arXiv:2601.09412v1 [math.CA] 14 Jan 2026

双线性径向傅里叶乘子的有界性

´ ˇ Petr Honzik 和 Matyas Malecek

摘要。我们证明，若符号为 σ 的双线性径向傅里叶乘子算子是$L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界的，$n \in \mathbb{N}$，则函数 σ 满足光滑性条件 $\sigma(2^j \cdot)\Phi \in L^2_{1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^{2n})$，其中某个 $\varepsilon > 0$ 以及每个$j \in \mathbb{Z}$，Φ 是适用于环域 $|x| \in [1/4, 4]$ 的光滑截断函数。该条件与维数无关。我们还运用类似的推理，为关于多线性 Bochner-Riesz 算子的初始结果提供另一种证明，并证明了广义双线性 Bochner-Riesz 算子的一个估计。

1. 引言

一个m线性（$p1$，……，p_m，p）乘子 $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ 上的函数使得相应的m线性算子

$$T_\sigma(f_1, \ldots, f_m)(x) = \int_{\mathbb{R}^{mn}} \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m) \widehat{f_1}(\xi_1) \cdots \widehat{f_m}(\xi_m) e^{2\pi i x \cdot (\xi_1 + \cdots + \xi_m)} d\xi_1 \cdots d\xi_m,$$

最初定义在m元 Schwartz函数组上的算子，可以从$L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$有界延拓到$L^p(\mathbb{R}^n)$，其中$p1, \ldots, p_m, p$取适当值。

根据 [2] 在$p > 1$ 以及 [8], [5] 在$p \leq 1$情形下的工作可知，$\mathbb{R}^{mn}$ 中的 σ 满足经典 Mihlin 条件时，可保证$T\sigma$ 从$L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$到$L^p(\mathbb{R}^n)$的有界性，对所有 $1 < p1, \ldots p_m \leq \infty$、$1/m < p = (1/p_1 + \cdots + 1/p_m)^{-1} < \infty$均成立。在此情形下，Mihlin 条件通常称为 Coifman-Meyer 条件，相应的乘子也沿用相同的名称。

在 [4], Grafakos、Honz´ík 和 He 的研究中，他们考察了双线性情形下估计的尖锐性。他们关注在$T\sigma$作用于$L^2 \times L^2 \to L^1$ 时的有界性，并证明了以下尖锐结果。

定理 1. 假设 $\widehat{\psi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ 为正，且其支撑集位于环域中

$$\{(\xi, \eta) : 1/2 \leq |(\xi, \eta)| \leq 2\}$$

日期：2026年1月15日。ˇ P. Honz´ík 获得了 GACR P201/24-10505S 项目的资助。

使得 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi,\eta)=\sum_j \widehat{\psi}(2^{-j}(\xi,\eta)) = 1$ 对所有 $(\xi,\eta)\neq 0$ 均成立。令 $1<r<\infty$、$s>\max\{n/2,2n/r\}$，并假设存在常数 A，使得

$$\sup_j \|\sigma(2^j\cdot)\widehat{\psi}\|_{L^r_s(\mathbb{R}^{2n})} \le A<\infty. \tag{1}$$

那么存在常数 $C=C(n,\Psi)$，使得双线性算子

$$T_\sigma(f,g)(x)=\int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma(\xi,\eta)\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)e^{2\pi i x\cdot(\xi+\eta)}d\xi d\eta,$$

最初定义在施瓦茨函数 f 和 g 上，满足

$$\|T_\sigma(f,g)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le CA\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

径向傅里叶乘子是一类重要的算子，其中包括著名的 Bochner-Riesz 乘子等算子。径向傅里叶乘子算子的研究历史悠久，近来取得了许多重要成果，例如 Heo、Nazarov 和 Seeger [7] 的著名结果。

本文旨在开启对具有径向符号的一般双线性傅里叶乘子的更深入研究。我们将重点讨论 $L^2\times L^2\to L^1$，的情形，在此情形下，我们能够通过一种简单但新颖的方法取得良好结果，该方法与 Coifman 和 Meyer [2] 的方法类似。随后，我们还为 $L^2\times L^2\to L^1$，情形下多线性 Bochner-Riesz 乘子的有界性给出一个新的简明证明，并进一步探讨该结果的推广。

首先，我们将证明，当乘子算子的符号为径向时，这个与 [4] 类似的结果实际上与维数无关。我们的主要结果如下：

定理 2. 假设 $\widehat{\psi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ 为正的径向函数，且其支撑集位于环域

$$\{(\xi,\eta): 1/4\le|(\xi,\eta)|\le 4\}$$

满足 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi,\eta)=\sum_j \widehat{\psi}(2^{-j}(\xi,\eta)) = 1$ 对所有 $(\xi,\eta)\neq 0$ 均成立。假设 σ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的径向函数，且存在 $\varepsilon>0$ 及常数 A，使得

$$\sup_j \|\sigma(2^j\cdot)\widehat{\psi}\|_{L^2_{1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^{2n})} \le A<\infty. \tag{3}$$

