arXiv:2601.09409v1 [cs.FL] 14 Jan 2026

有限环和具有可交换幂等元的幺半群上的可逆加权自动机

Peter Kostol´anyi[0000−0002−5474−8781] 和 Andrej Ravinger[0009−0007−4725−2597]

布拉迪斯拉发夸美纽斯大学计算机科学系，Mlynsk´a dolina，842 48 布拉迪斯拉发，斯洛伐克{kostolanyi,andrej.ravinger}@fmph.uniba.sk

摘要。 本文引入可逆加权自动机，并在一种特定情形下对其进行研究：权取自非平凡局部有限交换环，例如有限域。研究表明，此类自动机所实现级数的支撑，恰好是句法幺半群中的幂等元可交换的有理语言。特别地，这一结论适用于有限域 $\mathbb{F}_2$ 上的可逆加权自动机；其实现的级数可直接视为此类语言。由此，我们得到了新的自动机理论刻画：与有限幺半群伪簇 **ECom** 相对应的有理语言簇；按照 J.-´E. Pin 的定义，该簇也构成可逆语言的布尔闭包。由此还可知，判定局部有限交换环上的有理级数能否由可逆加权自动机实现，是可判定的。

关键词： 加权自动机 · 可逆自动机 · 有限域 · 语言簇 · 可判定性

1 引言

本文着手研究可逆性在加权自动机中的应用。更具体地说，我们着重研究有限交换环上的一类非常特殊的加权自动机，其中尤其包括二元伽罗瓦域 $\mathbb{F}_2$。研究发现，这与语言理论有着密切联系。

计算中可逆性这一概念的研究可追溯至 R. Landauer [34]的开创性工作：根据他提出的基本热力学原理，计算过程中发生的任何信息丢失，必然会导致一定程度的最低限度热耗散。这一发现促使 C. H. Bennett [11] 研究计算的逻辑可逆性，尤其是可逆图灵机，在这种机器中，每个构型至多只有一个前驱构型和一个后继构型。类似的思想逐渐推动了整个可逆计算领域的发展。

D. Angluin [3] 最初在语言推断的背景下定义了如今通常所称的双确定有限自动机 [43, 51–53], 。此后，文献中陆续提出并广泛研究了许多不同变体的可逆有限自动机 [2, 18, 19, 21–23, 35, 43, 45, 46], ，同时也有人探讨了对有限自动机中通常可逆性概念的若干推广 [5, 6, 17, 20]。这些模型的共同之处在于，与可逆图灵机不同，可逆性对于有限自动机确实构成了一种限制，并会降低其表达能力。因此，研究相应的语言类一直是上述工作的一个重要部分。

本文所考察的可逆有限自动机 概念采用的是 J.-´E. Pin [43] 提出的定义——换言之，如果一个有限自动机的转移关系既是确定的又是余确定的，那么它就是可逆的；不过，该自动机可以有多个初始状态，也可以有多个终态。因此，借用加权自动机理论中的惯用术语，我们可以说，可逆有限自动机是一种有限序列的非确定有限自动机 [8, 31, 33, 39–41]（即可能有多个初始状态的“确定”自动机），且其转置也有限序列。这个定义不仅十分自然，而且还导出了一个性质良好的可逆语言类，它构成一个正簇 [43]；相应的有序幺半群伪簇可由伪不等式 $x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega$ 和 $x^\omega \leq 1$刻画，这些伪不等式还以最小确定自动机中的禁构形为基础，为可逆语言提供了一种自然的刻画 [43, 27, 28]。至多有一个初始状态且至多有一个终态的可逆有限自动机，恰好就是双确定有限自动机 [43, 51–53]。

在本文中，我们将 J.-´E. Pin [43]意义下的可逆性概念推广到加权有限自动机 的情形——即转移带有取自某种代数（如半环）的权的有限自动机；这也必然意味着研究重点从识别语言转向实现含多个非交换变量的形式幂级数 [12, 15, 16, 47, 48]。尽管加权自动机理论的起源可追溯至 M.-P. Sch¨utzenberger [49], 的开创性论文，但过去几十年来，这一领域重新受到关注，至今仍是一个非常活跃的研究方向 [15, 16]。因此，令人相当意外的是，迄今为止可逆加权自动机几乎没有受到关注，唯一的例外是近期关于双确定加权自动机的研究 [29, 32]。

鉴于此前关于自动机理论中可逆性的研究，研究可逆加权自动机不仅顺理成章，也可以由对加权自动机某些判定问题的研究所推动。近年来，可确定化问题受到了广泛关注；该问题要判断给定的加权自动机是否存在与之等价的确定型自动机——或序列式自动机 [36] 。尽管已有研究证明，在域上等重要情形中该问题是可判定的 [9] ，并且也获得了一些复杂度界 [10, 24], ，但对于足够一般的加权自动机类，目前仍没有用于判定可确定化问题的高效算法 [9, 10, 24, 30]。

另一方面，研究表明，在判断给定加权自动机是否存在与之等价的双确定的自动机时，可以做得更好 [29, 32]。这表明，进一步考察加权自动机中与确定性相关的其他限制可能是有意义的，尤其是可逆加权自动机。这类自动机既是双确定性加权自动机的一种自然推广，也是有限顺序自动机的一类；就表达能力而言，它与确定型加权自动机通常互不可比。

本文旨在开启对可逆加权自动机的系统研究，而本文主要关注一种非常特殊的情形，即权取自局部有限交换环。这包括有限域上的加权自动机和形式幂级数，尤其是取自二元域 $\mathbb{F}_2$的情形。后一种情形提供了一种自然的语言描述方式，因为 $\mathbb{F}_2$ 上的任意有理级数同时也是某个有理语言的特征级数——事实上，$\mathbb{F}_2$ 上的级数对应于 E. Bakinova 等人研究过的 GF(2) 上的形式语言 [7, 38]; S. Kiefer 和 C. Widdershoven 对像二值自动机 [25, 26]的研究中，也出现了使用域上的加权自动机描述语言这一想法。类似地，在有限或局部有限（半）环上的加权自动机，通过取其行为的支撑，即实现的级数中系数非零的所有词所组成的语言，可以得到一个有理语言。

我们证明，无论考虑何种非平凡局部有限交换环 R，以这种方式在 R 上定义的可逆加权自动机所描述的语言总是构成同一个类，即对应于由所有具有可交换幂等元的有限幺半群组成的伪簇**ECom** 的语言簇。与此同时，这也是所有可逆语言 [43], 构成的正簇的布尔闭包，也就是说，它是由这类语言生成的语言簇。

请注意，该结果尤其适用于 $\mathbb{F}_2$ 上的可逆加权自动机——这类自动机所描述的语言恰好就是上述语言簇中的语言。这意味着，将可逆有限自动机解释为 $\mathbb{F}_2$ 上的可逆加权自动机，会增强模型的表达能力，并改善相应语言类的闭包性质。同时，我们还得到了对应于**ECom** 的语言簇的一种新的自动机理论刻画。

我们还刻画了非平凡有限交换环上可逆加权自动机所实现的级数 。结合幺半群属于**ECom**的隶属关系可有效判定这一性质，该刻画意味着存在一种算法，可以判定有效局部有限 交换环 R 上的加权自动机是否存在一个与之等价的可逆自动机 R 。

