arXiv:2601.09505v1 [math.AT] 14 Jan 2026

∞-幺半群理论的一种新的树状空间模型结构

JO˜AO CANDEIAS 和 JAVIER J. GUTI´ERREZ

Abstract. 我们在树状空间范畴上引入一种新的模型结构，旨在为∞-幺半群的同伦理论提供另一种模型。该模型直接类似于 Moser 和 Nuiten 最近在单纯空间范畴上构造的模型，可视为其树状对应物。在这一新模型结构中，纤维对象是树状 Segal 空间，而余纤维化构成 Segal 空间模型结构中余纤维化的一个子类。纤维对象之间的弱等价恰好是 Dwyer–Kan 等价，而它们之间的纤维化则是同构纤维化。我们证明，该模型结构与树状集合和树状空间上的 Cisinski–Moerdijk 模型结构 Quillen 等价，从而确立了范畴理论向拟运算子情境的相容扩展。 ∞

1. Introduction

树状集合和树状空间分别是定义在树范畴 Ω 上的预层范畴和单纯预层范畴。这两个范畴由 Moerdijk–Weiss [12] 引入，并由 Cisinski–Moerdijk [3, 4]加以利用，以便为同伦意义下的幺半群或 ∞-幺半群这一概念提供组合模型。它们推广了由 Rezk、Joyal 和 Lurie 等人发展的 ∞-范畴理论，尤其是拟范畴和完备 Segal 空间的模型。

这两种 ∞-范畴模型背后的思想，始于这样一个观察：范畴可以描述为满足如下性质的单纯集合 X ：对于每个单形脊包含 $\mathrm{Sp}[n] \hookrightarrow \Delta[n]$，所诱导的映射

$$\mathbf{sSet}(\Delta[n], X) \to \mathbf{sSet}(\mathrm{Sp}[n], X)$$

对于每个 $n \geq 0$都是双射，其中**单纯集合**表示单纯集范畴。这意味着，连续 n 个映射的复合方式是唯一的。

单纯集上的拟范畴模型结构**单纯集合**$_{\mathrm{qCat}}$ 通过只要求上述映射为满射，推广了这一思想。将单纯集替换为单纯空间，也就是说，替换为从 Δ^{op} 到单纯集的函子，我们便可得到单纯空间上的完全 Segal 空间模型结构**单纯集合** $^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$。更具体地说，单纯空间范畴带有一个 Reedy 模型结构，该结构由经典的 Kan–Quillen 单纯集模型结构富化，因此现在我们有单纯集之间所诱导的映射单纯集合

$$\mathrm{Map}(N[n], X) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Sp}[n], X)$$

对每个 $n \geq 0$ 都如此，其中 $N[n]$ 是具有 $n+1$ 个对象和 n 个可复合箭头的范畴的离散神经，而施加的条件是这些映射为弱等价。满足这一最后条件的 Reedy 纤维化单纯空间称为*Segal* 空间，在这些空间中，可以讨论对象空间、箭头空间、可复合箭头对及其复合等。单纯空间范畴上有一个模型结构**单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ ，它是 Reedy 模型结构的局部化，其余纤维化为 Reedy 余纤维化，纤维对象为 Segal 空间。然而，要得到 Rezk 的模型，还必须执行一个称为完备化的额外步骤，以确保所得对象是完备 *Segal* 空间。进一步将先前的模型局部化，可得到模型结构**单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$，其余纤维化为单态射，而其纤维对象（也立即是余纤维对象）为完备 Segal 空间。

完备化的必要性可以通过以下方式说明。对于一般的 Segal 空间 X，其对象空间 X_0 与同构子空间 $X_{\mathrm{hoeq}} \subset X_1$有一定关联。特别是，如果$x,\ y \in X_{0,\ 0}$ 是 X_0中属于同一路径连通分支的顶点，那么必然存在一个同构 $f\colon x \to y$。然而，反过来则未必成立，也就是说， X_0 可能无法捕捉同构空间中编码的全部（高阶）同伦信息。特别是，不同 X_0 连通分支中的顶点可能通过 X_{hoeq}中的一个同构相连。

这种不匹配给弱等价的定义带来了困难。在 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$中，Segal 空间 $f\colon X \to Y$之间的弱等价与 Reedy 弱等价一致，也就是说，它们是逐项弱等价

$$f_n \colon X_n \longrightarrow Y_n$$

对每个 $n \geq 0$。根据 Segal 条件，只需要求 f_n 仅在$n = 0$，1 时是弱等价。然而，如果我们想要对 ∞- 范畴的等价进行建模，也就是说，要求本质满射和全忠实，那么只需要求对于 $n = 0$，映射

$$\pi_0(X_0)_{/\sim} \longrightarrow \pi_0(Y_0)_{/\sim}$$

是满射，其中 $\sim$ 是由空间 $X_{\mathrm{hoeq}} \subset X_1$给出的关系，并且对于 $n = 1$，方块

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 \times X_0 & \longrightarrow & Y_0 \times Y_0 \end{array}$$

是同伦拉回。满足这些条件的映射称为*Dwyer–Kan* 等价。注意，将要求 f_0 为弱等价放宽为要求 $\pi_0(X_0)/\sim \to \pi_0(Y_0)/\sim$ 为满射，确实是合理的做法，因为 X_0 和 Y_0 中缺乏关于同构类（以及更一般地，同构空间的高阶同伦）的信息。

Rezk 完备化过程通过补入这项缺失的数据来完善 X_0，使其成为一种对象的“模空间”，并且该模空间与 X的同构空间在规范意义下等价（相差一个同伦）。特别地，完备 Segal 空间之间的 Dwyer–Kan 等价 $f\colon X \to Y$恰好是 Reedy 弱等价，因此上述区别便不复存在。此外，对任意 Segal 空间 X，其完备化映射 $X \to \widetilde{X}$（在$\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$中的纤维化替换）可以选为 Dwyer–Kan 等价，这表明 Segal 空间之间的映射恰好在$\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$中成为弱等价的那些映射，才是 Dwyer–Kan 等价。

最近，Moser 和 Nuiten 在 [13], 中提出了一种新的、等价的 ∞-范畴模型，该模型同样基于 Segal 空间。此方法不再通过进一步局部化来获得完备 Segal 空间，而是从头构建，采用 [5], 中描述的构造，在单纯空间范畴上定义模型结构$\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Cat}}$。在此模型中，纤维对象恰好是 Segal 空间（不一定完备），但与 Segal 模型结构相比，余纤维化较少。余纤维对象是满足 X_0 与某个集合弱等价的单纯空间 X。因此，纤维且余纤维对象是其对象空间在同伦意义下为某个集合的 Segal 空间。此外，此模型中 Segal 空间之间的弱等价恰好是 Dwyer–Kan 等价。

因此，这为上文所述的相容性问题提供了另一种解决方案：不同于在转向完备 Segal 空间时将所有同伦信息添加到 X_0 中，这里则是将其全部移除。这似乎与类型论中集合论视角和单值视角之间的对比相平行：前者只有一种恒等模式，即相等；而后者的恒等类型则极其丰富，涵盖了所有等价。此外，这一现象在同伦类型论中对 1-范畴的定义里已经出现，从而产生了预范畴、单值范畴和严格范畴的概念（定义见 [1]）；它们分别是 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Cat}}$ 中 Segal 空间、完备 Segal 空间和余纤维塞加尔空间的 1-范畴类比。需要注意的是，一般而言，在使用单值基础时，单值范畴似乎是一个性质更好的概念；例如，无论选择公理是否成立，本质满且忠实且充满的函子都是等价这一陈述总是成立，而对于严格范畴，前者与后者是等价的（见 [1]）。这表明，对于 ∞-范畴而言，单值观点或许同样更加便利。然而，如果希望在集合论基础中发展其 ∞-范畴论，那么 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Cat}}$ 最终可能在技术上更加方便：尽管完备 Segal 空间与用于定义它们的单纯同伦论更加契合，但在实践中，将 Segal 空间的对象空间变成一个集合（从而在 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Cat}}$ 中得到一个余纤维-纤维对象）要比执行完备化步骤（从而得到一个完备 Segal 空间）更容易。

为了将上述思想从范畴推广到幺半群，Moerdijk 和 Weiss 在 [12] 中引入了树范畴 Ω。该范畴包含 Δ 作为一个全子范畴，而其预层范畴自然提供了幺半群脉络所在的背景。推广范畴情形中的

情况，幺半群可以重新定义为树状集合 X，使得对于每棵树 T，映射

$$\mathbf{dSet}(T, X) \longrightarrow \mathbf{dSet}(\mathrm{Sp}[T], X)$$

是同构，其中 $\mathrm{Sp}[T]$ 表示树的某种适当的脊概念。遵循与之前相同的原则，便得到两种成熟的 ∞-幺半群模型：拟幺半群和完全树枝塞加尔空间。此外，这些模型与其单纯对应物相兼容，具体而言，在由平凡树 η 表示的树状集合或树状空间上取切片，可恢复拟范畴和完备 Segal 空间的模型结构。

本文的主要目标是在树状空间范畴上建立一种新的模型结构 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\text{幺半群}}$，它推广了模型结构 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Cat}}$，并与之相容。在该模型中，纤维对象是树状 Segal 空间，而余纤维化构成 Segal 空间模型结构中余纤维化的一个子类。我们的主要结果可概述如下（参见定理 4.1 和定理 5.8）：

定理 1.1. 在 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 上存在一个余纤维生成模型结构，记作 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$，满足：

(i) 余纤维化是正规单态射 $f\colon X \to Y$，使得存在一个集合 R以及一个弱等价 $X_\eta \coprod R \to Y_\eta$ 延拓 f_η。(ii) 纤维对象是树状 *Segal* 空间。(iii) 纤维对象之间的弱等价是 *Dwyer–Kan* 等价。(iv) 纤维对象之间的纤维化是等纤维化。

此外，该模型结构与树状集合和树状空间上的 *Cisinski–Moerdijk* 模型结构 *Quillen* 等价，从而为 ∞-幺半群理论提供了另一种模型。

这一结果与 [13], 的主定理十分相似，只是作了相应调整，以反映从单纯情形向树枝情形的过渡。特别地，**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$ 在模型结构 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Cat}}$ 上同伦富化；该模型结构构造于 [13], ，而将前者沿树状空间 $\Omega[\eta]$ 切片即可恢复后者。尽管树枝情形中的证明策略受到单纯情形的启发，但也出现了需要谨慎处理的新困难，而且必须改进或扩展若干论证，以适应树枝情形。由此，本文真正拓展了 [13], 的方法，确立了它们完整的树枝类比。

本文结构。本文组织如下。第 2 节回顾后文将用到的必要背景知识，包括单纯集合与树状集合、空间，以及范畴构造和模型范畴构造。第 3 节介绍树状 Segal 空间，并阐述其基本的同伦论性质，包括 Dwyer–Kan 等价和同构纤维化的概念。第 4 节致力于构造模型结构 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\text{幺半群}}$，并验证其存在所需的假设。第 5 节建立该模型结构与树状集合和树状空间上的 Cisinski–Moerdijk 模型结构之间的 Quillen 等价，从而完成与现有 ∞-幺半群模型的比较。最后，第 6 节将前几节的比较结果应用于同伦极限与余极限。我们证明，对于适当的图表，在 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\text{幺半群}}$中计算的同伦极限与余极限，与在 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$中计算的结果一致，因此在许多情况下可以省去完备化步骤。

致谢。 作者感谢 Joost Nuiten 拨冗解释并讨论 [13]中若干证明的细节。本研究获 MCIN/AEI 通过 I+D+i 项目资助 PID2024-155646NB-I00 的支持，并获加泰罗尼亚自治区研究与大学部以 2021 SGR 00697 为编号的资助。第一作者获得由 Fundac̦˜ao para a Ciˆencia e Tecnologia 授予的博士项目资助 2023.02597.BD。

