arXiv:2601.09417v1 [cs.GR] 14 Jan 2026

用于实时体积可视化的可变基映射

Qibiao Li* Yuxuan Wang* YouchengCai† Huangsheng Du Ligang Liu
中国科学技术大学caiyoucheng@ustc.edu.cn

摘要

大规模体数据的实时可视化仍然具有挑战性，因为直接体绘制和基于体素的方法都面临高得难以承受的计算成本。我们提出了可变基映射（***VBM***），这是一种通过小波域分析将体场转换为三维高斯泼溅（*3DGS*）表示的方法。首先，我们预先计算一个紧凑的“小波到高斯”过渡库，该过渡库可为多个尺度上的规范小波原子提供最优的高斯替代项。其次，我们执行解析式高斯构造，通过闭式且具有数学原理依据的规则，将离散小波系数直接映射为*3DGS*参数。最后，轻量级的图像空间微调阶段进一步优化该表示，以提升渲染保真度。在多种数据集上的实验表明，*VBM*能够显著加快收敛并提升渲染质量，从而实现实时体积可视化。代码将在论文接收后公开发布。

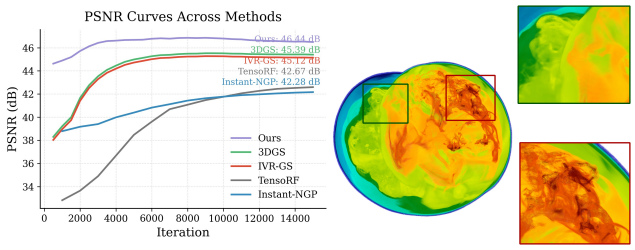


图 1。左：我们的优异峰值信噪比曲线，展示了*VBM* 框架在超新星数据上的性能。右：基于 VBM 的高斯模型能够有效捕捉精细细节。

1. 引言

体数据广泛应用于科学与工程领域，涵盖医学成像（计算机断层扫描、磁共振成像） [28, 39]以及流体动力学 [24, 34], 气候 [4], 和行星尺度系统的模拟 [32]。体积可视化对于揭示此类数据中的模式至关重要，也能为用户理解复杂结构提供直观途径。

随着体数据的分辨率和尺度不断提高，直接体绘制等传统可视化方法 [36]，会变得计算开销巨大且速度缓慢，阻碍实时交互和灵活的数据探索。近年来，三维高斯泼溅（3DGS） [26]已成为表示和渲染复杂场景的一种强大技术。与体积光线步进 [37, 54] 或基于体素的方法 [7, 15, 16, 38, 47, 55],不同，3DGS 使用显式的各向异性三维高斯基元和解析光栅化，实现实时照片级真实感渲染。从功能角度来看，这种表示可视为辐射场——一个从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^4$的映射——在由高斯基函数张成的函数空间上的投影。最优高斯近似通过图像驱动优化获得，其中初始化和优化轨迹都会决定最终质量与收敛速度。

在新视角合成中，3DGS 通常依赖运动恢复结构（SfM） [43] 进行初始化。在体积可视化中，iVR-GS [50] 采用随机初始化的高斯基元，而 VEG [13] 则采用一种启发式策略：将每个初始高斯函数定义为一个球体，其大小与局部点密度成正比。Sewell 等人 [44]尝试从等值面采样点，以更准确地确定高斯函数的位置，从而改进初始化，但等值面提取的计算成本可能很高。尽管如此，这些方法仍存在两大主要局限：（1）它们本质上是启发式的，未能利用体数据中固有的丰富结构与统计信息；（2）高斯函数的构建严重依赖计算密集的图像空间优化，导致计算成本高、收敛速度慢。

为克服这些局限，我们从小波的空频分解中汲取灵感，并利用其对体数据的多分辨率分析来

*共同贡献
†通讯作者

为 3DGS 获得高质量的初始化，从而实现稳定、高效的优化。然而，采用小波分析会带来两个重大挑战：（1）小波基与高斯基之间存在显著的表征差距，难以直接转换；（2）朴素实现会使小波到高斯基的转换具有立方计算复杂度，导致计算成本高得难以承受。

为解决这些问题，我们提出了一种用于在小波域中高效进行体积渲染的**可变基映射**（VBM）框架。首先，我们预先计算一个紧凑的**小波到高斯转换库**。对于每个频率层级ψ_j上的小波核$\mathbf{k}$（x）以及空间位置 j，我们通过统计估计过程获得其最优高斯近似。尽管直接计算需要为一个 $J \times G^3$ 层小波变换计算 J个独立的过渡项，但小波基的平移协变性使我们只需计算每个层级的典范核$\psi_{j,\ \mathbf{k}=(0,0,0)}$ 其中 G 表示体积数据的分辨率。根据群表示定理的保证，其余核可通过平移和缩放以解析方式推导得出 [1, 2]。其次，我们提出一种**解析高斯构造**策略，使用离散小波变换（DWT）分解体积场 [20, 35]，，将体积表示为小波基函数及其对应系数的线性组合。通过应用预先计算的小波到高斯过渡项，每个小波基都以解析方式映射为高斯基，并根据严谨的映射规则，将相应的小波系数系统地转换为对应的 3DGS参数。最后，我们采用**图像空间高斯微调**策略来优化高斯参数，从而确保视觉一致性和收敛性。实验结果表明，我们的方法不仅提高了训练效率，而且实现了优于现有最先进方法的渲染质量。

我们的主要贡献总结如下：

• 据我们所知，**可变基映射**是首个在体分析与三维高斯泼溅之间建立直接数学联系的框架，为高效的场到基元转换奠定了新基础。

• 我们提出了一种原理严谨的核转换机制，名为**小波到高斯转换库**，其理论基础是平移一致性，可高效且可复用地推导高斯基。

• 我们提出一种**实时体可视化范式转变**，将传统体可视化转换为 3DGaussian Splatting 格式。这一“烘焙”过程在保留体积语义的同时，继承了 3DGS 的实时渲染效率。

2. 相关工作

体表示与渲染。 体数据是科学可视化、计算机图形学和医学成像的核心。传统的直接体渲染 [36]沿视线光线对辐射度进行积分，以实现物理精确的可视化，但由于需要密集采样，计算开销很大。

为提升可扩展性，稀疏体素八叉树 [19, 31, 40], 多分辨率金字塔 [49, 51], 和块状网格 [14, 22] 等分层数据结构支持自适应分辨率和内存高效渲染。

更有效的采样策略也提升了渲染效率。重要性采样 [29, 30, 33,52]将计算集中于辐射度或感知上显著的区域，而学习式选择性渲染 [5, 48] 则根据稀疏渲染的内容重建完整图像。

神经场景表示。神经辐射场领域的最新进展，例如 NeRF [37], Plenoxel [15],TensoRF [7], InstantNGP [38], 和 K-Planes [16], , 使得能够为新视角合成构建紧凑且高保真的表示。在这些隐式方法的基础上，三维高斯泼溅（3DGS） [26] 使用各向异性高斯基元表示场景，这些基元既可微，又能高效渲染，从而连接了体积表示与显式表示。将高斯纳入基于网格的框架的扩展方法，例如 SuGaR [21], GaussianMesh [17], GaMeS [53], 和 MeshGS [10], , 通过将高斯分布与网格表面或顶点对齐或附着于其上，利用局部几何信息提高精度，从而提升表面保真度。