2 预备知识

我们用 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Q}$ 分别表示所有非负整数和有理数的集合，并用 $\mathbb{B}$ 表示布尔域 $\mathbb{B} = \{0, 1\}$。我们用 $[n] = \{1, \ldots, n\}$ 表示所有 $n \in \mathbb{N}$。字母表均假定为有限且非空的，ε 表示空字。

半环是一个五元组（S，$+$，$\cdot$，0，1），或简称为 S，满足（S，$+$，0）是交换幺半群，（S，$\cdot$，1）是幺半群，$\cdot$ 从左右两侧对 $+$ 都满足分配律，并且 0 是（S，$\cdot$，1）中的零元。（S，$+$，$\cdot$，0，1）的子半环是一个半环（T，$+_T$，$\cdot_T$，0，1），其中 $T \subseteq S$ 以及 $+_T$、$\cdot_T$ 分别是 $+$ 和 $\cdot$ 在 T 上的限制。由 $G \subseteq S$ 生成的 S 的子半环，是满足 $G \subseteq \langle G \rangle$ 的 S 的最小子半环 $\langle G \rangle$。半环（S，$+$，$\cdot$，0，1）在 $\cdot$ 为交换时称为交换半环，在 S 为有限时称为有限半环；若对某个有限 $G \subseteq S$ 有 $S = \langle G \rangle$，则称其为有限生成半环；当 S 的所有有限生成子半环都是有限的，则称其为局部有限半环。若 S 至少包含两个元素，即 $0 \neq 1$，则称半环（S，$+$，$\cdot$，0，1）为非平凡半环。半环的一个重要例子是布尔半环（$\mathbb{B}$，$\vee$，$\wedge$，0，1）。

一个环（带单位元）是一个半环（R，$+$，$\cdot$，0，1），满足（R，$+$，0）是阿贝尔群。一个域是一个非平凡交换环（$\mathbb{F}$，$+$，$\cdot$，0，1），满足（$\mathbb{F}\backslash\{0\}$，$\cdot$，$1$）是阿贝尔群。含有两个元素的有限域记作 $\mathbb{F}_2$。

读者可以参阅 [12, 15, 16, 47, 48]，了解关于多个非交换变量上的形式幂级数和加权自动机的基础知识。半环 S 和字母表 Σ 上的形式幂级数是一个映射 $r\colon\ \Sigma^* \to S$；r 在 $w \in \Sigma^*$ 处的值记作（r，w），称为 r 在 w处的系数，同时记作 $r = \sum_{w\in\Sigma^*}(r,\ w)\ w$。所有在 S和 Σ上的级数的集合记作 $S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$。给定 r、$s \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$，定义 $r + s$为（$r + s$，w）$=$（r，w）$+$（s，w），并定义 $r \cdot s$为（$r \cdot s$，w）$= \sum_{u,\ v\in\Sigma^*,\ uv=w}$（$r$，$u$）（$s$，$v$），对所有 $w \in \Sigma^*$成立。每个 $a \in S$都可与 $r_a \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$对应，使得（$r_a$，$\varepsilon$）$= a$且（$r_a$，$w$）$= 0$，对所有$w \in \Sigma^+$成立；因此，$a$ 的左乘或右乘分别对应于左标量乘法或右标量乘法。类似地，每个 $w \in \Sigma^*$ 都可与 $r_w \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$对应，使得（$r_w$，$w$）$= 1$且（$r_w$，$x$）$= 0$，对所有 $x \in \Sigma^* \setminus \{w\}$成立。

$r \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$的支撑是一个语言 $\mathrm{supp}(r) = \{w \in \Sigma^* \mid (r,\ w) \neq 0\}$，而语言 $L \subseteq \Sigma^*$ 在非平凡半环 S上的特征级数 $L \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$由 $(L,\ w) = 1$（当 $w \in L$时）以及 $(L,\ w) = 0$（当 $w \in \Sigma^* \setminus L$时）给出。

字母表 Σ 上的非确定有限自动机是一个四元组$\overline{\mathcal{A}} = (Q, \to, I, F)$，其中 Q是有限状态集，$\to \subseteq Q \times \Sigma \times Q$是转移关系，而 I和 $F \subseteq Q$ 分别是初始状态集和终态集。给定p、$q \in Q$和 $w \in \Sigma^*$，使得对于某个 $n \in \mathbb{N}$及 $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$有 $w = a_1 \ldots a_n$，若存在状态 $p_0, \ldots, p_n \in Q$使得 $p_0 = p$、$p_n = q$，且对于 $k = 1, \ldots, n$有 $(p_{k-1}, a_k, p_k) \in \to$，则记作 $p \xrightarrow{w} q$。$\mathcal{A}$ 所描述的语言定义为 $\|\mathcal{A}\| = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in I\ \exists q \in F\colon p \xrightarrow{w} q\}$。若 $|I| = 1$且每当 $p \xrightarrow{a} q$并且对于某个 $p, q, q' \in Q$和 $a \in \Sigma$有 $p \xrightarrow{a} q'$时，$\mathcal{A}$ 就是确定的。

一个定义在 Σ 上且具有完全转移函数的确定性有限自动机也可以写作 $\mathcal{A} = (Q,\ \cdot,\ i,\ F)$，其中 $\cdot\colon\ Q \times \Sigma^* \to Q$ 是 Σ^* 在 Q 上的右作用，$i \in Q$ 是初始状态，而 $F \subseteq Q$ 是终态集合。由 $\mathcal{A}$ 识别的语言记为 $\|\mathcal{A}\| = \{w \in \Sigma^* \mid i \cdot w \in F\}$。

半环 S 上、字母表 Σ 上的加权自动机 $\mathcal{A} = (Q, \sigma, \iota, \tau)$ 由有限状态集 Q、转移权重函数 $\sigma\colon\ Q \times \Sigma \times Q \to S$，以及函数 $\iota\colon\ Q \to S, \tau\colon\ Q \to S$ 构成，后两者分别为状态赋予初始权和终态权重。$\mathcal{A}$ 的一次运行是一个词 $\gamma = q_0 a_1 q_1 a_2 q_2 \ldots q_{t-1} a_t q_t$，其中 $t \in \mathbb{N}$, $q_0, \ldots, q_t \in Q$，且 $a_1, \ldots, a_t \in \Sigma$ 满足：对于 $k = 1, \ldots, t$，有 $\sigma(q_{k-1}, a_k, q_k) \neq 0$；我们称 γ 是一条从 q_0 到 q_t、以 $w = a_1 \ldots a_t$ 为输入的运行。给定任意这样一条运行 γ，定义

$\sigma(\gamma) = \sigma(q_0, a_1, q_1) \ldots \sigma(q_{t-1}, a_t, q_t)$ 以及 $\sigma(\gamma) = \tau(q_0)\sigma(\gamma)\tau(q_t)$。令 $\mathcal{R}(\mathcal{A}, w)$ 为 $\mathcal{A}$ 在 $w \in \Sigma^*$ 上所有运行的集合。由 $\mathcal{A}$ 实现的级数 $\|\mathcal{A}\| \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ 定义为：对所有 $w \in \Sigma^*$，$(\|\mathcal{A}\|, w) = \sum_{\gamma \in \mathcal{R}(\mathcal{A}, w)} \sigma(\gamma)$。若存在某个 S 上的加权自动机 $\mathcal{A}$ 使得 $r = \|\mathcal{A}\|$，则称级数 $r \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ 在 S 上是有理的。