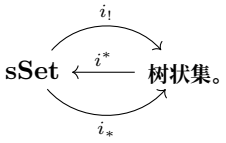
2. Preliminaries

本节介绍基本符号，并回顾关于单纯集合、树状集合及空间的重要事实。若要了解更多背景并全面探讨这些概念，请读者参阅 [3, 4, 8, 12]。

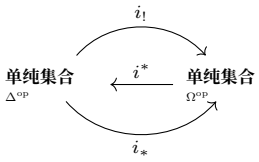
2.1. **树**。令 Ω 表示 Moerdijk–Weiss 的树范畴 [12]。此范畴中有几个我们将反复使用的基本树。首先是平凡树 η，它是唯一一个没有顶点、只有一条边的树。接着，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有一个 k-花冠 C_k，即有一个顶点和 k 条叶的树。任何树都可以通过嫁接花冠以本质上唯一的方式构造出来：若 T 和 S 是树，且 e 是 S 的一条边，则 $S \circ_e T$ 是将 T 的根与 S 的叶 e 识别后得到的树。因此，这一运算的双侧恒等元自然就是平凡树 η。最后，任意树 T 都生成一个幺半群 $\Omega(T)$，它是自由的，生成元由该树分解为花冠所给出。Ω 中的箭头 $T \to S$ 是幺半群映射 $\Omega(T) \to \Omega(S)$。

2.2. **单纯集与树枝集及空间**。令**sSet**表示 Δ 上的预层范畴，令**dSet** 表示 Ω 上的预层范畴。它们分别是单纯集范畴和树状集合范畴。对于每个$n \geq 0$，我们将**sSet** 中的可表预层记为 $\Delta[n]$，即 $\Delta[n] = \Delta(-, [n])$。类似地，对于 Ω 中的每棵树 T，我们将**dSet** 中的可表预层记为 $\Omega[T]$。为避免繁琐的记号，我们常用 T代替 $\Omega[T]$；多亏米田引理，这种轻微的滥用记号无妨。我们还采用标准记号 $\partial\Delta[n]$和 $\Lambda^k[n]$ 表示可表对象 $\Delta[n]$的边界和 k-角，并用 ∂T 和 $\mathsf{Sp}[T]$ 表示可表树状集合 $\Omega[T]$ 的边界和脊。满足内角填充条件的单纯集（分别为树状集）称为拟范畴（分别为拟幺半群）。

The 包含 i: $\Delta \to \Omega$ 在相应的预层范畴之间诱导出一个伴随三元组



在识别 **单纯集合** $\cong$ **树状集**$/\Omega[\eta]$ 和**树状集** $\cong$ **树状集**$/*$之后，上述伴随三元组可解释为沿唯一映射 $\Omega[\eta] \to *$ 的拉回函子，以及它的左伴随和右伴随。将**集合** 替换为**单纯集合**后，同样的描述仍然成立；具体而言，



仍然是与该等价相关联的伴随三元组

$$\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \cong (\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}})_{/\Omega[\eta]},$$

其中 $\Omega[\eta]$ 现在被视为一个离散树状空间。特别地，这给出了一个自然同构

$$\Omega[\eta] \times X \cong i_! i^* X.$$

2.2.1. 垂直方向和水平方向。 $\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中的一个对象可以用三种等价的方式来看待：作为一个单纯树状集合、一个树状单纯集合，或 Ω×Δ上的一个预层。可以将这样的对象想象成由集合组成的二维数组，其中 Ω-结构沿水平方向作用，而 Δ-结构沿垂直方向作用。尽管将哪个方向指定为水平或垂直是任意的，但为了使论证表达得更加清晰，我们在本文余下部分固定这一约定。

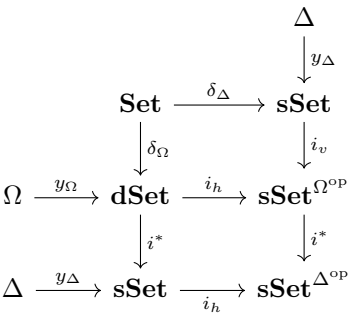
2.2.2. 离散和常值树状空间。存在范畴的包含

$$\mathbf{sSet} \overset{i_v}{\hookrightarrow} \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \overset{i_h}{\hookleftarrow} \mathbf{dSet}$$

我们将其称为垂直和水平包含。根据刚刚引入的约定，垂直包含 i_v 将单纯集合嵌入为在水平方向上恒定的树状空间，而水平包含 i_h 则将树状集合嵌入为在垂直方向上离散的树状空间。这些不同预层范畴之间的关系可概括

如下图所示:

(2.1)



这两个方框中出现的函子都是由函子 $I \to J$ 诱导的前复合函子，形式为 **集合**$^J \to$**集合**^{I}。根据预层范畴的标准性质，每个这样的函子都有左伴随和右伴随。我们特别指出水平包含的左伴随，即函子 $(\pi_0)_*$，它由后复合 π_0 给出：**单纯集合** $\to$**集合**。

2.2.3. 可表对象与单纯富集。由于 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 是一个预层范畴，特别是笛卡儿闭的，且极限与余极限都是逐点计算的。对于对象 $(T,n) \in \Omega \times \Delta$，由 (T,n) 表示的预层 P 定义为

$$P_{S,m} = (\Omega \times \Delta)\big((S,m),(T,n)\big) = \Omega(S,T) \times \Delta(m,n) = \Omega[T]_S \times \Delta[n]_m.$$

因此，P 自然同构于 $i_h(\Omega[T]) \times i_v(\Delta[n])$，其中乘积取于 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$。从现在起，我们省略对 i_h 的明确提及，并将树状集合自由地视为**单纯集合** $^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中的（离散）对象。垂直包含 i_v : **单纯集合** $\to$ **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 与 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 的笛卡儿闭性赋予其单纯张量化和余张量化范畴的结构，因此我们得到一个二变量伴随

$$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}(X \times i_v(S), Y) \cong \mathbf{sSet}(S, \mathrm{Map}(X,Y)) \cong \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}\big(X,\, Y^{\,i_v(S)}\big),$$

从现在起，我们将单纯张量 $X \times i_v(S)$ 写作 $X \cdot S$。因此特别地，

$$\mathrm{Map}(X,Y)_n = \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}(X \cdot \Delta[n],\, Y).$$

还要注意，可表对象可以写作 $T \cdot \Delta[n]$，因此

$$\mathrm{Map}(T,X) \cong X_T.$$

特别地，对于 T 的任意树形子集，例如 ∂T，我们将 $X_{\partial T}$写作 $\mathrm{Map}(\partial T,\ X)$。

上述所有构造都可原样推广到单纯空间，并且与伴随 $i_! \dashv i^*$ 相容。事实上，$i^*(X \cdot S) \cong i^*(X) \cdot S$，更重要的是 $i_!(X \cdot S) \cong i_!(X) \cdot S$，因此伴随 $i_! \dashv i^*$ 可以提升为一个富结构伴随:

$$\mathrm{Map}(i_!X, Y) \cong \mathrm{Map}(X, i^*Y).$$

因此，在记号上我们不区分树形映射空间构造与单纯映射空间构造，不过在必要时会标明环境范畴。特别地，对于单纯空间 X 和 Y，我们有

$$\mathrm{Map}(i_!X, i_!Y) \cong \mathrm{Map}(X,Y),$$

这也进一步说明了这种轻微滥用记号的合理性。

2.2.4. 骨架与余骨架。令 $\Delta_{\leq n}$ 表示 Δ 的全子范畴，其对象对于 $m \leq n$是 $[m]$。类似地，令 $\Omega_{\leq n}$ 表示 Ω 的全子范畴，它由具有 n个或更少顶点的树组成。包含函子 $\Delta_{\leq n} \to \Delta$和 $\Omega_{\leq n} \to \Omega$ 在相应的（单纯）预层范畴之间诱导出限制函子，而这些限制函子分别具有由左 Kan 延拓和右 Kan 延拓给出的左伴随和右伴随。我们尤其关注 $n = 0$的树状情形，此时该函子

$$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}_{\leq 0}} \cong \mathbf{sSet}$$

就是在 η处的求值。其左伴随和右伴随分别记为 sk_η 和 cosk_η。直接计算表明，对于单纯集合 S，它们为

$$(\mathrm{sk}_\eta S)_T = \begin{cases} S & \text{if } T \text{ is linear,} \\ \emptyset & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$(\mathrm{cosk}_\eta S)_T = \prod_{\Omega(\eta,T)} S.$$

2.2.5. 正规单态射。 树状集合 f 的单态射 $X \hookrightarrow Y$ 称为正规 的，如果对于每棵树 T，群 $\mathrm{Aut}(T)$ 在 $Y_T \setminus f(X_T)$ 上自由作用；树状集合 X 称为正规，如果单态射 $\emptyset \to X$ 是正规的。这些单态射有一个典范的“骨架”过滤，它是将 f 分解为如下复合的分解

$$X = X_0 \overset{i_1}{\hookrightarrow} X_1 \overset{i_2}{\hookrightarrow} X_2 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} X_k = Y$$

其中每个 i_k 都是由形如 $\partial T \hookrightarrow T$ 的映射（它们本身是正规的）组成的余积的一个推出，这些映射对应于具有 k 个顶点的树 T。正规单态射类是包含所有树的边界 $\partial T \to T$ 的最小饱和类。同样，树状空间 的态射称为正规，如果它在每个单纯次数上都诱导出树状集合的一个正规单态射。

2.3. **范畴、幺半群及其脉络**。 我们将自由同构范畴记作$I[1]$。记 $j_!$: $\mathbf{Cat}$ $\to$**Op** 为小范畴范畴到幺半群范畴的全忠实嵌入。我们有一个伴随函子的交换方块（左伴随的方向从左到右、从上到下）：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sSet} & \underset{N}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} & \mathbf{Cat} \\ {\scriptstyle i_!}\downarrow\uparrow{\scriptstyle i^*} & & {\scriptstyle j_!}\downarrow\uparrow{\scriptstyle j^*} \\ \mathbf{dSet} & \underset{N_d}{\overset{\tau_d}{\rightleftarrows}} & \mathbf{Op}. \end{array}$$

水平方向的函子对分别是通常的脉络-实现伴随，它们由 Kan延拓得到，分别对应**Cat** 中的标准余单纯对象和**Op**中的余树枝对象。

除了左/右伴随 $j_!\tau \cong \tau_d i_!$ 和 $Nj^* \cong i^* N_d$的交换同构外，我们还有相容性 $N_d j_! \cong i_! N$。恒等映射 $j^*\tau_d \cong \tau\, i^*$ 一般并不成立，但限制在拟幺半群的全子范畴上时则成立。将上文的方块与（2.1）中的下方方块复合，可得从幺半群（分别为范畴）到树枝形（分别为单纯）空间的（离散）脉络函子，我们仍用相同符号表示，并配有形如 $\tau \circ \pi_0$的左伴随。

2.4. 张量积**树状集合与空间的张量积**。范畴**dSet**带有一个张量积函子

$$\otimes \colon \mathbf{dSet} \times \mathbf{dSet} \longrightarrow \mathbf{dSet}$$

其特征是：这是本质上唯一的双函子，在每个变量上都保持余极限，并将一对可表对象（T， S）映为相应幺半群的 Boardman–Vogt张量积的神经：

$$T \otimes S = N_d\big(\Omega(T) \otimes_{\mathrm{BV}} \Omega(S)\big).$$

此张量积是对称的，并以由平凡树 η 表示的预层为单位。将这一构造扩展到树状空间，我们定义

$$\otimes \colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$$

为 Δ^{op}中的逐点张量积，也就是说，

$$(X \otimes Y)_{T,n} = \big(X_{-,n} \otimes Y_{-,n}\big)_T.$$

由于所有余极限都是逐项计算的，这个积仍然是对称的，并且对每个变量都保持余极限。因此，它诱导出一个二变量伴随

$$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}(X \otimes Y,\, Z) \cong \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}\big(X,\, Z^{\{Y\}}\big) \cong \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}\big(Y,\, Z^{\{X\}}\big), \tag{2.2}$$