在体积建模中，iVR-GS [50] 随机初始化高斯，并完全在图像空间中对其进行优化；而 VEG [13] 则依据局部密度，以启发式方式分布高斯尺度。Sewell 等人 [44]进一步采用基于等值面的点云，实现高质量的环境光遮蔽。然而，这些方法仍主要依赖启发式策略，未能利用体数据内在的结构和统计规律。相比之下，我们的方法在小波引导框架下，建立了从体积场到高斯基元的原理性映射。

体积数据处理中的小波分析。小波分析 [12, 35] 提供了一种具有联合时空频定位的多分辨率表示，其性能优于傅里叶 [46]等全局变换。小波已广泛应用于体积压缩 [6, 23,27],、去噪 [8, 9, 25],和特征提取 [18, 41]。

除体数据设置外，小波在图像处理 [3, 20],时间序列分析 [11, 42], 以及现代深度学习流程 [56, 57],中也展现出广泛的实用价值，彰显了其在层次化、频率感知信号建模方面的多功能性。

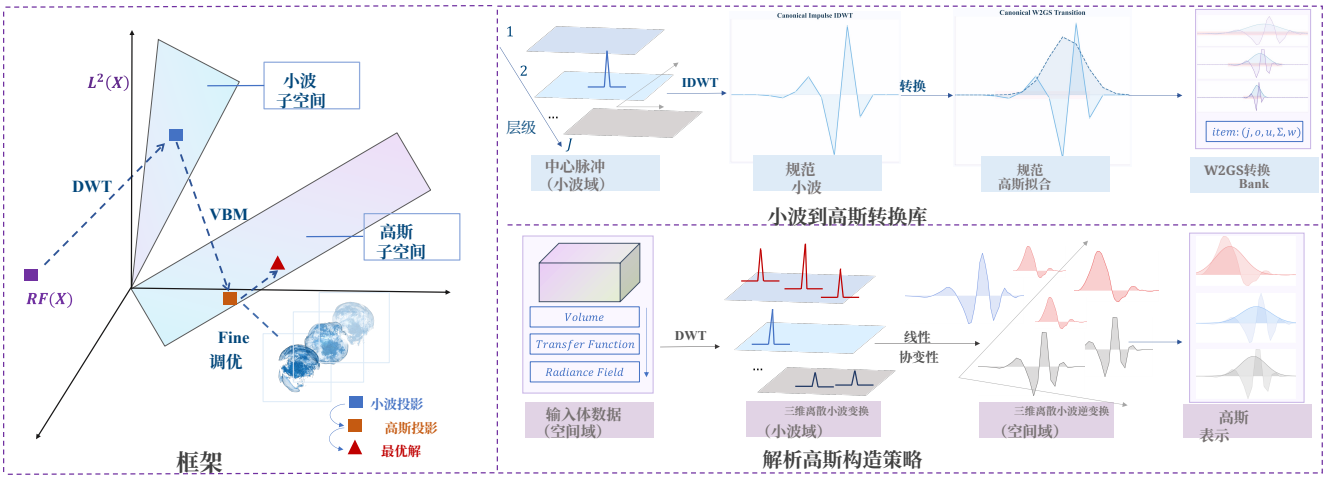


图 2. *VBM* 框架概览。体积辐射场通过离散小波变换（DWT）投影到小波子空间中，随后映射到由高斯基元张成的函数子空间。然后，通过高效的图像空间微调获得最优参数。该过程由小波到高斯转换库提供支持；该转换库由规范小波和高斯函数构建，并采用利用 IDWT 的线性和平移一致性的解析高斯构造策略。

3. 预备知识

传递函数。 科学可视化将空间或时空数据映射为具有感知意义的视觉表示。给定一个空间域 $D \subset \mathbb{R}^d$，数据集可建模为一个场 $F\colon\ D \to \mathbb{R}^r$，其中 r 表示数值维度。传递函数 $TF\colon\ \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$将物理量转换为辐射场的视觉属性，通常生成一个 RGBA向量（$\mathbf{c}\ \alpha$）。本文将 D 离散化为分辨率为 G^3的均匀网格，从而得到 $F \in \mathbb{R}^{G\times G\times G\times r}$。应用传递函数后，可生成辐射体积：$RF = TF(F)\ \in\mathbb{R}^{G\times G\times G\times 4}$，供后续体绘制使用。

三维小波变换。 小波变换提供时空频定位，从而能够对体场进行紧凑且结构化的表示。给定一个母小波 $\psi(\cdot)$ 和一个尺度函数 $\phi(\cdot)$，二进制原子定义为：

$$\psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 2^{3j/2}\,\psi(2^j\mathbf{x} - \mathbf{k}). \tag{1}$$

其中，$\mathbf{x}$ 表示空间位置，j 是尺度索引，$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 是空间平移索引。

向量值辐射场的每个通道 i $RF^{(i)}(\mathbf{x})$ 均可表示为多分辨率展开：

$$RF^{(i)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c^{(i)}_{0,\mathbf{k}}\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k}) + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{\mathbf{k}} d^{(i)}_{j,\mathbf{k}}\psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

其中，$c^{(i)}_{0,\mathbf{k}} = \langle RF_{(i)}\,\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\rangle$, $d^{(i)}_{j,\mathbf{k}} = \langle RF^{(i)}, \psi_{j,\mathbf{k}}\rangle$分别表示低频系数和高频系数。这里，$J$ 表示小波变换的分解层级数。因此，辐射场 $RF(\cdot)$ 可以使用三维小波变换表示为紧凑的多尺度形式：

$$RF(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=0}^{J}\sum_{\mathbf{k}\in D}\begin{bmatrix}\mathbf{c}_{j,\mathbf{k}}\\ \alpha_{j,\mathbf{k}}\end{bmatrix}\psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \tag{3}$$

其中，系数向量 $\mathbf{c}_{j,\mathbf{k}} = \langle \mathbf{c}\psi_{j,\mathbf{k}}\rangle$ 和 $\alpha_{j,\mathbf{k}} = \langle\alpha,\psi_{j,\mathbf{k}}\rangle$ 用于编码不同尺度下的颜色和不透明度。

三维高斯泼溅。 3DGS [26]将辐射场表示为由以下内容组成的集合：N 各向异性高斯核：

$$\mathcal{G} = \left\{(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i, \mathbf{c}_i, \alpha_i)\right\}_{i=1}^{N}, \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\mu}_i \in \mathbb{R}^3$ 表示中心，$\boldsymbol{\Sigma}_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 表示协方差矩阵，$\mathbf{c}_i$ 表示颜色，α_i 表示不透明度。

辐射场可以通过各向异性高斯基元的加权线性组合进行近似：

$$RF(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix}\mathbf{c}_i\\ \alpha_i\end{bmatrix}\exp\left[-\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)^\top\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)\right]. \tag{5}$$