每个定义在 S 和 Σ 上且满足 $Q = [n]$ 的 $\mathcal{A} = (Q, \sigma, \iota, \tau)$，对于某个 $n \in \mathbb{N}$（这总可以假设成立），都确定一个线性表示 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = (n, \mathsf{i}\ \mu, \mathsf{f})$，其中 $\mathsf{i} = (\iota(1) \ldots, \iota(n))$ 是初始权的行向量，μ 是从 Σ^* 到幺半群 $S^{n\times n}$ 的同态，该幺半群由所有定义在 S 上、以矩阵乘法为运算的 $n \times n$ 矩阵构成，并且对于所有 $a \in \Sigma$，均有 $\mu(a) = (\sigma(i, a, j))_{n\times n}$；$\mathsf{f} = (\tau(1) \ldots, \tau(n))^T$ 是终态权的列向量。因此，对于所有 $w \in \Sigma^*$，均有 $(\|\mathcal{A}\|, w) = \mathsf{i}\mu(w)\mathsf{f}$。

设 $\mathcal{A}_k = (Q_k, \sigma_k, \iota_k, \tau_k)$ 是定义在 S 和 Σ 上、分别对应于 $k = 1, \ldots, n$ 的加权自动机，其中 $n \in \mathbb{N}$。$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ 的不交并是一个自动机 $\mathcal{A} = (Q, \sigma, \iota, \tau)$，其中 $Q = \bigcup_{k=1}^{n} (Q_k \times \{k\})$，$\sigma((p, k)\ a, (q, k)) = \sigma_k(p, a, q)$，$\iota(p, k) = \iota_k(p)$，并且对于 $k = 1, \ldots, n$ 以及所有 $p, q \in Q_k$ 和 $a \in \Sigma$，有 $\tau(q, k) = \tau_k(q)$；此外，对于所有满足 $k \neq \ell$ 的 $k, \ell \in [n]$，以及所有 $p \in Q_k$，$q \in Q_\ell$ 和 $a \in \Sigma$，均有 $\sigma((p, k)\ a, (q, \ell)) = 0$。显然，$\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{A}_1\| + \ldots + \|\mathcal{A}_n\|$。

我们还会用到代数语言理论中的一些基本概念；关于语言簇的基础理论，请参阅 [44, 50]；关于有限幺半群的伪簇的理论，请参阅 [1]。

3 可逆加权自动机

现在，我们将 J.-É. Pin [43]所理解的可逆有限自动机概念推广，从而定义半环 S 上的可逆加权自动机。

定义 1. 设 S 为一个半环，Σ 为一个字母表。若以下两个条件对所有 p、p'、q、$q' \in Q$ 和 $a \in \Sigma$ 均成立，则称半环 S 上、字母表 Σ 上的加权自动机 $\mathcal{A} = (Q, \sigma, \iota, \tau)$ 是可逆的：

(i) 若 $\sigma(p, a, q)$ 和 $\sigma(p, a, q')$ 均非零，则 $q = q'$；(ii) 若 $\sigma(p, a, q)$ 和 $\sigma(p', a, q)$ 均非零，则 $p = p'$。

条件（i）表示自动机 $\mathcal{A}$ 的转移必须是确定的；由于仍可能有多个初始状态，这等价于说 $\mathcal{A}$ 是有限序列的 [8, 31, 33, 39–41]。条件（ii）表示 $\mathcal{A}$ 的转置具有相同的性质。此外，如果至多有一个状态 $p \in Q$ 满足 $\iota(p) \neq 0$，且至多有一个状态 $q \in Q$ 满足 $\tau(q) \neq 0$，则称加权自动机 $\mathcal{A}$ 为双确定的 [29, 32]。

我们称半环 S 上、字母表 Σ 上的级数，如果它由某个定义在 S 和 Σ 上的可逆加权自动机实现，则称其在 S 上可逆。S 和 Σ 上的所有可逆级数组成的集合记为 $\mathsf{RevS}(S, \Sigma)$。此外，定义在 S 和 Σ 上的可逆语言是指某个定义在 S 和 Σ 上的可逆级数的支撑；我们将所有这类语言组成的集合记为 $\mathsf{RevL}(S, \Sigma) = \{\mathsf{supp}(r) \mid r \in \mathsf{RevS}(S, \Sigma)\}$，并以 $\mathsf{RevL}(S)$ 表示定义在 S 和任意字母表上的所有可逆语言构成的类。注意，布尔半环 $\mathbb{B}$ 上的可逆语言，恰好就是 J.-É. Pin [43]意义下通常所说的可逆语言。因此，我们将所有这类语言构成的正簇记为 $\mathsf{RevL}(\mathbb{B})$。

例 *2.* 本文主要研究定义在有限——或稍广义地说，局部有限——交换环上的一类非常特殊的可逆加权自动机。现在可以直接观察到，对于任意非平凡的局部有限环 R，其上所有可逆语言构成的类 RevL(R) 至少包含一些通常意义下不可逆的语言，即不属于 RevL($\mathbb{B}$) 的语言。事实上，设 R 的特征为 $n \geq 2$。那么图 1 中的可逆加权自动机 $\mathcal{A}$ 显然实现了级数

$$\|\mathcal{A}\| = \sum_{t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} a^t.$$

因此，supp($\|\mathcal{A}\|$) $= a^+$ 是字母表 R上的可逆语言，因此$a^+ \in$ RevL(R, $\{a\}$)。另一方面，$a^+ \notin$ RevL($\mathbb{B}$, $\{a\}$)，因为它不满足文献 [43]中对可逆语言的刻画；更确切地说，a^+ 的有序句法幺半群不满足伪不等式 $x^\omega \leq 1$。

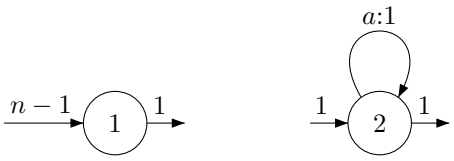


图 1: 一个定义在非平凡局部有限环 R 上、特征为 $n \geq 2$，且基于一元字母表 $\Sigma = \{a\}$的可逆加权自动机 $\mathcal{A}$。

鉴于前一个例子中的观察，似乎值得更仔细地考察上文引入的可逆级数类和语言类的性质。至少可以在半环这一抽象层面作出一些观察。给定任意半环 S 和字母表 Σ，我们用 1RevS(S, Σ) 表示由定义在 S和 Σ上、且恰有一个初始状态的可逆加权自动机$\mathcal{A} =$(Q, σ, ι, τ) 所实现的所有级数的集合；也就是说，该状态 q满足 $\iota(q) \neq 0$。[1] 我们还将 1RevL(S, Σ) $=$ {supp(r) $\mid r \in$ 1RevS(S, Σ)}记作相应的支撑集合。于是，我们得到以下关于 S上的可逆级数的显然刻画。