其中

$$\big(Z^{\{Y\}}\big)_{T,n} = \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}\big(Y \otimes (T \cdot \Delta[n]),\, Z\big).$$

此外，由于 $(X \otimes Y)_{-,\,n}$ 仅取决于 $X_{-,\,n}$ 和 $Y_{-,\,n}$，且由于 $(X \cdot S)_{-,\,n} \cong \coprod_{S_n} X_{-,\,n}$，$\otimes$ 在每个变量上保持余极限这一事实意味着，它在每个变量上也保持单纯张量。因此，我们得到一个富集伴随

$$\mathrm{Map}(X \otimes Y, Z) \cong \mathrm{Map}(X, Z^{\{Y\}}) \cong \mathrm{Map}(Y, Z^{\{X\}}),$$

特别是 $(Z^{\{X\}})_\eta$ = 映射空间$(X,\ Z)$。最后，我们注意到 $i^*(Y^{\{i_!X\}}) \cong (i^*Y)^X$，其中后者是 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}$中的指数对象。

2.4.1. 幺半性与弱富集。 张量积 $\otimes$ 并不构成**树状集**或**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$上的闭对称幺半结构。事实上，除缺少结合子同构外，它满足所有必要性质。尽管如此，它仍可扩展为**树状集**上的较弱结构，即余幺对称幺半范畴 [7, 定义 6.3.1]。具体而言，这由一个范畴以及一个指定的 n元张量积函子 $\otimes_n$ 组成，对每个 n均配有一个这样的函子，并附有自然映射

$$\begin{array}{c} \otimes_n(X_1, \ldots, X_{i-1}, \otimes_m(Y_1, \ldots, Y_m), X_{i+1}, \ldots, X_n) \\ \big\downarrow \\ \otimes_{m+n-1}(X_1, \ldots, X_{i-1}, Y_1, \ldots, Y_m, X_{i+1}, \ldots, X_n) \end{array}$$

这些映射满足复合时显然的相干条件，并且每个 $\otimes_n$ 都是一个（$n+1$）元伴随的一部分。此外，受限伴随

$$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}(X \otimes i_!M, Y) \cong \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}(X, Y^{\{i_!M\}}) \cong \mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}(M, i^*(Y^{\{X\}}))$$

赋予 $\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 一个内部于 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$的同对象 $i^*(Y^{\{X\}})$。然而，由于同样的结合律失效，这个伴随不能扩展为一个 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$-富集伴随，因此所得的富集既非张量化，也非余张量化。一个较弱的结论仍然成立：按照 [7, 第 3 节5] 的意义，$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$是关于 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 弱富集、张量化且余张量化的。（或许更准确的术语应为“富集且弱张量化/余张量化”。）简言之，这种弱富集体现为以下自然映射的存在

$$\alpha_{M,N,X} : i_!(M \times N) \otimes X \to i_!M \otimes (i_!N \otimes X) \tag{2.3}$$

这些映射满足相干条件，包括 Mac Lane 五边形的一种有向形式。注意，若存在真正的张量或余张量，这些映射便存在且为同构。

2.5. Segal 预运算子。 一个*Segal* 预运算子是一个树状空间 X，满足 X_η 是一个离散单纯集。它们构成$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$的一个全子范畴，记作 $\mathcal{P}(\mathbf{Op})$。范畴$\mathcal{P}(\mathbf{Op})$可识别为 $\Omega \times \Delta$ 的局部化上的预层范畴，该局部化通过将所有形如 $(id_\eta, \alpha) : (\eta, [m]) \to (\eta, [n])$ 的态射求逆得到。将此局部化记作 $(\eta \times \Delta)^{-1}(\Omega \times \Delta)$，局部化函子

$$\gamma \colon \Omega \times \Delta \longrightarrow (\eta \times \Delta)^{-1}(\Omega \times \Delta)$$

在预层范畴上诱导出一个函子

$$\gamma^* \colon \mathcal{P}(\mathbf{Op}) \longrightarrow \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}},$$

它同时具有左伴随 $\gamma_!$ 和右伴随 γ_*。函子 γ_* 由拉回给出 k

$$\begin{array}{ccc} \gamma_*X & \longrightarrow & \mathrm{cosk}_\eta X_{\eta,0} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathrm{cosk}_\eta X_\eta \end{array}$$

并且可以描述为 X 的最大树状子空间，它在 η处是离散的。伴随的存在性源于以下观察：从预运算子 P 到树状空间 X 的任意映射，其像必然包含在子空间 γ_*X中。左伴随 $\gamma_!$ 有一个对偶描述。

2.6. **广义 Reedy 范畴与模型结构**。 Δ和 Ω 都是 [2]意义下的广义 Reedy 范畴。这一概念推广了经典的 Reedy 范畴概念。若 $\mathbb{R}$ 是广义 Reedy 范畴，且 $\mathcal{E}$ 是模型范畴，那么只要满足以下条件，函子范畴 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ 就具有 Reedy 型模型结构：对于每个 $r \in \mathbb{R}$， $\mathcal{E}^{\mathrm{Aut}(\mathbb{R})}$ 上都存在投射模型结构或内射模型结构；参见 [2, 定理 1.6]。在我们的设定中，我们考虑 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 上的 Reedy 模型结构，该结构由 **单纯集合**上的模型结构继承而来，并使用 Ω 上的广义 Reedy 结构。

模型结构的定义核心在于闩映射和匹配态射，它们通过适当的（余）极限定义。对于树状空间的映射 $f\colon X \to Y$ 以及一棵树 T，在 T 处的相对匹配映射为

$$X_T \to X_{\partial T} \times_{Y_{\partial T}} Y_T,$$

其中 $X_{\partial T} = \mathrm{Map}(\partial T,\ X)$ 如前所定义。

由于 Ω 是广义 Reedy 范畴，它在 单纯集合$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 上诱导出一个**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}_R$ Reedy 模型结构，记作**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}_R$ ，其定义如下：

(i) 弱等价是满足如下条件的映射 $w\colon X \to Y$：每个 $w_T\colon X_T \to Y_T$ 都是单纯集之间的弱等价。(ii) 纤维化是满足如下条件的映射 $p\colon X \to Y$：匹配映射

$$X_T \to X_{\partial T} \times_{Y_{\partial T}} Y_T$$

对所有树 T 都是 Kan 纤维化。

(iii) 余纤维化是正规单态射。

Using 伴随 $X \cdot (-) \dashv$映射空间$(X,\ -)$: **单纯集合** $\rightleftarrows$ **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$，可以验证，一个映射 $p\colon\ X \to Y$ 是 Re edy 纤维化，当且仅当它相对于这些映射具有右提升性质

$$\partial T \cdot \Delta[n] \coprod_{\partial T \cdot \Lambda^k[n]} T \cdot \Lambda^k[n] \longrightarrow T \cdot \Delta[n], \tag{2.4}$$

而它是平凡 Reedy 纤维化，当且仅当它相对于以下映射具有提升性质

$$\partial T \cdot \Delta[n] \coprod_{\partial T \cdot \partial\Delta[n]} T \cdot \partial\Delta[n] \longrightarrow T \cdot \Delta[n]. \tag{2.5}$$

因此，这些族分别是（平凡）Reedy 余纤维化的生成集合。

3. Dendroidal Segal spaces

本节回顾树状 Segal 空间的概念。对于 ∞-幺半群，它所起的作用相当于 Rezk 的 Segal 空间对于 ∞-范畴所起的作用。我们首先回顾树状空间的 Segal 条件及其基本推论。随后，我们在这一框架下发展若干基本的同伦论概念，尤其是 Dwyer–Kan 等价和同构纤维化；在后文构造的模型结构中，它们将分别充当纤维对象之间的弱等价和纤维化。关于树状 Segal 空间、其模型结构及其基础性质的背景知识，请参阅 Cisinski–Moerdijk [4] 的著作，以及 [8]中的详细论述。

定义 3.1. 设 X 是一个 Reedy 纤维的树状空间。若对于每棵树 T，Segal 映射树状 *Segal* 空间，则称 X 是一个

$$X_T \longrightarrow X_{\mathrm{Sp}[T]} = \mathrm{Map}(\mathrm{Sp}[T], X) \tag{3.1}$$

由包含 $\mathrm{Sp}[T] \to T$ 诱导的映射是 **单纯集合**中的弱等价。

注 3.2. 对于每个 Reedy 纤维的树状空间 X，映射 (3.1) 已经是纤维化。因此，X 是 Segal 的，当且仅当 (3.1) 是一个平凡 纤维化。

这个定义推广了 Rezk 对单纯 Segal 空间 [14] 的概念。如果 X 是一个单纯空间，那么 X 是 Segal 的，当且仅当 $i_!X$ 是一个树状 Segal 空间；反过来，如果 Y 是树状 Segal 的，那么 i^*Y 是一个单纯 Segal 空间。

注记 3.3。根据 [8, 命题 6.39], ，上述定义等价于要求由内角包含 $\Lambda^e[T] \to T$ 诱导的映射空间是弱等价。利用张量／富集

伴随以及前面的注记，可以进一步将其改述为：映射 $X \to *$ 对形如以下形式的每个映射都有提升性质

$$\Lambda^e[T]\cdot\Delta[n] \coprod_{\Lambda^e[T]\cdot\partial\Delta[n]} T\cdot\partial\Delta[n] \longrightarrow T\cdot\Delta[n]. \tag{3.2}$$

对 Reedy 模型结构在所有脊包含 $\mathrm{Sp}[T]\to T$ 的集合处作左 Bousfield 局部化，我们得到如下结果（见 [4, 第 5]节）：

定理 3.4. 在**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$上存在一个余纤维生成模型结构，记作**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$，满足：

(i) 余纤维化是正规单态射。(ii) 纤维对象是树状 *Segal* 空间。(iii) 纤维对象之间的弱等价（分别地，纤维化）是逐层弱等价（分别地，*Reedy* 纤维化）。

注 3.5. 更一般地，**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中的映射 $f\colon A\to B$ 是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 中的弱等价，当且仅当对每个树状 Segal 空间 X，诱导映射

$$\mathrm{Map}(B,X)\to\mathrm{Map}(A,X)$$

是单纯集之间的平凡纤维化。特别地，所有内角包含 $\Lambda^e[T]\to T$，以及更一般地，所有树状集合的内无害映射，都是 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 中的平凡余纤维化。

回顾 2.5 中的函子

$$\gamma_*:\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}\to\mathcal{P}(\mathbf{Op})$$

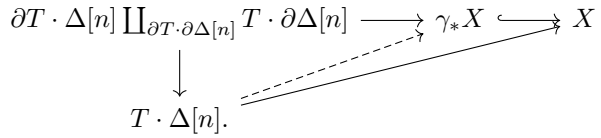
它是包含映射 γ^* 的右伴随。它将一个树状空间映到其在 η 处离散的最大子空间。由于 γ^* 是全忠实的，我们将 $\gamma^*\gamma_*X$ 简记为 γ_*X，并将 γ_*X 视为一个树状空间。下面的观察将会很有用：

命题 3.6。设 X 是一个树状 *Segal* 空间。那么 γ_*X 也是一个树状 *Segal* 空间。

证明。我们首先证明 γ_*X 是 Reedy 纤维的，也就是说，$\gamma_*X\to *$ 对下列映射具有右提升性质

$$\partial T\cdot\Delta[n]\coprod_{\partial T\cdot\Lambda^k[n]} T\cdot\Lambda^k[n]\longrightarrow T\cdot\Delta[n]$$