那么存在常数 C，使得双线性算子

$$T_\sigma(f,g)(x)=\int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma(\xi,\eta)\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)e^{2\pi i x\cdot(\xi+\eta)}d\xi d\eta,$$

最初定义在施瓦茨函数 f 和 g 上，满足

$$\|T_\sigma(f,g)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le CA\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4}$$

作为该定理证明的副产品，我们还得到了两个关于 Bochner-Riesz 算子的结果。首先，以下是关于m –线性 Bochner-Riesz 算子的结果。Berni- cot、Grafakos、Song 和 Yan [1], 在双线性情形下证明了这一结果，而 He、Li 和 Zheng [6]则在多线性情形下证明了这一结果。不过，我们的证明更为简洁且自成一体。

定理3。 设 $m \geq 2$ 为自然数，且 $\lambda > m_2 - 1$。则由乘子给出的 m 线性 *Bochner-Riesz* 算子

$$\sigma^{\lambda}(\xi_1,\ldots,\xi_m) = \left(1 - \left(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_m|^2\right)\right)_+^{\lambda}, \quad \xi_1,\ldots,\xi_m \in \mathbb{R}^n$$

是从 $\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^m$ 到 $L^{\frac{2}{m}}(\mathbb{R}^n)$的有界算子。

在双线性情形下，采用我们的方法，可以很容易地将双线性 Bochner-Riesz 算子推广；例如，我们可以证明：

定理 4。 设 $\gamma > 1$。对于 $\lambda \geq 0$，定义修正的双线性 *Bochner-Riesz* 算子为

$$\sigma^{\lambda,\gamma}(\xi_1,\xi_2) = \frac{\sigma^{\lambda}(\xi_1,\xi_2)}{\left(1 - \log\left(1 - \left[|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right]\right)\right)^{\gamma}}$$

当 $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 < 1$ 时，否则为 0。

则 $T_{\sigma^{0,\gamma}}$是从 $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$的有界算子。

这一对 Bochner-Riesz 的对数推广曾由 Seeger [11] 在一维情形中研究。

本文采用的方法还可应用于许多其他情形，例如算子的极大或多线性版本，或径向乘子的其他具体例子。在某些情况下，这会带来新的结果，或为已知的最佳结果提供新的证明。本文第二部分将探讨这些内容，目前正在撰写中。

我们注意到，虽然对于$L^2 \times L^2 \to L^1$ 的情形，光滑性条件$s > 1/2$ 似乎是最优的，但仅凭我们的方法，似乎无法在其他$L^{p_1} \times L^{p_2} \to L^p$, 情形下得到最优结果，其中$p_1$ 或p_2 不等于 2。因此，要在整个范围内获得最优结果，还需要新的思路。

2. 定义与引理

我们将 Sobolev 空间$L_s^p(\mathbb{R}^n)$定义为所有满足其范数$\left\|((1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f})^{\vee}\right\|_p$ 有限的缓增分布$f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$所构成的空间，其中$p \geq 1$ 且$s > 0$。

给定一个固定的 Schwartz函数 $\Psi \in \mathscr{S}(R^n)$，我们将 Littlewood-Payley 算子 Δ_j^{Ψ}定义为 $\Delta_j^{\Psi} f = \left(\Psi_j \left(2^{-j}\cdot\right) \hat{f}\right)^{\vee}$。

最后，如果 σ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，那么我们将由乘子 σ 给出的算子记为 $T\sigma$，即对于 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，有 $T\sigma(f) = (\sigma \hat{f})^{\vee}$。

如果函数 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上是径向的，即它在每个球面 $t\mathcal{S}^{d-1}, 0 < t < \infty$. 上要么为常数，要么未定义，则称其为径向函数。我们看到，如果径向函数 f 属于任意 Sobolev 空间 $L_s^p, s > 0,$，那么它属于空间 L^p，并且其迹函数 $\bar{f}(t) = f(te)$,（其中 e 是单位向量）在 $(0,\infty)$. 上几乎处处有定义且唯一。

下面的引理是关于迹函数表述的主要定理 2 的一个版本。

引理 5. 设 $\sigma: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ 是一个径向函数，$\Phi \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ 是一个支撑集包含在环域 $\frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4$ 中并满足 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi\left(2^{-j}\xi\right) = 1$ 的径向函数，且对于 $\xi \neq 0$。