命题 3。 设 S 为一个半环， Σ 为一个字母表。那么 $\mathrm{RevS}(S, \Sigma)$ 恰好由来自 1RevSS, Σ) 的级数的所有有限和组成。

证明。 设 $\mathcal{A} =$(Q, σ, ι, τ) 是定义在 S 和 Σ 上的可逆加权自动机。则自动机 $\mathcal{A}_q =$(Q, σ, ι_q, τ) 满足 $\iota_q(q) = \iota(q)$ 且对所有 $p \in Q \setminus \{q\}$ 都有 $\iota_q(p) = 0$，因此是可逆的，并且对每个满足 $\iota(q) \neq 0$ 的 $q \in Q$ 恰有一个初始状态；由此， $\|\mathcal{A}_q\| \in$ 1RevS(S, Σ)。因此

$$\|\mathcal{A}\| = \sum_{\substack{q \in Q \\ \iota(q) \neq 0}} \|\mathcal{A}_q\|$$

[1] 注意，这类自动机是 M. Holzer、S. Jakobi 和 M. Kutrib [21, 22]意义下可逆确定性有限自动机的加权推广。

是来自 $1\mathrm{RevS}(S,\Sigma)$ 的级数的有限和。反过来，给定 $k\in\mathbb{N}$ 和级数 $r_1,\dots,r_k\in 1\mathrm{RevS}(S,\Sigma)$，每个级数 r_j（$j=1,\dots,k$）都可由某个定义在 S 和 Σ 上的可逆加权自动机 $\mathcal{A}_j$ 实现。这些自动机的不交并显然也是可逆的，因此 $r_1+\ldots+r_k\in\mathrm{RevS}(S,\Sigma)$。□

命题 4。对于任意半环 S 和字母表 Σ，集合 $\mathrm{RevS}(S,\Sigma)$ 在加法以及左右标量乘法下都是闭的。

证明。根据命题 3，对加法的闭性是直接的。对于由 $\alpha\in S$进行的左标量乘法或右标量乘法，只需将可逆加权自动机的所有初始权或终态权重分别乘以 α即可，这一点显然成立。□

任意有限自动机都可以通过将其所有转移、初始状态和终态的权赋为 1，从而转化为一个定义在非平凡半环 S 上的加权自动机。对于识别某个语言 L 的确定的 有限自动机，所得自动机实现了其在 S上的特征级数 L L，这是众所周知的。下面的命题专门针对具有一个初始状态的可逆自动机记录了这一观察。

命题 5。设 S 为一个非平凡半环，$L\in 1\mathrm{RevL}(\mathbb{B},\Sigma)$，且 L 为 S的特征级数，其中 L。则 $L\in 1\mathrm{RevS}(S,\Sigma)$。因此，$L\in 1\mathrm{RevL}(S,\Sigma)$ 以及 $1\mathrm{RevL}(\mathbb{B},\Sigma)\subseteq 1\mathrm{RevL}(S,\Sigma)$。

证明。由于 $L\in 1\mathrm{RevL}(\mathbb{B},\Sigma)$，语言 L 显然由某个可逆有限自动机 $\mathcal{A}=(Q,\to,I,F)$ 识别，且该自动机恰有一个初始状态 $i\in I$。设 $\mathcal{A}'=(Q,\sigma,\iota,\tau)$ 是一个加权自动机，使得对于所有 p、$q\in Q$ 和 $a\in\Sigma$，当 $p\xrightarrow{a}q$ 时有 $\sigma(p,a,q)=1$，否则有 $\sigma(p,a,q)=0$；当 $p\in I$ 时有 $\iota(p)=1$，否则有 $\iota(p)=0$；当 $q\in F$ 时有 $\tau(q)=1$，否则有 $\tau(q)=0$。由于 $\mathcal{A}$ 是确定的，显然 $\|\mathcal{A}'\|=L$；而自动机 $\mathcal{A}'$ 显然是可逆的，且恰有一个初始状态 $\overline{i_\circ}$。因此可知 $L\in 1\mathrm{RevS}(S,\Sigma)$，并且 $L=\mathrm{supp}(L)\in 1\mathrm{RevL}(S,\Sigma)$。□

4 $\mathbb{F}_2$ 的情形

现在，我们将详细探讨基于二元域 $\mathbb{F}_2$的可逆加权自动机。从加权自动机理论的角度来看，域 $\mathbb{F}_2$ 可以说是最重要的有限环，而基于 $\mathbb{F}_2$ 的加权自动机也可以视为描述语言的自然工具。事实上，$\mathbb{F}_2$ 上的任意形式幂级数都是其支撑的特征级数，因此二者可以等同起来。由此，$\mathbb{F}_2$ 上的有理级数可以视为有理语言，而通过基于 $\mathbb{F}_2$ 的加权自动机实现有理级数，对应于以“奇偶模式”识别有理语言：当且仅当自动机中词 w 的成功运行次数为奇数时，该词才会被接受。事实上，将 $\mathbb{F}_2$ 上的形式幂级数视为语言的理论，大多以基于GF(2) 的形式语言 [7, 38],之名发展起来，而基于 $\mathbb{F}_2$ 的加权自动机也曾以对称差自动机 [54, 55]之名加以研究。

对于基于 $\mathbb{F}_2$ 的可逆加权自动机，也可以作出类似的观察：对于任意字母表 Σ，RevS($\mathbb{F}_2, \Sigma$) 中的级数或许可以与 RevL($\mathbb{F}_2, \Sigma$) 中的语言对应起来。因此，自然会想到要研究语言类 RevL($\mathbb{F}_2$) 的刻画，以及它与通常的可逆语言类 RevL($\mathbb{B}$) 之间的关系。我们在本节证明，RevL($\mathbb{F}_2$) 实际上是由正簇 RevL($\mathbb{B}$) 生成的簇，或者等价地说，是 RevL($\mathbb{B}$) 的布尔闭包。

我们先记录一个简单的观察：在 $\mathbb{F}_2$ 上带有一个初始状态 的可逆加权自动机，恰好能够实现由带有一个初始状态的可逆有限自动机所识别的语言的特征级数。

命题 6。设 Σ 是一个字母表，$\mathcal{A}$ 是一个在 $\mathbb{F}_2$ 和 Σ 上带有一个初始状态的可逆加权自动机。那么，对于某个 $L \in 1\mathrm{RevL}(\mathbb{B}, \Sigma)$，有 $\|\mathcal{A}\| \equiv L$，且其定义在 $\mathbb{F}_2$ 上。因此，$1\mathrm{RevL}(\mathbb{F}_2, \Sigma) = 1\mathrm{RevL}(\mathbb{B}, \Sigma)$。

证明。设 $\mathcal{A} = (Q, \sigma, \iota, \tau)$ 是一个在 $\mathbb{F}_2$ 和 Σ 上带有一个初始状态的可逆加权自动机。由于 $\mathcal{A}$ 是确定的，可逆有限自动机 $\mathcal{A}' = (Q, \to, I, F)$ 满足：对 p、$q \in Q$，有 $p \xrightarrow{a} q$，并且当且仅当 $\sigma(p, a, q) = 1$；而 $I = \{p \in Q \mid \iota(p) = 1\}$ 且 $F = \{q \in Q \mid \tau(q) = 1\}$。显然，它识别 $L = \mathrm{supp}(\|\mathcal{A}\|)$。因此，$L \in 1\mathrm{RevL}(\mathbb{B}, \Sigma)$，且 $\|\mathcal{A}\| = L$。由命题 5 可得等式 $1\mathrm{RevL}(\mathbb{F}_2, \Sigma) = 1\mathrm{RevL}(\mathbb{B}, \Sigma)$。□

