) = e_{s+e_{i_j}} \otimes \sigma(a) \left(\prod_{r<j} U_{i_j,i_r}^{s_{i_r}} \right) d,$$

因此

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{m,i_j}(a \otimes e_s \otimes d) &= M_{m,i_j}(a)(e_s \otimes d) \\ &= M_{A,i_j}(a)\, Z_{i_j}^m(e_s \otimes d) \\ &= e_{s+e_{i_j}} \otimes \sigma(a) \left(\prod_{r<j} U_{i_j,i_r}^{s_{i_r}} \right) \left(\prod_{r<j} U_{i_r,i_j}^{m} \right) d \\ &= e_{s+e_{i_j}} \otimes \sigma(a) \left(\prod_{r<j} U_{i_j,i_r}^{s_{i_r}-m} \right) d. \end{aligned}$$

应用 $\varphi_{n,\ m} = (S_A \otimes I)^{n-m}$ 得到

$$\varphi_{n,m}\, \widetilde{M}_{m,i_j}(a \otimes e_s \otimes d) = e_{s+e_{i_j}+(n-m)e(A)} \otimes \sigma(a) \left(\prod_{r<j} U_{i_j,i_r}^{s_{i_r}-m} \right) d.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{n,i_j}(I_{\mathcal{A}} \otimes \varphi_{n,m})(a \otimes e_s \otimes d) &= \widetilde{M}_{n,i_j}(a \otimes e_{s+(n-m)e(A)} \otimes d) \\ &= M_{A,i_j}(a)\, Z_{i_j}^n(e_{s+(n-m)e(A)} \otimes d) \\ &= e_{s+e_{i_j}+(n-m)e(A)} \otimes \sigma(a) \left(\prod_{r<j} U_{i_j,i_r}^{s_{i_r}+(n-m)} \right) \left(\prod_{r<j} U_{i_r,i_j}^{n} \right) d \\ &= e_{s+e_{i_j}+(n-m)e(A)} \otimes \sigma(a) \left(\prod_{r<j} U_{i_j,i_r}^{s_{i_r}-m} \right) d. \end{aligned}$$

因此，对于所有的 $m \le n$ 和所有的 $i_j \in A$,

$$\varphi_{n,m}\, \widetilde{M}_{m,i_j} = \widetilde{M}_{n,i_j}\, (I_{\mathcal{A}} \otimes \varphi_{n,m}).$$

对于 $l \in A^{\mathrm{c}}$, $M_{A,l}(a)(e_s \otimes d) = e_s \otimes T_l(a) \left(\prod_{r=1}^{p} U_l^{s_{i_r},i_r}\right) d.$ 因此,

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,m}\, \widetilde{M}_{m,l}(a \otimes e_s \otimes d) &= (S_A \otimes I)^{n-m} \left(I \otimes T_l(a) \left(\prod_{i_r \in A} U_{l,i_r}^{s_{i_r}} \right) \right) Y_l{}^m (e_s \otimes d) \\
&= (S_A \otimes I)^{n-m} \left(e_s \otimes T_l(a) \left(\prod_{i_r \in A} U_{l,i_r}^{s_{i_r}} \right) \left(\prod_{i_r \in A} U_{i_r,l}^{m} \right) d \right) \\
&= e_{\,s+(n-m)e(A)} \otimes T_l(a) \left(\prod_{i_r \in A} U_{l,i_r}^{s_{i_r}-m} \right) d.
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_{n,l}(I \otimes \varphi_{n,m})(a \otimes e_s \otimes d) &= \widetilde{M}_{n,l}(a \otimes e_{\,s+(n-m)e(A)} \otimes d) \\
&= M_{A,l}(a)\, Y_l{}^n (e_{\,s+(n-m)e(A)} \otimes d) \\
&= e_{\,s+(n-m)e(A)} \otimes T_l(a) \left(\prod_{i_r \in A} U_{l,i_r}^{s_{i_r}+(n-m)} \right) \left(\prod_{i_r \in A} U_{i_r,l}^{n} \right) d \\
&= e_{\,s+(n-m)e(A)} \otimes T_l(a) \left(\prod_{i_r \in A} U_{l,i_r}^{s_{i_r}-m} \right) d.
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $m \le n$ 和 $l \in A^c$,

$$\varphi_{n,m}\, \widetilde{M}_{m,l} \;=\; \widetilde{M}_{n,l}\, (I_{\mathcal{A}} \otimes \varphi_{n,m}).$$

由此可得该结论。最后，对于所有 $a \in \mathcal{A}$ 满足 $m \le n$,

$$\varphi_{n,m}\, \sigma_m(a) = (S_A \otimes I)^{n-m} (I \otimes \sigma(a)) = (I \otimes \sigma(a))(S_A \otimes I)^{n-m} = \sigma_n(a)\, \varphi_{n,m},$$

