arXiv:2601.09466v1 [math.RA] 14 Jan 2026

丝状李代数的仿射上同调类

DIETRICH BURDE

Abstract. 我们对维数为 $n \leq 11$ 的所有丝状幂零李代数以及维数为$n \geq 12$的某些代数类，分类其上同调空间 $H^2(\mathfrak{g}, K)$。我们将这一结果应用于确定仿射上同调类 $[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, K)$。我们证明了一般性结果：仿射上同调类的存在意味着 $\mathfrak{g}$上存在典范类型的仿射结构，因而相应的幂零李群上存在典范的左不变仿射结构。对于某些丝状代数，仿射上同调类不存在意味着任何仿射结构都不存在。特别值得关注的是具有最小贝蒂数 $b_1(\mathfrak{g}) = b_2(\mathfrak{g}) = 2$的代数 $\mathfrak{g}$ 。

1. Introduction

李群上的左不变仿射结构在研究紧仿射流形的基本群以及仿射晶体群方面发挥着重要作用。Milnor 在其关于完备仿射流形基本群的论文 [11] 中提出：每个可解李群是否都具有完备的左不变仿射结构？当时有证据表明答案应该是肯定的。Auslander [2] 证明了一个逆命题：具有完备左不变仿射结构的李群必为可解群。Milnor 的问题后来被称为一个猜想。经过漫长的探索，这个问题最终得到了否定回答。研究证明，存在不具有任何左不变仿射结构的幂零李群，参见 [3],[5],[7]。所有已知的反例都是维数为 $10 \leq n \leq 13$的丝状幂零李群。这一结果还意味着，存在有限生成的无挠幂零群，它们不是任何紧完备仿射流形的基本群。此外，由此可知，存在不具有任何仿射结构或射影结构的幂零流形。除这些反例外，关于米尔诺问题的结果并不多。是否在每个维数 $n \geq 10$都存在反例，至今仍是未知的。这个问题可以用纯代数的术语表述：

1.1. 定义。 设 A 是域 K 上的一个向量空间，并设 $A \times A \to A, (x, y) \mapsto x \cdot y$是一个 K–双线性乘积，满足

$$x \cdot (y \cdot z) - (x \cdot y) \cdot z = y \cdot (x \cdot z) - (y \cdot x) \cdot z \tag{1}$$

对所有的 $x, y, z \in A$均成立。此时， A 连同该乘积称为左对称代数 或 LSA。该乘积也称为左对称乘积。

如果将条件 (1) 改写为 $(x, y, z) = (y, x, z)$，其中 $(x, y, z) = x \cdot (y \cdot z) - (x \cdot y) \cdot z$，那么“左对称”这一术语的含义便显而易见。

1.2. 定义。 李代数 $\mathfrak{g}$ 上的仿射结构或 LSA–结构是一个 K–双线性乘积 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，它是左对称的，并且满足

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x \tag{2}$$

2020 数学主题分类。 主要分类 17B56、17B30。

1.3.**命题**。 设 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的单连通李群。 G 上的左不变仿射结构与 $\mathfrak{g}$ 上的仿射结构之间存在典范的一一对应。

米尔诺问题的代数版本如下：域 K 上的哪些李代数确实具有仿射结构？如上所述，并非所有可解李代数都具有仿射结构，不过它们通常具有这种结构。约化李代数的情形也十分有趣。关于这一主题已有大量文献，例如参见 [6]及其中引用的文献。米尔诺问题与有限维李代数的阿多定理的一种强化有关。如果维数为 n的李代数 $\mathfrak{g}$具有仿射结构，那么 $\mathfrak{g}$就有一个维数为 $n+1$的忠实 李代数模。仿射结构存在性的反例，依赖于这样一个事实：并非所有幂零李代数都有这种忠实模。然而，要确定哪些幂零李代数具有这种模，仍然十分困难。要发现某个特定的幂零李代数没有低维忠实模，往往需要大量计算。一般来说，除非李代数 $\mathfrak{g}$ 是二步、三步或 $n-1$步幂零（其中 n 表示 $\mathfrak{g}$的维数），否则这个问题似乎完全无从着手。不过，前两种情形总是存在仿射结构，因此也存在维数为 $n+1$的忠实模。最后一种情形对应于丝状代数。众所周知，丝状代数在研究幂零李代数的贝蒂数 b_i（$\mathfrak{g}$）时也发挥着重要作用 [1] 。它们给出了贝蒂数的下界。更确切地说，计算表明，对于任意较小的 n，都存在一个丝状代数 $\mathfrak{f}_n$ ，使得对于所有 i 以及所有维数为 n的幂零李代数 $\mathfrak{g}$ ， b_i（$\mathfrak{f}_n$） $\leq b_i$（$\mathfrak{g}$）。这类丝状李代数通常不具有任何仿射结构。第一步是研究上同调空间 H^2（$\mathfrak{g}$， K）。我们将计算所有维数为 $n \leq 11$ 的丝状李代数，以及满足特定性质的维数为 $n \geq 12$的丝状李代数的上同调。在这里，某个子类中的代数 $\mathfrak{g}$ 的贝蒂数 b_1（$\mathfrak{g}$）和 b_2（$\mathfrak{g}$）均达到最小值 2。我们猜想，对于 $n \geq 13$ ，这些代数不具有任何仿射结构。目前我们已证明 $n = 13$ 的情形。

本文包含一些未附证明的结果，这些证明将在扩展版本中给出。

2. Filiform nilpotent Lie algebras

在幂零李代数的研究中，丝状代数发挥着重要作用。

2.1. **定义**。 设 $\mathfrak{n}$ 是域 K上的李代数。 $\mathfrak{n}$的下中心列 $\{\mathfrak{n}^k\}$ 定义为 $\mathfrak{n}^0 = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}^k = [\mathfrak{n}^{k-1}, \mathfrak{n}]$， $k \geq 1$. 整数 p 称为 $\mathfrak{n}$ 的幂零指标，若 $\mathfrak{n}^p = 0$且 $\mathfrak{n}^{p-1} \neq 0$。此时，$\mathfrak{n}$ 称为 p步幂零。维数为 n、幂零指标为 $p = n-1$ 的幂零李代数 $\mathfrak{n}$ 称为丝状。