对每棵树 T 和每个 n。若 $T=\eta$，则 $(\gamma_*X)_\eta$ 是离散的，因此对任意角都具有提升性质。若 $T\neq\eta$，则 $(\partial T)_\eta=T_\eta$，所以上面的映射在 η处是同构。X 中的任意提升（由于 X 是 Reedy 纤维的，因此该提升存在）都会自动落在 γ_*X 内，从而得到所需的提升：



为了证明 γ_*X 满足 Segal 条件，考虑一个内角包含

$$\Lambda^e[T]\cdot\Delta[n]\coprod_{\Lambda^e[T]\cdot\partial\Delta[n]} T\cdot\partial\Delta[n]\longrightarrow T\cdot\Delta[n]$$

with T 至少有两个顶点。和之前一样，$(\Lambda^e[T])_\eta=T_\eta$，因此同样的论证表明 at 提升 在 X 中已经属于 γ_*X，因此 γ_*X 是 Segal 的。 □

3.1. 作为同伦拟 operad 模型的树状 Segal 空间。给定一个树状 Segal 空间，可以定义颜色、多重映射空间以及基本的算子构造。

定义 3.7. 设 X 是一个树状 Segal 空间。

(i) X 的颜色空间是空间 X_η。其顶点称为颜色。(ii) 对于任意一列颜色 $x_1,\dots,x_k,y\in X_\eta$, 0，多重映射空间map$_X(x_1,\dots,x_k;\ y)$ 是以下纤维化的（同伦）纤维

$$X_{C_k}\longrightarrow X_{\partial C_k}\cong\Big(\prod_{1\le i\le k}X_\eta\Big)\times X_\eta$$

在对（x_1，.....，x_k） y上。

（iii）给定一棵具有两个顶点的树 $T = C_l \circ_e C_k$，该树由嫁接两个花冠得到， X 上的 Segal 条件蕴含

$$X_T = \mathrm{Map}(T, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(\Lambda^e[T], X) \cong X_{C_l} \times_{X_\eta} X_{C_k}$$

是一个平凡纤维化。选取一个截面，并与 T 的内面映射复合，得到一个复合映射

$$\mathrm{comp}_{l,k} : X_{C_l} \times_{X_\eta} X_{C_k} \longrightarrow X_T \longrightarrow X_{C_{k+l-1}}, \tag{3.3}$$

它在同伦意义下唯一，并且在同伦意义下也是结合的和含幺的。特别地，对于颜色 x_1、……、x_k、y_1、……、y_l、$z \in X_{\eta,\,0}$和 $1 \le i \le l$，我们得到多重映射空间（纤维）上的诱导映射

映射空间$x(y_1$、……、y_l；$z) \times$映射空间$x(x_1$、……、x_k；$y_i) \longrightarrow$映射空间$x(y_1$、……、y_{i-1}、x_1、……、x_k、y_{i+1}、……、y_l；$z)$。

(iv) X 的同伦拟 *operad* 是幺半群 $\mathrm{ho}X$，其颜色集合为 $X_{\eta,\,0}$，运算为

$$\mathrm{ho}X(x_1, \ldots, x_k; y) = \pi_0 \mathrm{map}_X(x_1, \ldots, x_k; y).$$

将 π_0 应用于多重映射空间上的诱导映射，可得严格的结合律和含幺性（因为 π_0 保有限乘积），因此 $\mathrm{ho}X$ 确实是一个幺半群。

描述 $\mathrm{ho}X$ 的幺半群结构的一种便捷方式，是考察树状空间 $\gamma_* X$，它由命题 3.6 可知是 Segal 的。注意，$(\gamma_* X)_\eta$ 是离散空间$X_{\eta,\,0}$并且

$$\mathrm{map}_{\gamma_* X}(x_1, \ldots, x_k; y) = \mathrm{map}_X(x_1, \ldots, x_k; y).$$

回想一下，水平包含 i_h： **树状集** $\to$ **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 有一个左伴随$(\pi_0)_*$，它由取连通分支给出

$$((\pi_0)_* X)_T = \pi_0(X_T).$$

特别地，$(\pi_0)_* \gamma_* X$ 在 η处取值为$X_{\eta,\,0}$。由于 $\gamma_* X$ 是 Segal 的，对于每棵树 T，映射

$$\pi_0 \mathrm{Map}(T, \gamma_* X) \longrightarrow \pi_0 \mathrm{Map}(\mathrm{Sp}[T], \gamma_* X) \tag{3.4}$$

是一个双射。我们有 π_0Map(T， $\gamma_* X$) ＝**树状集**(T，$(\pi_0)_* \gamma_* X$)，并且 Map(Sp$[T]$， $\gamma_* X$)是形如 Map(C_k， $\gamma_* X$)的空间关于离散空间$(\gamma_* X)_\eta$的迭代拉回。由于 π_0保余积和有限乘积，它也保离散空间上的拉回。因此，我们可以将 (3.4) 识别为映射

$$\mathbf{dSet}(T, (\pi_0)_* \gamma_* X) \longrightarrow \mathbf{dSet}(\mathrm{Sp}[T], (\pi_0)_* \gamma_* X).$$

因此，$(\pi_0)_* \gamma_* X$ 是一个树状严格内 Kan 复形，也就是说，它是一个对树的脊具有唯一填充子的树状集合。根据 [8, 命题 6.4]，，它同构于某个幺半群 P 的树状神经，其偏复合由

$$\mathbf{dSet}(\mathrm{Sp}[C_l \circ C_k], N_d P) \xrightarrow{\cong} \mathbf{dSet}(C_l \circ C_k, N_d P) \xrightarrow{d_e} \mathbf{dSet}(C_{k+l-1}, N_d P),$$

给出；这些偏复合是在应用 $\pi_0 \circ \gamma_*$ 后由 (3.3) 得到的。由此可得以下结果；事实上，这个结果本可用于定义 $\mathrm{ho}X$：

命题 3.8。 对于任意树状 *Segal* 空间 X，存在一个树状集合的自然同构

$$(\pi_0)_* \gamma_* X \cong N_d \mathrm{ho}X.$$

由于树状神经是全忠实的，我们得到：

推论 3.9。 设 X 是一个树状 *Segal* 空间。那么，同伦拟 *operad* $\mathrm{ho}X$ 同构于 $\tau_d(\pi_0)_* \gamma_* X$。

推论 3.10。 设 X 是一个树状 *Segal* 空间。那么 $j^* \mathrm{ho}X \cong \mathrm{ho}(i^* X)$。

证明。 我们有如下同构链

$$\begin{aligned} N j^* \mathrm{ho}X &\cong i^* N_d \mathrm{ho}X \cong i^*((\pi_0)_* \gamma_* X) \\ &\cong (\pi_0)_* i^* \gamma_* X \cong (\pi_0)_* \gamma_* i^* X \cong N\mathrm{ho}(i^* X). \end{aligned}$$

由于 N 是全忠实的，结论得证。 □

备注 3.11。 上述为树状 Segal 空间引入的所有拟运算概念，仅取决于 Segal 空间 $\gamma_* X$。特别是，X 和 $\gamma_* X$ 具有相同的对象集合、相同的多重映射空间以及相同的同伦范畴。因此，自然可以将二者都视为同一个 ∞-幺半群的模型，其中 $\gamma_* X \to X$ 是 ∞-幺半群之间的一个等价。然而，这个包含一般来说并不是 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Segal}}}$中的弱等价。这表明需要修改模型结构，使这类映射成为弱等价。

3.2. **Dwyer–Kan 等价**。 以下定义自然源于上文所确立的树状 Segal 空间与幺半群之间的类比。

定义 3.12. 设 $f\colon X \to Y$ 是树状 Segal 空间的一个映射。若 f 是*Dwyer–Kan*等价，且满足以下条件：

(i) 对于每个序列 $x_1, \ldots\ldots, x_k, y \in X_{\eta,\,0}$，所诱导的映射

$$\mathrm{map}_X(x_1, \ldots, x_k; y) \longrightarrow \mathrm{map}_Y\big(f(x_1), \ldots, f(x_k); f(y)\big)$$

是弱同伦等价。

(ii) 幺半群的诱导映射 ho$X \to$ho$Y$ 是本质满的。

一个基本例子如下：

例 3.13。 包含映射 $\gamma_* X \hookrightarrow X$ 在所有多重映射空间上诱导同构，并且在 η 处的顶点上是满射。因此，它是一个 Dwyer–Kan 等价。

任何满足定义 3.12 的条件 (i) 的映射都称为同伦上完全忠实。现在我们记录一个有用的刻画。

命题 3.14. 对于树状 *Segal* 空间之间的映射 $f : X \to Y$，以下条件等价：(i) 映射 f 是同伦上完全忠实的。

(ii) 对于每个花冠 C_k，映射 p

$$X_{C_k} \longrightarrow Y_{C_k} \times_{Y_{\partial C_k}} X_{\partial C_k}$$

是**单纯集合**中的弱等价。

(iii) 对于每棵树 T，映射

$$X_T \longrightarrow Y_T \times_{(cosk_\eta Y_\eta)_T} (cosk_\eta X_\eta)_T$$

是**单纯集合**中的弱等价；

(iv) 对于每一棵至少有一个顶点的 T，映射

$$X_T \to Y_T \times_{Y_{\partial T}} X_{\partial T}$$

是**sSet**中的弱等价。

证明。 (i)与(ii)之间的等价性由交换图得出

$$\begin{array}{ccc} X_{C_k} & \longrightarrow & Y_{C_k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\partial C_k} & \longrightarrow & Y_{\partial C_k} \end{array} \tag{3.5}$$

由于垂直箭头是纤维化，当且仅当所有纤维上诱导的映射都是弱等价时，该方形是同伦拉回；同样，当且仅当从 X_{C_k} 到严格拉回的比较映射是弱等价时，该方形是同伦拉回。

条件(iii)和(iv)都蕴含(ii)，因为 $T = C_k$ 的情形恰好恢复了条件(ii)。对于逆向蕴含，我们对 T 的顶点数进行归纳法。对于 $T = C_k$，该陈述正是(ii)，而对于 $T = \eta$，(iii)自动成立。因此，我们可以假设 T 至少有两个顶点。考虑图表

$$\begin{array}{ccccccc} X_T & \twoheadrightarrow & \mathrm{Map}(\partial T, X) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Map}(\mathrm{Sp}[T], X) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Map}(\mathrm{sk}_\eta T_\eta, X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y_T & \twoheadrightarrow & \mathrm{Map}(\partial T, Y) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Map}(\mathrm{Sp}[T], Y) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Map}(\mathrm{sk}_\eta T_\eta, Y) \end{array} \tag{3.6}$$

所有水平映射都是 Kan 复形之间的 Kan 纤维化，因为 X 和 Y 都是 Reedy 纤维。条件（iii）（分别为（iv））等价于整个矩形（分别为左侧方块）是一个同伦

拉回。根据 Segal 条件，左侧和中间水平箭头的复合是弱等价；因此，左侧和中间方块的复合是同伦拉回。此外，映射

$$\mathrm{sk}_\eta T_\eta \to \mathrm{Sp}[T] \to \partial T$$

是由一系列形如 $\partial S \to S$ 的映射的推出构成的，其中树 S 的顶点数严格少于 T （通过正规树状集合的骨架滤过）。根据归纳假设，中间的方块和右侧的方块都是同伦拉回。由同伦拉回的拼接/消去律，结论得证。□

备注 3.15. 对于树状 Segal 空间之间的任意映射 $f\colon X \to Y$，对象

$$Y \times_{\mathrm{cosk}_\eta Y_\eta} \mathrm{cosk}_\eta X_\eta$$

仍然是一个树状 Segal 空间。这可通过考察匹配映射并利用 $\mathrm{Sp}[T]_\eta = T_\eta$ 得出。于是命题 3.14 表明，f 同伦上完全忠实，当且仅当

$$X \to Y \times_{\mathrm{cosk}_\eta Y_\eta} \mathrm{cosk}_\eta X_\eta$$

是 Ree dy 弱等价。但这当且仅当 f 是 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ Segal 中的弱等价 .