令 $\sigma_j = \sigma\Phi\left(2^{-j}\cdot\right)$ 并令 $\tilde{\sigma}_j\left(\pm|\cdot|^2\right) = \sigma_j\left(2^{j+3}\cdot\right)$，其中 $j \in \mathbb{Z}$，且假设对于某个 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$，下述条件成立：

$$C := \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left\|\tilde{\sigma}_j\right\|_{\frac{1}{2}+\varepsilon, 2} < \infty.$$

那么 σ是一个从 $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的双线性乘子

由下述引理可得定理 2：

引理 *6.* 设径向函数 f 的支撑集包含于环域 $\frac{1}{r} < |x| < r,\ r > 1\ on\ \mathbb{R}^d$. 令 $1 \leq p < \infty,\ s > 1/p,\ d \geq 2$. 固定 $x \in \mathbb{R}^d$，满足 $|x| = 1.$。对于 $t > 0$，记 $\bar{f}(t) = \tilde{f}(t^2) = f(tx)$。设 $f \in L_s^p(\mathbb{R}^d)$，则 $\bar{f} \in L_s^p(\mathbb{R})$ 且 $\tilde{f} \in L_s^p(\mathbb{R})$。

根据 [12] 中的定理 5，我们得到 $\bar{f} \in L_s^p(\mathbb{R})$。由于 $t \mapsto t^2$ 在区间 $[1/r, r]$ 上是一个微分同胚，因此我们还得到 $\tilde{f} \in L_s^p(\mathbb{R})$。

引理 5 是尖锐的。与 Sobolev嵌入相关的一个众所周知的例子表明，在 $g \in L^2_{1/2}(\mathbb{R})$ 中存在紧支撑函数，但它不属于 L^∞。不妨设其支撑集位于区间 $[1,2]$ 中，然后在 $\mathbb{R}^{2n}$. 上构造 $f(x) = g(|x|^2)$。于是函数 σ 不属于 L^∞，因此它不是双线性乘子。

为了证明引理 5，我们还需要两个附加引理。引理 7 给出了关于来自 $L^2_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ 的函数的傅里叶级数性质的信息。

引理 7. 设 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ 且 $\sigma \in L^2_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R})$ 是一个支撑集在$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$上的函数。那么 σ有一个绝对收敛的傅里叶级数，并且该级数一致收敛于 σ。

此外，若对 $j \in \mathbb{N}$ 我们记 $D_j = \{k \in \mathbb{Z}: 2j^{-1} \le |k| < 2j\}$ 和 $D_0 = \{0\}$，则存在一个与 σ 无关的 $C > 0$，使得对任意非负整数 j，以下不等式成立：

$$\sum_{k \in D_j} |\hat{\sigma}(k)| \le C \|\sigma\|_{\frac{1}{2}+\varepsilon,2} \, 2^{-j\varepsilon}.$$

关键引理是引理 8，它给出了紧支撑径向乘子的分解。

引理 8. 设 $\sigma: \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ 是一个支撑在球 $B_{\mathbb{R}^{mn}}(0, R)$ 内的函数，其中 $R > 0$。考虑如下定义的函数 $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma}\left(\pm|\xi|^2\right) = \sigma\left(\sqrt{2m}R\xi\right)$$

并假设 $\tilde{\sigma}$ 具有绝对收敛的傅里叶级数，该级数收敛到 $\tilde{\sigma}$。那么，对于任意 $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，我们有：

$$T_\sigma(f_1, \ldots, f_m)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \prod_{j=1}^{m} T_{\sigma^k}\left(f_j\right)(x),$$

其中 c_k 是 $\tilde{\sigma}$ 的傅里叶系数，σ^k 是上确界范数为 1、支撑在球 $B_{\mathbb{R}^n}(0, \sqrt{m}R)$ 内的 *Schwartz* 函数。特别地，它是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的傅里叶乘子，$\urcorner$ 算子范数不超过 1。

引理 8 是引理 5 证明中的关键。我们还将用它证明一个先前已知的结果，即 m 线性 Bochner-Riesz 算子的有界性。

在定理 3 和定理 4 中，我们将使用定理 5 的一个稍弱版本，该版本仅适用于紧支撑乘子。另一方面，它不仅能给出双线性情形下的有界性，还能给出 m 线性情形下的有界性，其中 $m \ge 2$。

引理 9。设 $m \in \mathbb{N}$，$m \ge 2$ 且 σ：$\mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ 是一个支撑集包含于球 $B_{\mathbb{R}^{mn}}(0, R)$ 中的径向函数，其中某个 $R > 0$。设 $\tilde{\sigma}$ 和 c_k（其中 $k \in \mathbb{Z}$）按引理 *8* 定义。假设序列 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 属于（可能是拟巴拿赫）空间 $\ell^{2}{}_{m}(\mathbb{Z})$。