2.2. 注。 若将幂零李代数 $\mathfrak{n}$的类型 记为 $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$，其中对于所有 $i = 1$, $\dim(\mathfrak{n}^{i-1}/\mathfrak{n}^i) = p_i$，…， r，那么丝状李代数恰好是类型为 $\{2, 1, 1, \ldots, 1\}$的代数。这解释了“丝状”这个名称，其意为线状。请注意，丝状李代数的中心是一维的。

2.3. **例子**。 设 $L = L(n)$ 为由下式定义的 n 维李代数

$$[e_1, e_i] = e_{i+1},\ i = 2, \ldots, n-1$$

其中$(e_1$，…， $e_n)$ 是 $L(n)$ 的一组基，未定义的括号均为零。这称为标准分次丝状李代数。

考虑丝状李代数的适配基很有用。我们需要先给出几个定义：

2.4. 定义。 令 $\mathcal{I}_n$ 为指标集，定义如下：

$$\mathcal{I}_n^0 = \{(k,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2 \le k \le [n/2],\ 2k+1 \le s \le n\},$$

$$\mathcal{I}_n = \begin{cases} \mathcal{I}_n^0 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \mathcal{I}_n^0 \cup \{(\frac{n}{2}, n)\} & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

设 $(e_1, \dots, e_n)$ 是 $L(n)$ 的一组基，其中 $[e_1, e_i] = e_{i+1}$ 适用于 $2 \le i \le n-1$。对于任意元素 $(k,s) \in \mathcal{I}_n$，我们可以将一个 2-上循环 $\psi_{k,s} \in Z^2(L,L)$ 与系数取自伴随模 L 的李代数上同调联系起来，如下所示：

$$\psi_{k,s}(e_1 \wedge e_i) = 0,$$
$$\psi_{k,s}(e_k \wedge e_{k+1}) = e_s$$

对于 $1 \le i \le n,\ 2 \le k \le n-1$。那么，对于满足 $2 \le i,j$ 的基向量 e_1, e_i, e_j，条件 $\psi_{k,s} \in Z^2(L,L)$ 可表示为

$$[e_1, \psi_{k,s}(e_i \wedge e_j)] = \psi_{k,s}([e_1, e_i] \wedge e_j) + \psi_{k,s}(e_i \wedge [e_1, e_j])$$

由此得到以下公式：

$$(3) \quad \psi_{k,s}(e_i \wedge e_j) = \begin{cases} (-1)^{k-i} \binom{j-k-1}{k-i} (\operatorname{ad} e_1)^{(j-k-1)-(k-i)} e_s & \text{if } 2 \le i \le k < j \le n\ , \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由 (3) 定义的 $\psi_{k,s}$ 实际上属于 $Z^2(L,L)$。以下结果归功于 Vergne [12]，其中 $K = \mathbb{C}$：

2.5.**引理。** 任意 n 维丝状李代数都同构于一个李代数 L_ψ，其基为$(e_1, \dots, e_n)$，李括号由下式给出

$$(4) \qquad [e_i, e_j] = [e_i, e_j]_L + \psi(e_i \wedge e_j),\ 1 \le i,j \le n.$$

这里 ψ 是一个2-上循环，可表示为

$$\psi = \sum_{(k,s) \in \mathcal{I}_n} \alpha_{k,s} \psi_{k,s}$$

其中 $\alpha_{k,s} \in K$。2-上循环 $\psi \in Z^2(L,L)$ 定义了 L的一个无穷小变形 L_ψ。

2.6. 定义。 </style}维丝状李代数的一组基 $(e_1, \dots, e_n)$ 称为适配的，如果相对于这组基的李括号由式 (4) 给出，其中 2-上循环为 $\psi = \sum_{(k,s) \in \mathcal{I}_n} \alpha_{k,s} \psi_{k,s}$。

利用引理 2.5 和 (3)，我们得到：

2.7.**引理。** n 维丝状李代数在适配基$(e_1, \dots, e_n)$ 下的所有括号运算均由以下括号运算确定

$$\begin{aligned} [e_1, e_i] &= e_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ [e_k, e_{k+1}] &= \alpha_{k,2k+1} e_{2k+1} + \dots + \alpha_{k,n} e_n, \quad 2 \le k \le [(n-1)/2] \\ [e_{\frac{n}{2}}, e_{\frac{n+2}{2}}] &= \alpha_{\frac{n}{2},n} e_n, \quad \text{if } n \equiv 0(2) \end{aligned}$$

2.8.**引理**。 n 维丝状李代数在适配基下的括号运算如下：

$$(5)\quad [e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad i = 2, \ldots, n-1$$

$$(6)\quad [e_i, e_j] = \sum_{r=1}^{n} \Bigg(\sum_{\ell=0}^{[(j-i-1)/2]} (-1)^{\ell} \binom{j-i-\ell-1}{\ell} \alpha_{i+\ell, r-j+i+2\ell+1} \Bigg) e_r, \quad 2 \leq i < j \leq n.$$

