arXiv:2601.09443v1 [math.RT] 14 Jan 2026

# D可定义函子与 Brown–Adams 表示性

ISAAC BIRD

摘要。本文通过研究纯同调维数沿可定义函子的传递，重新探讨环的导出范畴何时满足 Brown–Adams 表示性：我们证明，对任意环，其导出范畴的纯全局维数至少与该环的纯全局维数相同；这拓展了 Beligiannis 和 Keller-Christensen-Neeman 的结果。我们通过构造可定义函子之间 PExt 群的“范畴变换”同构，得到这一结果。这些同构还揭示了在何种情况下可以传递 Brown–Adams 表示性这一性质。我们展示了如何运用这些方法检验某些拟凝聚层的导出范畴是否为布朗范畴。我们还考察了冯·诺伊曼正则环的导出范畴结构，证明在许多情况下，这些结构能够决定 Brown–Adams 表示性；其中包括望远镜猜想的一种新证明，以及一个简洁的新证明：相干环满足 Freyd（强）生成假设，当且仅当它是冯·诺依曼正则环。

## 1. 引言

同伦论中的一项著名结果由 Brown [15] 和 Adams [1], 得出：谱的稳定同伦范畴 Sp 满足 Brown–Adams 表示性。这意味着，有限谱 $\mathrm{Sp}^{\omega}$ 上的任意上同调函子 $F\colon (\mathrm{Sp}^{\omega})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ 都自然同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sp}}(-,X)|_{\mathsf{Sp}^{\omega}}$，其中 $X \in \mathrm{Sp}$；并且，若 $\varphi\colon F \to G$ 是上同调函子之间的自然变换，则 $\varphi \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sp}}(-,f)$，其中 $f\colon X \to Y$是 Sp 中两个表示 $F$ 与 $G$的对象之间的映射。

这一陈述可以推广到任意紧生成三角范畴 T：若 $\mathsf{T}^{c}$ 表示 T 的紧对象，则称 T 满足 Brown–Adams 表示性（或称为布朗范畴），条件是每个上同调函子 $F\colon (\mathsf{T}^{c})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ 都具有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{T}}(-,X)|_{\mathsf{T}^{c}}$ 的形式，其中 $X$是某个对象；并且任意映射$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{T}}(-,X)|_{\mathsf{T}^{c}} \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{T}}(-,Y)|_{\mathsf{T}^{c}}$都具有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{T}}(-,f)$ 的形式，其中 $f\colon X \to Y$。换言之，根据定义，T 是布朗范畴，当且仅当受限 Yoneda 函子

$$\mathsf{y}\colon \mathsf{T} \to \mathsf{Flat}(\mathsf{T}^{c}),\ X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{T}}(-,X)|_{\mathsf{T}^{c}}$$

本质满且满。这里，$\mathsf{Flat}(\mathsf{T}^{c})$ 表示由上同调函子 $(\mathsf{T}^{c})^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ 构成的范畴；之所以这样表述，是因为它是范畴 $\mathsf{T}^{c}$ 的 ind-完备化。

众所周知，并非每个紧生成的 T 都是布朗范畴；要判定某个具体的 T 是否为布朗范畴，并非易事。Neeman [36] 提出了处理这一问题的判据，后来 Beligiannis [9]又对其进行了扩展：他们证明，T 满足 Brown–Adams 表示性，当且仅当 $\mathrm{pgdim}(\mathsf{T})$，即 T 的纯全局维数，至多为一。

我们通过考察纯全局维数，或更具体地说，考察其上升与下降，来探讨三角范畴是否为布朗范畴这一问题。我们的主要研究重新审视了对于环 $R$，何时 $\mathsf{D}(R)$ 是布朗范畴这一问题。在进一步详述并陈述结果之前，我们先提供一些历史背景。

关于 $\mathsf{D}(R)$ 是否为布朗范畴的问题，最早由 Neeman 在 [36], 中探讨；其中一个归功于 Keller 的例子表明，$\mathsf{D}(\mathbb{C}[x,y])$ 不是布朗范畴。关键在于，这个环有一个投射维数至少为二的平坦模。在 [9], 中，Beligiannis 给出了更多反例，并指出在 $R$ 是（右）遗传环的情况下，$\mathrm{Mod}(R)$ 的纯全局维数与 $\mathsf{D}(R)$ 的纯全局维数之间存在联系，且二者相等。Christensen、Keller 和 Neeman 在 [16] 中进一步研究了这一问题（以及其他问题），证明：如果 $R$ 是一个相干环，且每个有限表示的 $R$-模都有有限投射维数，那么 $\mathrm{pgdim}(R) \leq \mathrm{pgdim}(\mathsf{D}(R))$。本文在这一方向上的主要结果如下，它去除了对环的所有假设。

**定理 A.** *(4.1,3.8, 4.5)* 设 $R$ 为一个环，则有如下不等式 $\mathrm{pgdim}(\mathsf{D}(R)) \geq \mathrm{pgdim}(R)$。因此，当 $\mathsf{D}(R)$不是布朗范畴，只要 $\mathrm{pgdim}(R) \geq 2$。此外，若 $f\colon R \to S$ 是一个环同态，则

*(1)* 如果 $f$ 是环满射，则有 纯全局维数$(S) \leq$ 纯全局维数$(R)$；*(2)* 如果 $f$ 是同调环满同态，则有 纯全局维数$(\mathsf{D}(S)) \leq$ 纯全局维数$(\mathsf{D}(R))$。

由此可见，对于任意环，$\mathsf{D}(R)$ 的纯全局维数至少为 模范畴$(R)$ 的纯全局维数，且这是最优的下界。例如，见 4.4，由此可得：代数闭域上的有限维局部代数具有 Brown导出范畴，当且仅当每个模都是纯内射。我们还注意到，第一条列举的结论恢复了 [5]中的一些经典结果。

现在我们来讨论纯结构和纯全局维数。上文所述的受限 Yoneda 嵌入 y 将三角映为长正合列；当且仅当连接态射在 y 下为零时，三角才会映为短正合列，也就是说，连接态射是一个幻影映射。这些就是纯三角，因此，T 的纯结构是模范畴 Mod(T$^{\mathrm{c}}$) 中的短正合列（该范畴由加性函子 (T$^{\mathrm{c}}$)$^{\mathrm{op}}$ →Ab 构成）与 T 中的三角的交；等价地说，纯性的研究可以视为对幻影映射的研究。

事实上，y 在 T 上的纯结构与 Flat(T$^{\mathrm{c}}$) 上的纯结构之间建立了等价，后者有足够多的纯内射对象和纯投射对象。因此，可以在 Flat(T$^{\mathrm{c}}$) 中相对于这些对象构造分解，据此定义纯投射维数和纯内射维数，进而得到 Flat(T$^{\mathrm{c}}$) 的纯全局维数。T 的纯全局维数定义为 Flat(T$^{\mathrm{c}}$) 的纯全局维数。

用于证明定理 A等结果的主要工具，是考察纯同调维数如何在保持纯结构的函子之间传递。这些函子是可定义函子，亦称解释函子；在三角范畴背景下，它们由 [12]引入。若函子 $F\colon \mathsf{T} \to \mathsf{U}$ 是紧生成三角范畴之间的函子，那么它是可定义的，当且仅当它保持余积、积和纯三角。任何这样的函子$\widehat{\ }$都会诱导一个唯一的保持积与直极限的函子 $F\colon \mathsf{Flat}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}) \to \mathsf{Flat}(\mathsf{U}^{\mathrm{c}})$，且该函子与y相容。因此，只要理解了这一可达范畴背景下纯同调维数的传递，就足以理解其在三角范畴层面上的表现。这是我们的第一个主要结果，也是本文的核心工具。

**定理 B.** *(3.1)* 设 $F\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ 是具有乘积的有限可达范畴之间的可定义函子，并假设 $F$ 有一个左伴随 $\Lambda\colon \mathsf{B} \to \mathsf{A}$。那么存在同构

$$\mathrm{PExt}^n_{\mathsf{B}}(B, F(A)) \simeq \mathrm{PExt}^n_{\mathsf{A}}(\Lambda(B), A)$$

对所有 $A \in \mathsf{A}$ $B \in \mathsf{B}$ 以及 $n \geq 0$。

这里，PExt 表示相对于纯投射分解和纯内射分解的 Hom 导出函子，用于衡量对象的纯同调维数。我们注意到，三角范畴之间的任何可定义函子，以及许多其他自然出现的可定义函子，都可以转化到上述框架中。关于定理 A，通过将上述同构应用于 模范畴$(R)$、$\mathsf{D}(R)$和$\mathsf{D}(S)$ 之间特定选择的可定义函子，便可得到这一结果。

然而，尽管定理 A 中的不等式更适合说明 Brown–Adams 表示性何时失效，我们仍能利用这些不等式以及定理 B，给出一些 Brown–Adams 表示性成立的正面例子。

**定理 C。** *(3.16)* 设T 和U 是紧生成三角范畴，并设 $F\colon$ 平坦(T$^{\mathrm{c}}$) →平坦(U$^{\mathrm{c}}$) 是一个可定义函子。

> *(1)* 如果 $F$ 本质上满到直和项，且T是布朗范畴，那么U也是；*(2)* 如果 $F$ 是全忠实的，且U 是布朗范畴，那么T也是。

结合定理 A 和定理 C，还可以直接检验例如范畴 D$_{\mathrm{qc}}(X)$ 是否不是布朗范畴，其中 $X$ 是一个拟紧拟分离概形。该检验见方程 (4.22)，其中证明了：如果 D$_{\mathrm{qc}}(X)$ 是布朗范畴，那么对于所有 $x \in X$，pgdim($\mathcal{O}_{X,x}$) $\leq 1$。

回到环的导出范畴，正如定理 A 所阐明的，理解环满同态就足以确定 Brown 可表性是否失效。事实上，对于许多环，例如所有交换环，都可以通过考察单个环满同态来进行检验。Olivier 的一个经典结果 [37]表明，每个交换环 $A$ 都有一个唯一的非零满态射 $A \to A^{\mathrm{ab}}$，其中 $A^{\mathrm{ab}}$ 是一个交换冯·诺依曼正则环。这些环尤其重要，因为对于它们，纯全局维数与通常的全局维数一致。Olivier 的结果最近被推广到所有环 [23],，因此对于任意环$R$，都存在一个环满态射 $R \to R^{\mathrm{ab}}$，其中 $R^{\mathrm{ab}}$ 是一个阿贝尔 von Neumann 正则环（尽管在这一一般性条件下，$R^{\mathrm{ab}}$ 可能为零）。因此，正如公式 (4.19)所示，冯·诺依曼正则环决定了许多环的导出范畴是否为 Brown 范畴。

在探讨这一问题的过程中，我们研究了冯·诺依曼正则环的导出范畴结构的若干方面。由此，除其他结果外，我们获得了一个全新且非常简短的证明：一个相干环满足 Freyd 生成假设，当且仅当它是冯·诺依曼正则环（见公式 (4.9)）；同时，我们还给出了这类环的望远镜猜想的新证明，见公式 (4.11)。最后，在第 4.B 节中，我们说明，关于环的导出范畴的纯全局维数上界的一些结果，在某些情况下可以推广到所有紧生成三角范畴；其中包括对公式 (4.26)中余倾斜 t-结构的心的考察。

**致谢**。 本研究得到查理大学项目 PRIMUS/23/SCI/006 以及查理大学研究中心计划 UNCE/24/SCI/022 的资助。谨向 M. Prest、S. Virili、J. Williamson 和 A. Zvonareva 致谢，感谢他们提出建设性意见。

## 2. 模的预备知识

下文中，所有范畴均假定为预加性的，所有函子均假定为加性的。为简便起见，我们用 Ab 表示阿贝尔群范畴。对于范畴 A 和 B，我们用 (A，B) 表示由所有加性函子 A →B 构成的函子范畴。

**2.1. 模范畴**。 设 $\mathcal{R}$ 是一个小预加性范畴。根据定义，右 $\mathcal{R}$-模是一个加性函子 $\mathcal{R}^{\mathrm{op}} \to$Ab。右 $R$-模构成的范畴记为 Mod($\mathcal{R}$)。这是一个局部有限表示的格罗滕迪克阿贝尔范畴。有限表示 $\mathcal{R}$-模构成的全子范畴记为 mod($\mathcal{R}$)。模 $M \in$Mod($\mathcal{R}$) 是有限表示的，当且仅当它有一个表示

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(-, A_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(-, B_j) \longrightarrow M \to 0$$