则 T_σ 是从 $\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^m$ 到 $L^{2}{}_{m}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子，并且对于任意 $f_1, \ldots, f_m \in L^2(\mathbb{R}^n)$，有

$$\|T_\sigma(f_1, \ldots, f_m)\|_{2/m} \le \|\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^{\frac{2}{m}}} \, \|f_1\|_2 \ldots \|f_m\|_2 .$$

引理 9 的证明可直接由引理 8 得出，借助 H¨older 不等式和求和。

3. 引理 7 的证明

根据 [10] 的结果，我们看到 $L^2_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{0,\varepsilon}(\mathbb{R})$，因此 σ 的傅里叶级数逐点收敛到 σ。

现在，令 $\Psi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ 的支撑集包含于球 $|\xi| \le 1$ 中。进一步令 $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$，其在环域 $\frac{1}{2} \le |\xi| \le 1$ and $\Psi(0) = 0$ 中等于 1。于是根据[3]:

$$\|\sigma\|_{\frac{1}{2}+\varepsilon,2} \approx \left\| \left(\left| (\Psi_0 \hat{\sigma})^\vee \right|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{j\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} \left| \Delta_j^\Psi \sigma \right| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \tag{5}$$

取 $j \in \mathbb{N}$。则

$$\sum_{k \in D_j} |\hat{\sigma}(k)|^2 = \sum_{k \in D_j} \left| \Psi\left(2^{-j}k\right) \right|^2 |\hat{\sigma}(k)|^2 \le \left\| \Delta_j^\Psi \sigma \right\|_2^2.$$

利用柯西-施瓦茨不等式和 (5)，可得:

$$\sum_{k \in D_j} |\hat{\sigma}(k)| \le 2^{\frac{j}{2}} \left(\sum_{k \in D_j} |\hat{\sigma}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le 2^{-\varepsilon j} \left\| 2^{j\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} \Delta_j^\Psi \sigma \right\|_2 \lesssim 2^{-\varepsilon j} \|\sigma\|_{\frac{1}{2}+\varepsilon,2}.$$

现在，由于 $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) \hookrightarrow L^1\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$ 且 $L^2_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$，我们看到存在一个与 σ 无关的 $C_1 > 0$，使得

$$\sum_{k \in D_0} |\hat{\sigma}(k)| = |\hat{\sigma}(0)| \le \|\sigma\|_1 \le C_1 \|\sigma\|_{\frac{1}{2}+\varepsilon,2}.$$

由此可知，存在一个与 σ 无关的 $C > 0$，使得

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\sigma}(k)| = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in D_j} |\hat{\sigma}(k)| \right) \le C \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\varepsilon j} \right) \|\sigma\|_{\frac{1}{2}+\varepsilon,2}.$$

□

4. 关键引理 8 的证明

注意，$\tilde{\sigma}$的支撑集位于$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$中。我们再次将 $\tilde{\sigma}$ 的傅里叶系数记为c_k，其中$k \in \mathbb{Z}$。我们看到

$$\sigma(\xi) = \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2mR^2} |\xi|^2 \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\frac{\pi}{m} k i \left| \frac{1}{R}\xi \right|^2}$$

对于 $|\xi| \le \sqrt{m}R$。

现在选择一个函数 $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，使得对于 $|\xi| \le 1$，$\phi(\xi) = 1$；对于 m，$\phi(\xi) = 0$。然后，由于 σ 的支撑集包含在一个$B_{\mathbb{R}^{mn}}(0,R)$ 中，我们

have

$$\sigma(\xi_1,\dots,\xi_m)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\prod_{j=1}^{m}e^{\frac{\pi}{m}ki\left|\frac{1}{R}\xi_j\right|^2}\phi\left(\frac{1}{R}\xi_j\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\prod_{j=1}^{m}\sigma^k(\xi_j),$$

其中我们令 $\sigma_k(\xi_j)=e^{\pi_m ki\left|\frac{1}{R}\xi_j\right|^2}\phi(\frac{1}{R}\xi_j)$。利用 c_k 的求和绝对收敛，即得引理的证明。□

5. 引理 5 的证明

取 $f_1,f_2\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，并选取某个 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，其支撑集位于环域 $\frac{1}{4}\le|\xi|\le 4$ 中，使得 $0\le\varphi\le 1$ 且 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi(2^{-j}\xi)=1$ 当 $\xi\neq 0$ 时。

注意，若 $j,r,s\in\mathbb{Z}$ 满足以下条件中的至少一个：

- $r>j+4$ 或 $s>j+4$，
- $r<j-4$ 且 $s<j-4$，

那么 $\sigma_j\left(\Delta_r^{\varphi}f_1\otimes\Delta_s^{\varphi}f_2\right)^{\wedge}=0$：