其中，对于所有不属于 $\mathcal{I}_n$ 的数对 (k,s)，常数 $\alpha_{k,s}$ 均为零。

需要注意的是，丝状李代数的适配基并不唯一。尽管如此，我们仍可以根据适配基，将系数 $\{\alpha_{k,s} \mid (k,s) \in \mathcal{I}_n\}$ 与一个丝状李代数相关联。若 n 为奇数，则有 $(n-3)^2/4$ 个参数；若 n 为偶数，则有 $(n^2-6n+12)/4$ 个参数。雅可比恒等式给出了关于 $K[\alpha_{k,s}]$ 的若干多项式方程。若 $n < 8$，则没有方程，也就是说，雅可比恒等式自动成立。一般而言，相较于通常的情形，关于适配基的多项式方程要简单得多。举例来说，对于维数为 9 的丝状李代数，关于 $\{\alpha_{k,s} \mid (k,s) \in \mathcal{I}_9\}$ 的雅可比恒等式由单个方程 $\alpha_{4,9}(2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7}) - 3\alpha_{3,7}^2 = 0.$ 给出。

2.9. **定义**。设 V 是代数闭域 K 上维数为 n 的向量空间，且具有固定基 $(e_1, \ldots, e_n)$。V 上的李代数结构相对于该基确定了一个乘法表。若

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k$$

则称点 $(c_{ij}^k) \in K^{n^3}$ 为一个李代数律。

常数 c_{ij}^k 满足由李括号的反对称性和雅可比恒等式给出的代数方程。它们在带坐标 c_{ij}^k, $1 \leq i, j, k \leq n$ 的 n^3 维仿射空间中定义了一个扎里斯基闭集。所有李代数律的集合通常称为李代数律簇，记作 $\mathcal{L}_n(K)$。

2.10. **定义**。记 $\mathcal{F}_n(K)$ 为 $\mathcal{L}_n(K)$ 中定义 n 维丝状幂零李代数的扎里斯基开子集，其中这些李代数在域 K 上。记 $\mathcal{A}_n(K)$ 为 $\mathcal{F}_n(K)$ 的子集，由相对于适配基为丝状李代数的结构常数组成。若 $\lambda \in \mathcal{F}_n(K)$，则将相应的李代数记为 $\mathfrak{g}_\lambda$。记 K 上 n 维丝状李代数的类为 $\mathfrak{F}_n(K)$。

引理 2.5 表明：

2.11. **引理**。设 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{F}_n(K)$。则存在一个基 $(e_1, \ldots, e_n)$，使得相应的李代数律属于 $\mathcal{A}_n(K)$。

研究丝状李代数上的仿射结构时发现，以下子类具有重要意义。设 $\mathfrak{g}$ 是一个维数为 $n \geq 7$ 的丝状李代数，且 $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}]$ 对于 $k \geq 2$。以下性质是 $\mathfrak{g}$ 的同构不变量：

(a) $\mathfrak{g}$ 包含一个 $U \supseteq \mathfrak{g}^1$ 余维一子空间 $[U, \mathfrak{g}^1] \subseteq \mathfrak{g}^4$。(b) $\mathfrak{g}$ 不包含任何满足 $[U, \mathfrak{g}^1] \subseteq \mathfrak{g}^4$的余维一子空间 $U \supseteq \mathfrak{g}^1$。(c) $\mathfrak{g}^{\frac{n-4}{2}}$ 是阿贝尔的，其中 n 为偶数。
(d) $[\overline{\mathfrak{g}^1}, \mathfrak{g}^1] \subseteq \mathfrak{g}^6$。

用适配基的结构常数来表述这些性质会更加自然。

2.12. **定义**。令 $\mathfrak{A}_n^1(K)$ 表示满足性质 (b)、(c)、(d) 的 $n \geq 12$ 维丝状李代数类。令 $\mathfrak{A}_n^2(K)$ 表示满足性质 (b)、(c)，但不满足性质 (d) 的 $n \geq 12$ 维丝状李代数类。

这两个类彼此不相交，也就是说，第一类中的李代数不可能与第二类中的李代数同构。$\mathfrak{A}_n^1(K)$ 和 $\mathfrak{A}_n^2(K)$ 中的代数在中心扩张和仿射结构方面具有一些显著性质。

3. 仿射上同调类

本节将证明，对于丝状李代数 $\mathfrak{g}$，在 $H^2(\mathfrak{g}, K)$ 中存在仿射上同调类，意味着在 $\mathfrak{g}$ 上存在典范仿射结构。接下来，研究第二贝蒂数最小的丝状李代数$b_2(\mathfrak{g}) = 2$ 非常有趣。此类代数不具有仿射上同调类，因此也不具有典范类型的仿射结构。然而，为了确保不存在其他仿射结构，还需要附加条件。

我们快速回顾一下李代数上同调，详情见 [10]。记 $\mathfrak{g}$ 为定义在 K上的一个李代数。记 M为一个带有作用 $\mathfrak{g} \times M \to M$的 $\mathfrak{g}$–模，$(x, m) \mapsto x \bullet m$。$p$–上链空间定义为

$$C^p(\mathfrak{g}, M) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p \mathfrak{g}, M) & \text{if } p \geq 0, \\ 0 & \text{if } p < 0. \end{cases}$$

余边算子 余边算子 d_p: $C^p(\mathfrak{g}, M) \to C^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$ 定义为

$$\begin{aligned}(d_p\omega)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p+1}) = &\sum_{1 \leq r < s \leq p+1} (-1)^{r+s} \omega([x_r, x_s] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_r} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_s} \wedge \cdots \wedge x_{p+1}) \\ &+ \sum_{t=1}^{p+1} (-1)^{t+1} x_t \bullet \omega(x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_t} \cdots \wedge x_{p+1}),\end{aligned}$$

对于 $p \geq 0$和 $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, M)$。若 $p < 0$，则令 $d_p = 0$。标准计算表明$d_p \circ d_{p-1} = 0$，因此定义

$$H^p(\mathfrak{g}, M) = \ker d_p / \operatorname{im} d_{p-1} = Z^p(\mathfrak{g}, M)/B^p(\mathfrak{g}, M)$$