其中 $A_i, B_j \in \mathcal{R}$。若模 $M \in$ Mod($\mathcal{R}$) 同构于可表函子的直极限，即 $M \simeq \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(-, R_i)$，其中每个 $R_i \in \mathcal{R}$，则称其为平坦。若对所有 $M \in$mod($\mathcal{R}$)，对象 $X \in$ Mod($\mathcal{R}$) 满足 $\mathrm{Ext}^1(M, X) = 0$，则称其为有限表示内射。我们分别用 Flat($\mathcal{R}$) 和 fpInj($\mathcal{R}$) 表示平坦模和有限表示内射模构成的全子范畴。内射对象构成的全子范畴类似地记为 Inj($\mathcal{R}$)。

给定一个加性函 子 $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{S}$，介于小预加性范畴之间，可诱导出一个伴随三 le

$$\mathsf{Mod}(\mathcal{S}) \underset{f_*}{\overset{f^!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{f^* \longrightarrow}}}} \mathsf{Mod}(\mathcal{R})$$

其中 $f^*(M) = M \circ f$ 是标量限制；将 $F \in$Mod($R$) 通过余积和余核写作 $M \simeq \mathsf{colim}_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(-, R_i)$，可得

$$f^!(M) = \mathsf{colim}_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-, f(R_i)).$$

**2.2. 纯性**。 设 A 是一个具有积的有限可达范畴，并令 C = fp(A)。这意味着 A 是一个具有所有直极限的范畴，并且对每个 $A \in$ A，都存在一个同构 $A \simeq \varinjlim_I C_i$ with $C_i \in$ C。
A 中的短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 若满足对所有 $A \in$fp(A)，$0 \to (A, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A, Z) \to 0$ 正合，则称为纯 的。在这种情况下，我们称映射 $X \to Y$ 为纯单态射，并称 $X$ 是 $Y$ 的纯子对象；类似地定义纯子对象和商对象的概念。
对象 $X \in$ A 若任意纯单态射 $X \to Y$ 都分裂，则称为纯内射；而 $P \in$A 若任意纯满态射 $M \to P$ 都分裂，则称为纯投射 。A 中纯内射对象构成的全子范畴记为 Pinj(A)，Pproj(A) 也类似定义。

**例 2.3.** 任意满态射 $M \to F$，其中 $F \in$ Flat($\mathcal{R}$)，都是纯的；而任意单态射 $X \to Y$，其中$X \in$fpInj($\mathcal{R}$)，也都是纯的，见 [39, 命题 5.6 和 5.10]。

**2.4. 三角范畴**。 若 T 是一个紧生成三角范畴，则其紧对象构成的子范畴记为 T$^c$。存在一个范畴等价 Flat(T$^c$) = fpInj(T$^c$)，而它们恰好与上同调函子范畴相同，见 [31, 引理 2.7]。因此，受限 *Yoneda* 嵌入

$$\mathsf{y}\colon X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{T}}(-, X)|_{\mathsf{T}^c}$$

可视为一个函子 y : T $\to$ Flat(T$^c$)。

T 中的纯性是根据 Flat(T$^c$) 中的纯性来定义的。三角 $X \to Y \to Z \to \Sigma X$ 是纯的，当且仅当$0 \to \mathrm{y}X \to \mathrm{y}Y \to \mathrm{y}Z \to 0$ 在 Flat(T$^c$) 中是纯的。类似地，对象 $X \in$ T 是纯内射的，当且仅当 y$X$ 在 Flat(T$^c$) 中是纯内射的；这等价于它在模范畴 Mod(T$^c$) 中是内射的。我们用 Pinj(T) 表示 T 中纯内射对象构成的类，并指出存在范畴等价 y : Pinj(T) $\xrightarrow{\simeq}$ Pinj(Flat(T$^c$)) = Inj(T$^c$)。我们注意到，y 很少是全忠实的，因为它的核由幻影映射组成。然而，如果 $T \in$T 且$X \in$ Pinj(T)，则典范映射 Hom$_\mathsf{T}(T, X) \to$ Hom(y$T$, y$X$) 是一个双射；当$T \in$Pproj(T) 且 $X \in$ T 任意时，这一结论也成立，参见 [31, 定理 1.8]。

**2.5. 可定义函子**。我们的研究核心将是能够传递纯性的函子。适当的概念是可定义函子。对于具有乘积的有限可达范畴之间的函子 $F$: A $\to$ B，若它保持滤余极限和积，则称其为可定义的。这是保持纯性的函子的适当概念，因为正如 [39, §13]，所示，可定义函子保持纯正合列和纯内射对象。可定义函子与模型论方法之间的联系也在同一处阐述。紧生成三角范畴中相应的构造见 [12]。紧生成三角范畴之间的函子$F$: T $\to$ U 称为可定义的，若存在一个（唯一的）可定义函子$\frown F$: Flat(T$^c$) $\to$ Flat(U$^c$)，使得 $F \circ \mathrm{y} \simeq \mathrm{y} \circ F$；这等价于 $F$保持积、余积和纯三角，见 [12, 定理 4.16]。

**2.6. 从有限可达范畴到局部相干范畴**。 局部相干阿贝尔范畴是指有限可达阿贝尔范畴，且其有限表示对象也构成阿贝尔范畴。对于一个具有积的有限可达范畴 A，Crawley-Boevey 引入了一个将 A 嵌入局部相干范畴 $\mathbb{D}$(A) 的唯一嵌入，见 [17,§3.3]。我们在此回顾其构造。

令 C = fp(A)，并将 A 与 $\simeq$ Flat(C) 等同；根据 [17, 定理 1.4]，我们可以这样做。Yoneda 嵌入 h: C $\to$ fp(C, Ab)$^{\mathrm{op}}$ 由 $C \mapsto \mathrm{Hom}_\mathsf{A}(C, -)^{\mathrm{op}}$ 给出，它根据公式 (2.1) 诱导出一个函子

$$\mathsf{h}^! \colon \mathsf{Mod}(\mathsf{C}) \to \mathsf{Mod}(\mathsf{fp}(\mathsf{C}, \mathsf{Ab})^{\mathrm{op}}) \simeq (\mathsf{fp}(\mathsf{C}, \mathsf{Ab}), \mathsf{Ab})$$

它是正合函子 h$^*$ 的左伴随，因此保持余极限和射影对象，进而也保持平坦对象。因此存在一个函子

$$d_\mathsf{A} \colon \mathsf{A} \to \mathbb{D}(\mathsf{A}) := \mathsf{Flat}(\mathsf{fp}(\mathsf{C}, \mathsf{Ab}), \mathsf{Ab})$$

如 [17, §3.4 引理 2], 所示，该函子是全忠实且可定义的。范畴 $\mathbb{D}$(A) 是局部相干范畴，而函子 $d_\mathsf{A}$ 限制后给出等价

$$d_\mathsf{A} \colon \mathsf{A} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{fpInj}(\mathbb{D}(\mathsf{A}))$$

以及 Pinj(A) $\simeq$ Inj($\mathbb{D}$(A))。我们注意到，A 中的序列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是纯的，当且仅当它在 $\mathbb{D}$(A) 中经由 $d_\mathsf{A}$ 映射后的序列是正合的。

如 [30, 推论 9.8], 所示，对应关系 A $\mapsto \mathbb{D}$(A) 在等价意义下给出了具有乘积的有限可达范畴与其有限表示内射对象构成有限可达范畴的局部相干阿贝尔范畴之间的一个双射；因此，我们可以在 A 与 $\mathbb{D}$(A) 之间唯一地来回转换。

**例 2.7**。范畴 Mod($\mathcal{R}$) 是局部相干的，当且仅当 $\mathcal{R}$ 有伪核。当 $\mathcal{R}$ 是三角范畴时，这当然成立，此时伪核就是余锥。若 $R$ 是一个环，则 Mod($R$) 是局部相干的，当且仅当 $R$ 右相干。关于局部相干范畴的更多内容，参见 [39, §6] 。

**2.8. 纯同调维数**。照例，设 A 表示一个具有乘积的有限可达范畴。由于它是局部相干的，范畴 $\mathbb{D}$(A) 有足够多的内射对象；又因为 $d_\mathsf{A}$ 是全忠实的，所以 A 有纯内射包络，也就是说，对每个 $X \in$ A，都存在一个纯单态射 $X \to PE(X)$。更具体地，取 $\mathbb{D}$(A) 中的内射包络 $0 \to d_A X \to d_A E \to \Omega^{-1} X \to 0$ ，并注意到 $\Omega^{-1} X \in$ fpInj($\mathbb{D}$(A))，则 $d_A$ 的全忠实性使我们能够将该正合列拉回为 A 中的纯正合列。

因此，我们可以考虑 A 中对象的纯内射分解。同样地，由于 $d_\mathsf{A}$ 将 A 中的纯投射对象映射为 $\mathbb{D}$(A) 中的投射对象，我们可以考虑纯投射分解。

PExt函子定义为 Hom 关于纯分解的导出函子，参见 [41, p.95]。类似于通常的射影维数和内射维数，可以根据 PExt$^n_\mathsf{A}(-,-)$ 的消失来定义纯投射维数和纯内射维数；具体而言

$$\mathsf{ppd}(A) = \sup\{n : \mathrm{PExt}^n_\mathsf{A}(A, -) \neq 0\} \qquad \text{and} \qquad \mathsf{pid}(\mathsf{A}) = \sup\{n : \mathrm{PExt}^n_\mathsf{A}(-, A) \neq 0\}.$$

的纯全局维数由A 定义为

$$\mathsf{pgdim}(\mathsf{A}) = \sup\{\mathsf{ppd}(A) : A \in \mathsf{A}\} = \sup\{\mathsf{pid}(A) : A \in \mathsf{A}\}.$$

**2.9. 内射对象的逆极限**。上文我们看到，射影对象的直极限闭包就是平坦对象。我们也将经常用到其对偶结果，这是 Bergman 一个结果的推广。对于一个环 $R$，Bergman结果 [11, 定理 2] 指出，每个 $R$-模都同构于内射模的一个逆极限。事实上， [7, 命题 2.3] 证明，同样的结果在任意格罗滕迪克范畴中也成立。

2.10. 余挠对。设 $\mathcal{A}$ 是一个局部凝聚 Grothendieck 范畴，且 $A \in \mathcal{A}$。对于任意 $i \in \mathbb{Z}$，我们定义$A^{\perp_i} = \{M \in \mathcal{A} : \mathsf{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, M) = 0\}$，并类似地定义其他各种标记，再将这些定义推广到对象类。$\mathcal{A}$ 中的一对对象类（$\mathcal{C}, \mathcal{D}$）称为余挠对，若 $\mathcal{C}^{\perp_1} = \mathcal{D}$ 且 $\mathcal{C} = {}^{\perp_1}\mathcal{D}$。如果 $\mathcal{A}$ 中的余挠对满足 $\mathsf{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}$，且 $\mathcal{D}$ 在单态射的余核下封闭，则称其为遗传的。这意味着对所有 $i > 0$，都有 $\mathsf{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 0$，见 [20, 定理 2.16]。如果对于所有 $A \in \mathcal{A}$，都存在短正合列 $0 \to D \to C \to A \to 0$ 和 $0 \to A \to C' \to D' \to 0$，满足 $C$、$C' \in \mathcal{C}$ 以及 $D$、$D' \in \mathcal{D}$，则称 $\mathcal{A}$ 中的余挠对是完备的。

**例 2.11.** 设 $\mathcal{R}$是一个骨架小预加性范畴。若对象 $G \in \mathsf{Mod}(\mathcal{R})$ 满足对所有 $F \in \mathsf{Flat}(\mathcal{R})$ 都有 $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{R}}(F, G) = 0$，则称其为余挠 对象。记 $\mathsf{Cot}(\mathcal{R})$ 为 $\mathsf{Mod}(\mathcal{R})$ 中余挠对象组成的类。 [44, 命题 4.7] 证明了 $(\mathsf{Flat}(\mathcal{R}),\mathsf{Cot}(\mathcal{R}))$ 是 $\mathsf{Mod}(\mathcal{R})$ 中一个完备的遗传余挠对。

现在我们简要回顾阿贝尔范畴的局部化理论。更详细的阐述可见例如 [38], [39, §7] 或 [43]。特别是，下文回顾的所有结果的证明都可在这些参考文献中找到。

**2.12. 局部相干范畴的局部化**。设 $\mathcal{A}$ 是一个局部相干的格罗滕迪克范畴。若一个满子范畴 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ 满足：对于 $\mathcal{A}$中的短正合列 $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$， $A_1, A_3 \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $A_2 \in \mathcal{A}$，则称其为*Serre* 子范畴。与 Serre 子范畴相伴的是一个正合局部化函子 $Q_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$，其中 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 是一个阿贝尔范畴，并且任意满足 $F(\mathcal{S}) = 0$的正合函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathsf{A}$ 到阿贝尔范畴 A 都可经由 $Q_{\mathcal{S}}$分解。