对每个 $j\in\mathbb{Z}$，我们应用引理 8。记 $c_{j,k}$ 为 j 的傅里叶系数，并记 $\sigma_{kj}(\xi)=e^{\frac{\pi}{2}ki|2^{-j-2}\xi|^2}\phi(2^{-j-2}\xi)$，其中 $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\phi(\xi)=1$（当 $|\xi|\le 1$ 时），且 $\phi(\xi)=0$（当 $|\xi|>\sqrt{2}$ 时）。于是

$$T_{\sigma_j}(f_1,f_2)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_{j,k}T_{\sigma_j^k}(f_1)\,T_{\sigma_j^k}(f_2).$$

我们可以将算子 $T\sigma$ 拆分为 3 个部分：对角部分 $T^{1,1}$ 以及两个由算子 T^2, 给出的非对角部分，其定义如下：

$$T_\sigma^1(f_1,f_2)=T_\sigma(f_1,f_2)-\left(T_\sigma^2(f_1,f_2)+T_\sigma^2(f_2,f_1)\right),$$

$$T_\sigma^2(f_1,f_2)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k\in D_m}c_{j,k}T_{\sigma_j^k}\left(\sum_{r=-\infty}^{j-6-\lceil\frac{m}{2}\rceil}\Delta_r^{\varphi}f_1\right)T_{\sigma_j^k}\left(\sum_{s=j-4}^{j+4}\Delta_s^{\varphi}f_2\right),$$

其中 $\mathrm{D}_m=\left\{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}:\ 2^{m-1}\le|\mathrm{k}|<2^m\right\}$（对 $\mathrm{m}\in\mathbb{N}$）且 $\mathrm{D}_0=\{0\}$。注意，$\mathrm{T}\sigma(\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2)=\mathrm{T}_\sigma^1(\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2)+\mathrm{T}_\sigma^2(\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2)+\mathrm{T}_\sigma^2(\mathrm{f}_2,\mathrm{f}_1)$，因此，要证明 $\mathrm{T}\sigma$ 的有界性，只需证明 T_σ^1 和 T_σ^2 的有界性。

首先，我们将分析对角情形，然后重点讨论非对角部分。

5.1. **对角部分**。 注意，由于函数 $\sigma_j \left(\Delta_r^{\varphi} f_1 \otimes \Delta_s^{\varphi} f_2\right)^{\wedge}$ 的支撑集形式，我们有

$$T_\sigma^1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k\in D_m} c_{j,k} \left(T_{\sigma_j^k} \left(\sum_{r=j-4}^{j+4} \Delta_r^{\varphi} f_1 \right) T_{\sigma_j^k} \left(\sum_{s=j-4}^{j+4} \Delta_s^{\varphi} f_2 \right) + \right.$$
$$\left. + T_{\sigma_j^k} \left(\sum_{r=j-5-\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{j-5} \Delta_r^{\varphi} f_1 \right) T_{\sigma_j^k} \left(\sum_{s=j-4}^{j+4} \Delta_s^{\varphi} f_2 \right) + T_{\sigma_j^k} \left(\sum_{r=j-4}^{j+4} \Delta_r^{\varphi} f_1 \right) T_{\sigma_j^k} \left(\sum_{s=j-5-\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{j-5} \Delta_s^{\varphi} f_2 \right) \right)$$

考虑一个算子

$$T_\sigma^{1,1}(f_1, f_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k\in D_m} \sum_{r,l=-5-\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{4} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| c_{j,k} \right| \left| T_{\sigma_j^k} (\Delta_{j+r}^{\varphi} f_1) \right| \left| T_{\sigma_j^k} (\Delta_{j+l}^{\varphi} f_2) \right|.$$

算子 $T_\sigma^{1\,1,}$ 显然控制着 T_σ^1，因此只需证明 $T_\sigma^{1\,1,}$ 的有界性。

利用富比尼定理，并反复对求和与积分应用柯西–施瓦茨不等式，我们得到:

$$\left\| T_\sigma^{1,1}(f_1, f_2) \right\|_1 \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k\in D_m} \prod_{i=1}^{2} \left(\sum_{l=-5-\lceil m/2 \rceil}^{4} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| c_{j,k} \right| \left\| T_{\sigma_j^k} \left(\Delta_{j+l}^{\varphi} f_i \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

对于 $m \in \mathbb{N}_0$，我们选取一个非负施瓦茨函数 Φ^m，使得$\Phi^m(\xi) = 1$对于 $2^{-7-\lceil \frac{m}{2} \rceil} \leq |\xi| \leq 2^6$成立，并且它在环域 $2^{-9-\lceil m^2 \rceil} \leq |\xi| \leq 2^8$之外为零。