是合理的。这个空间称为 $\mathfrak{g}$的、系数取自$\mathfrak{g}$–模 M的 p^{th} 上同调群 。来自 $Z^p(\mathfrak{g}, M)$ 的元素称为 p–上闭链，来自 $B^p(\mathfrak{g}, M)$$p$–余边的元素。序列

$$0 \to C^0(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{d_1} C^2(\mathfrak{g}, M) \to \cdots$$

得到一个上链复形，称为标准上链复形，记作$\{C^\bullet(\mathfrak{g}, M)\ d\}$。

2-上循环和 2-上边界空间的具体形式如下：

$$Z^2(\mathfrak{g},M)=\{\omega\in \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g},M)\mid x_1\bullet\omega(x_2\wedge x_3)-x_2\bullet\omega(x_1\wedge x_3)+x_3\bullet\omega(x_1\wedge x_2)$$
$$-\omega([x_1,x_2]\wedge x_3)+\omega([x_1,x_3]\wedge x_2)-\omega([x_2,x_3]\wedge x_1)=0\}$$
$$B^2(\mathfrak{g},M)=\{\omega\in \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g},M)\mid \omega(x_1\wedge x_2)=x_1\bullet f(x_2)-x_2\bullet f(x_1)-f([x_1,x_2])$$
$$\text{for some } f\in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g},M)\}$$

李代数上同调有一些重要的特殊情形。若 $M=K$ 表示 1 维平凡模，即对所有 $x\in\mathfrak{g}$ 都有 $x\bullet m=0$，那么数值 $b_p(\mathfrak{g})=\dim H^p(\mathfrak{g},K)$ 就特别值得关注。数值 $b_p(\mathfrak{g})$ 称为 p^{th} 贝蒂数。关于幂零李代数的贝蒂数，有许多值得探讨的问题。其中，人们希望了解每个 $b_p(\mathfrak{g})$ 的良好上下界。以下命题对于幂零李代数是否成立，目前仍是一个未解决的猜想：

$$b_2(\mathfrak{g})>\frac{b_1(\mathfrak{g})^2}{4}$$

这称为 b_2–猜想。该猜想已对具有 $b_1(\mathfrak{g})\leq 3$ 的代数、二步幂零李代数以及 $\mathfrak{g}$ 满足 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\leq 7$ 的幂零李代数得到证明。详情见 [9]。另一个猜想是幂零李代数的环面秩猜想，其表述为

$$\sum_{p=0}^{n} b_p(\mathfrak{g})\geq 2^{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$$

其中，$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的中心。该结论也仅在少数情形下 [8] 为人所知。对于丝状李代数而言，这两个猜想都是显然成立的。然而，明确确定丝状代数的贝蒂数会导致艰巨的组合问题，见 [1]。

现在我们来定义仿射 2-上循环：

3.1. **定义**。设 $\mathfrak{g}\in\mathfrak{F}_n(K)$。若 2-上循环 $\omega\in Z^2(\mathfrak{g},K)$ 满足 $\omega:\ \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\to K$ 在 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\wedge\mathfrak{g}$ 上非零，则称其为仿射。若一个类 $[\omega]\in H^2(\mathfrak{g},K)$ 的每个代表元都是仿射的，则称该类为仿射的。

3.2. **引理**。设 $\mathfrak{g}\in\mathfrak{F}_n(K)$ 和 $\omega\in Z^2(\mathfrak{g},K)$ 是仿射2余循环。那么它的上同调类 $[\omega]\in H^2(\mathfrak{g},K)$ 是仿射且非零的。

证明。若 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=$张成 $\{z\}$，则 ω是仿射的，当且仅当存在某个 $y\in\mathfrak{g}$使得 $\omega(z\wedge y)\neq 0$。对于 $\xi\in B^2(\mathfrak{g},K)$，有 $\xi(z\wedge y)=f([z,y])=f(0)=0$，其中 $f\in\mathfrak{g}^*$是某个线性形式。因此 ω不是二余边界，且 $[\omega]$是仿射的。□

由于 $H^2(\mathfrak{g},K)$ 中的元素刻画了 $\mathfrak{g}$ 被 K 中心扩张的等价类，我们得到以下刻画：

3.3. **命题**。李代数 $\mathfrak{g}\in\mathfrak{F}_n(K)$ 有一个扩张

$$0\to\mathfrak{z}(\mathfrak{h})\xrightarrow{\iota}\mathfrak{h}\xrightarrow{\pi}\mathfrak{g}\to 0 \tag{7}$$

当且仅当存在一个仿射 $\mathfrak{h}\in\mathfrak{F}_{n+1}(K)$ $[\omega]\in H^2(\mathfrak{g},K)$。

证明。中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\mathrm{span}\{z\}$ 是一维的。假设 $\mathfrak{g}$ 有这样的扩张。则 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ 是一个平凡的 $\mathfrak{g}$–模，等于 K。该扩张确定了一个唯一的类 $[\omega]\in H^2(\mathfrak{g},K)$，我们可以假设李括号由下式给出

$$[(a,x),(b,y)]_{\mathfrak{h}}:=(\omega(x\wedge y),[x,y]_{\mathfrak{g}}) \tag{8}$$

在向量空间 $\mathfrak{h} := K \oplus \mathfrak{g}$ 上。假设对所有 $y \in \mathfrak{g}$，都有 $\omega(z \wedge y) = 0$。则 $(a, 0)$ 和 (a, z) 都包含在 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ 中。这与 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \cong K$ 矛盾。因此 ω 是仿射的。

反过来，一个仿射 $[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, K)$ 确定了一个扩张

$$0 \to K \xrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

该扩张由 $\mathfrak{h} := K \oplus \mathfrak{g}$ 上的李括号 (8) 给出。设 $(a, x) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$。那么 $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，由此可知 x 是 z 的倍数。由于对于某个 $y \in \mathfrak{g}$，有 $\omega(z, y) \neq 0$，因此 (a, z) 不属于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$。于是 $x = 0$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ 是平凡的一维 $\mathfrak{g}$–模 K，且 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{F}_{n+1}(K)$。□