注记 3.16。 命题 3.14 的论证可以调整为证明：对于任意 Reedy 纤维化 $f :X \to Y$ （不一定是 Segal）之间的树状空间，条件（iii）和条件（iv）是等价的。事实上，在图表（3.6）中忽略脊后，竖直映射都是纤维化。由于**sSet**是右适当的，条件（iii）和条件（iv）分别对应于总矩形和左方形是同伦拉回。如果条件（iii）成立，则通过归纳法，右方形是同伦拉回，从而左方形是拉回。假设条件（iv）成立，则基于 $\mathrm{sk}_\eta T_\eta \to T$ 的骨架滤过，运用相同的归纳论证，总矩形再次是拉回。

例 3.17。 树状 Segal 空间之间的任意弱等价 $f\colon X \to Y$ in**sSet**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ Segal 都是 Dwyer–Kan 等价。事实上，f 是 Reedy 弱等价，因此 f_η 和 f_{C_k} 是**sSet**中的弱等价，使得（3.5）对于每个花冠都是同伦拉回，并确保 $\pi_0 f_\eta$ 是满射。前者给出同伦完全忠实性，后者给出本质满射。

3.3. **同构纤维化**。 现在我们引入一类态射，它们将在稍后建立的模型结构中充当纤维对象之间的纤维化。

定义 3.18。 树状 Segal 空间之间的映射 $f\colon X \to Y$ 称为同构纤维化，如果它是 Reedy 纤维化，且诱导映射

$$j^*\mathrm{ho}X \to j^*\mathrm{ho}Y$$

是范畴之间的同构纤维化。

注 3.19。 由推论 3.10 可得一个自然同构

$$j^*\mathrm{ho}X \cong \mathrm{ho}(i^*X)$$

对每个树状 Segal 空间 X 都成立。因此，树状 Segal 空间之间的 Reedy 纤维化 $f\colon X \to Y$ 是同构纤维化，当且仅当诱导的单纯 Segal 空间映射 $i^*f\colon i^*X \to i^*Y$ 是按 [13, 定义 2.13]意义下的同构纤维化。

This 这一观察使我们能够将单纯 Segal 空间中同构纤维化的许多基本性质
空间 直接推广到树枝情形。接下来的两个结果说明了这一原则。

命题 3.20. 树状 *Segal* 空间之间的 *Reedy* 纤维化 $f : X \to Y$ 是同构纤维化，当且仅当它对以下任一包含映射具有右提升性质

$$q : \Omega[\eta] \cong i_!N[0] \to i_!NI[1].$$

证明. 根据注 3.19，该命题可归结为单纯 Segal 空间中相应的命题。后者断言，一个态射是同构纤维化，当且仅当它对 $N[0] \to NI[1]$ 具有提升性质；参见 [13,命题 2.15]。□

命题 3.21. 设 $p\colon X \to Y$ 是树状 *Segal* 空间之间的同构纤维化。那么诱导的映射

$$X^{\{i_!NI[1]\}} \to Y^{\{i_!NI[1]\}} \times_{Y^2} X^2$$

and

$$X^{\{i_!NI[1]\}} \to Y^{\{i_!NI[1]\}} \times_Y X$$

是同构纤维化。

证明。 这立即由单纯 Segal 空间的类似结果 [13, 引理 2.18]，结合注 3.19、i^* 保极限和 Segal 空间这一事实，以及对 X 单纯空间和 Y 树状空间而言的自然同构 $i^*(Y^{\{i_!X\}}) \cong (i^*Y)^X$ 得出。□

3.4. **与双函子的相容性**。 本节将建立**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{Segal}}$ 与单纯张量 $\cdot$ 以及树状空间的张量积 $\otimes$ 之间的若干相容性性质。为简化记号，我们将关于单纯余张量 $\cdot$ 的两个映射 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon C \to D$ 的推挤乘积记为

$$f \boxdot g\colon A \cdot D \coprod_{A\cdot C} B \cdot C \longrightarrow B \cdot D,$$

与张量积 $\otimes$相关联的推挤乘积记为

$$f \boxtimes g\colon A \otimes D \coprod_{A\otimes C} B \otimes C \longrightarrow B \otimes D,$$

而通常的笛卡尔推挤乘积记为

$$f \square g\colon A \times D \coprod_{A\times C} B \times C \longrightarrow B \times D,$$

这将仅用于单纯集之间的映射。我们先给出一个直接的观察。

引理 3.22. 设 f 是树状集合 的一个正规单态射（即离散树状空间），且 g 是单纯集的一个余纤维化。那么 $f \boxdot g$ 是 *Reedy* 上纤维化（即正规单态射）；若 g 是平凡的，则它也是平凡的。

证明. 只需考虑这样的情形： f 是一个树的边界包含，而 g 是一个单形的边界包含或角包含。在此情形下，根据生成 Reedy（平凡）余纤维化的描述（2.5）和（2.4），结论立即成立。□

现在我们证明，**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 上的 Reedy 模型结构和 Segal 模型结构都是单纯模型结构。

命题 3.23. 单纯张量

$$(-)\cdot(-)\colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$$

相对于 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 上的 *Reedy* 模型结构和**单纯集合**上的 *Kan–Quillen* 模型结构，是一个左 *Quillen* 双函子。

证明。 设 $f = f_1 \boxdot f_2$ 是树状集合的一个生成 Reedy 余纤维化，其中 f_1 和 f_2 是边界包含 $\partial T \to T$ 和 $\partial\Delta[n] \to \Delta[n]$，并设 $g\colon A \to B$ 是单纯集之间任意的单态射。那么

$$f \boxdot g = (f_1 \boxdot f_2) \boxdot g = f_1 \boxdot (f_2 \square g). \tag{3.7}$$

由引理 3.22， $f \boxdot g$ 是 Reedy 余纤维化。

若 g 是平凡余纤维化，则 $f_2 \square g$ 是单纯集之间的平凡余纤维化，因此由引理 3.22，映射 $f \boxdot g$ 是 Reedy 平凡余纤维化。若 f_2 是角包含（从而 f 是生成 Reedy 平凡余纤维化），则 $f_2 \square g$ 在 **单纯集合** 中仍是平凡余纤维化，因此 $f \boxdot g$ 是 Reedy 平凡余纤维化。□

命题 3.24。 单纯张量

$$(-)\cdot(-)\colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$$

是相对于**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 上的 *Segal* 模型结构和**单纯集合**上的 *Kan–Quillen* 模型结构的左 *Quillen* 双函子。

证明。 根据命题 3.23，只需证明以下结论：若 $f\colon A \to B$ 是一个弱等价于**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$中的 Reedy 余纤维化，且 $g\colon C \to D$ 是单纯集的余纤维化，那么只要 X 是 Segal 的，Map($f \boxdot g, X$) 就是单纯集之间的弱等价。由于 X 是 Reedy 纤维且 $f \boxdot g$ 是 Reedy 余纤维化， φ 是 Kan 纤维化；因此，只需证明它是平凡的。

单纯形边界包含 h 相对于 φ 具有左提升性质，当且仅当 $g \square h$ 相对于

$$\mathrm{Map}(f, X)\colon \mathrm{Map}(B, X) \to \mathrm{Map}(A, X).$$

这个提升性质成立，因为 f 是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 中的弱等价，且 X 是 Segal。因此， φ 是平凡纤维化，从而完成证明。□

现在我们考虑其中一个因子是单纯的情形下的张量积。

命题 3.25。 限制张量积

$$(-) \otimes i_!(-)\colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$$

相对于 *Reedy* 模型结构是左 *Quillen* 双函子。

证明。 令 $f = f_1 \boxdot f_2$ 和 $g = g_1 \boxdot g_2$ 分别为树状集合与单纯集合上的 Reedy 模型结构中的生成余纤维。由于 $\otimes$ 和 $i_!$ 都保留这些表达式中出现的单纯张量，我们得到

$$f \boxtimes i_! g = (f_1 \boxdot f_2) \boxtimes i_!(g_1 \boxdot g_2) = (f_1 \boxtimes i_! g_1) \boxdot (f_2 \square g_2). \tag{3.8}$$

根据 [8, 命题 4.21], , 映射 $f_1 \boxtimes i_! g_1$ 是树状集合中的正规单态射，而 $f_2 \square g_2$ 是单纯集合的余纤维。于是，引理 3.22 蕴含 $f \boxtimes i_! g$ 是一个 Reedy 上纤维化。

如果 f_2 或 g_2 是角包含（因此 f 或 g 是生成平凡 余纤维），那么 $f_2 \square g_2$ 是 **单纯集合** 中的平凡余纤维化；引理 3.22 再次蕴含 $f \boxtimes i_! g$ 是平凡 Reedy 上纤维化。□

命题 3.26。 限制张量积

$$(-) \otimes i_!(-)\colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$$

是相对于 *Segal* 模型结构的左 *Quillen* 双函子。

证明。 利用命题 3.25 以及 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 上 Reedy 与 Segal 模型结构之间的 Quillen 伴随，我们得到一个左 Quillen 函子

$$(-) \otimes i_!(-)\colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Reedy}} \times \mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Reedy}} \to \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Segal}}.$$

根据 [6, 命题 3.21],, 只需验证以下两个条件：

(i) 对每个树状 Segal 空间 X 和单纯空间 A，树状空间 $X^{\{i_! A\}}$ 都是 Segal 的。(ii) 对每个树状 Segal 空间 X 和正规树状空间 A，单纯空间i^*($X^{\{A\}}$) 是 Segal 的。

我们只证明条件 (i)；第二个条件的证明类似。由于 $X^{\{i_! A\}}$ 根据命题 3.25 是 Reedy 纤维的，它是树状 Segal 空间，当且仅当

$$\mathrm{Map}(T, X^{\{i_! A\}}) \to \mathrm{Map}(\Lambda^e[T], X^{\{i_! A\}})$$

对每棵树 T 和每条内边 e，它都是平凡纤维化。这等价于对所有形如 $f = f_1 \boxdot f_2$ 的映射具有提升性质，其中 $f_1\colon \mathrm{Sp}[T] \to T$ 是内角包含，而f_2: $\partial\Delta[n] \to \Delta[n]$ 是单形的边界包含。根据伴随 (2.2)，这又等价于 X 对以下映射具有提升性质

$$f \boxtimes i_!(\emptyset \to A). \tag{3.9}$$

现在我们证明一个更强的结论：对于任意Reedy 余纤维化 g，其属于**单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}$，映射空间 $f \boxtimes i_! g$ 可提升以对抗 X。设 $g = g_1 \boxdot g_2$ 是**单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}$中的一个生成 Reedy 余纤维。再次利用 (3.8)，我们有

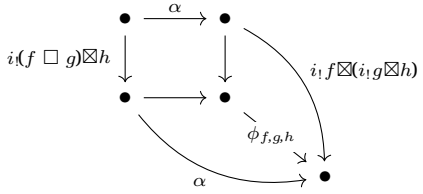
$$f \boxtimes i_! g = (f_1 \boxtimes i_! g_1) \boxdot (f_2 \square g_2).$$

映射空间 $f_1 \boxtimes i_! g_1$ 由 [8, 推论 6.26], 可知是内无害的，而 $f_2 \square g_2$ 是单纯集的余纤维。因此，命题 3.24 表明， $f \boxtimes i_! g$ 是 Segal 模型结构中的平凡余纤维化，故可相对于 X提升，从而完成证明。□

现在我们证明，尽管**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$并未严格地在**单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}$上富化、张量化或余张量化，因此**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$并不是一个富化的**单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$模型范畴，但它的弱富化仍然会在**单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$上诱导出同伦富化：