回想一下，根据 [6]，由恰有一个初始状态的可逆有限自动机识别的语言类在交集运算下封闭。事实上，若 $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \to_1, \{i_1\}, F_1)$ 和 $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \to_2, \{i_2\}, F_2)$ 是定义在字母表 Σ 上的可逆有限自动机，其中 $i_1 \in Q_1$ 且 $i_2 \in Q_2$，那么有限自动机 $\mathcal{A} = (Q_1 \times Q_2, \to, \{(i_1, i_2)\}, F_1 \times F_2)$ 也显然是可逆的；其中，对所有 $p_1, q_1 \in Q_1, p_2, q_2 \in Q_2$，$\to$ 均定义为：$a \in \Sigma$ 等于 $(p_1, p_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_2)$，当且仅当 $p_1 \xrightarrow{a}_1 q_1$ 且 $p_2 \xrightarrow{a}_2 q_2$。我们将这一观察记录下来，以供日后参考。

命题 7（H. B. Axelsen、M. Holzer 和 M. Kutrib [6]）。集合 $1\mathrm{RevL}(\mathbb{B}, \Sigma)$ 对于任意字母表 Σ，**在交集运算下封闭**。

现在我们可以探讨字母表 $\mathbb{F}_2$ 上可逆语言类 RevL($\mathbb{F}_2$) 的一些基本闭包性质。首先，命题 4 直接表明，RevL($\mathbb{F}_2$) 对对称差封闭。稍有趣的是，该类对所有布尔运算都封闭，我们现在来证明这一点。

命题 8。设 Σ 是一个字母表。集合 $\mathrm{RevL}(\mathbb{F}_2, \Sigma)$ 对布尔运算封闭。

证明。 *</style}*令 *RevL(, Σ)*。那么 L 是 RevS($\mathbb{F}_2, \Sigma$) 中某个级数的支撑，而该级数必定是 $\mathbb{F}_2$ 上 L 的特征级数 $\underline{L}$。因此 $L \in$ RevS($\mathbb{F}_2, \Sigma$)。此外，容易看出，$\mathbb{F}_2$ 上 Σ^* 的特征级数 $\underline{\Sigma^*}$ 可由一个在 $\mathbb{F}_2$ 上、具有一个状态的可逆加权自动机实现，因此 $\Sigma^* \in$ RevS($\mathbb{F}_2, \Sigma$)。由此，根据命题 4，级数

$$\underline{L} + \underline{\Sigma^*} = \sum_{w \in \Sigma^*} (\underline{L}, w) + 1)\ w$$

属于 RevS($\mathbb{F}_2, \Sigma$)。因此，

$$\operatorname{supp}(\underline{L} + \underline{\Sigma^*}) = \{w \in \Sigma^* \mid (\underline{L}, w) + 1 \neq 0\} = \{w \in \Sigma^* \mid (\underline{L}, w) = 0\} = \Sigma^* \setminus L$$

属于 RevL($\mathbb{F}_2, \Sigma$)，且 RevL($\mathbb{F}_2, \Sigma$) 在补运算下封闭。

接下来，设 $L, K \in$ RevL($\mathbb{F}_2, \Sigma$)。同样，这意味着这两个语言在 $\mathbb{F}_2$ 上的特征级数 L, K 属于 RevS($\mathbb{F}_2, \Sigma$)。根据命题 3 和命题 6，必定存在一些数 $m, n \in \mathbb{N}$ 和语言 $L_1, \ldots, L_m, K_1, \ldots, K_n \in 1$RevL($\mathbb{B}, \Sigma$)，使得在 $\mathbb{F}_2$ 上，

$$\underline{L} = \underline{L_1} + \ldots + \underline{L_m} \qquad \text{and} \qquad \underline{K} = \underline{K_1} + \ldots + \underline{K_n}.$$

现在，对每个 $w \in \Sigma^*$，都有

$$\begin{aligned}(\underline{L \cap K}, w) &= (\underline{L_1} + \ldots + \underline{L_m}, w) \cdot (\underline{K_1} + \ldots + \underline{K_n}, w) = \\ &= \big((\underline{L_1}, w) + \ldots + (\underline{L_m}, w)\big) \cdot \big((\underline{K_1}, w) + \ldots + (\underline{K_n}, w)\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\underline{L_i}, w)(\underline{K_j}, w) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\underline{L_i \cap K_j}, w)\end{aligned}$$

在 $\mathbb{F}_2$ 上，因此

$$\underline{L \cap K} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \underline{L_i \cap K_j}.$$

由于对于 $i = 1, \ldots, m$ 和 $j = 1, \ldots, n$，根据命题 7 有 $L_i \cap K_j \in 1$RevL($\mathbb{B}, \Sigma$)，由命题 5 可知 $L_i \cap K_j \in 1$RevS($\mathbb{F}_2, \Sigma$)；因此，根据命题 3，$L \cap K \in$ RevS($\mathbb{F}_2, \Sigma$)。由此，supp($L \cap K$) $= L \cap K$ 必属于 RevL($\mathbb{F}_2, \Sigma$)，故该类在交集下封闭。

最后，由于 RevL($\mathbb{F}_2$, Σ) 对交集和补运算封闭，因此它也对并集封闭。□

作为刻画 RevL($\mathbb{F}_2$)（即 $\mathbb{F}_2$ 上可逆语言类）的第一步，我们来证明该类包含通常意义下的所有可逆语言——也就是说，包含 RevL($\mathbb{B}$) 中的所有语言。

引理 9。设 Σ 是一个字母表。那么 $\mathrm{RevL}(\mathbb{B}, \Sigma) \subseteq \mathrm{RevL}(\mathbb{F}_2, \Sigma)$。

证明。设 $L \in$ RevL($\mathbb{B}$, Σ)。那么 $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$ 以及语言 $L_1, \ldots, L_n \in 1$RevL($\mathbb{B}$, Σ)。级数

$$r = \sum_{\emptyset \subsetneq X \subseteq [n]} \underline{\bigcap_{i \in X} L_i}$$

在 $\mathbb{F}_2$ 上属于 RevS($\mathbb{F}_2$, Σ)，这是由命题 7、命题 5 和命题 4 得出的。这意味着，要证明 $L \in$ RevL($\mathbb{F}_2$, Σ)，只需证明 $L = r$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上。

给定 $w \in \Sigma^*$，令 $X_w = \{i \in [n] \mid w \in L_i\}$。那么对于每个非空的 $X \subseteq [n]$，词 w 属于 $\bigcap_{i \in X} L_i$ 当且仅当 $X \subseteq X_w$。总数