关于仿射上同调类与仿射结构之间联系，有如下结果：

3.4.**命题**。设 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{F}_n(K)$，并假设存在一个仿射上同调类$[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, K)$。则 $\mathfrak{g}$ 存在一个仿射结构。

该命题是以下定理的推论：

3.5. **定理**。设 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{F}_n(K)$，并假设 $\mathfrak{g}$ 有一个扩张

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

满足 $\iota(\mathfrak{a}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$。那么 $\mathfrak{g}$ 具有仿射结构。

证明。证明的第一步是说明我们可以假设 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{F}_{n+1}(K)$。关于这一点，请读者参阅本文的扩展版本。设 $(f_1, \dots, f_{n+1})$ 是 $\mathfrak{h}$ 的适配基，并令 $e_i := f_i$ 模 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$，其中 $i = 1, \dots, n$。那么 $(e_1, \dots, e_n)$ 是 $\mathfrak{g}$的适配基。令 $\mathfrak{h}_3 =$ 张成$\{f_3, \dots, f_{n+1}\}$，且 $\mathfrak{g}_2 =$ 张成$\{e_2, \dots, e_n\}$。存在唯一确定的线性映射 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}_3$，满足对所有 $x \in \mathfrak{g}$ 均有 $\varphi(x) = [f_1, \overline{x}]_{\mathfrak{h}}$，其中$x \in \mathfrak{h}$ 是任意满足 $\pi(x) = x$的元素。φ在$\mathfrak{g}_2$ 上的限制是双射，因为它显然是单射。记其逆映射为 $\psi : \mathfrak{h}_3 \to \mathfrak{g}_2$。现在对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，令

$$x \bullet y := \psi([\overline{x}, \varphi(y)]_{\mathfrak{h}}) \tag{9}$$

该公式定义良好，因为$[x, \varphi(y)]_{\mathfrak{h}} = [x, [f_1, y]] \in \mathfrak{h}_3$。我们将证明它满足定义 1.2 中的条件 (1) 和 (2)，因而在 $\mathfrak{g}$ 上定义了一个仿射结构：

$$\begin{aligned} x \bullet y - y \bullet x &= \psi([\overline{x}, [f_1, \overline{y}]] - [\overline{y}, [f_1, \overline{x}]]) \\ &= \psi([\overline{y}, [f_1, \overline{x}]] - [f_1, [\overline{y}, \overline{x}]] - [\overline{y}, [f_1, \overline{x}]]) \\ &= \psi([f_1, [\overline{x}, \overline{y}]]) = \psi([f_1, \overline{[x, y]_{\mathfrak{g}}}]) = \psi(\varphi([x, y]_{\mathfrak{g}})) \\ &= [x, y]_{\mathfrak{g}} \end{aligned}$$

其中括号表示在 $\mathfrak{h}$ 中进行，除非另有说明。对所有 $w \in \mathfrak{h}_3$ 使用恒等式 $[f_1, \psi(w)] = \overline{w}$，再使用雅可比恒等式，我们得到对所有 x，y，$z \in \mathfrak{g}$：

$$\begin{aligned} x \bullet (y \bullet z) - y \bullet (x \bullet z) &= \psi([\overline{x}, [\overline{y}, \varphi(z)]] - [\overline{y}, [\overline{x}, \varphi(z)]]) \\ &= [x, y]_{\mathfrak{g}} \bullet z \\ &= (x \bullet y) \bullet z - (y \bullet x) \bullet z \end{aligned}$$

□

4. Computation of $H^2(\mathfrak{g},\ K)$

在本节中，我们将完全确定所有带有 $n \leq 11$ 的 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{F}_n(K)$ 的上同调群 $H^2(\mathfrak{g},\ K)$。我们还将给出属于 $\mathfrak{A}_n^1(K)$ 类和 $\mathfrak{A}_n^2(K)$ 类的代数的一些结果。上同调空间为 $\mathfrak{g}$ 提供了重要信息。在我们的情形下，我们得到了仿射上同调类存在性的完整描述。设 $(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个适配基，使得其李代数律属于 $\mathcal{A}_n(K)$。

4.1. **引理**。 设 $\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g}, K)$。那么 ω 是仿射 2–上循环，当且仅当 $\omega(e_1 \wedge e_n)$ 或$\omega(e_2 \wedge e_n)$ 非零。

证明。 根据定义， ω是仿射的，当且仅当对于某个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，有 $\omega(e_j \wedge e_n) \neq 0$。 ω 为2-上循环的条件如下:

$$\omega([e_i, e_j] \wedge e_k) - \omega([e_i, e_k] \wedge e_j) + \omega([e_j, e_k] \wedge e_i) = 0 \quad \text{for } i < j < k \tag{10}$$

令 $i = 1,\ k = n$，可得对于 $3 \leq j \leq n,\ \omega(e_j \wedge e_n) = 0$。 □

4.2. **定义**。 根据以下非零取值定义 $\omega_\ell \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g},\ K)$:

$$\omega_\ell(e_k \wedge e_{2\ell+3-k}) = (-1)^k \quad \text{for } 1 \leq \ell \leq [(n-1)/2],\ 2 \leq k \leq [(2\ell+3)/2] \tag{11}$$

下文中我们主要使用 ω_1、……、 ω_4。它们定义如下:

$$\begin{aligned}
&\omega_1(e_2 \wedge e_3) = 1\\
&\omega_2(e_2 \wedge e_5) = 1,\ \omega_2(e_3 \wedge e_4) = -1\\
&\omega_3(e_2 \wedge e_7) = 1,\ \omega_3(e_3 \wedge e_6) = -1,\ \omega_3(e_4 \wedge e_5) = 1\\
&\omega_4(e_2 \wedge e_9) = 1,\ \omega_4(e_3 \wedge e_8) = -1,\ \omega_4(e_4 \wedge e_7) = 1,\ \omega_4(e_5 \wedge e_6) = -1
\end{aligned}$$