定理 3.27. 树状空间的张量积赋予 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 以一种同伦意义上的 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 富集模型范畴结构，其意义与 [7, 定义 3.5.4] 相同。特别地，**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 的同伦范畴富集于 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 的同伦范畴之上。

证明. 必须验证两个条件。第一个条件正是命题 3.26 的内容。还需证明：对于 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 中的任意单态射 f, g，以及**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$中的任意正规单态射 h，图表中标记为 $\phi_{f,g,h}$ 的映射空间



是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$中的平凡余纤维化。这个图表源自 (2.3) 中出现的结合子映射 α 的自然性。采用与前面证明相同的约化步骤，我们可以假设 f、g 和 h 是可表对象的边界包含，因此例如有

$$h = h_1 \boxdot h_2$$

其中 $h_1\colon\ \partial T \to T$ 且 $h_2\colon\ \partial\Delta[n] \to \Delta[n]$。由于 $\boxtimes$ 保持 $\boxdot$，我们可以重新排列上图中的相应因子，得到如下形式的表达式

$$\phi_{f,g,h} = \phi_{f_1,g_1,h_1} \boxdot (f_2 \square g_2 \square h_2),$$

其中 $\phi_{f_1,\ g_1,\ h_1}$ 是树状集合之间的映射。由 [7, 引理 3.8.1], , 映射 $\phi_{f_1,\ g_1,\ h_1}$ 是内无害的。于是命题 3.24 蕴含 $\phi_{f,\ g,\ h}$ 是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$中的平凡余纤维化，证明完毕。□

4. Constructing the model structure

现在我们着重证明定理 1.1 所述模型结构的存在性，其陈述为便于查阅，我们在此重述：

定理 4.1. 在**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$上存在一个左正规、余纤维生成模型结构，记作**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$，满足：

(i) 余纤维化是正规单态射 $f\colon\ X \to Y$，其中存在一个集合 R和一个弱等价 $X_\eta \coprod R \to Y_\eta$，它扩张了 f_η。(ii) 纤维对象是树状 *Segal* 空间。(iii) 纤维对象之间的弱等价是 *Dwyer–Kan* 等价；(iv) 纤维对象之间的纤维化是同构纤维化。

此外，按照 [7] 的意义，这个模型结构在 [13], 中引入的结构**单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Cat}}$ 上是同伦富化的；事实上，该结构是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$ 在 η 上的切片。

为了构造这个模型结构，我们将借助 [5], 的纤维生成识别定理。为方便读者，我们在此回顾该定理：

定理 4.2。设 $\mathcal{C}$ 是一个局部可呈范畴，并设 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 是$\mathcal{C}$ 中的态射集合，使得 $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$-*cof*。此外，假设给定一类 $\mathcal{W}_f$，其元素是$\mathcal{J}$-纤维对象之间的态射，并满足：

（I） $\mathcal{W}_f$ 满足六取二性质。（II）存在 $\mathcal{C}$ 中的一类态射 W，其在 $\mathcal{J}$-纤维对象之间的态射上的限制恰为 $\mathcal{W}_f$，且将 $\overline{W}$视为箭头范畴 $\mathcal{C}^{[1]}$的全子范畴时，它是可达的。（III）对于每个 $\mathcal{J}$-纤维对象 X，对角态射可分解为

$$X \xrightarrow{w} \mathrm{Path}(X) \xrightarrow{p} X \times X$$

与 $w \in \mathcal{W}_f$ 和 $p \in \mathcal{J}$-纤维；

(IV) $\mathcal{J}$-纤维 $\cap \mathcal{W}_f \subset \mathcal{I}$-纤维；(V) $\mathcal{I}$-纤维 $\subset \mathcal{W}$，其中 $\mathcal{W}$ 表示 $\mathcal{C}$ 中允许有一个位于 $\mathcal{W}_f$内的 $\mathcal{J}$- 纤维替换的态射类。

那么，$\mathcal{C}$ 具有一个余纤维生成模型结构，其中余纤维化是 $\mathcal{I}$-余纤维化，纤维对象是 $\mathcal{J}$-纤维对象，弱等价是 $\mathcal{W}$中的态射。此外，在纤维对象之间，弱等价和纤维化分别恰好是 $\mathcal{W}_f$ 和 $\mathcal{J}$-纤维化。

我们对定理 4.2 的假设的验证，紧密遵循 [13]的策略。我们首先分析将在所得模型结构中出现的余纤维化类。

4.1. **生成余纤维**。

定义 4.3. 我们将 $\mathcal{I}$ 定义为**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中的映射集合，其元素为：

(i) 对于每个至少有一个顶点的树 T 以及每个 $n \geq 0$，映射为

$$\partial T \cdot \Delta[n] \coprod_{\partial T \cdot \partial \Delta[n]} T \cdot \partial \Delta[n] \longrightarrow T \cdot \Delta[n].$$

(ii) 对所有 $n \geq 1$ 和 $0 \leq k \leq n$，映射空间

$$\eta \cdot \Lambda^k[n] \longrightarrow \eta \cdot \Delta[n].$$

(iii) 映射空间

$$\emptyset \longrightarrow \eta \cdot \Delta[0].$$

命题 4.4. 映射 p: $X \to Y$ 是一个 $\mathcal{I}$-纤维化，当且仅当：

(i) 映射 p_η: $X_\eta \to Y_\eta$ 是满射 *Kan* 纤维化。(ii) 对每棵树 $T \neq \eta$，诱导映射

$$p_T \colon X_T \longrightarrow Y_T \times_{Y_{\partial T}} X_{\partial T}$$

是平凡 *Kan* 纤维化。

证明。 这直接来自对相对于 $\mathcal{I}$的生成元的提升性质的展开。第二类生成余纤维保证 p_η 是 Kan 纤维化，而第三类则迫使 p_η在顶点上满射，因而是满射。第一类生成元随后对所有 $T \neq \eta$施加上述条件 (ii)。□

接下来，我们确定相应的余纤维化类。为此，我们先定义如下概念。

定义 4.5. 设 f: $X \to Y$ 是单纯集之间的单态射。若 f 是一种扩张（由一个集合给集合 R 和一个弱等价

$$X \coprod R \longrightarrow Y \tag{4.1}$$

使其扩展态射 f。

这类映射不一定是字面意义上的集合扩张，但在同伦意义上表现如此。由于 (4.1) 中的映射在 π_0 上诱导单射，并且在定义域的每个分支上都是单态射，因此它必然是平凡余纤维化。因此，按集合扩张可视为“几乎”平凡的余纤维化，二者仅相差一个集合的添加。

注 4.6。 如果 f: $X \to Y$ 是按集合扩张，且 Y 连通，那么 f 要么是平凡余纤维化，要么 $X = \emptyset$ 且 Y 可缩。反过来，这两类映射都是按集合扩张。此外，$f \coprod g$ 是按集合扩张，当且仅当 f 和 g 都是按集合扩张。因此，一个映射是按集合扩张，当且仅当它在目标的每个连通分支上都属于这两类之一。

这类映射可描述如下。

命题 4.7。 集合扩张构成的类，是包含所有角包含 $\Lambda^k[n] \to \Delta[n]$ 和映射 $\emptyset \to \Delta[0]$ 的单纯集合映射的最小饱和类。

证明。 集合扩张构成的类是饱和类，这一点可由备注 4.7 以及收缩、推出和超限复合与不交并可交换这一事实得出。事实上，备注 4.7 中任意一种类型的映射的收缩仍是同一类型的映射；由这两种类型的映射构成的超限复合仍是其中一种类型的映射；而这两种类型的映射的推出，要么是平凡余纤维化，要么是与一个可缩空间的不交并，后者是按集合扩张。此外， $\emptyset \to \Delta[0]$ 和所有角包含都是集合扩张，因此由前者生成的类包含于后者。最后，如果 $f\colon A \to B$ 是按集合扩张，那么根据定义，存在一个集合 R，以及 f 的如下分解

$$A \longrightarrow A \coprod R \longrightarrow B,$$

其中，第一个映射属于由 $\emptyset \to \Delta[0]$ 生成的饱和类，第二个映射属于由角包含生成的饱和类。因此， f 属于由二者共同生成的类。□

现在我们可以刻画 $\mathcal{I}$-余纤维化。

命题 4.8. 映射 $f\colon X \to Y$ 在 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中是 $\mathcal{I}$-余纤维化，当且仅当：

(i) 映射 f 是正规单态射；(ii) 映射 $f_\eta\colon X_\eta \to Y_\eta$ 是按集合扩张。

证明。 正规单态射类以及其 η-分量为按集合扩张的映射类都是饱和类，且它们的交包含 $\mathcal{I}$中的生成映射。因此，每个 $\mathcal{I}$-余纤维化都满足上述两个条件。

反过来，设 f 是一个正规单态射，且 f_η 是按集合扩张。利用相对骨架过滤，我们可以将 f 分解为

$$X \xrightarrow{f_1} X \coprod_{\mathrm{sk}_\eta X_\eta} \mathrm{sk}_\eta Y_\eta \xrightarrow{f_2} Y$$

其中 f_1 只附加形如 $\eta \cdot \Delta[n]$的胞腔，而 f_2 附加形如 $T \cdot \Delta[n]$ 的胞腔，其中T 至少有一个顶点。因此，f_2 是由 $\mathcal{I}$ 中 (i) 类映射的推出所构成的（可能超限的）复合。由于 $(f_1)_\eta = f_\eta$ 是按集合扩张，命题 4.7 表明， f_1 是由 $\mathcal{I}$ 中 (ii) 类和 (iii) 类映射的推出所构成的复合。因此， f 是一个 $\mathcal{I}$-余纤维化。□

4.2. **生成无害扩张**。现在我们引入一类平凡余纤维化，它将在构造模型结构的过程中发挥核心作用。

定义 4.9。令 $\mathcal{J}$ 为 **单纯集合** 中由以下映射构成的集合$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$：

(i) 对所有 $m \geq 0$、 $n \geq 1$和 $0 \leq k \leq n$，映射空间

$$\partial\Omega[T] \cdot \Delta[n] \coprod_{\partial\Omega[T]\cdot\Lambda^k[n]} \Omega[T] \cdot \Lambda^k[n] \longrightarrow \Omega[T] \cdot \Delta[n].$$

(ii) 对所有 $m \geq 2$ 和 $n \geq 0$，映射空间

$$\mathrm{Sp}[T] \cdot \Delta[n] \coprod_{\mathrm{Sp}[T]\cdot\partial\Delta[n]} \Omega[T] \cdot \partial\Delta[n] \longrightarrow \Omega[T] \cdot \Delta[n].$$

(iii) 任一端点包含

$$\Omega[\eta] \cong i_! N[0] \longrightarrow i_! NI[1].$$

我们用 $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ 表示由类型 (i) 和 (ii) 的映射组成的子集。

每个 $\mathcal{J}_0$-余纤维化都是 Segal 模型结构**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$中的平凡余纤维化。树状空间是 $\mathcal{J}_0$-纤维的，当且仅当它是 Segal 空间；Segal 空间之间的映射是 $\mathcal{J}_0$-纤维化，当且仅当它是 Reedy 纤维化。此外，命题 4.8 表明$\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$-余纤维化，因此定理 4.2 中的假设 $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$-余纤维化成立。

命题 4.10。 设 X 是一个树状空间。那么：

(i) X 是 $\mathcal{J}_0$-纤维的，当且仅当它是 $\mathcal{J}$-纤维的。~(ii) 存在一个 $\mathcal{J}$-纤维化替换 r_X：$X \to X$，使得 r_X 是一个 $\mathcal{J}_0$- 余纤维化。

证明。 对于 (i)，一个蕴含关系是显然的；对于另一个蕴含关系，注意到映射空间 $i_!N[0] \to i_!NI[1]$具有一个收缩，因此可以对每个映射空间 $X \to *$在左侧进行提升，从而除了 $\mathcal{J}_0$中的那些条件之外，不会施加额外的纤维性条件。