注意， $\Delta_{j+l}^{\varphi} = \Delta_{j+l}^{\Delta^{\Phi^m} j}$对于$l = -5-m \ldots, 4$， $\Phi^m(2^{-j}\cdot)$ 的支撑集至多重叠$m+1$次，差一个与m无关的乘法常数。此外，回忆一下，σ_j^k是$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的傅里叶乘子，其算子范数小于或等于 1。函数 $\varphi(2^{-j}\cdot)$ 也同样如此。于是

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\| T_{\sigma_j^k} \left(\Delta_{j+l}^{\varphi} f_i \right) \right\|_2^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\| \Delta_j^{\Phi^m} f_i \right\|_2^2 \lesssim (m+1) \left\| f_i \right\|_2^2.$$

由此，利用柯西-施瓦茨不等式、富比尼定理和引理 7，我们得到：

$$\begin{aligned}\left\|T_\sigma^{1,1}(f_1,f_2)\right\|_1 &\le \sum_{m=0}^{\infty}(\lceil m/2\rceil+10)^2\prod_{i=1}^{2}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|\Delta_j^{\Phi^m}f_i\right\|_2^2\sum_{k\in D_m}|c_{j,k}|\right)^{\frac12}\\ &\lesssim \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^2\prod_{i=1}^{2}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|\Delta_j^{\Phi^m}f_i\right\|_2^2 2^{-\varepsilon m}C\right)^{\frac12}\\ &\lesssim C\left(\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^3 2^{-\varepsilon m}\right)\|f_1\|_2\|f_2\|_2.\end{aligned}$$

由于 ε 为正，最后一个不等式中的求和收敛。因此，$T_\sigma^{1\,1}$，进而T_σ^1，是从$L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$到$L^1(\mathbb{R}^n)$的有界算子。

5.2. **非对角部分：**首先注意到，存在常数$D>0$，使得对任意$m\in\mathbb{N}_0, j\in\mathbb{Z}$和$k\in D_m$，不等式

$$\left|T_{\sigma_j^k}\left(\sum_{r=-\infty}^{j-6-\lceil\frac{m}{2}\rceil}\Delta_r^{\varphi}f_1\right)\right|\le DM(f_1),$$

其中M是 Hardy-Littlewood 极大算子，几乎处处成立。

这是由函数 σ_j^k 的形式，以及函数$\sum_{j-6-\lceil\frac{m}{2}\rceil r=-\infty}\quad\varphi(2^{-r}\xi)$光滑且具有紧支撑$\lceil\xi|\le 2_{j-4-\lceil m^2\rceil}$这一事实所致，其中 $\lceil\frac{m}{2}\rceil\approx\log_2(\sqrt{|k|})$。因此，直接验证可知，$\sigma_{kj}$在该支撑集上的导数有界，且界与$j$和$k$无关。

我们有：

$$\left\|T_\sigma^2(f_1,f_2)\right\|_1=\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k\in D_m}c_{j,k}T_{\sigma_j^k}\left(\sum_{r=-\infty}^{j-6-\lceil\frac{m}{2}\rceil}\Delta_r^{\varphi}f_1\right)T_{\sigma_j^k}\left(\sum_{s=j-4}^{j+4}\Delta_s^{\varphi}f_2\right)\right\|_1$$

固定 m，对每个 j，我们找到 D 的一个重排 k(j, l) $1\le l\le 2^{m-1}$，使得 |c j,k(j,l)| 随 l 单调不增。由于 $\sum_l|c\,j,k(\,j,l)|\le C2^{-\varepsilon m}$，我们得到 |c j,k(j,l)|$\le C2^{-\varepsilon m}/l$。我们还注意到，傅里叶支集

$$T_{\sigma_j^k}\left(\sum_{r=-\infty}^{j-6-\lceil\frac{m}{2}\rceil}\Delta_r^{\varphi}f_1\right)T_{\sigma_j^k}\left(\sum_{s=j-4}^{j+4}\Delta_s^{\varphi}f_2\right)$$

包含于环域 $|x| \in [2^{j-10}, 2^{j+10}]$. 因此，我们可以利用平方函数表示的$L_1$范数来估计$H_1$ 范数。于是得到

$$
\begin{aligned}
&\left\|T_{\sigma}^{2}(f_1, f_2)\right\|_1 \\
&\leq C \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{m-1}} \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| c_{j,k(j,l)} T_{\sigma_j^{k(j,l)}} \left(\sum_{r=-\infty}^{j-6-\lceil \frac{m}{2} \rceil} \Delta_r^{\varphi} f_1 \right) T_{\sigma_j^{k(j,l)}} \left(\sum_{s=j-4}^{j+4} \Delta_s^{\varphi} f_2 \right) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \\
&\leq C \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{m-1}} 2^{-\varepsilon m}/l \left\| M(f_1) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| T_{\sigma_j^{k(j,l)}} \left(\sum_{s=j-4}^{j+4} \Delta_s^{\varphi} f_2 \right) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \\
&\leq C \|f_1\|_2 \|f_2\|_2.
\end{aligned}
$$