因此，这类非空集合 X 的数量为 $2^{|X_w|}-1$；当 $w \in L$ 时为奇数，否则为零。由此，

$$(r,w) = \left(\sum_{\emptyset \subsetneq X \subseteq [n]} \underline{\bigcap_{i \in X}} L_i, w\right) = \sum_{\emptyset \subsetneq X \subseteq [n]} \left(\underline{\bigcap_{i \in X}} L_i, w\right) =$$
$$= \sum_{\emptyset \subsetneq X \subseteq X_w} 1 = 2^{|X_w|} - 1 = (\underline{L}, w)$$

关于 $\mathbb{F}_2$，由此得到了所需的等式 $L = r$。 _ □

现在，我们终于可以证明类 RevL($\mathbb{F}_2$) 的刻画了；它恰好是可逆语言正簇 RevL($\mathbb{B}$) 的布尔闭包。

定理 10. 类 $\mathrm{RevL}(\mathbb{F}_2)$ 是$\mathrm{RevL}(\mathbb{B})$的布尔闭包。

证明。由引理 9 和命题 8 可知，RevL($\mathbb{B}$) 的布尔闭包 B(RevL($\mathbb{B}$)) 包含于 RevL($\mathbb{F}_2$)。反过来，设 $L \in$ RevL($\mathbb{F}_2, \Sigma$)，其中 Σ 是某个字母表。命题 3 给出 $n \in \mathbb{N}$ 和 $r_1, \ldots, r_n \in$ 1RevS($\mathbb{F}_2, \Sigma$)，使得 $L =$ supp($r_1 + \ldots + r_n$)。我们对 n 进行归纳，证明 L 属于 B(RevL($\mathbb{B}$))。若 $n = 0$，则 $L =$ supp(0) $= \emptyset$ 属于 B(RevL($\mathbb{B}$))。现在，对于任意的 $k \in \mathbb{N}, n = k+1$ 和 L_1，若 $=$ supp($r_1 + \ldots + r_k$) 属于 B(RevL($\mathbb{B}$))，我们可知 $L_2 :=$ supp(r_{k+1}) 属于 B(RevL($\mathbb{B}$))，因为它实际上属于 1RevL($\mathbb{B}, \Sigma$)，由命题 6 得证。因此

$$L = \mathrm{supp}((r_1 + \ldots + r_k) + r_{k+1}) = (L_1 \cup L_2) \cap (\Sigma^* \setminus (L_1 \cap L_2))$$

也属于**B(RevL($\mathbb{B}$))**。 □

域 $\mathbb{F}_2$ 上的所有可逆语言类 RevL($\mathbb{F}_2$) 因此构成一个语言簇，它由通常意义下的可逆语言正簇 RevL($\mathbb{B}$) 的布尔闭包给出，参见 J.-´E. Pin [43]。换言之，RevL($\mathbb{F}_2$) 是由 RevL($\mathbb{B}$)生成的簇。由此可见，将权引入 $\mathbb{F}_2$ 上的可逆有限自动机，会使得所描述的语言类更大，且具有更好的闭包性质。

事实上，可逆语言正簇 RevL($\mathbb{B}$) 的布尔闭包已知通过 Eilenberg 对应与伪簇$\mathbf{ECom} = \mathbf{J_1} * \mathbf{G}$ 相对应，该伪簇由所有具有交换幂等元的有限幺半群组成 [18, 19, 37, 4, 42]。因此，我们得到以下推论，它既可视为对 $\mathbb{F}_2$上的可逆语言的刻画，也可视为对伪簇$\mathbf{ECom}$的一种新的自动机理论刻画。

推论 11。设 Σ 为一个字母表，$L \subseteq \Sigma^*$ 为一种语言。当且仅当对于句法幺半群 M_L 中任意两个幂等元 e、f，$ef = fe$ 时，L 属于$\mathrm{RevL}(\mathbb{F}_2)$。因此，当且仅当 $M_L \in \mathbf{ECom}$ 时，$L \in \mathrm{RevL}(\mathbb{F}_2)$。

伪簇 $\mathbf{ECom}$ 也可以用伪恒等式$x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega$来描述，它直接刻画了可交换幂等元这一性质。无论如何，有限幺半群是否属于 $\mathbf{ECom}$ 显然是可判定的，这意味着有理语言是否属于RevL($\mathbb{F}_2$)也是可判定的。

5 局部有限交换环上的自动机

接下来，我们将证明，刚刚针对 $\mathbb{F}_2$ 上的可逆加权自动机得到的结果，实际上可以推广到任何非平凡局部有限交换环上的加权自动机。

我们证明，对于任意这样的环 R，都有 $\mathsf{RevL}(R) = \mathsf{RevL}(\mathbb{F}_2)$。为了确立这两个类之间的一个包含关系，我们证明，来自 R 上 $\mathsf{RevL}(\mathbb{F}_2)$ 中某个语言的任意特征级数，都可以由 R 上的可逆加权自动机实现。事实上，这里并不需要 R 具有局部有限性和交换性。

引理12. 设 R 是一个非平凡环，Σ 是一个字母表。那么，对每个$L \in \mathrm{RevL}(\mathbb{F}_2, \Sigma)$，$L$ 在 R 上的特征级数 L 都属于 $\mathrm{RevS}(R, \Sigma)$，并且 L 属于 $\mathrm{RevL}(R, \Sigma)$。

证明。设 $L \in \mathsf{RevL}(\mathbb{F}_2, \Sigma)$；只需证明，在 R 上 $L \in \mathsf{RevS}(R, \Sigma)$。由于 $L \in \mathsf{RevL}(\mathbb{F}_2, \Sigma)$，由命题 3 和命题 6 可知，存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 以及语言 $L_1, \ldots, L_n \in \mathsf{RevL}(\mathbb{B}, \Sigma)$，使得 $L = \mathsf{supp}(L_1 + \ldots + L_n)$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上。这意味着，当且仅当集合 $X_w = \{i \in [n] \mid w \in L_i\}$ 含有奇数个元素时，$w \in \Sigma^*$ 属于 L。因此，L 在 R 上的特征级数 L 在 $w \in \Sigma^*$ 处的系数为

$$(L, w) = \begin{cases} 1 & \text{if } |X_w| \text{ is odd,} \\ 0 & \text{if } |X_w| \text{ is even.} \end{cases} \tag{1}$$

现在考虑由下式定义的级数 $r \in R\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$

$$r = \sum_{\emptyset \subsetneq X \subseteq [n]} (-2)^{|X|-1} \bigcap_{i \in X} L_i.$$

根据命题 7、命题 5、命题 3 和命题 4，可得 $r \in \mathsf{RevS}(R, \Sigma)$。为了证明 $L \in \mathsf{RevS}(R, \Sigma)$，现在我们证明实际上 $r = L$。事实上，对于固定的 $\emptyset \subsetneq X \subseteq [n]$ 和任意的 $w \in \Sigma^*$，若 $X \subseteq X_w$，则有 $\left(\bigcap_{i \in X} L_i, w\right) = 1$；否则有 $\left(\bigcap_{i \in X} L_i, w\right) = 0$。而对于每种大小 $k = 1$，恰有 $\binom{|X_w|}{k}$ 个集合 $X \subseteq X_w$，…，$|X_w|$。因此，

$$(r, w) = \sum_{k=1}^{|X_w|} \binom{|X_w|}{k} (-2)^{k-1}$$

对于每个 $w \in \Sigma^*$ 上的 R。然而，在 $\mathbb{Q}$ 上，有

$$\sum_{k=1}^{|X_w|} \binom{|X_w|}{k} (-2)^{k-1} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{|X_w|} \binom{|X_w|}{k} (-2)^k - 1 \right) = \frac{1 - (-1)^{|X_w|}}{2}$$