子范畴 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ 若是 Serre 子范畴且对余积封闭，则称为局部化 子范畴。在此情形下，局部化$Q_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ 有一个右伴随 $R_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{A}$。局部化子范畴 $\mathcal{S}$若满足有限型 条件，即 $\mathcal{S} = \varinjlim(\mathcal{S} \cap \mathsf{fp}(\mathcal{A}))$，则称其为有限型；这等价于 $Q_{\mathcal{S}}$ 保持有限表示对象，或等价地， $R_{\mathcal{S}}$ 保持直接极限（因而是可定义的）。在此情形下， $\mathcal{A}/\mathcal{S}$本身是局部相干的。

有限型局部化尤其值得关注，因为它们与该范畴中的纯性密切相关。我们只会在三角范畴的语境下使用这一点，因此下文将对此作回顾。

**2.13. 可定义子范畴**。设 $R$ 是一个环，$\mathsf{D}(R)$是其导出范畴。若一个全子范畴$\mathcal{D} \subseteq \mathsf{D}(R)$对积、纯子对象和纯商封闭，则称其为可定义 子范畴。$\mathsf{D}(R)$的可定义子范畴与 $\mathsf{Mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$的有限型局部化之间存在双射，或者等价地，与 $\mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$的 Serre 子范畴之间存在双射。这些双射由下式给出

$$\mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}(\mathcal{D}) = \{f \in \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) : \mathrm{Hom}(f, \mathsf{y}X) = 0 \text{ for all } X \in \mathcal{D}\}$$

and

$$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{D}(\mathcal{S}) = \{X \in \mathsf{D}(R) : \mathrm{Hom}(f, \mathsf{y}X) = 0 \text{ for all } f \in \mathcal{S}\}.$$

有关此问题的更多详情，请参见 [13]。

## 3. 纯同调维数的传递

本节有一个贯穿全文的假设： $F\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ 是具有乘积的有限可达范畴之间的可定义函子。由于任意可定义函子都保持纯正合列和纯内射对象，因此显然，对任意 $X \in \mathsf{A}$，都有 $\mathsf{pid}(FX) \leq \mathsf{pid}(X)$。然而，正如下述结果所示（它可以说是本文的技术核心），若要为纯全局维数给出界，考虑关于 $F$ 的一项附加假设会更方便，即它有一个左伴随。

**命题 3.1.** 设 $F\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ 是具有乘积的有限可达范畴之间的可定义函子，并假设 $F$ 有一个左伴随 $\Lambda\colon \mathsf{B} \to \mathsf{A}$。则存在同构

$$\mathrm{PExt}^n_{\mathsf{B}}(B, F(A)) \simeq \mathrm{PExt}^n_{\mathsf{A}}(\Lambda(B), A)$$

对所有 $A \in \mathsf{A}$ $B \in \mathsf{B}$ 以及 $n \geq 0$。

证明。我们大量使用公式（2.6）中引入的函子 $d_{\mathsf{A}}\colon \mathsf{A} \to \mathbb{D}(\mathsf{A})$。由于 $d_{\mathsf{B}}$ 是可定义的，复合函子 $d_{\mathsf{B}} \circ F\colon \mathsf{A} \to \mathbb{D}(\mathsf{B})$ 也可定义。根据 [30, UP 10.4]，存在函子 $\overline{F}\colon \mathbb{D}(\mathsf{A}) \to \mathbb{D}(\mathsf{B})$，它在自然同构意义下唯一，并且沿着 $d_{\mathsf{A}}$ 延拓 $F$，因此 $F \circ d_{\mathsf{A}} \simeq d_{\mathsf{B}} \circ F$；此外，由于 $F$ 是可定义的，$F$ 也是可定义的，并且存在一个正合左伴随 $\lambda\colon \mathbb{D}(\mathsf{B}) \to \mathbb{D}(\mathsf{A})$。同构 $F \circ d_{\mathsf{A}} \simeq d_{\mathsf{B}} \circ F$ 表明 $F$ 保留内射对象。

取定一个对象 $Y \in \mathbb{D}(\mathsf{B})$，并考虑复合

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\mathsf{B})}(Y, -) \circ F\colon \mathbb{D}(\mathsf{A}) \to \mathsf{Ab}$$

根据伴随 $\lambda \dashv F$，它自然同构于 $\overline{\mathrm{Hom}}^{\mathbb{D}(\mathsf{A})}(\lambda(Y)\ -)$。例如，由 [45,定理 5.8.3]，可得到一个格罗滕迪克谱序列

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathbb{D}(\mathsf{B})}(Y, (\mathsf{R}^q\overline{F})(X)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathbb{D}(\mathsf{A})}(\lambda(Y), X)$$

对于任意 $X \in \mathbb{D}(\mathsf{A})$。

现在假设 $A \in \mathsf{A}$，并令 $X = d_{\mathsf{A}}A$，它是 $\mathbb{D}(\mathsf{A})$ 中的一个有限表示内射对象。在范畴 $\mathsf{fpInj}(\mathbb{D}(\mathsf{A}))$ 中，正合列与纯正合列并无区别；又由于该范畴对纯商封闭，而 $F$ 保持纯正合列，因此限制 $F|\colon \mathsf{fpInj}(\mathbb{D}(\mathsf{A})) \to \mathsf{fpInj}(\mathbb{D}(\mathsf{B}))$ 是正合的。因此，对所有 $p > 0$，$\mathsf{R}^pF(X) = 0$，并且上述谱序列退化为同构

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{D}(\mathsf{B})}(Y, d_{\mathsf{B}}F(A)) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{D}(\mathsf{A})}(\lambda(Y), d_{\mathsf{A}}A)$$

对所有 $A \in \mathsf{A}$。

为完成证明，我们必须证明 $\lambda \circ d_{\mathsf{B}} \simeq d_{\mathsf{A}} \circ \Lambda$。为此，令 $X \in \mathbb{D}(\mathsf{A})$ 并利用 公式（2.9）写成 $X \simeq \varprojlim_J d_{\mathsf{A}}X_j$，其中 $X_j \in \mathsf{Pinj}(\mathsf{A})$。于是有以下同构

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\mathsf{A})}(d_{\mathsf{A}}\Lambda B, X) &\simeq \varprojlim_J \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\mathsf{A})}(d_{\mathsf{A}}\Lambda B, d_{\mathsf{A}}X_j) \\
&\simeq \varprojlim_J \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\mathsf{B})}(d_{\mathsf{B}}B, d_{\mathsf{B}}FX_j) && \text{by } d_{\mathsf{A}}, d_{\mathsf{B}} \text{ being fully faithful and } \Lambda \dashv F, \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\mathsf{B})}(d_{\mathsf{B}}B, \varprojlim_J \overline{F}d_{\mathsf{A}}X_j) && \text{as } d_{\mathsf{B}}F \simeq \overline{F}d_A, \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\mathsf{A})}(\lambda d_{\mathsf{B}}B, X) && \text{since } \overline{F} \text{ preserves limits and } \lambda \dashv \overline{F}.
\end{aligned}$$

由于这对所有 $X$ 都成立，因此存在自然同构 $\lambda \circ d_{\mathsf{B}} \simeq d_{\mathsf{A}} \circ \Lambda$。根据定义，对所有 $A, A' \in \mathsf{A}$，$\mathrm{PExt}^i_{\mathsf{A}}(A, A') \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{D}(\mathsf{A})}(d_{\mathsf{A}}A, d_{\mathsf{A}}A')$，所以陈述中的同构如所述成立。□

**注 3.2**。请注意，上述论证中只有为了使陈述形式更简洁，才需要 $\Lambda$ 存在。伴随函子 $\lambda$ 始终存在，因此总有同构 $\mathrm{PExt}^n_{\mathsf{B}}(B, F(A)) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{D}(\mathsf{A})}(\lambda(d_BB)\ d_{\mathsf{A}}A)$；只是 $\lambda(d_{\mathsf{B}}B)$ 不一定是有限表示内射对象，换言之，不一定属于 $d_{\mathsf{A}}$ 的像。$\Lambda$ 的存在确保了这一点。

我们来给出一些直接的推论。

**推论 3.3**。在 公式 (3.1)的设定下，以下结论成立：

*(1)* $\Lambda$ 保留纯投射对象；*(2)* 若$\mathsf{B}$ 中的每个对象都是 $F$的像中的某个对象的直和项，则纯全局维数($\mathsf{B}$) $\leq$ 纯全局维数($\mathsf{A}$)。

证明。对于第一项，注意到 $B \in \mathsf{B}$ 是纯投射的，当且仅当 $\mathrm{PExt}^1_{\mathsf{B}}(B, -) = 0$。由公式 (3.1) 中的伴随关系以及 $n = 1$ 可知，只要 $B$ 是纯投射的，$\Lambda(B)$ 就是纯投射的。对于第二项，只需在 $F$的像中的对象上检验。在这种情况下，有 $\mathrm{PExt}^n_{\mathsf{B}}(B, X) = \mathrm{PExt}^n_{\mathsf{B}}(B, FA) \simeq \mathrm{PExt}^n_{\mathsf{A}}(\Lambda(B)\ A)$，因此若后者为零，则前者也为零。□

左伴随 $\Lambda$ 的存在并非过于苛刻。我们来举一些例子说明这一点。

**例 3.4.** 设 $F\colon \mathsf{T} \to \mathsf{U}$ 是紧生成三角范畴之间的可定义函子。那么，除了方程（2.5）中所述的诱导可定义函子 $F\colon \mathsf{Flat}(\mathsf{T}^c) \to \mathsf{Flat}(\mathsf{U}^c)$ 之外，还存在一个（唯一的）可定义函子 $F\colon \mathsf{Mod}(\mathsf{T}^c) \to \mathsf{Mod}(\mathsf{U}^c)$，使得 $F|_{\mathsf{Flat}(\mathsf{T}^c)} = F$。此外，$F$ 还存在一个左伴随$\Lambda\colon \mathsf{Mod}(\mathsf{U}^c) \to \mathsf{Mod}(\mathsf{T}^c)$。§4.C]对此作了说明。

关于上述评论，请注意，$\Lambda$ 通常不会限制在平坦对象上，尽管 $F$ 会如此；因此，需要将该伴随视为局部相干的范畴之间的可定义函子，而不是有限可达范畴之间的函子。

**例 3.5**。 对于一个小预加性范畴的函子 $f\colon \mathcal{R}\to\mathcal{S}$，在 $f_!\dashv f^*$中定义的伴随对公式 (2.1) 满足公式 (3.1)的条件。

**例 3.6**。 作为方程 (3.5)的一个具体例子，环映射 $f\colon R\to S$ 诱导出伴随对$S\otimes_R-\dashv(-)_R$，其中 $(-)_R$: 模范畴$(S)\to$ 模范畴$(R)$ 是标量限制函子。由于它也有右伴随，因此它是可定义的。于是，公式 (3.1)中的同构给出

$$\mathrm{PExt}^i_R(M,(N)_R)\simeq\mathrm{PExt}^i_S(M\otimes_R S,N) \tag{3.7}$$

对于任意 $M\in$模范畴$(R)$ 和 $N\in$ 模范畴$(S)$，均成立。

回忆一下，环映射 $f\colon R\to S$ 若其限制 $(-)_R$: 模范畴$(S)\to$模范畴$(R)$ 是全忠实的（更多详情见 [38, §5.5.1] ），则称为环满射。对于这类环映射，很容易得到它们的纯全局维数之间的关系。

**命题 3.8**。 设 $f\colon R\to S$ 是一个环满射。则纯全局维数$(S)\leq$ 纯全局维数$(R)$。

证明。 $f$是环满射这一事实，等价于对任意$N\in$模范畴$(S)$中的对象，都有同构 $N\simeq S\otimes_R(N)_R$，见 [43, 命题 XI.1.2]。因此，公式 (3.7) 中的同构给出 $\mathrm{PExt}^i_R((M)_R,(N)_R)\simeq\mathrm{PExt}^i_S(M,N)$，对所有 $M,N\in$模范畴$(S)$中的对象都成立，由此立即可得纯全局维数$(S)\leq$纯全局维数$(R)$。□

我们注意到 公式 (3.8) 恢复了 [5, 命题 2.2 和推论 2。3]。在讨论公式 公式 (3.1) 在导出范畴中的应用时，我们将考察上述关于同调环满射的类似版本。

事实上，上述情形是一个例子：我们的标准伴随 $\Lambda\dashv F$中， $F$ 可定义，且其中一个函子是全忠实的。在这一一般性条件下，我们有如下结论。