对于最后一个不等式，我们注意到

$$
\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| T_{\sigma_j^{k(j,l)}} \left(\sum_{s=j-4}^{j+4} \Delta_s^{\varphi} f_2 \right) \right|^2
$$

始终是几乎正交的项之和，并且算子 T 是 L^2有界乘子。□

6. 定理3的证明

取两个光滑非负径向函数 $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$，使得 $\varphi_1(\xi) = 0$对于 $|x| \leq \frac{1}{4}$， $\varphi_1(\xi) = 1$对于 $|x| > \frac{1}{2}$以及 $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$。

对于 $i \in \{1,2\}$，令 $\sigma_i = \sigma^{\lambda} \varphi_i\left(|\cdot|^2\right)$。我们将把证明分为两部分。首先，我们使用引理 9分析算子 T_{σ_1}。对于T_{σ_2}，我们将检验 Hörmander-Mihilin乘子条件。

6.1. 有界性T_{σ_1}. 与引理 8 中一样，我们定义 $\tilde{\sigma}_1(\pm|\xi|^2) = \sigma_1\left(\sqrt{2m}\xi\right)$。我们看到:

$$
\tilde{\sigma}_1(x) = (1 - 2m|x|)_+^{\lambda} \varphi_1(2m|x|).
$$

由于c_k 的对称性，我们只考虑$k \in \mathbb{N}$。我们有:

$$
\begin{aligned}
c_k &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}_1(x) e^{-2\pi i k x} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2mx)_+^{\lambda} \varphi_1(2mx) \cos(2\pi k x) dx \\
&= \frac{1}{k^{1+\lambda}} m^{\lambda} \int_0^{\frac{k}{2m}} z^{\lambda} \varphi_1\left(1 - \frac{m}{k} z\right) \cos\left(\pi\left(z - \frac{k}{m}\right)\right) dz.
\end{aligned}
$$

经过多次分部积分，不难验证，最后一个等式中的积分关于k一致有界。这表明$c_k = O(k^{-(1+\lambda)})$，因此 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$属于 $\ell^{2}{}_{m}(\mathbb{Z})$，因为 $^{2}{}_{m}(\lambda + 1) > 1$。

现在，利用引理 9，我们得到T_{σ_1}从 $\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^m$到$L^{2}_{m}(\mathbb{R}^n)$的有界性。

6.2. **有界性**T_{σ_2}。为了检验算子 T_{σ_2} 的有界性，我们使用 Hormander-Mihilin 乘子条件（参见 [3], 第 7.5.3 节）。固定一个 Schwartz函数 Φ，其支撑集包含于形如 $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$ 的环域 P 中，并满足：

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi\left(2^{-j}\xi\right) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

我们要证明

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left\| \sigma_2\left(2^k\cdot\right)\Phi \right\|_{L^2_{mn}(P)} < \infty,$$

其中，$L^2_{mn}(P)$ 表示 P 上的 Sobolev 空间，我们将采用经典意义下的定义，即使用弱导数。

我们看到 $\operatorname{supp}\ \sigma_2\left(2^k\cdot\right) \subseteq B\left(0, 2^{-k-\frac{1}{2}}\right)$。这意味着对于 $k \geq 1$，有 $\sigma_2\left(2^k\cdot\right)\Phi \equiv 0$。因此，我们只需关注 k 为非正整数的情形。固定这样一个 k。

利用 [9] 的结果，我们可以写成：

$$\begin{aligned}
\left\| \sigma_2\left(2^k\cdot\right)\Phi \right\|_{L^2_{mn}(P)} &\leq \|\Phi\|_{L^\infty_{mn}(P)} \left\| \sigma_2\left(2^k\cdot\right) \right\|_{L^2_{mn}(P)} \\
&\lesssim \|\Phi\|_{L^\infty_{mn}(P)} \sum_{j=0}^{mn} \left\| r^{\frac{mn-2+2j}{4}} \left(\sigma_R\left(2^k r\right)\right)^{(j)} \right\|_{L^2(2^{-2},4)},
\end{aligned}$$

其中 $\sigma_R(r) = (1-r)_+^\lambda \varphi(r)$。可知 σ_R 是紧支撑光滑函数，且 $\sigma_R\left(|\xi|^2\right) = \sigma_2(\xi)$。