根据二项式定理，这意味着在 R 上我们也有

$$(r, w) = \sum_{k=1}^{|X_w|} \binom{|X_w|}{k} (-2)^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } |X_w| \text{ is odd,} \\ 0 & \text{if } |X_w| \text{ is even.} \end{cases}$$

因此，根据 (1) $r = L$。 □

现在，在非平凡环 R 是局部有限且交换的情况下，我们基本上证明剩余的包含关系。

引理 13. 设 R 是一个非平凡局部有限交换环， Σ 是一个字母表， $L \in \mathrm{RevL}(R, \Sigma)$ 是一个语言，而 M_L 是 L 在 Σ^*上的句法幺半群。那么， M_L 的幂等元彼此交换，即 $M_L \in \mathbf{ECom}$。

证明。 由于**ECom** 是有限幺半群的一个伪簇，并且 M_L 整除任何识别 L的确定性有限自动机的转移幺半群，因此只需描述一个某个 识别 L 的、在 Σ 上的确定性有限自动机 $\mathcal{D}$ ，使得 $\mathcal{D}$ 的转移幺半群中的幂等元彼此交换。

由于 $L \in \mathsf{RevL}(R, \Sigma)$，必定存在一个在 R 上、权取自 Σ 的可逆加权自动机 $\mathcal{A}$，其状态集为 $[n]$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $L = \mathsf{supp}(\|\mathcal{A}\|)$；令 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = (n, \mathbf{i}\ \mu, \mathbf{f})$为相应的线性表示。对于 $k = 1, \ldots, n$，令$\mathbf{e}_k$表示向量$\mathbf{e}_k = (a_1, \ldots, a_n)$，使得 $a_k = 1$，并且对所有 $j \in [n] \setminus \{k\}$均有 $a_j = 0$。由于 $\mathcal{A}$ 总是一个在 R的某个有限生成子环上定义的自动机，我们不妨假设 R 实际上是有限的。

因此，我们可以取 $\mathcal{D} = (R^n, \cdot, \mathbf{i}\ F)$，其中 $F = \{\mathbf{v} \in R^n \mid \mathbf{vf} \neq 0\}$，且对所有 $\mathbf{v} \in R^n$ 和 $a \in \Sigma$，都有 $\mathbf{v} \cdot a = \mathbf{v}\mu(a)$。于是，自动机 $\mathcal{D}$ 显然识别语言 $L = \mathsf{supp}(\|\mathcal{A}\|)$，其转移幺半群可表示为由所有矩阵 $\mu(w)$（其中 $w \in \Sigma^*$ ）构成的幺半群，并采用 R上的矩阵乘法。由于 $\mathcal{A}$的可逆性，对于 $a \in \Sigma$ ，每个矩阵 $\mu(a)$的每一行和每一列至多包含一个非零元素。因此，对于 $w \in \Sigma^*$，所有矩阵 $\mu(w)$也都具有相同性质。这意味着，若 $\mu(w) = (a_{i,j})_{n \times n}$是幂等元，则 $\mu(w)$是对角矩阵；因为对于某个 $i \neq j$，若 $a_{i,j} \neq 0$ ，便会推出 $\mathbf{e}_i\mu(w) = a_{i,j}\mathbf{e}_j$ ，且 $\mathbf{e}_i\mu(w)^2 = a_{i,j}\mathbf{e}_j\mu(w) \neq a_{i,j}\mathbf{e}_j$；否则，$a_{j,j}$ 就必须非零，而 $\mu(w)$的第 j 列便会包含两个非零元素。这意味着 $\mu(w)^2 \neq \mu(w)$，且 $\mu(w)$不会是幂等元。因此，任何幂等元 $\mu(w)$确实都是对角矩阵，而交换环上的对角矩阵在矩阵乘法下彼此可交换。□

定理14. 对于每个非平凡局部有限交换环 R，类 $\mathrm{RevL}(R)$ 是 $\mathrm{RevL}(\mathbb{B})$ 的布尔闭包。

证明. 由引理12、引理 13 和定理 10，以及 $\mathsf{RevL}(\mathbb{B})$ 的布尔闭包与 **ECom** 之间的对应关系可得。□

命题15. 设 R 是一个非平凡有限交换环， Σ 是一个字母表，且 $r \in R\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle$ 是一个关于 R有理的级数。那么，对于所有 $x \in R$， $r \in \mathrm{RevS}(R, \Sigma)$ 当且仅当$\mathrm{supp}(r + x \cdot \Sigma^*) \in \mathrm{RevL}(R, \Sigma)$ 。——

证明. 若 $r \in \mathsf{RevS}(R, \Sigma)$，则对所有 $x \in R$也有 $r + x \cdot \Sigma^* \in \mathsf{RevS}(R, \Sigma)$，因此 $\mathsf{supp}(r + x \cdot \Sigma^*) \in \underline{\mathsf{Rev}}\mathsf{L}(R, \Sigma)$。反过来，若对所有 $x \in R$都有 $\mathsf{supp}(r + x \cdot \underline{\Sigma^*}) \in \mathsf{RevL}(R, \Sigma)$，由定理14、引理12和命题 4 可知， $r = \sum_{x \in R} \underline{x \cdot (\Sigma^* \setminus \mathsf{supp}(r - x \cdot \Sigma^*))} \in \mathsf{RevS}(R, \Sigma)$（注意，我们刚刚将 r 表述为一个特定的可识别阶梯函数 [13, 14]）。□