4.3. **引理**。 我们有 $\omega_1, \omega_2 \in Z^2(\mathfrak{g}, K)$，而 $\omega_\ell,\ \ell \geq 3$ 不一定是2–余循环。若$\ell < [(n-1)/2]$，则 ω_ℓ 不可能是仿射2–余循环。

证明。 第一个断言可由方程（10）轻易推出。在 $i = 1, j = 2$ 的情形下，它可化为 $\omega_1(e_3 \wedge e_k) = \omega_1(e_{k+1} \wedge e_2)$，其中 $k \geq 3$。另一方面，我们有 $\omega_\ell(e_i \wedge e_n) = 0,\ 1 \leq i \leq n$，其中 $\ell < [(n-1)/2]$。 □

考察具有最小第二贝蒂数的丝状李代数很有意思。以下结果不难证明:

4.4. **命题**。 设 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{F}_n(K)$ $n \geq 6$ 是一个丝状李代数，且满足 $b_2(\mathfrak{g}) = 2$。则不存在仿射 $[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, K)$。

现在我们开始计算上同调。我们必须将丝状代数划分为若干个定义明确的类别。然而，类别的数量应尽可能少。因此，我们不采用丝状李代数的分类结果。我们根据结构常数满足的某些等式，将 $\mathcal{A}_n(K)$ $6 \leq n \leq 11$ 划分为以下子集

或不等式。这些子集对应于定义明确的丝状李代数类别:

类	条件
$\mathcal{A}_{6,1}$	$\alpha_{3,6} \neq 0$
$\mathcal{A}_{6,2}$	$\alpha_{3,6} = 0$
$\mathcal{A}_{7,1}$	$2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0$
$\mathcal{A}_{7,2}$	$2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0$
$\mathcal{A}_{8,1}$	$\alpha_{4,8} \neq 0,\ 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0$
$\mathcal{A}_{8,2}$	$\alpha_{4,8} = 0,\ 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0$
$\mathcal{A}_{8,3}$	$\alpha_{4,8} = 0,\quad 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0,\quad \alpha_{2,5} \neq 0$
$\mathcal{A}_{8,4}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = \alpha_{4,8} = 0$
$\mathcal{A}_{9,1}$	$2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0,\quad \alpha_{3,7}^2 \neq \alpha_{2,5}^2$
$\mathcal{A}_{9,2}$	$2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0,\quad \alpha_{3,7}^2 = \alpha_{2,5}^2$
$\mathcal{A}_{9,3}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = 0,\quad \alpha_{4,9} \neq 0,\quad \alpha_{2,6} + \alpha_{3,8} \neq 0$
$\mathcal{A}_{9,4}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = 0,\quad \alpha_{4,9} \neq 0,\quad \alpha_{2,6} + \alpha_{3,8} = 0$
$\mathcal{A}_{9,5}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = \alpha_{4,9} = 0,\ 2\alpha_{2,7} + \alpha_{3,9} \neq 0$
$\mathcal{A}_{9,6}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = \alpha_{4,9} = 0,\ 2\alpha_{2,7} + \alpha_{3,9} = 0$
$\mathcal{A}_{10,1}$	$\alpha_{5,10} \neq 0,\ 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0$
$\mathcal{A}_{10,2}$	$\alpha_{5,10} \neq 0,\ 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0$
$\mathcal{A}_{10,3}$	$\alpha_{5,10} = 0,\ 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0,\ \alpha_{3,7}^2 \neq \alpha_{2,5}^2$
$\mathcal{A}_{10,4}$	$\alpha_{5,10} = 0,\ 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0\ \alpha_{3,7}^2 = \alpha_{2,5}^2$
$\mathcal{A}_{10,5}$	$\alpha_{5,10} = 0,\ 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0,\ \alpha_{4,9} \neq 0,\ \alpha_{2,6}^2 + 2\alpha_{2,7}\alpha_{4,9} \neq 0$
$\mathcal{A}_{10,6}$	$\alpha_{5,10} = 0,\ 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0,\ \alpha_{4,9} \neq 0,\ \alpha_{2,6}^2 + 2\alpha_{2,7}\alpha_{4,9} = 0$
$\mathcal{A}_{10,7}$	$\alpha_{5,10} = 0,\quad 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0,\quad \alpha_{4,9} = 0,\quad 2\alpha_{2,7} + \alpha_{3,9} \neq 0$
$\mathcal{A}_{10,8}$	$\alpha_{5,10} = 0,\quad 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0,\quad \alpha_{4,9} = 0,\quad 2\alpha_{2,7} + \alpha_{3,9} = 0,\quad \alpha \neq 0$
$\mathcal{A}_{10,9}$	$\alpha_{5,10} = 0,\ 2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0,\quad \alpha_{4,9} = 0,\quad 2\alpha_{2,7} + \alpha_{3,9} = 0,\quad \alpha = 0$
$\mathcal{A}_{11,1}$	$2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0,\quad 10\alpha_{3,7} - \alpha_{2,5} \neq 0,\quad \beta \neq 0$
$\mathcal{A}_{11,2}$	$2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0,\quad 10\alpha_{3,7} - \alpha_{2,5} \neq 0,\quad \beta = 0$
$\mathcal{A}_{11,3}$	$2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} \neq 0,\quad 10\alpha_{3,7} - \alpha_{2,5} = 0$
$\mathcal{A}_{11,4}$	$2\alpha_{2,5} + \alpha_{3,7} = 0,\quad \alpha_{4,9} \neq 0$
$\mathcal{A}_{11,5}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = \alpha_{4,9} = 0,\ \alpha_{5,11} \neq 0,\ 4\alpha_{4,10} + 2\alpha_{3,8} - 3\alpha_{2,6} \neq 0, \alpha \neq 0$
$\mathcal{A}_{11,6}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = \alpha_{4,9} = 0,\ \alpha_{5,11} \neq 0,\ 4\alpha_{4,10} + 2\alpha_{3,8} - 3\alpha_{2,6} \neq 0,\ \alpha = 0$
$\mathcal{A}_{11,7}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = \alpha_{4,9} = 0,\ \alpha_{5,11} \neq 0,\ 4\alpha_{4,10} + 2\alpha_{3,8} - 3\alpha_{2,6} = 0,\ \gamma \neq 0$
$\mathcal{A}_{11,8}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = \alpha_{4,9} = 0,\quad \alpha_{5,11} \neq 0,\quad 4\alpha_{4,10} + 2\alpha_{3,8} - 3\alpha_{2,6} = 0,\quad \gamma = 0,\quad \delta \neq 0$
$\mathcal{A}_{11,9}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = \alpha_{4,9} = 0,\quad \alpha_{5,11} \neq 0,\quad 4\alpha_{4,10} + 2\alpha_{3,8} - 3\alpha_{2,6} = 0,\quad \gamma = 0,\quad \delta = 0$
$\mathcal{A}_{11,10}$	$\alpha_{2,5} = \alpha_{3,7} = \alpha_{4,9} = \alpha_{5,11} = 0$