对局部高斯基元进行线性组合，可以高效且可微地近似辐射分布，同时支持实时渲染。

4. 方法

4.1. 形式化表述与概述

我们将变量基映射 视为连接物理场、其视觉编码与最终基元表示的一系列函数映射。给定物理场 F，

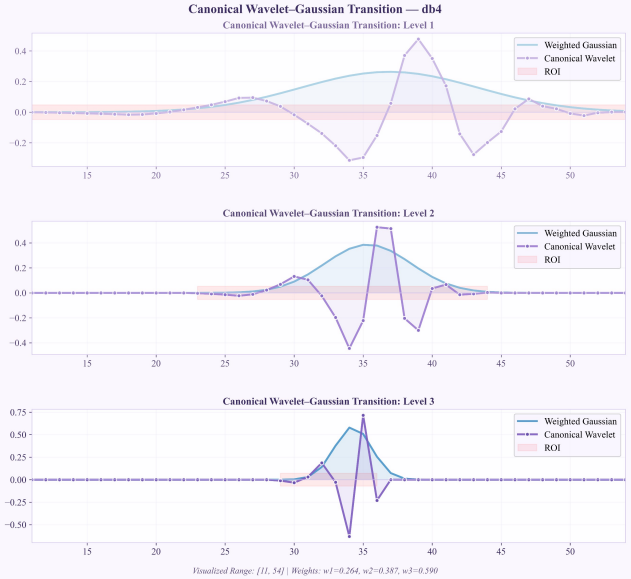


图 3. **小波到高斯转换库**。展示了从局部化小波核到多个尺度上的高斯基元的转换。

我们首先应用传递函数 TF，以获得辐射场 RF。随后将辐射场分解为其多尺度小波表示 Φ，再将其转换为一组三维高斯基元 $\mathcal{G}$。整体映射总结如下：

$$F \xrightarrow{TF} RF \to \Phi \to \mathcal{G}.$$

我们已建立小波与其最优高斯对应项之间的高效对应关系：

$$\psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \sim g_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

将式（6）代入式（3），得到：

$$RF(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{c}_{j,\mathbf{k}},\, \alpha_{j,\mathbf{k}}\right]^{\top} g_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \tag{7}$$

其中 $\left[\mathbf{c}_{j,\,\mathbf{k}},\ \alpha_{j,\,\mathbf{k}}\right]^{\top} = (R、\ G、\ B、\ \alpha)^T$ 表示颜色和不透明度系数，它们由小波子带强度和解析推导的参数映射规则共同确定。该表述直接得出体积场的高斯表示 $\mathcal{G}$。

概述。我们的目标是利用体积信息直接构建高斯基元，从而实现高效的实时渲染与优化。我们首先构建一个小波到高斯转换库，为规范小波核提供预计算的高斯近似（第 4.2 节）。接下来，我们对辐射场应用三维离散小波变换（DWT），提取其空间频率特征，并利用转换库通过简单的查找操作推导出高斯泼溅展开（第 4.3 节）。最后，一个轻量级的图像空间微调阶段会对所得的 3DGS 表示进行优化，从而实现实时体积可视化（第4.4 节）。有关该流程的概述，请参见图 2 。

4.2. 小波到高斯转换库

如图3所示，我们提出了一种高效方法，用于为小波核构建高斯替代项。对于应用于辐射场 J的 层小波变换，直接的方法是针对所有尺度和空间位置上的每个小波核分别拟合最优高斯，从而需要 $J\times G^3$ 次拟合。然而，在每个子带内，所有小波核除平移外都完全相同。因此，只需为每个子带拟合一个典范高斯，再通过空间平移得到其他高斯。

具体而言，我们的流程包括四个步骤：(i) 定义一个规范小波核，(ii) 推导其到任意空间位置的平移规则，(iii) 将最优高斯拟合到规范核上，以及 (iv) 平移拟合得到的参数，为同一子带内的任意核生成近似结果。由此得到一个紧凑且表达能力强的小波到高斯转换库，支持从小波基到高斯基元的解析转换。

规范小波构造。我们将规范小波核定义为小波域中单位脉冲的空间足迹。令 $\mathcal{W}$ 表示具有 J 个分解层级的三维离散小波变换（DWT）。在每个层级 j，子带按以下方式进行索引：

$$\mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z) \in \{\mathrm{L}, \mathrm{H}\}^3, \tag{8}$$

其中，$o_d \in \{\mathrm{L},\mathrm{H}\}$ 表示沿轴 $d \in \{x, y, z\}$ 进行低通或高通滤波。例如，$\mathbf{o} = (\mathrm{L}, \mathrm{L}, \mathrm{H})$ 表示在 x, y 上进行低通滤波，并在 z 上进行高通滤波。

给定分解层级 j 和方向$\mathbf{o}$，我们在相应子带中定义一个脉冲 如下：

$$e_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}=(k_x,k_y,k_z)}(\boldsymbol{\kappa}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} \text{ in subband } (j, \mathbf{o}), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{9}$$

其中$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$表示空间索引。

对该独热特征应用逆小波变换 $\mathcal{W}^{-1}$，即可得到其空间域响应。此外，将脉冲置于$\mathbf{k} = (0,0,0)$处，可得到ˆ规范小波：$\psi_{j,\mathbf{o}}(\mathbf{x})$：

$$\{\hat{\psi}_{j,\mathbf{o}}(\mathbf{x}) = \mathcal{W}^{-1}\left[e_{j,\mathbf{o},(0,0,0)}(\boldsymbol{\kappa})\right] \mid j, \mathbf{o}\}, \tag{10}$$

其中 $j \in \{0, \ldots, J\}$，且$\mathbf{o} \in \{\mathrm{L},\mathrm{H}\}^3$。因此，完整集合ˆ$\{\psi_{j,\mathbf{o}}(\mathbf{x})\}$ 包含 $8(J+1)$ 个规范小波核，每个核都捕捉体积场中一种不同的尺度-方向模式。

平移一致性。现在，我们证明每个子带内的平移一致性：同一子带中的所有小波核都是对应典范核在空间上的平移副本。

给定子带中任意一个位于$\mathbf{k}$处的脉冲（j，$\mathbf{o}$），其空间域响应为：

$$\hat{\psi}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}(\mathbf{x}) := \mathcal{W}^{-1}\big[e_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}\big](\mathbf{x}), \tag{11}$$

它可以由相同尺度和方向下的典范响应推导得出。

为形式化这一关系，我们引入平移算子$(T_{\boldsymbol{\Delta}} f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}-\boldsymbol{\Delta})$。对于近似线性相位滤波器组（例如双正交小波 [12]，其边界采用对称或周期扩展），逆离散小波变换在离散采样网格上呈现近似的平移协变性：

$$\hat{\psi}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \;\approx\; (T_{2^j\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_{j,\mathbf{o}}}\,\hat{\psi}_{j,\mathbf{o}})(\mathbf{x}), \tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{\delta}_{j,\mathbf{o}}$ 是由分析-合成滤波器对的相位延迟和半采样位移决定的亚像素偏移。实际应用中，我们使用双正交 4.4 小波，并设定 $\boldsymbol{\delta}_{j,\mathbf{o}} \approx (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$。

这一性质保证，具有相同尺度 j 和方向 $\mathbf{o}$的所有小波，都是典范响应 $\psi_{j,\mathbf{o}}(\mathbf{x})$在空间上保持一致的平移变换。因此，拟合到典范核的高斯基元可以通过简单平移，高效地传播到各个空间位置，无需为每个小波实例重复拟合参数。