并且对于所有属于 I_k的 $i \neq j$,

$$\varphi_{n,m}\, U_{m,ij} = (S_A \otimes I)^{n-m} (I \otimes U_{ij}) = (I \otimes U_{ij})(S_A \otimes I)^{n-m} = U_{n,ij}\, \varphi_{n,m}.$$

因此，推论 8.13 的所有假设均已满足，从而得到 $\mathbb{E}$ 在 $\mathcal{K}_A$上的扭曲等距协变扩张 $(\tau_A,\ V_{A,\,1},\ \ldots,\ V_{A,\,k})$，其扭曲为 $\{\, t_{ij} \otimes W_{A,ij} \,\}_{i \neq j}$，使得

$$\widetilde{V}_{A,i}\Big|_{E_i \otimes \mathcal{H}_0} = \widetilde{M}_{A,i}, \qquad W_{A,ij}|_{\mathcal{H}_0} = U_{A,ij}, \qquad \tau_A(a)|_{\mathcal{H}_0} = \sigma_A(a).$$

至此，该断言的证明完成。 □

现在我们声称，这个延拓是双重扭曲的，事实上还是酉算子。为验证这一点，我们需要计算每个 $i \in A$ 对应的 $\widetilde{M}_{A,i}$ 的伴随。首先注意，任意 $\zeta \in \mathcal{A} \otimes_\sigma (\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A)$ 都可以写成如下形式

$$\zeta = \sum_{k,l} b_{kl}\, (a_{kl} \otimes e_k \otimes h_l) = \sum_{k,l} b_{kl}\, \left(1 \otimes e_k \otimes \sigma(a_{kl}) h_l\right), \qquad b_{kl} \in \mathbb{C},\ a_{kl} \in \mathcal{A}.$$

设 $\sigma(a_{kl})h_l = \sum_m d_m^{(k,l)} h_m$，且 $c_{km} = \sum_l b_{kl} d_m^{(k,l)}$。那么

$$\zeta = \sum_{k,m} c_{km}\,(1 \otimes e_k \otimes h_m), \qquad \sum_{k,m} |c_{km}|^2 < \infty.$$

在由 $a \otimes (\xi \otimes h) \longmapsto \xi \otimes \sigma(a)h$ 给出的识别 $\mathcal{A} \otimes_\sigma (\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A) \cong \ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A$ 下，向量 $\{\,1 \otimes e_k \otimes h_m\,\}_{k,m}$ 对应于标准正交基 $\{e_k \otimes h_m\}_{k,m}$，因此构成 $\mathcal{A} \otimes_\sigma (\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A)$ 的标准正交基。因此，$\{\,1 \otimes e_k \otimes h_m\,\}_{k,m}$ 是 $\mathcal{A} \otimes_\sigma (\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A)$ 的标准正交基.

命题 8.17。设 $\{\,e_n \otimes h_m :\ n \in \mathbb{Z}_+^{|A|},\, m \in \mathbb{Z}_+\,\}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A$ 的标准正交基。对每个 $i_j \in A$，其伴随

$$\widetilde{M}^*_{A,i_j} : \ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A$$

由下式给出

$$\widetilde{M}^*_{A,i_j}(e_n \otimes h_m) = \begin{cases} 1 \otimes \left(e_{\,n-e_{i_j}} \otimes \prod_{r=1}^{j-1} U_{i_j,i_r}^{*\,n_{i_r}}\ h_m \right), & \text{if } n_{i_j} \geq 1, \\ 0, & \text{if } n_{i_j} = 0. \end{cases}$$

证明。令 $M^*_{A,i_j}(e_n \otimes h_m) = \sum_{k,p} a_{k,p}(1 \otimes e_k \otimes h_p)$ $a_{k,p} \in \mathbb{C}$. 那么

$$\begin{aligned} a_{k,p} &= \left\langle \widetilde{M}^*_{A,i_j}(e_n \otimes h_m),\, 1 \otimes e_k \otimes h_p \right\rangle \\ &= \left\langle e_n \otimes h_m,\, \widetilde{M}_{A,i_j}(1 \otimes e_k \otimes h_p) \right\rangle \\ &= \left\langle e_n \otimes h_m,\, e_{k+e_{i_j}} \otimes \prod_{r=1}^{j-1} D_r\left[U_{i_j,i_r}\right] h_p \right\rangle \\ &= \delta_{\,n,\,k+e_{i_j}} \left\langle h_m, \prod_{r=1}^{j-1} D_r\left[U_{i_j,i_r}\right] h_p \right\rangle. \end{aligned}$$