**引理 3.9**。 设 $F\colon \mathsf{A}\to\mathsf{B}$ 是一个可定义函子，且其左伴随为 $\Lambda$。

*(1)* 若 $F$ 是全忠实的，则 纯全局维数$(\mathsf{A})\leq$纯全局维数$(\mathsf{B})$。

*(2)* 若 $\Lambda$ 是全忠实的，则 纯全局维数$(\mathsf{B})\leq$纯全局维数$(\mathsf{A})$。

证明。 由公式 (3.1)，存在同构

$$\mathrm{PExt}^n_{\mathsf{B}}(FM,FM')\simeq\mathrm{PExt}^n_{\mathsf{A}}(\Lambda FM,M')$$

and

$$\mathrm{PExt}^n_{\mathsf{A}}(\Lambda N,\Lambda N')\simeq\mathrm{PExt}^n_{\mathsf{B}}(N,F\Lambda N')$$

对所有 $M,M\prime\in\mathsf{A}$ 以及 $N,N'\in\mathsf{B}$ 均成立。现在， $F$（分别地， $\Lambda$）是全忠实的，当且仅当 $\Lambda F\simeq\mathrm{Id}_{\mathsf{A}}$（分别地，$F\Lambda\simeq\mathrm{Id}_{\mathsf{B}}$），参见 [35, 定理 IV.3.1]。结论显然成立。□

**例 3.10**。 按照公式 (2.12)的情形，若 $\mathcal{A}$ 是局部相干范畴，且 $\mathcal{S}\subseteq\mathsf{fp}(\mathcal{A})$ 是 Serre 子范畴，则诱导局部化 $Q_{\mathcal{S}}\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\lim\!\longrightarrow\mathcal{S}$是有限型的，因此其右伴随保持直接极限，故为可定义函子。因此，我们有 纯全局维数$(\mathcal{A}/\lim\!\longrightarrow\mathcal{S})\leq$纯全局维数$(\mathcal{A})$。

另一方面，若 $f\colon\mathcal{R}\to\mathcal{S}$ 是有限可达范畴之间的全忠实函子，那么公式 (2.1) 的伴随$f_!\dashv f^*$中， $f_!\dashv f^*$是全忠实的，因此 pgdim(Mod($\mathcal{R}$)) $\leq$pgdim(Mod($\mathcal{S}$))。

例 3.11。在某些满足公式 (3.1) 设置的情形下，左伴随 $\Lambda\colon\mathsf{B}\to\mathsf{A}$ 本身是一个可定义函子。例如，当 $f\colon R\to S$ 将 $S$ 实现为一个有限表示的$R$-模时，公式 (3.6) 就属于这种情形。在此情况下，伴随 $\Lambda\vdash F$ 可沿着 $d_{\mathsf{A}}$ 和 $d_{\mathsf{B}}$ 延拓，从而得到一个伴随 $\Lambda\dashv F$。事实上，若$\lambda\dashv F$是公式 (3.1) 证明中所述的正合左伴随，则 $\lambda\circ d_{\mathsf{B}}\simeq d_{\mathsf{A}}\circ\Lambda$ —— 这一点可以利用左伴随的唯一性来验证。由于 $\lambda$ 是正合的，因而也是左正合的，而 $\Lambda$ 是左正合的，将这两个函子作用于任意 $X\in\mathbb{D}(B)$ 的内射分解的起始部分，例如 $0\to X\to d_{\mathsf{B}}E_1\to d_{\mathsf{B}}E_2$，即可得出 $\lambda=\Lambda$。特别地，$\Lambda$ 是一个两侧都有伴随的正合函子。

例 3.12. 设 $\mathsf{T}_1$,$\mathsf{T}_2$ 和 $\mathsf{T}_3$ 是紧生成三角范畴，并假设存在一列可定义函子 Flat($\mathsf{T}_1^c$) $\to$ Flat($\mathsf{T}_2^c$) $\twoheadrightarrow$ Flat($\mathsf{T}_3^c$)；例如，当 $\mathsf{T}_1$ 是 $\mathsf{T}_2$ 的 smashing 子范畴，且 $\mathsf{T}_3$ 是相应的局部化时，就会出现这种情形，这是公式 (3.4) 的一种特殊形式。由公式 (3.9)，我们得到 pgdim($\mathsf{T}_1$)、pgdim($\mathsf{T}_3$) $\leq$ pgdim($\mathsf{T}_2$)。然而，一般而言，无法根据 pgdim($\mathsf{T}_1$) 和 pgdim($\mathsf{T}_3$) 给出 pgdim($\mathsf{T}_2$) 的上界。例如，考虑 D($A$)，其中 $A$ 是域 $k$ 上 Kronecker 箭图的路径代数；此时存在一个粘合 D($k$) $\to$ D($A$) $\twoheadrightarrow$D($k$)，见 [2,注 2.11]。由于 $A$ 是遗传的，根据 [28, 推论 11.33], ，当 $k$ 为可数或不可数时，pgdim(D($A$)) $\in\{1,2\}$；而在任何情况下，pgdim(D($k$)) $=0$ 。

3.A. **Brown–Adams 表示性**。 现在我们转而关注纯全局维数转移到紧生成三角范畴中的一个应用。从现在起，紧生成这一假设将始终成立。

**3.13. Brown 范畴**。 若一个紧生成三角范畴 T 的受限 Yoneda 嵌入 y: T $\to$ Flat(T$^c$) 是满且本质满的，则称 T 为*Brown*范畴，或称其满足*Brown– Adams* 表示定理 。

换言之，当且仅当任意上同调函子 $H$: (T$^c$)$^{op}$ $\to$ 阿贝尔群范畴 都具有形式 y$X$ =Hom$_T$(–, $X$)$|_{T^c}$（其中 $X \in$ T），且若 $\varphi$: y$X \to$ y$Y$是一个自然变换，则存在一个映射 $f$: $X \to Y$，使其诱导出 $\varphi$，T 才是 Brown 范畴。

**注 3.14.** Brown 范畴的最初实例是谱的同伦范畴，见 [15]，随后更一般地见 [1]。Neeman 在 [36], 中推广了这一结果，证明任何满足 T$^c$ 三角等价于一个具有可数骨架的范畴的紧生成三角范畴，也是 Brown 范畴。例如，这包括 D($R$) ，其中 $R$ 是一个可数环。文献 [10, 定理 4.71]确定了 StMod($kG$) 成为 Brown 范畴的充要条件。

下一节我们将考察导出范畴不满足布朗范畴条件的情形，以及这些否定性结果的历史。

**3.15. Neeman 判据**。就我们的目的而言，T 为布朗范畴的最有用的等价条件归功于 Neeman [36,命题 4.10、4.11], 以及 Beligiannis [9, 定理 11.8] 。该条件表明：

> T 是布朗范畴，当且仅当对于所有 $f \in$Flat(T$^c$)，都有 pd($f$) $= 1 =$id($f$)，也就是说 Ext$^2_{T^c}$($f$, –) $= 0 =$ Ext$^2_{T^c}$(–, $f$)。

现在我们证明下述结果，这是关于布朗–Adams 可表性的函子性的最一般结果。

**定理 3.16**。设 T 和 U 为紧生成三角范畴，且 $F$: Flat(T$^c$) $\to$ Flat(U$^c$) 为一个可定义函子。

> *(1)* 假设 $F$ 在直和项意义下本质满，则若T 是布朗范畴，U也是布朗范畴。*(2)* 假设 $F$ 是全忠实函子，则若U 是布朗范畴，T也是布朗范畴。

证明。对于第一个结论，根据命题 4，我们可以将 $F$ 扩展为一个可定义函子$\overline{F}$: 模范畴(T$^c$) $\to$ 模范畴(U$^c$)，它有一个左伴随 $\Lambda$。因此，我们处于公式 (3.1) 的情形。令 $f \in$Flat(T$^c$) 和$g \in$模范畴(U$^c$)。那么，对于所有 $n \geq 0$，都有同构 Ext$^n_{T^c}$($\Lambda(g)$ $f$) $\simeq$Ext$^n_{U^c}$($g$, $F(f)$)。因此，若 T 是 Brown 范畴，根据公式 (3.15)，我们有 Ext$^2_{U^c}$($g$, $F(f)$) $= 0$。现在，$F$ 在直和项意义下本质满这一假设意味着，对于所有 $h \in$ Flat(U$^c$)，都有 Ext$^2_{U^c}$(–, $h$) $= 0$ ，因此 U 是 Brown 范畴。

对于第二个陈述，设 $m \in$ Mod(T$^c$)，并考虑 Mod(T$^c$) 中的短正合列 $0 \to k \to h \to m \to 0$，其中 $h \in$ Flat(T$^c$) 且 $k \in$ Cot(T$^c$)；根据公式 (2.11)，这样的短正合列存在。若 $f \in$ Flat(T$^c$)，则将 Hom($f$, –) 作用于此正合列，并注意到对所有 $i \geq 0$，Ext$^i_{T^c}$($f$, $k$) $= 0$，即可得到对所有 $i \geq 2$，Ext$^i_{T^c}$($f$, $e$) $\simeq$ Ext$^i_{T^c}$($f$, $m$) 同构。因此，我们看到

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathsf{T}^c}(f,-) = 0 \text{ iff } \mathrm{Ext}^2_{\mathsf{T}^c}(f,g) = 0 \text{ for all } g \in \mathsf{Flat}(\mathsf{T}^c),$$

因此，要确定 T 是否为布朗范畴，只需证明对所有平坦函子 $f$， $g \in$ Flat(T$^c$)， Ext$^2_{T^c}$($f$， $g$) $= 0$ 。

由于 $F$ 是可定义的，它在 Flat(T$^c$) 上正合；又由于它也是全忠实的，仅通过考察 Yoneda 扩张，它便诱导出一个单射 Ext$^2_{T^c}$($f$， $g$) $\to$Ext$^2_{U^c}$($Ff$， $Fg$)。因此，若 Ext$^2_{U^c}$($Ff$， $Fg$) $= 0$，这在 U 为 Brown 范畴时成立，那么我们也有 Ext$^2_{T^c}$($f$， –) $= 0$，从而完成证明。□

**例 3.17**。 公式 (3.16) 可用于给出如下事实的另一种证明：如果 T是一个布朗范畴，且 L是 T的一个 smashing 子范畴，那么范畴 T/L 也是一个布朗范畴。注意，局部化子范畴 L是 smashing 的，当且仅当右伴随 $R$: T/L $\to$ L 到局部化函子的右伴随保持余积，这等价于它是一个三角可定义函子，见 [12, 命题 4。18]。

在这种情形下，与 $R$ 相对应的诱导可定义函子 $F$: Mod((T/L)$^c$) $\to$ Mod(T$^c$) 是全忠实的——这是因为我们可以将 $F$ 识别为沿 $L|$: T$^c \to$ (T/L)$^c$ 的限制，其中 $L$ 是 smashing 局部化函子。由此可得，参见例如 [31, Remark 4.3], ， $F$ 是全忠实的。特别地，如果 T 是布朗范畴，那么我们便可推出，如所述，T/L 也是布朗范畴。

当然，这并非新结果。详细论述见 [26,第 4 节。3], 也可见 [9,第 11 节。4]。

## 4. Pure global dimensions of derived categories

本节将运用一些已确立的结果，考察环的导出范畴的纯全局维数，并给出一些关于确定 $\mathsf{D}(R)$ 是否为布朗范畴的应用。我们的第一个结果建立了模范畴与其导出范畴的纯全局维数之间的关系。

**命题 4.1**。 设 $R$ 是一个环。则 纯全局维数$(\mathsf{D}(R))$ $\geq$纯全局维数$(R)$。

证明。 考虑全忠实函子 $i\colon R \to \mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$，根据 公式 (2.1)，它诱导出一个伴随三元组

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) \underset{\xleftarrow{i_*}}{\overset{\xleftarrow{i^!}}{\xrightarrow{i^*}}} \mathsf{Mod}(R).$$

由于 $i$ 是全忠实的，因此 $i^!$也是全忠实的，进而 $i_*$也是全忠实的，换言之，上述图表是粘合的右半部分。现在考虑 $X \in$模范畴$(R)$，将 $X$ 视为 $\mathsf{D}(R)$中的一个对象，即可得到函子 $\mathsf{y}X \in$ 平坦$(\mathsf{T}^{\mathrm{c}})$。应用公式 (3.1)，得到同构

$$\mathrm{PExt}^n_R(M, i^*\mathsf{y}X) \simeq \mathrm{PExt}^n_{\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}}(i^!M, \mathsf{y}X) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}}(i^!M, \mathsf{y}X),$$