过渡滤波器组构建。在此，我们使用单个高斯基元近似规范小波核。其目标是用高斯包络匹配规范小波的主导空间足迹，这一过程称为主瓣估计。给定规范小波核 $\psi_{j,\,\mathbf{o}}(\mathbf{x})$，我们首先计算归一化幅值分布：

$$W(\mathbf{x}) = \frac{|\hat{\psi}_{j,\mathbf{o}}(\mathbf{x})|}{\sum_{\mathbf{u}\in D}|\hat{\psi}_{j,\mathbf{o}}(\mathbf{u})|},$$
$$\mathcal{R} = \big\{\mathbf{x}\in D : W(\mathbf{x}) > \tau \max_{\mathbf{u}\in D} W(\mathbf{u})\big\}, \tag{13}$$

其中，$\tau \in (0,\,1)$ 是定义感兴趣区域（ROI）的相对阈值，该区域对应于主瓣。在此 ROI 内，我们根据一阶和二阶加权矩估计核的质心和协方差：

$$\mathbf{u}_{j,\mathbf{o}} = \frac{\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} W(\mathbf{x})\,\mathbf{x}}{\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} W(\mathbf{x})},$$
$$\Sigma_{j,\mathbf{o}} = \frac{\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} W(\mathbf{x})\,(\mathbf{x}-\mathbf{u}_{j,\mathbf{o}})(\mathbf{x}-\mathbf{u}_{j,\mathbf{o}})^{\top}}{\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} W(\mathbf{x})}. \tag{14}$$

这两个参数定义了典范高斯近似的几何结构：

$$\big\{g_{j,\mathbf{o}}(\mathbf{x}) \;=\; \exp\Big(-\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{u}_{j,\mathbf{o}})^{\top}\Sigma_{j,\mathbf{o}}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{u}_{j,\mathbf{o}})\Big) \;\big|\; j,\mathbf{o}\big\}. \tag{15}$$

能量守恒。为保持每个小波核及其高斯近似之间的能量一致，我们引入权重向量 $\mathbf{w}_{j,\,\mathbf{o}}\in\mathbb{R}^4$，通过缩放高斯包络使其与原始小波能量匹配。标量权重 $w_{j,\,\mathbf{o}}$ 通过最小化小波幅值与缩放高斯之间的 L^2 差异获得：

$$w_{j,\mathbf{o}} = \arg\min_{w} \big\| |\hat{\psi}_{j,\mathbf{o}}| - w\, g_{j,\mathbf{o}} \big\|_{L^2}, \tag{16}$$

其中，$\|\cdot\|_{L^2}$ 表示勒贝格 L^2 范数 [45]。实际上，令 $\mathbf{Y}$、$\mathbf{G}\in\mathbb{R}^N$ 分别表示在 ROI 内对 $\hat{}\psi_{j,\,\mathbf{o}}$ 和 $g_{j,\,\mathbf{o}}$采样得到的幅值。我们通过岭回归计算$w_{j,\,\mathbf{o}}$：

$$w_{j,\mathbf{o}} = \arg\min_{w} \big\| |\mathbf{Y}| - w\,\mathbf{G} \big\|_2^2 + \lambda w^2, \tag{17}$$

其中 λ 是一个较小的正则化项。所得标量被广播到四个通道，作为$\mathbf{w}_{j,\,\mathbf{o}}$。这对（$g_{j,\,\mathbf{o}}$，$\mathbf{w}_{j,\,\mathbf{o}}$）构成规范高斯。完整的过渡库构建如下：

$$\big\{(\mathbf{w}_{j,\mathbf{o}}, g_{j,\mathbf{o}}(\mathbf{x})) \;\big|\; j,\mathbf{o}\big\}, \tag{18}$$

该映射将每个规范小波核对应到其高斯$\hat{}$对应项：$\psi_{j,\,\mathbf{o}} \to g_{j,\,\mathbf{o}}$.对于$\psi_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k}}$，通过键（$j$，$\mathbf{o}$）检索高斯近似，并通过以下方式进行平移

$$g_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \big(T_{2^j\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_{j,\mathbf{o}}} g_{j,\mathbf{o}}\big)(\mathbf{x}), \tag{19}$$

这与式（12）中的平移性质直接对应。

4.3. 解析高斯构造

我们提出一种解析公式，利用高斯基元直接表示体积辐射场。该过程包括四个阶段：（i）首先对辐射场应用离散小波变换（DWT），将其分解为多尺度子带。（ii）随后，将每个小波系数与一个用于建模其空间足迹的高斯基元关联。（iii）利用逆离散小波变换（IDWT）的线性性质，对每个子带内所有系数的空间贡献进行解析聚合。（iv）将所有子带级高斯场组合起来，从而得到原始辐射场的完整高斯表示。

多通道小波变换。输入体辐射度场是一个四通道函数：

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\;\; V(\mathbf{x}) = \big[R(\mathbf{x})\; G(\mathbf{x})\; B(\mathbf{x})\; \alpha(\mathbf{x})\big]^{\top}. \tag{20}$$

执行 J 层三维离散小波变换（DWT）后，我们得到一组系数：

$$\{A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},c} \in \mathbb{R} \,|\, j,\,\mathbf{o},\,k\},\; c\in\{R,G,B,\alpha\}, \tag{21}$$

其中，j 表示分解层级，$\mathbf{o}$ 表示子带方向，$\mathbf{k}=(k_x, k_y, k_z)$ 表示子带域内的空间索引。因此，每个系数 $A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},c}$ 都编码了通道 c 在空间位置 $\mathbf{k}$ 处、层级 j 沿 $\mathbf{o}$ 方向的子带中的贡献。

由单个系数构造高斯。 按照第 4.2节，每个子带 $(j,\mathbf{o})$ 都关联一个典范高斯 $g(\mathbf{x};\mathbf{u}_{j,\mathbf{o}},\Sigma_{j,\mathbf{o}})$ (式 15)以及一个四维调制向量 $\mathbf{w}_{j,\mathbf{o}}\in\mathbb{R}^4$ (式 17)。对于位置 $\mathbf{k}$处的每个系数，我们计算一个 RGBA 调制向量：

$$\mathbf{p}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}=\begin{bmatrix}|A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},R}|\\|A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},G}|\\|A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},B}|\\|A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},\alpha}|\end{bmatrix}\odot\mathbf{w}_{j,\mathbf{o}},\tag{22}$$

其中 $\odot$表示逐元素乘法。该向量编码了 RGBA 通道的局部谱能量，并由通道权重进行调制。将 RGBA向量 $\mathbf{p}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}$ 与几何高斯$g(\mathbf{x};,\mathbf{u}_{j,\mathbf{o}},,\Sigma_{j,\mathbf{o}})$相乘，即可得到一个表示该小波系数贡献的四维高斯基元：

$$s_{j,\mathbf{o}}\,\mathbf{p}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}\,g(\mathbf{x};\,\mathbf{u}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}},\,\Sigma_{j,\mathbf{o}})\,.\tag{23}$$

这里，$s_{j,\mathbf{o}}=2^{-3j/2}$ 用于补偿较粗尺度下小波能量的固有衰减，而 $\mathbf{u}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}$ 表示典范高斯经过平移后的中心，这与式（12）中的规范小波公式一致：

$$\mathbf{u}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}=T_{2^j\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_{j,\mathbf{o}}}(\mathbf{u}_{j,\mathbf{o}}).\tag{24}$$