对于 (2)，对映射 $X \to *$ 应用小对象论证，使用生成集合 $\mathcal{J}_0$。这给出一个分解

$$X \xrightarrow{r_X} \widetilde{X} \longrightarrow *$$

~，其中 r_X 是一个 $\mathcal{J}_0$-余纤维化，而 X 是 $\mathcal{J}_0$-纤维的，因此根据 (i)，也是 $\mathcal{J}$-纤维的。 □

命题 4.11。 设 $f\colon X \to Y$ 是一个 $\mathcal{J}_0$-余纤维化。那么诱导映射

$$f_\eta\colon X_\eta \longrightarrow Y_\eta$$

是单纯集的平凡余纤维化。

证明。 在 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中，其 η-分量为平凡余纤维化的映射类是饱和的，并且包含 $\mathcal{J}_0$中的所有生成元。□

命题 4.12。 树状空间 X 是 $\mathcal{J}$-纤维的，当且仅当它是 *Segal* 的。若 $f\colon X \to Y$ 是树状 *Segal* 空间之间的一个映射空间，则 f 是 $\mathcal{J}$-纤维化，当且仅当它是同构纤维化。

证明。 第一条断言立即由命题 4.10 得出。对于第二条， f 是 Reedy 纤维化，当且仅当它相对于 $\mathcal{J}_0$ 具有提升性质；根据命题 3.20，它是同构纤维化，当且仅当此外还相对于

$$i_!N[0] \longrightarrow i_!NI[1].$$

这正是 $\mathcal{J}$ 中的额外生成元，从而完成了这一刻画。 □

4.3. **弱等价**。 我们将 $\mathcal{W}_f$ 定义为树状 Segal 空间之间的 Dwyer–Kan 等价类。由于幺半群的等价和单纯集的弱等价都满足六取二性质，我们得到：

命题 4.13。 类 $\mathcal{W}_f$ 满足六取二性质。 □

因此，定理 4.2 的条件 (I) 成立。接下来验证条件 (II)：

命题 4.14。 在 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中存在一类 $\mathcal{W}$ 态射，使得：

(i) 将 $\mathcal{W}$ 限制到树状 *Segal* 空间之间的态射，所得恰为 $\overline{\mathcal{W}_f}$。(ii) 将其视为 (**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$)$^{[1]}$, 的全子范畴时，类 $\mathcal{W}$ 是可达的。

证明。 考虑函子

$$\Phi\colon (\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}})^{[1]} \longrightarrow (\mathbf{Op})^{[1]} \times \prod_{k\in\mathbb{N}} (\mathbf{sSet})^{[1]}$$

它将映射 $X \to Y$ 送到由以下对象组成的元组

$$\tau_d(\pi_0)_*\gamma_*X \longrightarrow \tau_d(\pi_0)_*\gamma_*Y$$

以及映射族

$$\left(X_{C_k} \longrightarrow X_{\partial C_k} \times_{Y_{\partial C_k}} Y_{C_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

定义 $\mathcal{W}$为在 Φ下，类 $\mathcal{W}'$ 的原像，其中 $\mathcal{W}'$ 由由幺半群的拟运算子等价和 **sSet** 中对所有 $k \in \mathbb{N}$ 的弱等价元组组成。根据命题 3.8 和 3.14，将 $\mathcal{W}$ 限制到 Segal 空间上恰好就是 $\mathcal{W}_f$。这证明了 (i)。由于 $\mathcal{W}'$ 构成一个组合模型范畴中的弱等价类，该类上的全子范畴是可达的；又由于 Φ保持滤余极限，根据 [11, 推论 A.2.6，其原像也是可达的，5], 这就证明了 (ii)。□

命题 4.15。 设 X 为一个树状 *Segal* 空间。在分解中

$$X \xrightarrow{w} X^{\{i_!NI[1]\}} \xrightarrow{p} X \times X$$

通过将 $X^{\{i_!-\}}$ 应用于该分解所得

$$N[0] \amalg N[0] \longrightarrow NI[1] \longrightarrow N[0],$$

映射空间 w 是 *Dwyer–Kan* 等价，且 p 是同构纤维化。

证明。 在命题 3.21 中令 $Y = *$，立即可知 p 是同构纤维化。

为证明 w 是 Dwyer–Kan 等价，我们改编 Rezk 从 [14, 引理 13.9]开始的原始论证。利用如下识别

$$i^*(X^{\{i_! -\}}) \cong (i^*X)^-$$

以及 i^*X 是单纯 Segal 空间这一事实，Rezk 的证明表明 i^*w 是 Dwyer–Kan 等价。因此，只需验证花冠 C_k with$k \neq 1$的同伦完全忠实性。

Rezk 针对 $k = 1$ 情形给出的论证对所有 k逐字适用。考虑图表 m

$$\begin{array}{ccccc} X_{C_k} & \xrightarrow{w_{C_k}} & (X^{\{i_! NI[1]\}})_{C_k} & \xrightarrow{\iota^*} & (X^{\{i_! N[1]\}})_{C_k} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{\partial C_k} & \xrightarrow{w_{\partial C_k}} & (X^{\{i_! NI[1]\}})_{\partial C_k} & \xrightarrow{\iota^*} & (X^{\{i_! N[1]\}})_{\partial C_k}. \end{array}$$

根据命题 3.14，只需证明左方的方形是同伦拉回。右方方形中的上水平映射通过单纯伴随可识别为

$$\mathrm{Map}(NI[1], i^*(X^{\{C_k\}})) \longrightarrow \mathrm{Map}(N[1], i^*(X^{\{C_k\}})),$$

底部映射同样可与 ∂C_k对应；根据 [14, 定理 6.2], ，它们是同伦单态射，因为 $i^*(X^{\{C_k\}})$ 是单纯 Segal 空间（命题 3.26）。

外侧矩形同构于

$$\begin{array}{ccc} X_{C_k} & \longrightarrow & X_{C_1 \circ C_k} \times_{X_{C_k}} X_{C_k \circ (C_1, \ldots, C_1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{\partial C_k} X_\eta & \longrightarrow & \prod_{\partial C_k} X_{C_1}, \end{array}$$

这是一个同伦拉回：两个内侧方块

$$\begin{array}{ccc} X_{C_k} & \longrightarrow & X_{C_1 \circ C_k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\eta & \longrightarrow & X_{C_1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_{C_k} & \longrightarrow & X_{C_k \circ (C_1, \ldots, C_1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_k X_\eta & \longrightarrow & \prod_k X_{C_1} \end{array}$$

根据 Segal 条件，它们都是同伦拉回。因此，$\iota^* \circ w_{C_k}$ 在纤维上是弱等价；又因为 ι^* 在纤维上是同伦单态射，所以 w_{C_k} 在纤维上也是弱等价。□

现在我们已经验证了条件（III）。接下来，我们将通过证明 (ii) 蕴含 (i)，来验证条件（IV），具体表述如下：

Prop命题 4.16. 设 $f\colon X \to Y$是树状 *Segal* 空间之间的映射。以下条件等价 *t:*

(i) f 是一个 $\mathcal{I}$-纤维化。(ii) f 是一个同构纤维化和 *Dwyer–Kan* 等价。(iii) f 是一个 *Reedy* 纤维化、同伦上完全忠实，并且诱导映射 $X_{\eta,0} \to Y_{\eta,0}$ 是满射。

证明。 命题 4.4 与命题 3.14 一起表明，条件 (i) 等价于条件 (iii)。对于 Segal 空间之间的任意 Reedy 纤维化，是同构纤维化且为 Dwyer–Kan 等价，等价于同伦上完全忠实，并且诱导出一个在对象上满射的幺半群等价。这又等价于同伦完全忠实性以及在 f_η 顶点上的满射性。□

最后，为验证条件 (V)，我们遵循 [13] 的策略。我们首先给出一个推广 [13, 命题 3.18]的技术性结果。

命题 4.17。 设 $p\colon \quad K \to L$ 是 *Kan* 复形之间的满射 *Kan* 纤维化。那么函子

$$\mathrm{cosk}_\eta(p)^*\colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Segal}/\mathrm{cosk}_\eta L} \longrightarrow \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Segal}/\mathrm{cosk}_\eta K}$$

是左 *Quillen*。

证明。 拉回总是保留单态射，并且根据 [8, 命题 3.28], ，它们也保留树状集合的正规单态射。由于拉回可以逐项计算，无论是先在 Δ 中再在 Ω 中计算，还是反过来，都同样保留树状空间的正规单态射（这些恰好是 Δ 中逐项的正规单态射）。利用**单纯集合**的右 proper 性，同样的论证表明拉回也保留逐项弱等价。因此

$$\mathrm{cosk}_\eta(p)^*\colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Reedy}/\mathrm{cosk}_\eta L} \longrightarrow \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Segal}/\mathrm{cosk}_\eta K}$$

是一个左 Quillen 函子。

最后， [9, 命题 3.3。18]将问题归结为证明：对于每棵树 T 以及每条内边 $e\colon\ \eta \to T$，映射

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^e[T] & \hookrightarrow & T \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{cosk}_\eta L & \end{array}$$

在 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{/\text{余骨架}_\eta L}$ 中被送到 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}/\text{余骨架}_\eta K}$中的平凡余纤维化。考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} Q & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \mathrm{cosk}_\eta K \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cosk}_\eta(p)} \\ \Lambda^e[T] & \longrightarrow & T & \longrightarrow & \mathrm{cosk}_\eta L. \end{array}$$

情形 *1*： K 且 L 离散。此时，余骨架$_\eta K \cong N_d(\mathrm{Comm}[K])$是具有颜色集合 K 且每个可能的多重同态集上都有唯一运算的幺半群的树状神经；对于 L也同理。此外，映射余骨架$_\eta(p)$是幺半群唯一映射的神经，该映射在颜色上等于 p。

对于树 T的每条边 $\alpha\colon\ \eta \to T$，定义 K_α 为 K 中位于 α 在 L中的像之上的纤维。于是，P 自身同构于某个幺半群的树状神经，其颜色集合为 $\coprod_{\alpha\colon\ \eta\to T} K_\alpha$，其运算由子树 $T' \subset T$ 给出：根和每个叶分别由对应 α 中的元素 K_α标记：$\eta \to T$。这些标记分别给出目标和源。对于子树 $T' = \eta$的情形，我们将其标记两次，一次作为叶，一次作为根。复合由嫁接并遗忘中间标记给出。映射 $P \to T$ 将每个 K_α 送到对应的 α，并遗忘所有标记。

P 中形状为 S 的一般树单形由树的映射 $\beta\colon\ S \to T$ 给出，并且对于每条边$\gamma\colon \eta \to S$，都有一个 $K_{\beta\gamma}$的元素。这样的树单形是退化的，当且仅当S 中存在一个一元顶点，使得其两条边都映射到同一条边 $\alpha\colon \eta \to T$，并且它们由同一个元素 $x \in K_\alpha$标记。当且仅当对于 T 中的每条边，在 β 下的原像都非空时（ e的原像除外），它不包含在 Q 中，即

$$\mathrm{Edges}(T) \setminus \{e\} \subset \beta(\mathrm{Edges}(S))$$

注意，对于任意 $\beta\colon S \to T$， T 中任意一条边在 β 下的原像要么为空，要么是 S的一棵线性子树。对于如上所述包含在 Q 中的 P 中的非退化树单形，将其枢轴定义为线性树 $\beta^{-1}(e)$中第一条边的标记。注意，这样的树单形可能没有枢轴，即当 $\beta^{-1}(e)$为空时。