其中，最后一个同构成立是因为 $\mathsf{y}X \in \mathsf{Flat}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}) = \mathsf{fpInj}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}})$。然而，由于对于所有 $F \in \mathsf{Mod}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}})$，$i^*(F) = F(R)$，我们有 $i^*(\mathsf{y}X) = \mathsf{Hom}^{\mathsf{D}(R)}(R, X) \simeq X$，因此 $\mathrm{PExt}^n_R(M, X) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}}(i^!M, \mathsf{y}X)$。由此可见，$\mathsf{pid}(X \in \mathsf{Mod}(R)) \leq \mathsf{id}(\mathsf{y}X) = \mathsf{pid}(X \in \mathsf{D}(R))$，因此 $\mathsf{pgdim}(R) \leq \mathsf{pgdim}(\mathsf{D}(R))$。□

**注记 4.2**。 关于公式 (4.1)，有几点需要说明。Beligiannis 首先在 [9, 命题 12。8]中针对遗传环说明了这个不等式。随后 Keller、Neeman 和 Christensen 在 [16, 命题 1。4], 中对其进行了改进，其中对 $R$ 的假设是它协调，并且每个有限表示的 $R$-模都具有有限投射维数。

**例 4.3** （Keller 和 Neeman 的例子）。 在 [36,§6], 中，Neeman 介绍了一个归功于 Keller 的反例，表明 $\mathsf{D}(R)$ 不一定是布朗范畴。文中证明，若 $R$ 是一个环，且存在一个平坦 $R$-模，其（纯）投射维数至少为 2，那么 $\mathsf{D}(R)$ 就不可能是布朗范畴。这种环和模分别是 $k[x, y]$ 和 $k$ （$x$，$y$），其中 $k$ 是一个不可数域。

对上述反例也可以用类似的论证重新得到：注意到 $i^!$ 保平坦模，因此对任意 $M \in \mathsf{Flat}(R)$ 和 $F \in \mathsf{Mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$，都有 $\mathrm{Ext}^n_R(M, i^*F) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}}(i^!M, F)$；由此，若 $M$的投射维数不至多为一，则 $\mathsf{D}(R)$ 不是 Brown 范畴。

**例 4.4** （有限维局部代数）。 设 $k$ 是一个不可数代数闭域，且 $A$ 是一个有限维局部 $k$-代数。若 $A$ 是有限表示型的，则它是纯半单的，也就是说，每个$A$-模都是纯内射的，因此 纯全局维数$(A) = 0$。若 $A$ 不是有限表示型的，则 纯全局维数$(A) \geq 2$根据 [4, 命题 5。3], ，因此 $\mathsf{D}(A)$ 根据 公式 (4.1)，不是布朗范畴。

目前尚不清楚，在不假设 $A$ 是遗传的情况下， $A$ 是纯半单的是否意味着 $\mathsf{D}(A)$ 具有 Brown 性质。关于这一问题，参见 [9,§12] 。

现在我们来考察，在某些环满同态下，导出范畴的纯全局维数如何变化。回顾一下，若 $f\colon R \to S$ 是环满射，则当且仅当 $(-)_R\colon \mathsf{D}(S) \to \mathsf{D}(R)$ 是全忠实时，它才是同调的 。

**命题 4**。 **5.** 设 $f\colon R \to S$ 是同调环满同态，则 纯全局维数(导出范畴$(S)$) $\leq$ 纯全局维数(导出范畴$(R)$ ).

证明。若 $f$ 是同调的，则 $\Phi(-) := (-)_R\colon \mathsf{D}(S) \to \mathsf{D}(R)$ 是一个保持积与余积的三角函子，因此由 [12, 命题 4.18] 可知它是可定义的。令 $F$: 模范畴$(\mathsf{D}(S)^{\mathrm{c}}) \to$ 模范畴$(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 为由公式 (3.4) 导出的函子，它扩张了 $\Phi$。首先注意到，根据 [12, 定理 4.21], ， $F$ 有右伴随与左伴随；并且由于 $F$ 是正合的，左伴随限制在平坦对象上。令 $M, N \in$ 模范畴$(\mathsf{D}(S)^{\mathrm{c}})$，将 $M \simeq \mathrm{colim}_I \mathsf{y}A_i$ 写成投射对象的余极限；再利用公式（2.9），将 $N \simeq \lim\!\leftarrow_J \mathsf{y}X_j$ 写成内射对象的逆极限，其中 $A_i \in \mathsf{D}(S)^{\mathrm{c}}$，且 $X_j$ 是纯内射的。我们断言 $F$ 是全忠实的。为证明这一点，注意到

存在同构

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(FM, FN) &\simeq \operatorname{Hom}(F(\operatorname{colim}_I \mathsf{y}A_i), F(\varprojlim_J \mathsf{y}X_i))\\ &\simeq \operatorname{Hom}(\operatorname{colim}_I F\mathsf{y}A_i, \varprojlim_J F\mathsf{y}X_j)\\ &\simeq \lim_I \varprojlim_J \operatorname{Hom}(\mathsf{y}\Phi A_i, \mathsf{y}\Phi X_j)\\ &\simeq \lim_I \varprojlim_J \operatorname{Hom}(A_i, X_j) \simeq \operatorname{Hom}(M, N),\end{aligned}$$

其中，第二行的同构由 $F$ 保持所有极限和余极限这一事实得出；第三行由 $F\mathsf{y} \simeq \mathsf{y}f_*$ 这一事实得出；第四行则由以下事实得出：由于 $X_j$ 是纯内射，$\mathsf{y}$ 和 $f_*$ 在这些对象上都是全忠实的，正如公式 (2.4) 中所讨论的。这就证明了 $F$ 是全忠实的，正如所声称的那样。因此，$F\colon \mathsf{Flat}(\mathsf{D}(S)^{\mathrm{c}}) \to \mathsf{Flat}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 是全忠实且可定义的，并且有一个左伴随。由此，我们应用公式 (3.9) 得出 $\mathsf{pgdim}(\mathsf{D}(S)) := \mathsf{pgdim}(\mathsf{Flat}(\mathsf{D}(S)^{\mathrm{c}})) \leq \mathsf{pgdim}(\mathsf{Flat}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})) = \mathsf{pgdim}(\mathsf{D}(R))$，从而完成证明。□

4.A. **冯·诺依曼正则环控制 Brown–Adams 表示性**。现在我们将注意力转向说明：对于给定的环，其导出范畴是否为布朗范畴，可以由冯·诺依曼正则环的环论性质决定。为此，我们回顾相关定义，并考察冯·诺依曼正则环的导出范畴。

**4.6. 冯·诺依曼正则环**。环 $R$ 是冯·诺依曼正则的，也称为绝对平坦的，如果对任意 $x \in R$，都存在一个 $y \in R$ 使得 $x = xyx$；这等价于 $\mathsf{Mod}(R) = \mathsf{Flat}(R)$，或者等价地，$\mathsf{mod}(R) = \mathsf{proj}(R)$。任何冯·诺依曼正则环在左右两侧都是协调的，参见 [38, 推论 2.3.23]。

还可以用函子性描述来刻画冯·诺依曼正则环：$R$ 是冯·诺依曼正则的，当且仅当 $\mathsf{mod}(R) \simeq \mathsf{A}(R)$，其中 $\mathsf{A}(R) = \mathsf{fp}(\mathsf{fp}(R, \text{阿贝尔群范畴}), \text{阿贝尔群范畴})$ 是 $R$上的自由阿贝尔范畴，参见 [38, 命题 10.2.38]。只需展开定义便不难看出，$R$ 是冯·诺依曼正则的，当且仅当公式（2.6）中的函子 $d_R\colon \mathsf{Flat}(R) \to \mathbb{D}(\mathsf{Flat}(R))$ 是一个等价。

在回到 Brown 范畴的问题之前，我们先考察 von Neumann 正则环的导出范畴的一些性质，其中有些性质对解决该问题会有所帮助。

**4.7. 一个生成局部化**。设 $R$ 是任意一个环，并考虑$\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$ 的子集 $\mathcal{R} := \{\Sigma^i R : i \in \mathbb{Z}\}$，并将其视为一个小预加性范畴。如公式 (2.1) 中所示，全忠实嵌入公式 (2.1) $i\colon \mathcal{R} \to \mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$ 诱导出一个粘合

$$\mathcal{S} \rightleftarrows \mathsf{Mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) \underset{\rho}{\overset{Q}{\rightleftarrows}} \mathsf{Mod}(\mathcal{R})$$

其中 $Q(f) = f \circ i = f|_{\mathcal{R}}$，且 $\mathcal{S} = \ker(Q) = \{f \in \text{模范畴}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}) : f(\Sigma^i R) = 0 \text{ 对所有 } i \in \mathbb{Z}\}$。注意，由于 $\mathsf{Hom}^{\mathsf{D}(R)}(\Sigma^i R, \Sigma^j R) \simeq \delta_{i,j} R$，存在一个等价 $\mathsf{Mod}(\mathcal{R}) \simeq \prod_{\mathbb{Z}} \mathsf{Mod}(R)$，参见 [19, §5]。
我们将 $Q$ 称为*Freyd*生成局部化。为说明这一点，回顾一下，Freyd 的环生成假设表述如下：

> 若 $f\colon C \to D$ 是完美复形的一个态射，使得
> $$0 = \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(R)}(\Sigma^i R, f)\colon \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(R)}(\Sigma^i R, C) \to \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(R)}(\Sigma^i R, D) \tag{4.8}$$
> 对所有 $i \in \mathbb{Z}$均成立，则 $f = 0$。

之所以这样命名，是因为生成局部化的核决定了生成假设是否成立，正如下面的结果所示。

**命题4.9**。当且仅当 $\mathcal{S} \cap \text{模范畴}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) = 0$时，生成假设对 $\mathsf{D}(R)$ 成立。特别地，若$R$ 是右相干的，则$\mathsf{D}(R)$ 满足生成假设，当且仅当 $R$ 是冯·诺依曼正则的。

证明。设 $\alpha\colon A \to B$ 是 $\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$中的一个态射。由于对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，$\mathsf{y}R[i]$ 在 $\mathsf{Mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 中是射影对象，并且存在同构 $\mathsf{Hom}(\mathsf{y}R[i], \mathsf{y}A) \simeq \mathsf{Hom}^{\mathsf{D}(R)}(R[i], A)$，可得到同构 $\mathsf{Hom}(\mathsf{y}R[i], \mathsf{Im}\,\mathsf{y}\alpha) \simeq \mathsf{Im}\,\mathsf{Hom}^{\mathsf{D}(R)}(R[i], \alpha)$。因此，我们看到，当且仅当对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，$\mathsf{Im}\,\mathsf{y}\alpha \in \mathcal{S}$ 且 $\mathsf{Hom}^{\mathsf{D}(R)}(R[i], \alpha) = 0$。
因此，若生成假设成立，我们便看到 $\mathcal{S} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) = 0$。另一方面，若 $\mathcal{S} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) = 0$，上述同构告诉我们 $\mathsf{Im}(\mathsf{y}\alpha) = 0$，因此 $\alpha = 0$，这表明生成假设成立。这证明了第一个结论。

根据 [18, Theorem 5.1], ，局部化函子 $Q$ 是有限型的，当且仅当 $R$ 是右相干的，因此$\mathcal{S}=\varinjlim(\mathcal{S}\cap \mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}))$。这意味着 $Q$ 是等价，当且仅当 $\mathcal{S}\cap\mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})=0$；我们刚刚看到，这等价于生成假设成立。然而，正如 [19, Theorem 8.2] 所示， $Q$ 是等价，当且仅当 $R$ 是冯·诺依曼正则。□

注 4.10. 注意，我们还立即得到强生成假设成立，也就是说，对于右相干环 $R$ ， $H_*\colon \mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}\to$模范畴$(R)$ 是全忠实的，当且仅当 $R$ 是冯·诺依曼正则的。事实上，若 $R$ 是冯·诺依曼正则的，则 Freyd 局部化 $Q\colon$ 模范畴$(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})\to\prod_{\mathbb{Z}}$ 模范畴$(R)$ 是一个等价。其左伴随 $i^*\colon\ \prod_{\mathbb{Z}}$ 模范畴$(R)\to$ 模范畴$(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 由 $(M_i)_{\mathbb{Z}}\mapsto \mathrm{y}(\oplus_{\mathbb{Z}}M_i[-i])$ 给出，这是因为它保留平坦对象且将 $R_i\mapsto \mathrm{y}R[-i]$ 送到相应对象。由于当第一个分量是紧的时，$\mathrm{y}\colon \mathsf{D}(R)\to$ 模范畴$(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 是全忠实的（如公式 (2.4) 中所述），我们可推出 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(R)}(P,Q)\simeq\mathrm{Hom}(\mathrm{y}P,\mathrm{y}Q)\simeq\mathrm{Hom}(i^*(\oplus_{\mathbb{Z}}H_i(P)[-i])\ i^*(\oplus_{\mathbb{Z}}H_j(Q)[-j]))\simeq\mathrm{Hom}_R(H_*P,H_*Q)$。