其中

$$\alpha = 3\alpha_{4,10}(\alpha_{2,6} + \alpha_{3,8}) - 4\alpha_{3,8}^2$$
$$\beta = (2\alpha_{2,5}^2 - 5\alpha_{3,7}^2)(4\alpha_{2,5}^2 - 4\alpha_{2,5}\alpha_{3,7} + 3\alpha_{3,7}^2)$$
$$\gamma = 22\alpha_{3,8}^2 - 3\alpha_{2,6}\alpha_{3,8} - 9\alpha_{2,6}^2$$
$$\delta = \alpha_{5,11}(4\alpha_{3,10} + 5\alpha_{2,8}) - 3\alpha_{4,11}(\alpha_{2,6} + \alpha_{3,8}) + 2\alpha_{2,7}(3\alpha_{2,6} - 11\alpha_{3,8})$$

计算结果如下：

4.5. **命题**。 下表展示了所有 $H^2(\mathfrak{g}_\lambda, K)$ 的上同调空间$\lambda \in \mathcal{A}_n(K)$ $3 \leq n \leq 11$。相应的李代数 $\mathfrak{g}_\lambda$ 具有如下仿射上同调类：

维数 $\mathfrak{g}_\lambda$	类	$H^2(\mathfrak{g}_\lambda, K)$	仿射 ω	$b_2(\mathfrak{g}_\lambda)$
3	$\mathcal{A}_3$	ω_1, ω	✓	2
4	$\mathcal{A}_4$	ω_1, ω	✓	2
5	$\mathcal{A}_5$	$\omega_1, \omega_2, \omega$	✓	3
6	$\mathcal{A}_{6,1}$	ω_1, ω_2	—	2
6	$\mathcal{A}_{6,2}$	$\omega_1, \omega_2, \omega$	✓	3
7	$\mathcal{A}_{7,1}$	$\omega_1, \omega_2, \omega$	✓	3
7	$\mathcal{A}_{7,2}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$	✓	4
8	$\mathcal{A}_{8,1}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	—	3
8	$\mathcal{A}_{8,2}$	$\omega_1, \omega_2, \omega$	✓	3
8	$\mathcal{A}_{8,3}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	—	3
8	$\mathcal{A}_{8,4}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$	✓	4
9	$\mathcal{A}_{9,1}$	$\omega_1, \omega_2, \omega$	✓	3
9	$\mathcal{A}_{9,2}$	$\omega_1, \omega_2, \omega, \omega'$	✓	4
9	$\mathcal{A}_{9,3}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	—	3
9	$\mathcal{A}_{9,4}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$	✓	4
9	$\mathcal{A}_{9,5}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$	✓	4
9	$\mathcal{A}_{9,6}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega, \omega'$	✓	5
10	$\mathcal{A}_{10,1}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	—	3
10	$\mathcal{A}_{10,2}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$	—	4
10	$\mathcal{A}_{10,3}$	$\omega_1, \omega_2, \omega$	✓	3
10	$\mathcal{A}_{10,4}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	—	3
10	$\mathcal{A}_{10,5}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	—	3
10	$\mathcal{A}_{10,6}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$	✓	4
10	$\mathcal{A}_{10,7}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$	✓	4
10	$\mathcal{A}_{10,8}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$	—	4
10	$\mathcal{A}_{10,9}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega$	✓	5
11	$\mathcal{A}_{11,1}$	ω_1, ω_2	—	2
11	$\mathcal{A}_{11,2}$	$\omega_1, \omega_2, \omega$	✓	3
11	$\mathcal{A}_{11,3}$	$\omega_1, \omega_2, \omega$	✓	3
11	$\mathcal{A}_{11,4}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	—	3
11	$\mathcal{A}_{11,5}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	—	3
11	$\mathcal{A}_{11,6}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$	—	4
11	$\mathcal{A}_{11,7}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$	✓	4
11	$\mathcal{A}_{11,8}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$	—	4
11	$\mathcal{A}_{11,9}$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega$	✓	5

这里的记号如下。$\omega_1, \ldots, \omega_4$始终表示由（11）定义的 2-上循环。字母 ω 表示一个仿射 2-上循环，它可能因不同的李代数类而异。ω'也同样如此。对于上同调空间，表格列出了