总之，每个小波系数都会产生一个高斯基元，其参数化形式为$(s_{j,\,\mathbf{o}}\mathbf{p}_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k}},\ \mathbf{u}_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k}},\ \Sigma_{j,\,\mathbf{o}})$，其中，RGBA 振幅对应于$s_{j,\,\mathbf{o}}\mathbf{p}_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k}}$，中心对应于$\mathbf{u}_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k}}$，而协方差对应于$\Sigma_{j,\,\mathbf{o}}$。

由子带构造高斯表示。要构造整个子带（j，$\mathbf{o}$）的高斯表示，我们首先应用一种自适应滤波策略（参见补充材料），以保留一个由显著系数组成的稀疏集合。令 $\Omega_{j,\,\mathbf{o}}$ 表示保留索引的集合；其中每个$\mathbf{k}\in\Omega_{j,\,\mathbf{o}}$ 都对应子带中的一个非零系数。稀疏化后的子带可写为冲激的线性组合（公式（9））：$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{j,\,\mathbf{o}}}A_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k},\,c}\,e_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k}}(\boldsymbol{\kappa})$。对该表达式应用 IDWT，可得到该子带的空间响应：

$$\mathcal{W}^{-1}\Big[\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{j,\mathbf{o}}}A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},c}\,e_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}(\boldsymbol{\kappa})\Big],\quad c\in\{r,g,b,\alpha\}.\tag{25}$$

根据 $\mathcal{W}^{-1}$ 的线性性质，式（25）可改写为：

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{j,\mathbf{o}}}A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},c}\,\mathcal{W}^{-1}[e_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}(\boldsymbol{\kappa})]\,.\tag{26}$$

代入逆核（式 11）得：

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{j,\mathbf{o}}}A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},c}\,\hat{\psi}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}(\mathbf{x}).\tag{27}$$

将 $\psi_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ 近似为其最优高斯形式（式19），可得：

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{j,\mathbf{o}}}A_{j,\mathbf{o},\mathbf{k},c}\,w_{j,\mathbf{o}}\,g_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}(\mathbf{x}).\tag{28}$$

应用衰减补偿$s_{j,\,\mathbf{o}}$ 并联合排列四个 RGBA 通道后，我们得到高斯基元的线性组合（式（23））：

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{j,\mathbf{o}}}s_{j,\mathbf{o}}\,\mathbf{p}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}\,g(\mathbf{x};\mathbf{u}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}},\Sigma_{\mathbf{o},j})\,.\tag{29}$$

因此，稀疏化子带的空间响应可表示为一组高斯基元：

$$\big\{s_{j,\mathbf{o}}\,\mathbf{p}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}},\ \mathbf{u}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}},\ \Sigma_{j,\mathbf{o}}\ \big|\ \mathbf{k}\in\Omega_{j,\mathbf{o}}\big\}.\tag{30}$$

通过子带聚合进行高斯构造。聚合所有子带后，我们得到一种统一的、基于高斯的体积表示，它天然保留了小波分析中的由粗到细的信息：

$$RF(\mathbf{x})\approx\sum_{j=1}^{J}\sum_{\mathbf{o}}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{j,\mathbf{o}}}s_{j,\mathbf{o}}\,\mathbf{p}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}}\,g(\mathbf{x};\,\mathbf{u}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}},\,\Sigma_{j,\mathbf{o}})\,.\tag{31}$$

式（31）中的每一项都是一个局部化的高斯基元，它在不同尺度和方向上对体积辐射场作出贡献。由此得到的 GS 集定义为：

$$\mathcal{G}=\Big\{\big(s_{j,\mathbf{o}}\,\mathbf{p}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}},\ \mathbf{u}_{j,\mathbf{o},\mathbf{k}},\ \Sigma_{j,\mathbf{o}}\big)\ \Big|\ \mathbf{k}\in\Omega_{j,\mathbf{o}},\ j,\mathbf{o}\Big\},\tag{32}$$

其中 $\mathbf{u}_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k}}$、$\Sigma_{j,\,\mathbf{o}}$、$s_{j,\,\mathbf{o}}\mathbf{p}_{j,\,\mathbf{o},\,\mathbf{k}}$ 分别提供用于初始化 3DGS 表示的中心、协方差矩阵、颜色和不透明度。

4.4. 图像空间高斯微调

为考虑体积中的不同视觉模式，我们使用一系列传递函数 $\{TF_h\}$生成多组辐射场及其对应的高斯表示，其中每个 TF_h 仅在物理场 F 的特定数值区间内非零，在其他区域均为零。由此，每种模式 h都对应一组辐射场$RF_h=TF_h(F)$。对于每个辐射场RF_h，我们通过体积积分渲染 64 张图像，为微调最初构建的 3D 高斯集合 $\mathcal{G}_h$提供监督数据。图像空间损失的计算方式如 [26]所示，并通过反向传播更新 $\mathcal{G}_h$。实践中，每个体积选用 5 个传递函数。微调后，如 [50]所述，每种模式 h对应的高斯函数 $\mathcal{G}_h$ 既可以拼接起来，也可以分别渲染，以实现全局和局部可见性。

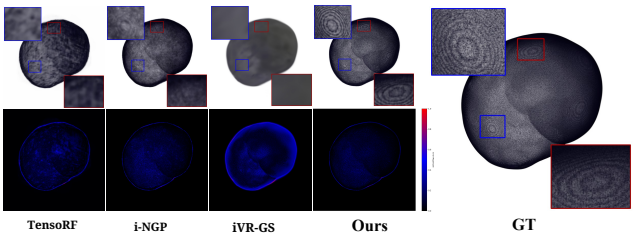


图4. 训练早期阶段（0.5K）的定性比较。我们的基于VBM的高斯已能捕捉精细的结构细节，展现出良好的初始化效果和快速收敛能力。

表1. 四个数据集上的定性比较。报告了在 4k 和 15k 次迭代时的峰值信噪比/结构相似性指数。粗体表示最佳结果，下划线表示次佳结果。

方法	4k 次迭代		15k 次迭代		时间（分钟）
	峰值信噪比	结构相似性指数	峰值信噪比	结构相似性指数	
超新星					
TensoRF	32.78	0.9022	34.01	0.9100	7.58
InstantNGP	33.43	0.9176	35.40	0.9207	5.17
3DGS	38.20	0.9258	39.11	0.9231	5.73
iVR-GS	38.02	0.9243	39.23	0.9246	6.18
Ours	**39.09**	**0.9307**	**40.93**	**0.9273**	**5.06**
结肠易感					
TensoRF	26.40	0.8860	28.08	0.8859	12.65
InstantNGP	27.81	0.9109	**29.75**	**0.9245**	**5.85**
3DGS	26.65	0.9123	28.89	0.9192	7.93
iVR-GS	26.23	0.9105	28.91	0.9182	8.16
Ours	**28.23**	**0.9208**	29.69	0.9198	7.86
头骨					
TensoRF	25.97	0.925	**28.00**	0.9460	14.20
InstantNGP	26.90	0.9313	27.90	**0.9488**	**4.70**
3DGS	26.34	0.9372	27.50	0.9452	6.41
iVR-GS	26.35	0.9376	27.34	0.9446	7.45
Ours	**27.18**	**0.9464**	27.75	0.9454	6.02
Foot					
TensoRF	**28.55**	0.9219	**30.75**	**0.9359**	18.69
InstantNGP	27.26	0.9294	28.21	0.9319	5.87
3DGS	27.40	0.9328	28.01	0.9305	6.01
iVR-GS	27.38	0.9327	27.98	0.9292	7.92
Ours	27.98	**0.9351**	28.23	0.9313	**5.85**