当然，这两个结果都不是新的。对于右相干环，生成假设成立当且仅当该环是冯·诺依曼正则环，这一结论见 [25, 推论 3.2], ；而强生成假设成立当且仅当生成假设成立，这一事实见 [25, 定理 1.3]。不过，通过生成局部化采用的函子范畴方法不同于原有证明，而且比参考文献中给出的原始证明简短得多。

我们再多谈一些冯·诺依曼正则环的导出范畴。回顾 [33] 中的结论：对于紧生成三角范畴 T，Serre 子范畴 $\mathcal{S}\subseteq\mathrm{mod}(\mathrm{T}^{\mathrm{c}})$ 若其局部化函子 $Q_{\mathcal{S}}\colon\mathrm{Mod}(\mathrm{T}^{\mathrm{c}})\to\mathrm{Mod}(\mathrm{T}^{\mathrm{c}})/\varinjlim\mathcal{S}$ 的右伴随$\rho_{\mathcal{S}}\colon\mathrm{Mod}(\mathrm{T}^{\mathrm{c}})/\varinjlim\mathcal{S}\to\mathrm{Mod}(\mathrm{T}^{\mathrm{c}})$是正合的，则称其为完美。

**命题 4.11**。 设 $R$ 是一个冯·诺依曼正则环，那么$\mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 的每个 *Serre* 子范畴都是完美的。因此，以下对象之间存在双射：

*(1)* $\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$ 的厚子范畴；*(2)* $\mathrm{mod}(R)$ 的 *Serre* 子范畴；*(3)* $\mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 的 $\Sigma$-不变 *Serre* 子范畴；*(4)* $\mathsf{D}(R)$ 的 *smashing* 局部化；

并且以上各项均与双边理想一一对应。特别地，望远镜猜想在 $\mathsf{D}(R)$ 中成立.

证明。 由于 $R$ 是冯·诺依曼正则的，当且仅当 Freyd 局部化 $Q$ 是等价，因此我们看到，由于 $\mathrm{Mod}(R)$ 中的每个有限表示对象都是射影对象，$\mathrm{Mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})\simeq\prod_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}(R)$ 中的每个有限表示对象也都是射影对象。这是因为该范畴中的对象是射影对象，当且仅当其每个分量都是射影对象。因此，若 $\mathcal{S}\subseteq\mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$，则有 $\mathrm{Ext}^2_{\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}}(\mathcal{S}\ -)=0$，这意味着 $\rho_{\mathcal{S}}$ 是正合的，根据以下同一关系 $\rho_{\mathcal{S}}\colon\mathrm{Mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})/\varinjlim\mathcal{S}\xrightarrow{\simeq}\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$。

现在我们来建立这些双射。在任意相干环上，若 $\mathrm{L}\subset\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$ 是厚子范畴，则 $\mathcal{W}_{\mathrm{L}}=\{H_0(X):\ X\in\mathrm{L}\}$ 是 $\mathrm{mod}(R)$ 的宽子范畴；$\mathrm{mod}(R)$ 的每个宽子范畴都由此得到，见 [24]。由于 $R$ 是冯 · 诺依曼正则的，若 $X\in\mathsf{D}(R)$，则 $X\simeq\oplus_{i\in\mathbb{Z}}H_i(X)[-i]$ 由 [19, 定理 8 得出。因此，对所有 $i\in\mathbb{Z}\}$，$\mathrm{L}=\{X:\ H_i(X)\in\mathcal{W}_{\mathrm{L}}$ ，这就建立了 $\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$ 的厚子范畴与 $\mathrm{mod}(R)$ 的宽子范畴之间的双射。然而，由于 $R$ 是冯·诺依曼正则的，$\mathrm{mod}(R)$ 中每个短正合列都分裂，因此 $\mathrm{mod}(R)$ 的子范畴是宽子范畴当且仅当它是 Serre 子范畴。这便得到 (1) $\iff$ (2)。
$\mathrm{mod}(R)$ 的 Serre 子范畴与 $\mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 的 $\Sigma$-不变 Serre 子范畴之间的双射，直接来自等价 $\mathrm{Mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})\simeq\prod_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}(R)$。特别地，$\mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 的任意 $\Sigma$-不变 Serre 子范畴都具有形式 $(\mathcal{S})_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 $\mathcal{S}\subset\mathrm{mod}(R)$。这便得到 (2) $\iff$ (3)。

$\Sigma$-不变的完美 Serre 子范畴与 smashing 局部化之间的双射归功于 Krause [33, §12]。我们已经看到，$\mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 的每个 Serre 子范畴都是完美的，因此这个双射实际上是 $\Sigma$-不变的 Serre 子范畴与 smashing 局部化之间的双射。这就得到 (3) $\iff$ (4)。

与 $R$ 的双边理想之间的双射见 [22, 定理 4.6]；而望远镜猜想恰好就是 (1) 与 (4) 的等价。□

上面命题中 (1) $\iff$ (2) 的证明实际上适用于更一般的情形，因为同调保持所有余积和积。因此，我们还有如下结果。

**推论 4.12.** 设 $R$ 是一个冯·诺依曼正则环。那么，指派 $\mathrm{L}\mapsto H_0(\mathrm{L})$ 给出了 $\mathsf{D}(R)$ 的局部化（分别为余局部化）子范畴与 模范畴$(R)$ 中对余积（分别为积）封闭的宽子范畴之间的一个双射。

我们注意到，关于 $\mathsf{D}(R)$ 的望远镜猜想 $R$ 冯·诺依曼正则的情形，采用完全不同的方法已在 [8, 推论 3.12]中证明。

例 4.13。我们来说明如何利用公式 (4.11)，完整描述冯·诺依曼正则环上的 $\mathsf{D}(R)$ 的 smashing 局部化。设 $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{mod}(R)$ 是一个 Serre 子范畴。那么，根据 [22, 定理 4.6]，存在一个双边理想 $J \subseteq R$，使得 $\mathsf{S} = \{P \in \mathsf{mod}(R) : P \in \mathsf{add}(J)\}$。显然，与 $\mathsf{S}$ 相关联的局部化函子由沿 $R \to R/J$ 的扩张给出，因此我们可以将 $\mathsf{mod}(R/J) \simeq \mathsf{mod}(R)/\mathsf{S}$ 联系起来。由于$R/J$ 是冯·诺依曼正则的，因此存在一个范畴等价 $\mathsf{Mod}(\mathsf{D}(R/J)^{\mathrm{c}}) \simeq \prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}(R/J)$。

现在，设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathsf{D}(R)$ 的一个 smashing 局部化；那么，由于我们已经证明望远镜猜想成立，存在一个双边理想 $J \subseteq R$，使得 $\mathcal{L}$ 由 $\mathsf{D}(R)$ 中在复合映射下变为零的对象组成

$$\mathsf{D}(R) \xrightarrow{\mathrm{y}} \mathsf{Mod}(\mathcal{P}) \simeq \prod_{\mathbb{Z}} \mathsf{Mod}(R) \xrightarrow{\prod_{\mathbb{Z}}(-\otimes R/J)} \prod_{\mathbb{Z}} \mathsf{Mod}(R/J).$$

然而，这些恰恰是 $\mathsf{D}(R)$ 中在 $-\otimes_R R/J\colon \mathsf{D}(R) \to \mathsf{D}(R/J)$ 下消失的对象。换言之，$\mathsf{D}(R)/\mathcal{L} \simeq \mathsf{D}(R/J)$。

以下说明了公式 (4.11) 的证明策略无法推广到冯·诺依曼正则环之外，并表明冯·诺依曼正则环由 Freyd 局部化的核为完美这一性质唯一确定。

**P命题 4.14**。设 $R$ 是右相干环。则下列条件等价 :

*(1)* $\mathsf{D}(R)$ 的每个 $\Sigma$-不变可定义子范畴都是三角化的。*(2)* $\mathsf{mod}(R)$ 的每个 $\Sigma$-不变 *Serre* 子范畴都是完美的；*(3) Freyd* 子范畴 $\mathcal{S} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) = \{f \in \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) : f(\Sigma^i R) = 0$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}\}$ 都是完美的；*(4)* $R$ 是冯·诺依曼正则的；

证明。我们将要用到的关键事实，也就是 [33, §12], 的实质，是：可定义子范畴 $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{D}(R)$ 是三角化的，当且仅当 $\mathsf{S}(\mathsf{D}) \subseteq \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 是完美且 $\Sigma$-不变的。这个事实很快就能得出等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (2)。事实上，公式 (2.13) 的双射限制为 $\mathsf{D}(R)$ 的$\Sigma$-不变（分别为三角化）可定义子范畴与 $\mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 的 $\Sigma$-不变（分别为 $\Sigma$-不变的完美）Serre 子范畴之间的双射，从而证明了该等价关系。

由于 Freyd 子范畴 $\mathcal{S} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 是 $\Sigma$-不变的，蕴含关系 (2) $\Longrightarrow$ (3) 显然成立，而 (4) $\Longrightarrow$ (2) 即公式 (4.11)。因此，只需证明蕴含关系 (3) $\Longrightarrow$ (4)，即可完成证明。如果 Freyd 子范畴 $\mathcal{S} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 是完美的，那么由于它也 $\Sigma$-不变，我们便有 $\mathsf{D}(\mathcal{S} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}))$ 是 $\mathsf{D}(R)$ 的一个三角子范畴。然而，$\mathsf{D}(\mathcal{S} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}))$ 是包含$\mathcal{R}$ 的最小可定义子范畴——确实，若 $\mathsf{D}'$ 是另一个包含 $\mathcal{R}$的可定义子范畴，则由公式 (2.13) 中的双射可得 $\mathsf{S}(\mathsf{D}') \subseteq \mathcal{S} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$；由于该双射是逆序的，故 $\mathsf{D}(\mathcal{S} \cap \mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})) \subseteq \mathsf{D}'$。然而，由于包含 $R$ 且对余积封闭的最小三角子范畴是 $\mathsf{D}(R)$，可知 $\mathsf{D}(R)$ 是包含 $\mathcal{R}$ 的最小可定义子范畴，而这等价于 Freyd 生成假设，见 [32],; 正如我们在公式 (4.9) 中所证明的，该假设等价于 $R$ 是冯·诺依曼正则的。□

We 对于冯·诺依曼正则环，我们也能够描述 $\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$ 中的态射理想 s.

**4.15. 紧对象的上同调理想**。回忆一下，理想 $\mathfrak{I} \subseteq \mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$ 称为上同调的，如果存在一个上同调函子 $H\colon \mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}} \to \mathcal{A}$ 到某个阿贝尔范畴，使得 $\mathfrak{I} = \{\varphi : H(\varphi) = 0\}$。映射$\mathfrak{I} \mapsto \mathsf{Im}(\mathfrak{I}) = \{f \in \mathsf{mod}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}) : f \simeq \mathsf{Im}(\mathrm{y}\alpha)$ 对某个 $\alpha \in \mathfrak{I}\}$ 建立了 $\mathsf{mod}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$ 的 Serre 子范畴与 $\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$ 的上同调理想之间的双射，参见 [33, §8]。

理想 $\mathfrak{I} \subset \mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$ 是正合的，如果它是上同调的并且满足 $\mathfrak{I}^2 = \mathfrak{I}$ 和 $\Sigma\mathfrak{I} = \mathfrak{I}$；smashing 子范畴与 $\mathsf{T}^{\mathrm{c}}$ 的正合理想之间存在双射，参见 [33, §12]。

对于 t 望远镜猜想中，由恒等映射生成的上同调理想至关重要。

**引理 4.16.** 设$\mathsf{T}$ 是一个紧生成三角范畴，并且 $\mathfrak{I}$ 是$\mathsf{T}^{\mathrm{c}}$的一个上同调理想。若 $\mathfrak{I}$ 由恒等映射生成，则$\mathsf{Im}(\mathfrak{I})$ 由投射对象生成。若$\mathsf{T} = \mathsf{D}(R)$ 对 $R$ 冯·诺依曼正则成立，则反过来也成立，即$\mathsf{Im}(\mathfrak{I})$ 由投射对象生成，当且仅当 $\mathfrak{I}$ 由恒等映射生成。