作为一组基的 2-上循环。因此，表中的 $\omega_1, \omega_2, \omega$ 表示（$[\omega_1], [\omega_2], [\omega]$）是 H^2（$\mathfrak{g}_\lambda, K$）的一组基。注意，对于 $n \geq 5$，由 $[\omega_1], [\omega_2]$ 张成的二维子空间始终包含于 H^2（$\mathfrak{g}_\lambda, K$）中。勾号表示存在仿射 2-上循环，减号表示不存在。

4.6. 注。 我们也确定了类 $\mathcal{A}_{11,10}$的上同调和仿射上同调类。然而，要在此陈述结果，就需要引入过多的子类。另一方面，不难证明，所有这类代数都承认仿射结构。

4.7. 注。 设 $\lambda \in \mathcal{A}_{6,1}$。那么 $\mathfrak{g}_\lambda$ 不承认仿射 $[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}_\lambda, K)$。然而，$\mathfrak{g}_\lambda$ 承认仿射结构，因为存在非奇异导子。

这些计算是借助计算机代数软件包 REDUCE 完成的。对于类 $\mathfrak{a}_n^1(K)$ 和 $\mathfrak{a}_n^2(K)$ 的李代数，我们得到了以下结果。

4.8. **定理**。 设 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{a}_n^1(K)$ $n \geq 12$。那么 $b_2(\mathfrak{g}) \geq 3$，并且总存在一个仿射上同调类。因此，所有代数 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{a}_n^1(K)$ $n \geq 12$ 都承认典范仿射结构。

4.9. **命题**。 设 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{a}_{12}^2(K)$。则 $H^2(\mathfrak{g}, K) =$ 张成$\{[\omega_1], [\omega_2], [\omega]\}$，其中 ω 是一个仿射2–上循环。

最后一个结果可推广到更高维：对于 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{a}_n^2(K)$ $n \geq 13$，仿射上同调类的存在取决于 $\mathfrak{g}$ 的结构常数满足某个特定的多项式条件$P_n \equiv 0$：

4.10. **定理**。 设 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{a}_n^2(K)$ $n \geq 13$。则

$$H^2(\mathfrak{g}, K) = \begin{cases} \operatorname{span}\{[\omega_1], [\omega_2], [\omega]\} & \text{if } \mathfrak{g} \text{ satisfies } P_n \equiv 0\ , \\ \operatorname{span}\{[\omega_1], [\omega_2]\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特别地，对于所有不满足多项式条件 $P_n \equiv 0$ 的代数 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{a}_n^2(K)$ $n \geq 13$， $b_2(\mathfrak{g}) = 2$。这些代数的第二贝蒂数最小（在幂零李代数中），因此是可能不存在仿射结构的李代数。在这方面，我们可以证明：

4.11. **定理**。 不存在任何李代数 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{a}_{13}^2$（$K$）具有仿射结构。

更确切地说，我们证明了 $\mu(\mathfrak{g}) \geq 15$，其中 $\mu(\mathfrak{g})$ 表示忠实 $\mathfrak{g}$–模的最小维数。如果 $\mathfrak{g}$ 具有仿射结构，那么不难看出 $\mu(\mathfrak{g}) \leq$ 维 $\mathfrak{g} + 1$。因此，仿射结构的存在性问题与阿多定理精化的问题有关。计算不变量 $\mu(\mathfrak{g})$非常困难，尤其是对于幂零李代数而言。此时伴随表示并不忠实。对于阿贝尔李代数，该不变量可以显式计算：记 $\lceil x \rceil$为 x 的上取整，即大于或等于 x 的最小整数；设 $\mathfrak{g}$ 是任意域 K 上维数为 n 的阿贝尔李代数。那么 $\mu(\mathfrak{g}) = \lceil 2\sqrt{n} - 1 \rceil$。作为米尔诺猜想反例的幂零李代数满足 $\mu(\mathfrak{g}) \geq$维 $\mathfrak{g} + 2$。详情请参见 [4]。回到上同调 $H^2(\mathfrak{g}, K)$，我们认为研究以下问题很有意义：

公开问题。 **</style}李代数 (**K) $n \geq 13$ 满足 $\mu(\mathfrak{g}) \geq n + 2$ 当且仅当不存在仿射 $[\omega] \in H^2$ $(\mathfrak{g}, K)$ 吗？

References

[1] G. F. Armstrong, S. Sigg. 一类幂零李代数的上同调。Bull. Austral. Math. Soc. 54 (1996), 517–527.[2] L. Auslander：仿射运动的单传递群。Am. J. of Math. 99 (1977), 809–826.[3] Y. Benoist：一个非仿射的幂零流形。J. Diff. Geom. 41 (1995), 21–52.[4] D. Burde：阿多定理的一个改进。Archiv Math. 70 (1998), 118-127.[5] D. Burde, F. Grunewald：某些极大类李代数的模。J. Pure Appl. Algebra 99 (1995), 239-254.[6] D. Burde：约化李群上的左不变仿射结构。J. Algebra 181 (1996), 884–902.[7] D. Burde：幂零流形上的仿射结构。Int. J. of Math. 7 (1996), 599-616.[8] G. Cairns, B. Jessup：幂零李代数贝蒂数的新界。Comm. Algebra 25 (1997), 415–430.[9] G. Cairns, B. Jessup, J. Pitkethly：小维数幂零李代数的贝蒂数。Birkh¨auser, Prog. Math. 145, (1997), 19–31.[10] A. W. Knapp：李群、李代数与上同调。Math. Notes 34 (1988), Princeton Univer- sity Press.[11] J. Milnor：完备仿射平坦流形的基本群。Advances in Math. 25 (1977), 178–187.[12] M. Vergne：幂零李代数的上同调。关于幂零李代数簇的研究的应用。Bull. Soc. Math. France 98 (1970), 81-116.

Mathematisches Institut, Heinrich-Heine-Universität, Universitätsstr. 1, 40225 Düs-seldorf, Germany电子邮箱地址：dietrich@math.uni-duesseldorf.de