5. 实验

5.1. 数据集与指标

我们在科学可视化中常用的多个代表性体积数据集上评估了我们的方法。其中包括超新星体积（一个 432^3 来自 ECNR 的浮点模拟 [49]），以及来自 [28]的三个医学数据集： 结肠易感计算机断层扫描扫描（$512 \times 512 \times 463$ 个 16 位强度数据），以及两个 X 射线数据集，头骨和脚，二者的尺寸均为 256^3，强度值为 8 位。这些数据集涵盖了多种模态和分辨率，范围从密集物理模拟到动态范围各异的医学扫描。为进行定量评估，我们采用两种标准图像质量指标：峰值信噪比和结构相似性指数。

5.2. 实现细节

我们的框架基于 PyTorch 实现，并通过 CUDA 加速，使用 PyWavelets 进行多尺度分解。所有实验均采用 Adam 优化器。参考体绘制结果使用 ParaView 5.12.1 生成，并以 NVIDIA IndeX 作为基准渲染器。所有实验均在配备 NVIDIA RTX 3090 图形处理器的工作站上进行。

5.3. 比较与评估

我们将方法与多种最先进的神经场景表示方法进行比较，包括 TensoRF [7],Instant-NGP [38], 3DGS [26], 和 iVR-GS [50]。如表1所示，表中汇总了每个场景在 5 种传递函数下的平均指标 TF_h；我们的框架在所有数据集上始终取得更高的峰值信噪比和结构相似性指数，同时所需的训练迭代次数显著更少。值得注意的是，即使在训练早期阶段（4k 次迭代），我们的模型已经能够生成与现有方法完全收敛后结果相当的结果。这表明我们的方法具有快速收敛、表示效率高以及优化过程稳定等特点。

图 4和图 5展示了定性比较结果。与其他方法相比，我们的方法能够生成边界更锐利、体积结构更忠实的结果，验证了所提出的小波到高斯映射的有效性。对于 超新星数据集，我们的模型使用约 1.8×10^5 个高斯基元，并在 RTX 3090 图形处理器上实现了约 120 FPS 的实时渲染性能。

5.4. 消融研究

我们进一步在相同的训练条件下，使用 超新星 数据集分析各个关键组件的作用。定量结果见表 2，定性比较结果见图6。

(1) 不使用过渡库。我们将所有协方差合并为一个共享的各向同性矩阵，从而禁用小波到高斯过渡库。中心和不透明度/外观参数保持不变，而每个协方差在所有尺度 j 和方向 $\mathbf{o}$下均固定为 $\Sigma_{j,\,\mathbf{o}} = \sigma_{\text{iso}}^2\mathbf{I}$，其中 σ_{iso} 对应于完整模型中的平均空间范围。移除尺度—方向自适应性后，结果更加平滑，但明显更加模糊。

(2) 不使用能量投影。消除能量转换（通过设置 $\mathbf{w}_{j,\,\mathbf{o}}=1$）会导致全局强度失衡，

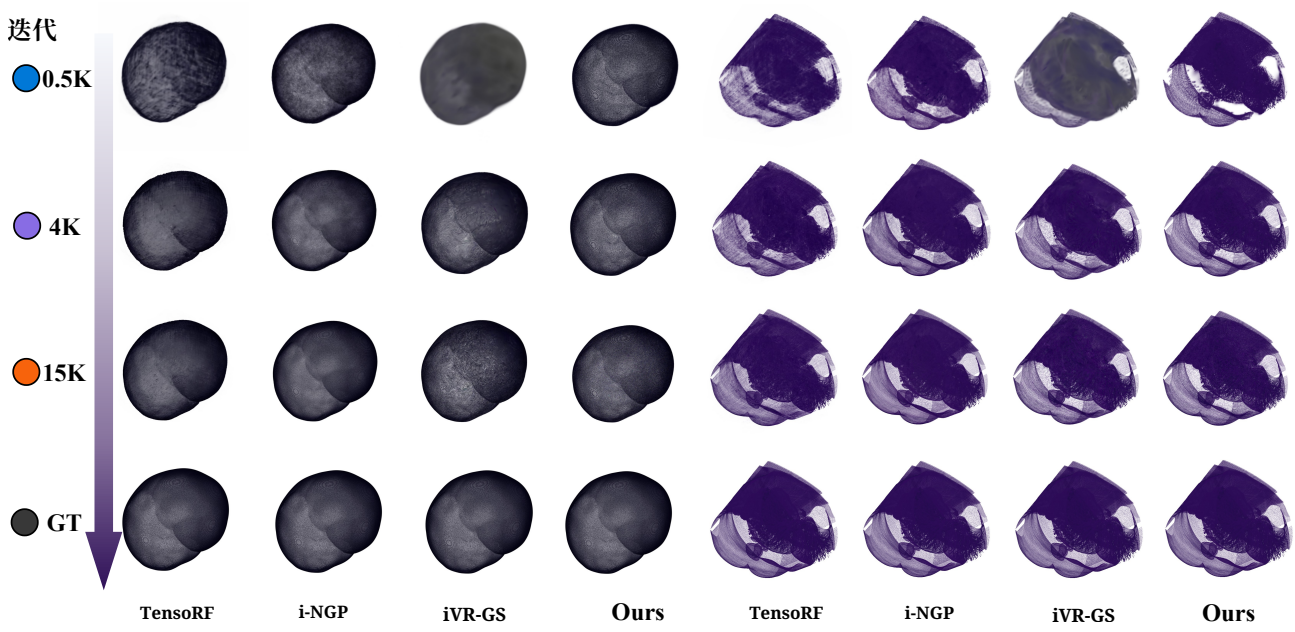


图5. 不同训练迭代次数下的定性比较。我们的方法能够快速细化超新星模拟（左）和结肠俯卧位CT体数据（右）中的结构细节，展现出在科学数据和医学数据上的稳定收敛。

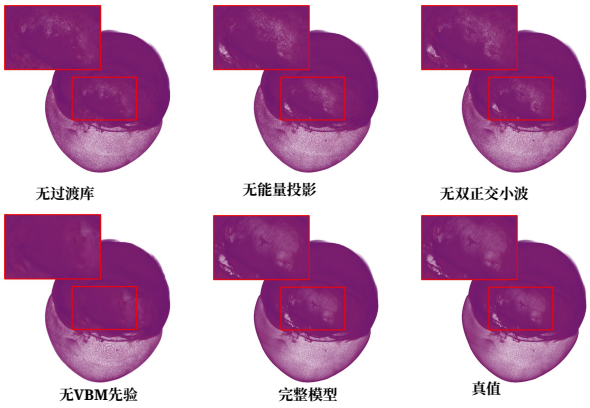


图6. 使用选定的粉色传输函数，在超新星数据集上对不同变体进行的定性消融结果。

凸显了适当的能量缩放对于保持光度一致性稳定的重要性。

(3) 不使用双正交小波。为评估对小波基的敏感性，我们将默认的双正交小波（bior4.4）替换为 Haar 小波。Haar 小波缺乏近似的平移一致性，导致高斯中心错位，并使输出出现轻微的空间模糊。