对于每个 $j \in \{0, \ldots, mn\}$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\| r^{\frac{mn-2+2j}{4}} \left(\sigma_R\left(2^k r\right)\right)^{(j)} \right\|_{L^2(2^{-2},4)} &= 2^{jk} \left\| r^{\frac{mn-2+2j}{4}} \sigma_R^{(j)}\left(2^k r\right) \right\|_{L^2(2^{-2},4)} \\
&= 2^{k\left(j-\frac{d+2j}{4}\right)} \left\| r^{\frac{mn-2+2j}{4}} \sigma_R^{(j)}(r) \right\|_{L^2(2^{k-2},2^{k+2})} \\
&\lesssim 2^{jk} \|\sigma_R\|_{L^\infty_{mn}(\mathbb{R})} \\
&\leq \|\sigma_R\|_{L^\infty_{mn}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

由此可得：

$$\left\| \sigma_2\left(2^k\cdot\right)\Phi \right\|_{L^2_{mn}(P)} \lesssim (mn+1) \|\Phi\|_{L^\infty_{mn}(P)} \|\sigma_R\|_{L^\infty_{mn}(\mathbb{R})} < \infty.$$

因此，T_{σ_2} 是有界的，从 $\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^m$ 映射到 $L^{2}_{m}(\mathbb{R}^n)$。 □

7. 定理 4 的证明

证明与定理3的证明中关于$m=2$情形的第一部分类似。同样地，取 $\tilde{\sigma}^{0,\gamma}(\pm|\xi|^2)=\sigma^{0,\gamma}(2\xi)$。于是对于$k\in\mathbb{N}$，我们有

$$c_k=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\tilde{\sigma}^{0,\gamma}(x)\,e^{-2\pi kix}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\log(1-x))^{-\gamma}\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx.$$

我们有 $c_k=O\left(|k|^{-1}\log(|k|)^{-\gamma}\right)$。为验证这一点，我们将积分拆分为两部分。一部分在区间$\left[1-\frac{1}{k},1\right]$ 上，另一部分在$\left[0,1-\frac{1}{k}\right]$上。

积分的第一部分很容易处理：

$$\int_{1-\frac{1}{k}}^1\left|(1-\log(1-x))^{-\gamma}\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\right|dx\le\frac{1}{k}(1+\log(k))^{-\gamma}\approx\frac{1}{k\log(k)^{\gamma}}.$$

第二部分需要进行两次分部积分。对于充分大的k，我们得到：

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{1-\frac{1}{k}}(1-\log(1-x))^{-\gamma}\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx\right|&\lesssim\frac{1}{k\log(k)^{\gamma}}+\frac{1}{k\log(k)^{\gamma+1}}+\frac{1}{k^2}\\&\lesssim\frac{1}{k\log(k)^{\gamma}},\end{aligned}$$

因此，确实有 $c_k=O\left(|k|^{-1}\log(|k|)^{-\gamma}\right)$。

于是 $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 属于 $\ell^1(\mathbb{Z})$，因为 $\gamma>1$。因此，再由引理 9 可知，$T_{\sigma^{0,\gamma}}$ 从 $L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的有界性。□

参考文献

[1] F. Bernicot、L. Grafakos、L. Song 和 L. Yan。双线性 Bochner-Riesz 问题。《*J. Anal. Math.*》，127：179–217，2015。[2] R. Coifman 和 Y. Meyer。交换子、奇异积分与多线性算子。《*Ann. Inst. Fourier*（*Grenoble*）》，28(3)：xi，177–202，1978。[3] L. Grafakos。现代傅里叶分析。Springer，**第 3** 版，2016。[4] L. Grafakos、D. He 和 P. Honz´ık。H¨ormander 乘子定理 II：双线性局部L^2 情形。《*Math. Z.*》，289(3-4)：875–887，2018。[5] L. Grafakos 和 R. H. Torres。多线性奇异积分的极大算子与加权范数不等式。《*Indiana Univ. Math. J.*》，51(5)：1261–1276，2002。[6] D. He、K. Li 和 J. Zheng。关于多线性 Bochner-Riesz 平均的逐点收敛。*arXiv* 预印本，2024。[7] Y. Heo、F. Nazarov 和 A. Seeger。高维空间中的径向傅里叶乘子。《*Acta Math.*》，206(1)：55–92，2011。[8] C. E. Kenig 和 E. M. Stein。多线性估计与分数阶积分。《*Math. Res. Lett.*》，6(1)：1–15，1999。[9] M. Ostermann。Sobolev 空间中径向对称函数子空间的刻画。《*Communications in Contemporary Mathematics*》，**27**(03)，2024。

[10] Y. Rybalko。分数阶 Sobolev 空间中函数的 H¨older 连续性：一维情形。*arXiv* 预印本，2023。[11] A. Seeger。平面上 Bochner-Riesz 乘子的端点不等式。*Pacific J.Math.*，**174**(2)：543–553，1996。[12] W. Sickel、L. Skrzypczak 和 J. Vybiral。径向函数的正则性与衰减之间的相互作用 I：非齐次空间。*Commun.Contemp.Math.*，14(1)：1250005，60，2012。