证明. 首先回顾，若 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{T}^c}(A, B)$，则和 $\varphi_1 + \varphi_2$ 由复合 $A \xrightarrow{\Delta} A \oplus A \xrightarrow{\varphi_1 \oplus \varphi_2} B \oplus B \xrightarrow{\nabla} B$ 给出，其中 $\Delta$ 是对角映射，$\nabla$ 是余对角映射。因此，若对于两个 $i = 1,2$，该映射 $\varphi_i$ 都通过某个 $C_i \in \mathsf{T}^c$ 的 $\mathrm{Id}_{C_i}$ 分解，我们便可知 $\varphi_1 + \varphi_2$ 通过 $\mathrm{Id}_{C_1 \oplus C_2}$ 分解。
因此，通过归纳法，若对于某个 $\varphi \in \mathfrak{I}$，$f \simeq \mathrm{Im}(\mathsf{y}\varphi)$，且 $\mathfrak{I}$ 由恒等映射生成，我们可以假设对于某个 $A \in \mathsf{T}^c$，$\varphi = \alpha \circ \mathrm{Id}_A \circ \beta$。在这种情况下，我们有 $f \simeq \mathrm{Im}(\mathsf{y}(\alpha \circ \mathrm{Id}_A \circ \beta))$，它是 $\mathrm{Im}(\mathsf{y}(\alpha \circ \mathrm{Id}_A))$ 的一个子对象；此外，$\mathrm{Im}(\mathsf{y}(\alpha \circ \mathrm{Id}_A)$ 是 $\mathrm{Im}(\mathsf{y}\mathrm{Id}_A)$ 的一个商对象，而后者是一个投射对象。这表明 $f$ 是一个投射对象的子商，因此 $\mathrm{Im}(\mathfrak{I})$ 由投射对象生成。

设 $R$ 是一个冯·诺依曼正则环，并假设 $\gamma\colon A \to B$ 是 $\mathfrak{I}$ 中的一个态射。于是，$\mathsf{y}A \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\mathsf{y}\gamma) \to \mathsf{y}B$ 是 $\mathsf{y}\gamma$ 在 $\mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^c)$ 中的一个分解；但我们已经看到，$\mathrm{mod}(\mathsf{D}(R)^c)$ 中的每个对象都是投射对象，因此对于某个 $C \in \mathsf{D}(R)^c$，有 $\mathrm{Im}(\mathsf{y}\gamma) \simeq \mathsf{y}C$。由 $\mathsf{y}$ 在紧对象上的全忠实性可知，$\gamma$ 经由 $\mathrm{Id}_C$ 分解，因此 $\mathfrak{I}$ 由恒等态射生成。□

**注 4.17**。由 方程（4.16），我们得到冯·诺依曼正则环的导出范畴满足望远镜猜想的另一种证明。事实上，望远镜猜想等价于以下陈述：

$$\text{every exact ideal is generated by identity maps}$$

参见 [33, 定理 13。4], 但 模范畴$(\mathsf{D}(R)^c)$ 的每个 Serre 子范畴都由投射对象生成，因此该陈述立即成立。注意，对于 $\mathsf{D}(R)^c$ 中的 $R$ 冯·诺依曼正则环，其所有理想都可以通过 模范畴$(R)$ 中的强生成假设 方程（4.10）来定义。

现在让我们回到 Brown–Adams 表示性的问题。首先，我们回顾 Olivier 的一个经典构造，以及 Herzog 和 L'Innocente 对该构造较新的推广。

**4.18. 环的冯·诺依曼逼近**。在 [37, 命题 5], 中，Olivier 证明了将交换冯·诺依曼正则环范畴包含到交换环范畴中的包含函子具有左伴随，因此对于任意交换环 $A$，都存在唯一的交换冯·诺依曼环 $T(A)$。明确地说，

$$T(A) = A[x_a : a \in A]/(x_a^2 a - x_a, x_a a^2 - a)_{a \in A}.$$

此外，由伴随的单位给出的映射 $A \to T(A)$ 是环满态射。
在 [23, 定理 2.2] 中，这一构造被推广到了所有环。更准确地说，证明了对于一个环 $R$，存在唯一的阿贝尔 von Neumann 正则环 $R^{\mathrm{ab}}$，以及一个环满射 $R \to R^{\mathrm{ab}}$，它关于这一性质具有普遍性。与交换情形不同，$R^{\mathrm{ab}}$ 可能是零环；关于此情况成立的充要条件，见 [23, 推论 2.3] 。

我们现在得到如下结果。

**命题 4.19**。*设 $R$ 是一个环。若 $R^{\mathrm{ab}} \neq 0$，则如果 $R^{\mathrm{ab}}$ 不是遗传的，$\mathsf{D}(R)$ 不是布朗范畴。*

证明。由于 $R \to R^{\mathrm{ab}}$ 是一个满态射，由公式 (3.8) 可得 $\mathrm{pgdim}(R^{\mathrm{ab}}) \leq \mathrm{pgdim}(R)$；此外，由公式 (4.5) 可得 $\mathrm{pgdim}(R) \leq \mathrm{pgdim}(\mathsf{D}(R))$。由于 $R$ 是冯 · 诺依曼正则环，我们有 $\mathrm{pgdim}(R) = \mathrm{gdim}(R)$，因此根据公式 (3.15)，如果 $R$ 不是遗传的，那么 $\mathsf{D}(R)$ 不可能是 Brown 范畴。□

例 4.20。因此，显然我们希望知道何时 $R^{\mathrm{ab}}$ 是遗传的，何时不是。在 $R$ 是交换的情形下，这保证了 $R^{\mathrm{ab}} \neq 0$，Kiełpiński 和 Simson 的一个结果（见 [27] 或 [29]）表明，若 $\mathrm{card}(R) = \aleph_m$，且 $X$ 是一个基数为 $\aleph_n$ 的集合，则 $\mathrm{pgdim}(R[X]) = 1 + \max\{m, n\}$。因此，由公式 (3.8)，我们可以将 $\mathrm{pgdim}(R^{\mathrm{ab}}) = \mathrm{gdim}(R^{\mathrm{ab}})$ 上界估计为 $1 + n$，其中 $\aleph_n = \mathrm{card}(R)$。由此，只要 $R$ 是可数的，就有 $R^{\mathrm{ab}}$ 是遗传的。这也可以从 [21, 命题 10.5] 推出。不过，这并没有说明太多：若 $R$ 是可数的，则 $\mathrm{perf}(R)$ 有一个可数骨架，因此根据 Neeman 在公式 (3.14) 中讨论的结果，$\mathsf{D}(R)$ 是一个布朗范畴。
当然，如果已知 $\mathrm{Mod}(R)$ 的纯全局维数，就无需再过渡到 $R^{\mathrm{ab}}$。关于纯全局维数已知的环的例子，可见 [28, § 11], ；纯全局维数的综述可见 [27]。

**4.21.** 现在我们来展示上述结果如何应用于概形。设 $X$ 是一个拟紧拟分离（qcqs）概形；根据 [14, 定理 3.1.1] ，范畴 $\mathsf{D}_{\mathrm{qc}}(X)$（即具有拟凝聚上同调的 $\mathcal{O}_X$-模复形的导出范畴）是一个紧生成三角范畴。其紧对象是完美复形 $\mathrm{perf}(X)$。

设 $f\colon U \to X$ 是一个拟紧开子概形的包含映射。假设 $X$ 是拟紧拟分离的，这意味着结合 [34, 命题 3.9.2] 与 Grothendieck 对偶 [34, 定理 4.1]（或 [42, 引理 48.3.1]）可知，存在一个伴随三元组 $\mathrm{L}f^* \dashv \mathrm{R}f_* \dashv f^\times$，其中 $\mathrm{R}f_*\colon \mathsf{D}_{\mathrm{qc}}(U) \to \mathsf{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 是全忠实的。特别地，$\mathrm{R}f_*$是一个全忠实的可定义三角函子。

**命题 4.22.** 设 $X$ 是一个拟紧拟分离概形。那么，$\mathsf{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 是布朗范畴，当且仅当 纯全局维数$(\mathcal{O}_{X,x}) \leq 1$，或者 $\mathcal{O}^{\mathrm{ab}}_{X,x}$ 是遗传冯·诺伊曼正则环，对所有 $x \in X$ 均成立。

证明。 设 $U \simeq \operatorname{Spec}(A) \subseteq X$ 是一个仿射子概形。于是，对于任意 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$，有以下不等式：

$$\operatorname{pgdim}(\mathsf{D}_{\mathrm{qc}}(X)) \geq \operatorname{pgdim}(\mathsf{D}_{\mathrm{qc}}(U)) \geq \operatorname{pgdim}(A) \geq \operatorname{pgdim}(A_{\mathfrak{p}}) \geq \operatorname{pgdim}(A^{\mathrm{ab}}_{\mathfrak{p}}),$$

其中，第一个不等式来自 公式 (4.21) 结合 公式 (3.16)，第二个来自公式 (4.1)，最后两个则来自 公式 (3.8)。因此，若 $\mathsf{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 是一个布朗范畴，则有 $1 \geq$ 纯全局维数 $(A_{\mathfrak{m}}) \geq$ 纯全局维数 $(A^{\mathrm{ab}}_{\mathfrak{m}})$。由于任意 $x \in X$ 都属于某个仿射开集，结论便立即得出。 □

4.B. **超越导出范畴**。 在任意紧生成三角范畴中，都可以进行与上述类似的论证，以确定它们是否满足 Brown–Adams 表示性。下面将说明冯·诺伊曼正则环如何在这种一般情形下发挥作用。

**命题 4.23.** 设$\mathsf{T}$ 是一个紧生成三角范畴。若存在忠实可定义函子$F\colon \mathsf{D}(R) \to \mathsf{T}$，且 $R$ 是冯·诺依曼正则的，那么如果 $R$ 不是遗传的，$\mathsf{T}$ 就不是 *Brown* 范畴。

证明。由于 $F$是可定义的，它可扩张为一个可定义函子 $F\colon \operatorname{Flat}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) \to \operatorname{Flat}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}})$；若该函子是忠实的，我们便可由公式 (3.16)得出结论。因此，设 $M, N \in \operatorname{Flat}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$，并将 $M \simeq \varinjlim_I \mathrm{y}A_i$ 记作$A_i \in \mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}$，将 $N \simeq \varinjlim_J \mathrm{y}X_j$ 记作满足 $X_j \in \operatorname{Pinj}(\mathsf{D}(R))$ 的对象；这只是 Bergman结果的另一种应用。由于 $F$是全忠实的，对每个 $(i,j) \in I \times J$，都有同构 $\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(R)}(A_i, X_j) \to \operatorname{Hom}_{\mathsf{T}}(FA_i, FX_j)$。现在，由于 $F$ 是可定义的，它保留滤余极限；但它也保留极限，因为它是一个右伴随函子的限制。因此，我们有 $\operatorname{Hom}(FM, FN) \simeq \varprojlim_{I\times J} \operatorname{Hom}(F\mathrm{y}A_i, F\mathrm{y}X_j) \simeq \varprojlim_{I\times J} \operatorname{Hom}(FA_i, FXA_j)$，因为 $F \circ \mathrm{y} \simeq F$。因此，自然映射 $\operatorname{Hom}(M,N) \simeq \varprojlim_{I\times J} \operatorname{Hom}(\mathrm{y}A_i, \mathrm{y}X_j) \to \varprojlim_{I\times J} \operatorname{Hom}(F\mathrm{y}A_i, F\mathrm{y}X_j) \simeq \operatorname{Hom}(FM, FN)$ 是一个同构，所以 $F$是全忠实的。□

当然，这种可定义函子的存在并非显而易见。对于单生成三角范畴，我们有以下结果，可以绕过这一障碍。

**定理 4.24.** 设$\mathsf{T}$ 是由 $S \in \mathsf{T}^{\mathrm{c}}$生成的单生成紧生成三角范畴。若$A = \operatorname{End}_{\mathsf{T}}(S)$ 有一个投射维数大于一的平坦模，则$\mathsf{T}$ 不是布朗范畴。

证明. 考虑函子 $F\colon \mathsf{T} \to$ 模范畴$(A)$，其定义为 $X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathsf{T}}(S, X)$；由于 $S \in \mathsf{T}^{\mathrm{c}}$，该函子保留余积、积和纯三角，因此是 [12, §3]意义下的相干函子。因此，根据 [12, 定理 3.2]，存在唯一的可定义函子 $F\colon \operatorname{Flat}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}) \to$ 模范畴$(A)$，使得 $F \circ y \simeq F$。然而，由于 $F$是上同调的，还存在一个伴随三元组

$$\operatorname{Mod}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}) \underset{\overline{F}}{\overset{\Lambda}{\underset{\rho}{\rightleftarrows}}} \operatorname{Mod}(A)$$