(4) 不使用 *VBM*初始化。我们去掉基于 VBM 的高斯初始化，并随机设置所有高斯参数。这导致优化性能欠佳，凸显了所提出方法的重要性

表2. 超新星数据集上的消融结果，使用峰值信噪比（dB）和结构相似性指数评估质量。

变体	PSNR	SSIM
无过渡库	30.88	0.9483
无双正交小波	31.94	0.9505
无能量投影	32.18	0.9521
无VBM先验	30.84	0.9469
完整模型	**32.56**	**0.9543**

框架为高效、稳定的训练提供了关键先验。

6. 结论

我们提出了*VBM*，这是一个统一框架，将体积小波分析与3D Gaussian Splatting相结合，用于实时体积可视化。不同于以往基于3DGS的方法所采用的启发式或图像驱动初始化策略，我们的方法建立了从小波核到高斯基元的严谨解析映射。通过预先计算紧凑的“小波到高斯转换组”，并制定解析式高斯构造策略，VBM实现了快速、准确且稳定的场到基元转换。轻量级的图像空间微调进一步提升了视觉保真度，同时不影响效率。大量实验表明，VBM不仅加快了收敛速度、提升了渲染质量，还保留了转换过程中的体积语义，

同时兼具解析严谨性与实用效率。除了这些性能提升，我们的框架还为多分辨率分析与显式场景表示的统一提供了新的数学基础。我们相信，这一范式将推动结构化神经表示、科学可视化以及复杂体积现象实时渲染领域的未来研究。

参考文献

[1] Syed Twareque Ali、Jean-Pierre Antoine 和 Jean-Pierre Gazeau。《相干态、小波及其推广》。Springer，第2版，2016年。2[2] J-P Antoine 和 Pierre Vandergheynst。二维球面上的小波：一种群论方法。《应用与计算调和分析》，7(3):262–291，1999年。2[3] M. Antonini、M. Barlaud、P. Mathieu 和 I. Daubechies。使用小波变换进行图像编码。《IEEE图像处理汇刊》，1(2):205–220，1992年。2[4] Tushar M Athawale、Zhe Wang、David Pugmire、Kenneth Moreland、Qian Gong、Scott Klasky、Chris R Johnson 和 Paul Rosen。参数概率模型和非参数概率模型下二维标量场临界点的不确定性可视化。《IEEE 可视化与计算机图形学汇刊》，2024年。1[5] David Bauer、Qi Wu 和 Kwan-Liu Ma。Fovolnet：使用中心凹深度神经网络进行快速体绘制。《IEEE 可视化与计算机图形学汇刊》，29(1):515–525，2022年。2[6] Tim Bruylants、Adrian Munteanu 和 Peter Schelkens。基于小波的体积医学图像压缩。《信号处理：图像通信》，31:112–133，2015年。2[7] Anpei Chen、Zexiang Xu、Andreas Geiger、Jingyi Yu 和 Hao Su。TensoRF：张量辐射场。载于《欧洲计算机视觉会议》，第333–350页，2022年。1, 2, 7[8] Zikuan Chen 和 Ruola Ning。通过三维小波变换进行乳房体积去噪与噪声表征。《计算机化医学成像与图形》，28(5):235–246，2004年。2[9] Nikolay Chervyakov、Pavel Lyakhov 和 Nikolay Nagornov。用于三维医学成像的离散小波变换滤波器中的量化噪声分析。《应用科学》，10(4):1223，2020年。2[10] Jaehoon Choi、Yonghan Lee、Hyungtae Lee、Heesung Kwon 和 Dinesh Manocha。MeshGS：用于高质量渲染的自适应网格对齐高斯泼溅。arXiv 预印本 arXiv:2410.08941，2024年。2[11] I. Daubechies。小波变换、时频局部化与信号分析。《IEEE信息论汇刊》，36(5):961–1005，1990年。2[12] Ingrid Daubechies。《小波十讲》。SIAM，1992年。2, 5[13] Landon Dyken、Andres Sewell、Will Usher、Steve Petruzza 和 Sidharth Kumar。体积编码高斯：传递与函数无关的三维高斯，用于体绘制。arXiv 预印本 arXiv:2504.13339，2025 年。1，2[14] Thomas Fogal、Alexander Schiewe 和 Jens Kruger。对基于 GPU 的可扩展射线引导体绘制的分析。在 2013 年 IEEE 大规模数据分析与可视化研讨会论文集，第 43–51 页，2013 年。2[15] Sara Fridovich-Keil、Alex Yu、Matthew Tancik、Qinhong Chen、Benjamin Recht 和 Angjoo Kanazawa。Plenoxels：无需神经网络的辐射场。在 IEEE/CVF 计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集，第 5501–5510 页，2022 年。1，2[16] Sara Fridovich-Keil、Giacomo Meanti、Frederik Rahbæk Warburg、Benjamin Recht 和 Angjoo Kanazawa。K-planes：空间、时间和外观中的显式辐射场。在 IEEE/CVF 计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集，第 12479–12488 页，2023 年。1，2 – 。[17] Lin Gao、Jie Yang、Botao Zhang、Jiamu Sun、Yujie Yuan、Hongbo Fu 和 Yu-Kun Lai。高斯泼溅的实时大规模变形。ACM 图形学汇刊，2024年。2[18] Aman Ghasemzadeh 和 Hasan Demirel。基于三维离散小波变换的高光谱人脸识别特征提取。《IET 生物识别》，7(1)：49–55，2018 年。2[19] Enrico Gobbetti、Fabio Marton 和 Jos´e Iglesias Guiti´an。用于海量体数据集交互式外存渲染的单遍 GPU 射线投射框架。The Visual Computer，24：797–806，2008 年。2[20] Rafael C. Gonzalez 和 Richard E. Woods。数字图像处理。Prentice Hall，第 3 版，2008 年。2[21] Antoine Gu´edon 和 Vincent Lepetit。SuGaR：面向高效三维网格重建和高质量网格渲染的表面对齐高斯泼溅。在 IEEE/CVF 计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集，第 5354–5363 页，2024年。2[22] Markus Had wiger、Johanna Beyer、Won-Ki Jeong 和 Hanspeter Pfister。采用可视化驱动虚拟内存方法，对拍字节级显微镜数据流进行交互式体数据探索。IEEE 可视化与计算机图形学汇刊，18：2285–2294，2012 年。2[23] Insung Ihm 和 Sanghun Park。用于超大型体数据交互式可视化的基于小波的三维压缩方案。在 Computer Graphics Forum，第 3–15 页，1999 年。2[24] Jakob Jakob、Markus Gross 和 Tobias G¨unther。面向机器学习的流体流动数据集及其在神经流图插值中的应用。IEEE 可视化与计算机图形学汇刊，27(2)：1279–1289，2021 年。1[25] Eva Jerhotov´a、Jan ˇ Svihl´ık 和 Ale˘s Proch´azka。通过小波变换对生物医学图像体数据进行去噪。应用生物医学工程，第 435–458 页，2011 年。2[26] Bernhard Kerbl、Georgios Kopanas、Thomas Leimk¨uhler 和 George Drettakis。用于实时辐射场渲染的三维高斯泼溅。ACM 图形学汇刊，42(4)，2023 年。1，2，3，6，7[27] T Kim 和 Y Shin。一种用于体绘制的高效基于小波的压缩方法。在第七届