推论16。 判断有限交换环 R 上有理级数的可逆性这一问题是可判定的。

参考文献

1. Almeida, J.：《有限半群与普适代数》。World Scientific（1994） 2. Ambainis, A., Freivalds, R.M.：单向量子有限自动机：优势、弱点与推广。载于：计算机科学基础，FOCS 1998。第332–341页（1998） 3. Angluin, D.：可逆语言的推断。美国计算机协会会刊**29**(3)，741–765（1982） 4. Ash, C.J.：具有可交换幂等元的有限半群。澳大利亚数学会杂志（A辑）**43**(1)，81–90（1987） 5. Axelsen, H.B., Holzer, M., Kutrib, M.：确定性有限自动机的不可逆程度。载于：自动机的实现与应用，CIAA 2016。第15–26页（2016） 6. Axelsen, H.B., Holzer, M., Kutrib, M.：确定性有限自动机的不可逆程度。国际计算机科学基础杂志**28**(5)，503–522（2017） 7. Bakinova, E., Basharin, A., Batmanov, I., Lyubort, K., Okhotin, A., Sazhneva, E.：GF(2)上的形式语言。信息与计算**283** （2022），文章104672 8. Bala, S.：哪些有限歧义自动机能够识别有限序列的函数？载于：计算机科学的数学基础，MFCS 2013。第86–97页（2013） 9. Bell, J.P., Smertnig, D.：计算线性包：判定域上加权自动机的确定性？与无歧义性？载于：计算机科学中的逻辑，LICS 2023（2023） 10. Benalioua, Y.I., Lhote, N., Reynier, P.A.：域上代价寄存器自动机的最小化。载于：计算机科学的数学基础，MFCS 2024（2024），文章23 11. Bennett, C.H.：计算的逻辑可逆性。IBM研究与开发杂志**17**(6)，525–532（1973） 12. Berstel, J., Reutenauer, C.：《非交换有理级数及其应用》。剑桥大学出版社（2011） 13. Droste, M., Gastin, P.：加权自动机与加权逻辑。理论计算机科学**380**(1–2)，69–86（2007） 14. Droste, M., Gastin, P.：加权自动机与加权逻辑。载于：Droste, M., Kuich, W., Vogler, H.（编）《加权自动机手册》，第5章，第175–211页。施普林格（2009） 15. Droste, M., Kuich, W., Vogler, H.（编）：《加权自动机手册》。施普林格（2009） 16. Droste, M., Kuske, D.：加权自动机。载于：Pin, J. ´E.（编）《自动机理论手册》第1卷，第4章，第113–150页。欧洲数学会（2021） 17. Garc´ıa, P., de Parga, M.V., Cano, A., L´opez, D.：关于局部可逆语言。理论计算机科学**410**，4961–4974（2009） 18. Golovkins, M., Pin, J. ´E.：由某些可逆有限自动机模型生成的簇。载于：计算与组合，COCOON 2006。第83–93页（2006） 19. Golovkins, M., Pin, J. ´E.：由某些可逆有限自动机模型生成的簇。芝加哥理论计算机科学杂志**2010** 2 20 2010( )，文章。Guillon, B., Lavado, G.J., Pighizzini, G., Prigioniero, L.：弱不可逆与强不可逆正则语言。国际计算机科学基础杂志**33**(3–4)，263–284（2022）

21. Holzer, M., Jakobi, S., Kutrib, M.：《最小可逆确定性有限自动机》。载于：语言理论进展，DLT 2015，第 276–287 页（2015）22. Holzer, M., Jakobi, S., Kutrib, M.：《最小可逆确定性有限自动机》。国际计算机科学基础杂志**29**(2), 251–270（2018）23. Holzer, M., Kutrib, M.：《可逆非确定性有限自动机》。载于：可逆计算，RC 2017，第 35–51 页（2017）24. Jecker, I., Mazowiecki, F., Purser, D.：《多项式歧义有理权自动机的确定化与消歧》。载于：计算机科学中的逻辑，LICS 2024（2024）25. Kiefer, S., Widdershoven, C.：《像二值自动机》。载于：形式系统描述复杂性，DCFS 2021，第 176–187 页（2021）26. Kiefer, S., Widdershoven, C.：《像二值自动机》。国际计算机科学基础杂志（2024），即将刊出 27. Kl´ıma, O., Pol´ak, L.：《有序自动机的禁模式》。载于：自动机的非经典模型及其应用，NCMA 2018，第 99–115 页（2018）28. Kl´ıma, O., Pol´ak, L.：《有序自动机的禁模式》。自动机、语言与组合杂志**25**(2–3), 141–169（2020）29. Kostol´anyi, P.：《双确定性加权自动机》。载于：代数信息学，CAI 2022，第 161–174 页（2022）30. Kostol´anyi, P.：《有理数域上一元加权自动机的可确定性》。理论计算机科学**898**, 110–131（2022）31. Kostol´anyi, P.：《域上加权自动机的有限歧义性与有限顺序性》。载于：计算机科学——理论与应用，CSR 2022，第 209–223 页（2022）32. Kostol´anyi, P.：《双确定性加权自动机》。信息与计算 **295** 2023 105093 **B ( )**，文章号 . Kostolanyi, P.：《域上有限歧义且有限顺序的加权自动机》。理论计算机科学**1012** 114725 34 2024( )，文章号 . Landauer, R.：《计算过程中的不可逆性与热产生》。IBM研究与开发杂志**5**(3), 183–191（1961）35. Lombardy, S.：《论可逆语言的可逆自动机构造》。载于：自动机、语言与编程，ICALP 2002，第 170–182 页（2002）36. Lombardy, S., Sakarovitch, J.：《序列式? 》。理论计算机科学**356**, 224–244（2006）37. Margolis, S.W., Pin, J. ´E.：《逆半群与有限半群簇》。代数杂志**110**(2), 306–323（1987）38. Okhotin, A., Radionova, M., Sazhneva, E.：《形式语言基本族上的 GF(2) 运算》。理论计算机科学**995** 114489 39 2024( )，文章号 . Paul, E.：《无歧义极大加树自动机的有限顺序性》。载于：理论计算机科学专题研讨会，STACS 2019，第 55:1–55:17 页（2019）40. Paul, E.：《有限歧义极大加树自动机的有限顺序性》。载于：自动机、语言与编程，ICALP 2020，第 137:1–137:15 页（2020）41. Paul, E.：《无歧义极大加树自动机的有限顺序性》。计算系统理论**65**(4), 736–776（2021）42. Pin, J. ´E.：《拼接层次》。RAIRO. 理论信息学。**18**(1), 23–46（1984）43. Pin, J. ´E.：《论可逆自动机》。载于：拉丁美洲理论信息学研讨会，LATIN 1992，第 401–416 页（1992）

44. Pin, J. ́E.：《句法半群》。载于：Rozenberg, G., Salomaa, A.（编），《形式语言手册》第 1 卷，第 10 章，第 679–746 页。施普林格（1997）45. Radionova, M., Okhotin, A.：《可逆自动机与置换自动机的判定问题》。载于：自动机的实现与应用，CIAA 2024，第 302–315 页（2024）46. Radionova, M., Okhotin, A.：《可逆有限自动机层次》。载于：自动机的实现与应用，CIAA 2025，第 316–329 页（2025）47. Sakarovitch, J.：《自动机理论基础》。剑桥大学出版社（2009）48. Salomaa, A., Soittola, M.：《形式幂级数的自动机理论方面》。施普林格（1978）49. Sch¨utzenberger, M.P.：《论自动机族的定义》。信息与控制**4**(2–3), 245–270（1961）50. Straubing, H., Weil, P.：《簇》。载于：Pin, J. ́E.（编），《自动机理论手册》第 1 卷，第 16 章，第 569–614 页。欧洲数学会（2021）51. Tamm, H.：《论双确定自动机的转移最小性》。国际计算机科学基础杂志**19**(3), 677–690（2008）52. Tamm, H., Ukkonen, E.：《双确定自动机与正则语言的最小表示》。载于：自动机的实现与应用，CIAA 2003，第 61–71 页（2003）53. Tamm, H., Ukkonen, E.：《双确定自动机与正则语言的最小表示》。理论计算机科学**328**(1–2), 135–149（2004）54. van der Merwe, B., Tamm, H., van Zijl, L.：《对称差非确定有限自动机的最小确定有限自动机》。载于：形式系统描述复杂性，DCFS 2012，第 307–318 页（2012）55. van Zijl, L.：《论二进制 $\oplus$-非确定有限自动机与正则语言的简洁描述》。理论计算机科学**328**(1–2), 161–170（2004）