因此，$a_{k,\ p} \neq 0$ 当且仅当 $k = n - e_{i_j}$。令 $k = n - e_{i_j}$ 则

$$\begin{aligned} a_{n-e_{i_j},p} &= \left\langle h_m, \prod_{r=1}^{j-1} D_r[U_{i_j,i_r}] h_p \right\rangle \\ &= \left\langle h_m, \prod_{r=1}^{j-1} U_{i_j,i_r}^{k_{i_r}}\ h_p \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_{r=1}^{j-1} U_{i_j,i_r}^{*k_{i_r}}\ h_m, h_p \right\rangle. \end{aligned}$$

This further implies, $\widetilde{M}^*_{A,i_j}(e_n \otimes h_m) = \sum_{k,p} a_{k,p}\ (1 \otimes e_k \otimes h_p) = \sum_p a_{n-e_{i_j},p}\ \left(1 \otimes e_{n-e_{i_j}} \otimes h_p\right)$. Hence,

$$\begin{aligned}\widetilde{M}^*_{A,i_j}(e_n \otimes h_m) &= \sum_p \left\langle \prod_{r=1}^{j-1} U^{*(n-e_{i_j})_r}_{i_j,i_r} h_m, h_p \right\rangle \left(1 \otimes e_{n-e_{i_j}} \otimes h_p\right) \\ &= 1 \otimes e_{n-e_{i_j}} \otimes \sum_p \left\langle \prod_{r=1}^{j-1} U^{*(n-e_{i_j})_r}_{i_j,i_r} h_m, h_p \right\rangle h_p \\ &= 1 \otimes e_{n-e_{i_j}} \otimes \prod_{r=1}^{j-1} U^{*(n-e_{i_j})_r}_{i_j,i_r} h_m.\end{aligned}$$

由于 $s = n - e_{i_j}$，对于所有 $r < j$，我们有 $s_{i_r} = n_{i_r}$，且可以写成

$$\widetilde{M}^*_{A,i_j}(e_n \otimes h_m) = \begin{cases} 1 \otimes e_{n-e_{i_j}} \otimes \prod_{r=1}^{j-1} U^{*\,n_{i_r}}_{i_j i_r}\ h_m, & \text{if } n_{i_j} \geq 1, \\ 0, & \text{if } n_{i_j} = 0. \end{cases}$$

□

为了证明命题 8.16 中构造的扩张是一个双重扭曲酉表示，我们首先证明，任何完全余等距的扭曲表示实际上都必须满足双重扭曲关系。

定理 8.18。带有扭曲$\{ t_{ij} \otimes U_{A,ij} \}_{i \neq j}$的双重扭曲等距协变表示$(\sigma_A, \{M_{A,i}\}_{i \in I_k})$具有一个双重扭曲酉协变扩张。

证明。现在，对每个 $i_j \in A$，我们声称

$$\widetilde{M}^{(n)}_{A,i_j}\ \widetilde{M}^{*(n)}_{A,i_j} \circ \varphi_{n,m}\ =\ \varphi_{n,m}.$$

设 $e_s \otimes h \in \ell^2(\mathbb{Z}_+^{|A|}) \otimes \mathcal{D}_A$。则

$$\begin{aligned}\widetilde{M}^{(n)}_{A,i_j}\ \widetilde{M}^{*(n)}_{A,i_j} \circ \varphi_{n,m}(e_s \otimes h) &= \widetilde{M}_{A,i_j}\ X^n_{i_j}\ X^{*n}_{i_j}\ \widetilde{M}^*_{A,i_j}\ \left(e_{\,s+(n-m)e(A)} \otimes h\right) \\ &= \widetilde{M}_{A,i_j} \left(1 \otimes e_{\,s+(n-m)e(A)-e_{i_j}} \otimes \prod_{r=1}^{j-1} U^{*\,(s+(n-m)e(A)-e_{i_j})_r}_{i_j i_r} h\right) \\ &= e_{\,s+(n-m)e(A)} \otimes \prod_{r=1}^{j-1} U^{(s+(n-m)e(A)-e_{i_j})_r}_{i_j i_r} \prod_{r=1}^{j-1} U^{*\,(s+(n-m)e(A)-e_{i_j})_r}_{i_j i_r}\ h \\ &= e_{\,s+(n-m)e(A)} \otimes h \\ &= \varphi_{n,m}(e_s \otimes h).\end{aligned}$$

因此，对每个 $i_j \in A$，有序对 $(\sigma_A,\ M_{A,\ i_j})$ 是余等距的。对于每个 $j \in A^c$，我们已经知道 $(\sigma_A,\ M_{A,\ j})$ 是余等距的。因此，根据推论 8.13，我们得到所需的酉扩张。引理 8.6 进一步表明，该扩张是双重扭曲的。