太平洋计算机图形学与应用会议论文集，第 147–156 页，1999 年。2[28] Pavol Klacansky。开放科学可视化数据集。https : / / klacansky.com/open-scivis-datasets/，2017年。1，7[29] Valentin Kraft、Florian Link、Andrea Schenk 和 Christian Schumann。用于直接体绘制的自适应光照采样。在计算机图形学国际会议论文集，第 107–118 页，2020年。2[30] Andreas Kurz、Thomas Neff、Zhaoyang Lv、Michael Zollh¨ofer 和 Markus Steinberger。Adanerf：用于神经辐射场实时渲染的自适应采样。在欧洲计算机视觉会议论文集，第 254–270 页，2022年。2 – 。[31] Samuli Laine 和 Tero Karras。高效稀疏体素八叉树。在 2010 年 ACM 交互式三维图形与游戏研讨会论文集，第 55–63 页，2010年。2[32] Guan Li、Yang Liu、Guihua Shan、Shiyu Cheng、Weiqun Cao、Junpeng Wang 和 Ko-Chih Wang。Paramsdrag：通过图像空间拖动进行交互式参数空间探索。IEEE 可视化与计算机图形学汇刊，2024年。1[33] Ruilong Li、Hang Gao、Matthew Tancik 和 Angjoo Kanazawa。Nerfacc：高效采样加速神经辐射场。在 IEEE/CVF 国际计算机视觉会议论文集，第 18537–18546 页，2023 年。2[34] Yi Li、Eric Perlman、Minping Wan、Yunke Yang、Charles Meneveau、Randal Burns、Shiyi Chen、Alexander Szalay 和 Gregory Eyink。公共湍流数据库集群及其在研究湍流中速度增量拉格朗日演化方面的应用。《湍流学报》，9：N31，2008 年。1[35] St´ephane Mallat。信号处理小波之旅。Elsevier，1999 年。2[36] N. Max。直接体绘制的光学模型。IEEE 可视化与计算机图形学汇刊，1(2)：99–108，1995 年。1，2[37]Ben Mildenhall、Pratul P Srinivasan、Matthew Tancik、Jonathan T Barron、Ravi Ramamoorthi 和 Ren Ng。NeRF：将场景表示为神经辐射场以合成新视图。《ACM通讯》，65(1)：99–106，2021 年。1，2[38] Thomas M¨uller、Alex Evans、Christoph Schied 和 Alexan- der Keller。通过多分辨率哈希编码实现即时神经图形基元。ACM 图形学汇刊，41(4)：1–15，2022年。1，2，7[39] Simon Niedermayr、Christoph Neuhauser、Kaloian Petkov、Klaus Engel 和 R¨udiger Westermann。在消费级设备上将三维高斯泼溅用于电影级解剖学。在《视觉、建模与可视化》会议论文集，2024年。1[40] Martin P¨atzold 和 Andreas Kolb。GPU 上面向稀疏体素八叉树的无网格外存体素化。在第七届高性能图形学会议论文集，第 95–103 页，2015年。2[41] Ale˘s Proch´azka、Lucie Gr´afov´a、Oldrich Vy˘sata 和 Neuro-center Caregroup。三维小波变换在多维生物医学体数据处理。载于《IASTED国际图形与虚拟现实会议论文集》，第268页，2011年。2[42] Manel Rhif、Ali Ben Abbes、Imed Riadh Farah、Beatriz Mart´ınez 和 Yanfang Sang。小波变换在非平稳时间序列分析中的应用：综述。《应用科学》，9(7):1345，2019年。2[43] Johannes L. Sch¨onberger 和 Jan-Michael Frahm。重新审视运动恢复结构。载于《IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集》，第4104–4113页，2016年。1[44] Andres Sewell、Landon Dyken 等。利用三维高斯泼溅高质量近似科学数据。载于《IEEE大数据分析与可视化研讨会（LDAV）论文集》，第73–74页，2024年。1, 2[45] Elias M. Stein 和 Rami Shakarchi。《实分析：测度论、积分与希尔伯特空间》。普林斯顿大学出版社，2009年。5[46] Elias M Stein 和 Rami Shakarchi。《傅里叶分析：导论》。普林斯顿大学出版社，2011 年。2[47] Cheng Sun、Min Sun 和 Hwann-Tzong Chen。直接体素网格优化：实现辐射场重建的超快速收敛。载于《2022年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集》，第5449–5459页，2022年。1[48] Jianxin Sun、David Lenz、Hongfeng Yu 和 Tom Peterka。让最快的更快：利用重建神经网络实现交互式体可视化的重要性掩膜。arXiv预印本 arXiv:2502.06053，2025年。2[49] Kaiyuan Tang 和 Chaoli Wang。ECNR：时变体数据集的高效压缩神经表示。载于《IEEE太平洋可视化会议论文集》，第72–81页，2024年。2, 7[50] Kaiyuan Tang、Siyuan Yao 和 Chaoli Wang。iVR-GS：通过可编辑三维高斯泼溅实现可探索可视化的逆体绘制。arXiv预印本 arXiv:2504.17954，2025年。1, 2, 6, 7[51] Christopher C. Tanner、Christopher J. Migdal 和 Michael T. Jones。剪贴图：一种虚拟多级纹理映射。载于《第25届计算机图形学与交互技术年度会议论文集》，第151–158页，1998年。2[52] Ivan Viola、Armin Kanitsar 和 Meister Eduard Groller。重要性驱动体绘制。载于《2004年IEEE可视化会议》，第139–145页，2004年。2[53] Joanna Waczy´nska、Piotr Borycki、Sławomir Tadeja、Jacek Tabor 和 Przemysław Spurek。GaMeS：基于网格的高斯泼溅自适应与修改。arXiv预印本 arXiv:2402.01459，2024年。2[54] Sebastian Weiss 和 R¨udiger Westermann。可微直接体绘制。《IEEE 可视化与计算机图形学汇刊》，28(1):562–572，2021 年。1[55] Alex Yu、Ruilong Li、Matthew Tancik、Hao Li、Ren Ng 和 Angjoo Kanazawa。用于神经辐射场实时渲染的 Plenoctrees。载于《IEEE/CVF国际计算机视觉会议论文集》，第5752–5761页，2021 年。1

[56] Zheng Zhang、Dongyue Guo、Shizhong Zhou、Jianwei Zhang 和 Yi Lin。基于时频小波变换的飞行轨迹预测。《自然·通讯》，14(1):5258，2023 年。2[57] Junsheng Zhou、Weiqi Zhang、Baorui Ma、Kanle Shi、Yu- Shen Liu 和 Zhizhong Han。Udiff：利用最优小波扩散生成条件无符号距离场。载于《*IEEE/CVF*计算机视觉与模式识别会议（*CVPR*）论文集》，第21496–21506页，2024年2–。