其中 $F \circ \mathrm{y} \simeq F$和 $F|_{\operatorname{Flat}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}})} = F$。这个三元组的存在性既可由 [12, 定理 3.26] 及其后续评注推出，也可由以下事实得出： $F$ 不过是沿全忠实嵌入 $S \hookrightarrow \mathsf{T}^{\mathrm{c}}$的限制，只需将 $S$ 视为一个带有自同态 $A$的单对象子范畴即可。特别是，这一观点说明 $\Lambda$ 和 $\rho$ 是全忠实的。此外， $\Lambda$本身将保持平坦对象，因此存在一个伴随对

$$\operatorname{Flat}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}) \underset{\widehat{F}}{\overset{\Lambda}{\rightleftarrows}} \operatorname{Flat}(A)$$

与 $F$ 一个可定义函子。由于 $\Lambda$ 是全忠实的，我们可以应用 公式 (3.9)，因此 纯全局维数$(\mathsf{T})$ $\geq$纯全局维数(平坦对象$(A)$)。结论现可由公式 (3.15)立即得出。 □

**例 4.25**。 设 $\mathsf{T}$ 是一个紧生成张量三角范畴，且张量单位元 $\mathbf{1}$ 是一个紧对象。那么，$\mathsf{T}$ 的中心环 $A_{\mathsf{T}} = \operatorname{End}_{\mathsf{T}}(\mathbf{1})$ 根据 [6, 命题 2.2]是一个交换环。

与公式（4.24）相同的证明表明，如果 $A_{\mathsf{T}}$ 具有一个投射维数至多为一的平坦模，那么T不是布朗范畴。

还可以利用余倾斜 t-结构，为任意紧生成三角范畴的纯全局维数提供一个下界。关于 t-结构及其与函子范畴局部化之间关系的背景知识，请参阅 [40] 。

**命题 4.26.** 设T 是一个紧生成三角范畴，并假设 $\mathbb{t}$ 是一个限制到紧对象上的紧生成 *t*-结构。那么纯全局维数(T) $\geq$ 纯全局维数(fpInj($\mathcal{H}_{\mathbb{t}}$))。此外，若 $\mathbb{t}$ 是非退化的，则纯全局维数(T) $\geq$纯全局维数($\mathcal{H}_{\mathbb{t}}$)。

证明。 我们先对假设作几点说明。 $\mathbb{t}$ 限制到紧对象上，意味着其心 $\mathcal{H}_{\mathbb{t}}$ 是一个局部相干范畴，且 fp($\mathcal{H}_{\mathbb{t}}$) 由 $\mathrm{H}^0_{\mathbb{t}}$(T$^{\mathrm{c}}$) 生成；这两点均见于 [40, 定理 8.31]；特别地，若 $A \in \mathsf{T}^{\mathrm{c}}$，则 $\mathrm{H}^0_{\mathbb{t}}(A) \in \mathrm{fp}(\mathcal{H}_{\mathbb{t}})$

现在，令 $i \dashv \tau^{\leq 0} : \mathcal{U} \to \mathsf{T}$ 表示 $\mathbb{t}$ 的 t-结构上半部分的包含函子及其右伴随，并令 $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap \mathsf{T}^{\mathrm{c}}$，则此伴随限制为 $i \dashv \tau^{\leq 0} : \mathcal{U}_0 \hookrightarrow \mathsf{T}^{\mathrm{c}}$。因此，由 公式 (2.1)，存在一个局部化

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}) \underset{i_*\simeq(\tau^{\leq 0})^*}{\overset{i^*\simeq(\tau^{\leq 0})^!}{\rightleftarrows}} \mathsf{Mod}(\mathcal{U}_0)$$

其中 $i_*$ 是一个可定义函子，由于 $\tau^{\leq 0}$ 保持紧对象，因此它保持有限表示内射对象。令$\mathbf{y}\colon \mathcal{U} \to$ 模范畴($\mathcal{U}_0$) 表示受限 Yoneda 嵌入。根据 [40, 命题 8.28], , 存在一个局部化

$$\mathsf{Mod}(\mathcal{U}_0) \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_{\mathbb{t}}$$

其中 $F \circ \mathbf{y} \simeq \mathrm{H}^0_{\mathbb{t}}|_{\mathcal{U}}$ 且 $G = \mathbf{y}|_{\mathcal{H}_{\mathbb{t}}}$。函子 $F$ 保持有限表示对象，根据 [40, 推论 8.29],, 这意味着 $G$ 是一个可定义函子。令 $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{t}}$，并考虑复合函子 $(i_* \circ G)(X)$。通过显式计算可知，它自然同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\tau^{\leq 0}(-)\ X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathbb{t}}}(\mathrm{H}^0_{\mathbb{t}}(-)\ X)$，视为 T$^{\mathrm{c}}$ 上的函子。因此可见，若 $X \in \mathrm{fpInj}(\mathcal{H}_{\mathbb{t}})$，则 $(i_* \circ G)(X)$ 是一个上同调函子 (T$^{\mathrm{c}}$)$^{\mathrm{op}} \to$ 阿贝尔群范畴，这等价于它是平坦的。因此，由公式 (3.9)， $i_* \circ G\colon \mathrm{fpInj}(\mathcal{H}_{\mathbb{t}}) \to \mathrm{Flat}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}})$ 是一个带有左伴随的全忠实可定义函子，从而得到第一个结论。
若 $\mathbb{t}$ 此外还是非退化的，我们可以应用 [3, 定理 3.6], , 将上述局部化合并为一个

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}) \underset{j_*}{\overset{\overline{\mathrm{H}^0_{\mathbb{t}}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_{\mathbb{t}}$$

其中 $\overline{\mathrm{H}^0_{\mathbb{t}} \circ \mathbf{y}} \simeq \mathrm{H}^0_{\mathbb{t}}$ 且 $j_*\mathrm{H}^0_{\mathbb{t}}(X) \simeq \mathbf{y}X$。在这种情况下，很明显， $j_*\colon \mathcal{H}_{\mathbb{t}} \hookrightarrow \mathrm{Flat}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}})$ 是一个可定义嵌入，因此 pgdim($\mathcal{H}_{\mathbb{t}}$) $\leq$ pgdim(Flat(T$^{\mathrm{c}}$)) = pgdim(T)。□

我们注意到，满足上述命题条件的 t-结构必定源自某个余倾斜对象，参见 [3, 定理 3.6] 和 [40,命题 9.2]。

## 参考文献

[1] J. F. Adams。《E. H. j. Brown 的 Brown 可表性定理的一个变体》。《拓扑学》，10，1971。[2] L. Angeleri Hügel、S. Koenig、Q. Liu 和 D. Yang。《导出模范畴的阶梯与简单性》。《代数杂志》，472 66，2017 15：–。[3] L. Angeleri Hügel、F. Marks 和 J. Vitória。《倾斜理论中的扭对》。《太平洋数学杂志》，291(2)，2017。[4] D. Baer、H. Brune 和 H. Lenzing。《代数表示的同调方法。II：温和遗传代数》。《纯粹与应用代数杂志》，26：141–153，1982。[5] D. Baer 和 H. Lenzing。《代数表示的同调方法。I：野情形》。《纯粹与应用代数杂志》，24，1982。[6] P. Balmer。《谱、谱、谱——张量三角谱与自同态环的 Zariski谱》。《代数、几何与拓扑》，10(3)：1521–1563，2010。[7] A. Banerjee。《关于 Bergman 一个定理的若干注记》。《巴黎科学院数学报告》，354(7)，2016。[8] S. Bazzoni 和 M. Hrbek。《弱整体维数至多为一的环上的可定义余心轴》。《巴塞罗那数学出版物》，65 241，2021 1 165( )：–。[9] A. Beligiannis。《三角范畴中的相对同调代数与纯性》。《代数杂志》，227(1)，2000。[10] D. J. Benson 和 G. P. Gnacadja。《模表示理论中的幻影映射与纯性。I》。《数学基础》，161(1-2)，1999。[11] G. M. Bergman。《每个模都是内射对象的一个逆极限》。《美国数学会会刊》，141(4)，2013。[12] I. Bird 和 J. Williamson。《三角范畴之间的可定义函子》。预印本，arXiv:2310.02159，2023。

[13] I. Bird 和 J. Williamson。《通过可定义子范畴得到的同调谱》。伦敦数学会会刊，57(4)，2025。[14] A. Bondal 和 M. van den Bergh。《交换几何与非交换几何中函子的生成元与可表性》。莫斯科数学杂志，3(1)：1–36，2003。[15] E. H. j. Brown。《上同调理论》。数学年刊（第 2 辑），75，1962。[16] J. D. Christensen、B. Keller 和 A. Neeman。《导出范畴中的 Brown 可表性失效》。拓扑学，40(6)，2001。[17] W. Crawley-Boevey。《局部有限表示加性范畴》。通讯代数，22(5)，1994。[18] G. Garkusha 和 M. Prest。《三角范畴中的内射对象》。代数及其应用杂志，3(4)，2004。[19] G. Garkusha 和 M. Prest。《三角范畴与 Ziegler 谱》。代数表示论，8(4)，2005。[20] J. Gillespie。《阿贝尔模型范畴理论》，剑桥高等数学研究丛书第 215 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2025。[21] L. Gruson 和 C. U. Jensen。《与 $\varprojlim^{(i)}$函子相关的上同调维数》。载于 Paul Dubreil 和 Marie-Paule Malliavin 代数研讨班，第 33 年（巴黎，1980），数学讲义第 867 卷。施普林格，柏林，1981。[22] I. Herzog。《局部凝聚 Grothendieck 范畴的 Ziegler 谱》。伦敦数学会会刊（第 3 辑），74(3)，1997。[23] I. Herzog 和 S. L'Innocente。《泛阿贝尔正则环》。载于《模、代数与范畴的模型论》，当代数学第 730 卷。美国数学会，[普罗维登斯], RI，2019。[24] M. Hovey。《模的分类子范畴》。美国数学会汇刊，353(8)，2001。[25] M. Hovey、K. Lockridge 和 G. Puninski。《环的导出范畴中的生成假设》。数学杂志，256(4)，2007。[26] M. Hovey、J. H. Palmieri 和 N. P. Strickland。《公理化稳定同伦论》。美国数学会回忆录，128(610)，1997。[27] B. Huisgen-Zimmermann。《纯性、代数紧性、直和分解与表示型》。载于《无限长度模》（比勒费尔德，1998），数学趋势。比克豪泽，巴塞尔，2000。[28] C. U. Jensen 和 H. Lenzing。《模型论代数：特别强调域、环和模》，《代数逻辑及其应用》第 2 卷。纽约等地：戈登与布里奇科学出版社，1989。[29] R. Kiełpiński 和 D. Simson。《关于纯同调维数》。波兰科学院数学、天文学与物理学会刊，23，1975。[30] H. Krause。《局部有限表示加性范畴上的函子》。《数学讨论》，75(1)，1998。[31] H. Krause。《Smashing 子范畴与望远镜猜想——一种代数方法》。《数学创刊》，139(1)，2000。[32] H. Krause。《稳定同伦论中的凝聚函子》。《数学基础》，173(1)，2002。[33] H. Krause。《上同调商与 smashing 局部化》。《美国数学杂志》，127(6)，2005。[34] J. Lipman。《关于导出函子与 Grothendieck 对偶的注记》。载于《概形图表的 Grothendieck 对偶基础》，第 1–259 页。柏林：施普林格，2009。[35] S. Mac Lane。《工作数学家的范畴论》，数学研究生教材第 5 卷。纽约：施普林格，第 2 版，1998。[36] A. Neeman。《关于 Brown–Adams 定理》。拓扑学，36(3)，1997。[37] J.-P. Olivier。《泛绝对平坦环与环的满态射》。巴黎科学院报告 A-B 辑，266，1968。[38] M. Prest。《纯性、谱与局部化》，数学及其应用百科全书第 121 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2009。[39] M. Prest。《可定义加性范畴：纯性与模型论》。美国数学会回忆录，210(987)，2011。[40] M. Saorín 和 J. Šťovíček。带有 Grothendieck 心的 $t$-结构与函子范畴。精选数学，新辑，29(5)，2023。编号 77。[41] D. Simson。《局部有限表示 Grothendieck 范畴的纯全局维数》。数学基础，96(2)，1977。[42] T. Stacks 项目作者。《Stacks 项目》。 https://stacks.math.columbia.edu，2025。[43] B. Stenström。《商环：环论方法导论》，数学科学基础丛书第 217 卷。施普林格，查姆，1975。[44] J. Šťovíček。《关于纯性及其在余导出范畴与奇点范畴中的应用》。arXiv.1412.1615，2014。[45] C. A. Weibel。《同调代数导论》，剑桥高等数学研究丛书第 38 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994。

代数系，数学与物理学院，布拉格查理大学，索科洛夫斯卡街83号，186 75 布拉格，捷克共和国电子邮箱地址：
bird@karlin.mff.cuni.cz