□

Acknowledgements

作者感谢以色列海法的 Technion—以色列理工学院数学系，在本研究工作准备期间提供机构支持和良好的研究环境。

References

[1] C. A. Berger、L. A. Coburn 和 A. Lebow，《由交换等距算子生成的 C^*代数的表示与指标理论》，《泛函分析杂志》27 (1978)，第 1 期，51–99。[2] L. A. Coburn，《由等距算子生成的 C^*代数》，《美国数学会通报》73 (1967)，722–726。[3] N. J. Fowler，《希尔伯特双模的离散乘积系统》，《太平洋数学杂志》204 (2002)，第 2 期，335–375。[4] D. Ga˛spar 和 N. Suciu，《交换等距算子族的沃尔德分解》，《蒂米什瓦拉大学学报·数学系列》27 (1989)，第 2 期，31–38。[5] H. Helson 和 D. B. Lowdenslager，《多变量预测理论与傅里叶级数。II》，《数学学报》106 (1961)，175–213。[6] M. de Jeu 和 P. R. Pinto，《双重非交换等距算子的结构》，《数学进展》368，107149，35 页（2020）。[7] M. Kosiek 和 A. Octavio，《交换压缩算子 N 元组的 Wold 型扩张》，《数学研究》137 (1999)，第 1 期，81–91。[8] E. C. Lance，《 *Hilbert C^*-modules*》，伦敦数学学会讲义丛书，第 210 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995。[9] N. G. Wiener 和 P. R. Masani，《多元随机过程的预测理论。I. 正则性条件》，《数学学报》98 (1957)，111–150。[10] A. Miamee 和 M. Pourahmadi，《无限方差平稳过程的沃尔德分解、预测与参数化》，《概率论及相关领域》79 (1988)，第 1 期，145–164。[11] P. S. Muhly 和 B. Solel，《 C^*对应上的张量代数：表示、膨胀与 C^*包络》，《泛函分析杂志》158 (1998)，第 2 期，389–457。[12] P. S. Muhly 和 B. Solel，《张量代数、诱导表示与沃尔德分解》，《加拿大数学杂志》51 (1999)，第 4 期，850–880。[13] P. S. Muhly 和 B. Solel，《 C^*动力系统的扩张与膨胀》，载于 *Operator theory, operator algebras, and applications* 375 381, 414, ，《当代数学》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。[14] B. Sz.-Nagy 和 C. Foia˛s，《 *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*》，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1970。[15] T. Omland，《由自由幂零群的射影表示生成的 C^*代数》，《算子理论杂志》73 (2015)，3–25。[16] G. F. Popescu，《非交换算子无限序列的等距膨胀》，《美国数学会汇刊》316 (1989)，第 2 期，523–536。[17] D. Popovici，《交换等距算子对的 Wold 型分解》，《美国数学会会刊》132 (2004)，第 8 期，2303–2314。[18] N. Rakshit、J. Sarkar 和 M. A. Suryawanshi，《正交分解与扭曲等距算子》，《国际数学杂志》33 (2022)，第 8 期，论文编号 2250058，共 28 页。[19] N. Rakshit、J. Sarkar 和 M. A. Suryawanshi，《正交分解与扭曲等距算子。II》，《算子理论杂志》92 (2024)，第 1 期，257–281。[20] M. A. Rieffel，《 C^*代数的诱导表示》，《数学进展》13 (1974)，176–257。[21] J. Sarkar，《双重交换等距算子的沃尔德分解》，《线性代数及其应用》445 (2014)，289–301。[22] A. G. Skalski 和 J. Zacharias，《 C^*对应乘积系统表示的沃尔德分解》，《国际数学杂志》19 (2008)，第 4 期，455–479。[23] B. Solel，《乘积系统表示的正则膨胀》，《爱尔兰皇家科学院数学论文集》108 (2008)，第 1 期，89–110。[24] B. Solel，《半群上乘积系统的表示与交换 CP 映射的膨胀》，《泛函分析杂志》235 (2006)，第 2 期，593–618。

[25] M. S-loci´nski, 《一对交换等距算子的 Wold 型分解》, 《波兰数学年刊》**37** (1980), 第 3 期, 255–262。[26] O. Talker, *Wold Decomposition for Commuting Row Isometries*, 理学硕士论文, 以色列理工学院, 2009 年 2 月。[27] M. Weber, 《具有扭曲交换关系的等距算子生成的 C^* 代数》, 《泛函分析杂志》 **264** (2013), 第 8 期, 1975–2004。[28] H. O. A. Wold, *A study in the analysis of stationary time series*, Almqvist & Wiksell, 斯德哥尔摩, 1954。

Department of Mathematics, Technion—Israel Institute of Technology, Haifa 32000, Israel.
Email address: mabaruch@technion.ac.ilDepartment of Mathematics,
Technion—Israel Institute of Technology, Haifa 32000, Israel.*Email address*:
suryawanshi@campus.technion.ac.il; mansisuryawanshi1@gmail.com