现在固定一个元素 $x \in K_e$。如果一个不包含于 Q 中的非退化树单形具有 x 作为枢轴，我们就称其为有界的；否则称其为被界定的。于是，每个被界定的树单形都是唯一一个有界树单形的内面，即在 β^{-1}（e）的起点引入一条新边，并以 x 作为标记所得到的树单形。此外，给定一个有界树单形，它的所有面要么是 Q 中更小的树单形，要么是更小的有界树单形；但删除枢轴的那个面除外，该面给出一个被界定的树单形。结合 P 是正规的这一事实，这意味着我们可以将包含 $Q \hookrightarrow P$ 写成一系列内角包含的推出，因此它是 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}/\text{余骨架}_\eta K}$ 中的一个平凡余纤维化。

情况 *2*：一般情形 K 以及 L。由于 p: $K \to L$ 是满射，离散论证逐级应用于映射 $K_n \to L_n$，从而得到一个单纯图表

$$Q_\bullet = \Lambda^e[T] \times_{\mathrm{cosk}_\eta(L_\bullet)} \mathrm{cosk}_\eta(K_\bullet) \longrightarrow P_\bullet = T \times_{\mathrm{cosk}_\eta(L_\bullet)} \mathrm{cosk}_\eta(K_\bullet) \tag{4.2}$$

在 $\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中，每个 $Q_n \to P_n$ 都是 $\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 中的弱等价。由于所有 P_n 和 Q_n 都是正规的离散树状空间，单纯对象 $P_\bullet$ 和 $Q_\bullet$ 在（$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$）中是 Reedy 余纤维的$^{\Delta^{\mathrm{op}}}$。

事实上，将此范畴视为函子范畴 $\Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{dSet}$ 时，余纤维化恰好是这样的单态射：它们在每个双单纯双次数上都是树状集合的正规单态射。因此，根据 [9,推论 18.4，13], 若我们应用几何实现

$$(\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}})^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$$

由 (4.2)，我们在 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{Segal}}$ 中得到一个弱等价。但在我们的情形中，几何实现就是对角线，从而恰好给出映射空间 $Q \hookrightarrow P$。□

命题 4.18。设 $f\colon\ X \to Y$ 是一个 $\mathcal{I}$-纤维化。那么 f 具有一个 $\mathcal{J}$-纤维替换，且该替换是 *Dwyer–Kan* 等价。

证明。应用小对象论证，得到 f的一个 $\mathcal{J}_0$-纤维替换：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & \widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}} \\ Y & \xrightarrow{j_Y} & \widetilde{Y}. \end{array}$$

右侧的竖直映射是一个 $\mathcal{J}_0$-纤维化，水平映射是余纤维化，且具有纤维$\widetilde{}$余域。因此，根据命题 4.10，它们实际上是 $\mathcal{J}$-纤维的。所以，f 是 f的一个 $\mathcal{J}$-纤维替换。

由于 j_X 和 j_Y 在 η 处是弱等价（命题 4.11），且 f_η 是满射（命题 4.4），可推出 $\pi_0(f_\eta)$ 是满射。由于 f 是一个 $\mathcal{J}_0$-纤维化，f_η 是一个 Kan 纤维化，因此$\widetilde{}$在顶点上是满射的。所以 $\mathrm{ho}(f)$ 是本质满的。

关于完全忠实性，根据注 3.15，只需证明

$$\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y} \times_{\mathrm{cosk}_\eta \widetilde{Y}_\eta} \mathrm{cosk}_\eta \widetilde{X}_\eta =: Q$$

是 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{Segal}}$ 中的弱等价。考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \mathrm{cosk}_\eta X_\eta & \xrightarrow{\mathrm{cosk}_\eta (j_X)_\eta} & \mathrm{cosk}_\eta \widetilde{X}_\eta \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \mathrm{cosk}_\eta Y_\eta & \xrightarrow{\mathrm{cosk}_\eta (j_Y)_\eta} & \mathrm{cosk}_\eta \widetilde{Y}_\eta. \end{array}$$

将注 3.16 应用于 f，我们看到左侧方块在每棵树 T 上都是同伦拉回（利用 **单纯集合** 的右适当性，以及竖直映射是逐项纤维化这一事实）。根据命题 4.11，映射 j_X 和 j_Y 在 η 处是弱等价，因此右侧方块中的水平映射在每棵树 T 上都是弱等价，因为它们是 $(j_X)_\eta$和 $(j_Y)_\eta$的 n 重积，其中 n 是 T的边数。因此，右侧方块在每棵树上也是同伦拉回，复合方块也如此，故诱导映射

$$\varphi : X \longrightarrow Y \times_{\mathrm{cosk}_\eta \tilde{Y}_\eta} \mathrm{cosk}_\eta \tilde{X}_\eta = P$$

是 Reedy 弱等价（同样是由于 **单纯集合** 的右适当性以及竖直映射的逐项纤维化）。现在考虑

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\varphi}} \\ P & \longrightarrow & Q. \end{array}$$

我们刚刚证明了 $\varphi\colon\ X \to P$ 是一个 Reedy 弱等价，因此也是 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{Segal}}$中的弱等价。由于 $X \to \widetilde{X}$ 和 $Y \to \widetilde{Y}$ 是 $\mathcal{J}_0$-余纤维化，因此它们是 Segal 弱等价。根据命题 4.17，映射空间 $P \to Q$ 也是一个 Segal 弱等价。两次应用三者中两者推出第三者，可得 $\widetilde{\varphi}\colon\ \widetilde{X} \to Q$ 是 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{Segal}}$中的弱等价。□

这就确立了条件 (V)，从而完成了定理 1.1 中模型结构存在性的证明。

5. Comparison with other model structures

现在我们来研究模型范畴**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 幺半群 与其他几种同伦论框架之间的关系，即单纯 Segal 空间、完全树枝塞加尔空间和 Segal 拓扑运算子。为此，我们将使用以下一般判据。

引理 5.1。设 $F\colon C \rightleftarrows D\colon G$ 是模型范畴之间的一个伴随，且 F 保余纤维化。假设存在 C 中的一个余纤维化集合 J，满足以下性质：

(i) 对象 $X \in C$ 是纤维对象，当且仅当它对 J具有右提升性质。(ii) 纤维对象之间的映射空间 $f\colon X \to Y$ 是纤维化，当且仅当它对 J具有右提升性质。

此外，若 F 将 J 中的每个映射都映为 D中的弱等价，则 F 是左 *Quillen* 函子。

证明。设 D中的纤维对象之间有一个纤维化 $p\colon X \to Y$。由于 F 保余纤维化，[10, 命题 E.2.14] 表明，只需证明右伴随 G将 p 映为 C中的纤维化。

由于 $F(J)$ 由平凡余纤维化组成，对象 X 关于 $F(J)$ 具有右提升性质。由伴随关系可知，这意味着 $G(X)$ 关于 J 具有右提升性质，因此根据假设它是纤维的。同样的论证也适用于 $G(Y)$。

此外，由于 p 关于 $F(J)$ 具有提升性质，再次利用伴随关系可知，$G(p)$ 关于 J 具有提升性质。由于 $G(p)$ 是纤维对象之间的一个映射，并且关于 J 具有右提升性质，因此 $G(p)$ 是 C 中的纤维化。□

命题 4.12 表明，引理 5.1 的假设对 $J = \mathcal{J}$ 成立。因此，这一判据将使我们能够验证若干从 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ Op 出发的左伴随是左 Quillen 函子。

5.1. **单纯 Segal 空间**。我们首先比较模型结构 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ Op 与模型结构 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ Cat，后者在 [13] 中引入。后者通过对 [13, 记号 3.5] 和 [13, 记号 3.9]（其中它们不带下标出现）中定义的集合 $\mathcal{I}_{\mathrm{Cat}}$ 和 $\mathcal{J}_{\mathrm{Cat}}$ 应用定理 4.2 得到。用我们的生成集合 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 表示，这些集合可以简洁地描述为

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Cat}} = i_!^{-1}(\mathcal{I}), \qquad \mathcal{J}_{\mathrm{Cat}} = i_!^{-1}(\mathcal{J}).$$

我们首先证明，模型结构 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ Cat 实际上可以从 $\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ Op 中恢复。回顾一下，范畴 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 与切片范畴 $\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{/\eta}$ 是典范同构的，其中函子 $i_!$ 对应于切片投影。因此，$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ Op 在 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$上诱导出一个模型结构，我们将其记作 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 切片。

理论 **例 5.2.** 模型结构$\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ Cat 与 $\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 切片 一致。特别地，伴随

$$i_!\colon \mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Cat}} \rightleftarrows \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Op}}\colon i^*$$

是一个 *Quillen* 伴随。

证明。这由诱导的切片模型结构的定义以及等式 $i^{-1}{}_!(\mathcal{I}) = \mathcal{I}_{\mathrm{Cat}}$ 和 $i^{-1}{}_!(\mathcal{J}) = \mathcal{J}_{\mathrm{Cat}}$立即得出。因此，这两个模型结构具有相同的余纤维化类和纤维对象类，而它们唯一确定了该模型结构。□

命题 5.3. 树状张量积

$$- \otimes i_! - \colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$$

是相对于模型结构 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ Op 和 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ Cat的左 *Quillen* 双函子。

证明。设 f 和 g 分别是 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ Op 和 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ Cat中的余纤维化。特别地，它们是 Reedy 余纤维化，因此由命题 3.25，推出积 $f \boxtimes i_! g$ 是正规单态射。由于 $(A \otimes B)_\eta = A_\eta \times B_\eta$，我们有

$$(f \boxtimes i_! g)_\eta = f_\eta \,\square\, i_! g_\eta.$$

由命题 4.7，集合扩张类由单纯集合的平凡余纤维化（它们在 $\square$ 下封闭）与映射空间 $\emptyset \to \Delta[0]$ 生成，而后者是 $\square$ 的单位。因此，集合扩张在 $\square$ 下封闭，命题 4.8 蕴含 $f \boxtimes i_! g$ 是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ Op 中的余纤维化。

现在假设 f 或 g 是平凡余纤维化。我们必须证明 $f \boxtimes i_!g$ 仍是平凡余纤维化。由引理 5.1，只需考虑 f 或 g 是无害扩张，也就是说，是 $\mathcal{J}$-余纤维化的情形。由于 $\mathcal{J}$-余纤维化由 $\mathcal{J}_0$-余纤维化与映射空间 $i_!N[0] \to i_!NI[1]$ 生成，我们分别处理这两种情形。

如果 f或 g属于 $\mathcal{J}_0$-余纤维，那么根据命题 3.25， $f \boxtimes i_!g$属于 $\mathcal{J}_0$-余纤维。如果 $f = i_!N[0] \to i_!NI[1]$，那么利用 $i_!(X \times Y) = i_!X \otimes i_!Y$以及包含映射 $i_!(\mathcal{J}_{\mathrm{Cat}}) \subset \mathcal{J}$，该断言归结为单纯情形。之所以成立，是因为 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}$范畴是笛卡儿闭的 [13, 命题 5.3]。

最后，如果 $g = N[0] \to NI[1]$，那么 $f \boxtimes i_!g$ 相对于树状 Segal 空间的一个同构纤维化提升p：当且仅当 f 相对于所诱导的映射提升

$$p^{\boxtimes i_!g} \colon X^{\{i_!NI[1]\}} \longrightarrow Y^{\{i_!NI[1]\}} \times_Y X.$$

根据命题 3.21，该映射是一个同构纤维化。如果我们证明它同时是一个 Dwyer–Kan 等价，那么命题 4.4 蕴含它是一个 $\mathcal{I}$-纤维化，从而可以相对于 f提升。

根据命题 3.21，映射 $X^{\{i_!NI[1]\}} \to X$ 和 $Y^{\{i_!NI[1]\}} \to Y$是同构纤维化；根据命题 4.15 和三取二性质，它们也是 Dwyer– Kan 等价。因此，根据命题 4.4，它们是 $\mathcal{I}$-纤维化。在该分解中

$$X^{\{i_!NI[1]\}} \longrightarrow Y^{\{i_!NI[1]\}} \times_Y X \to X,$$

因此，复合映射是一个 $\mathcal{I}$-纤维化，而右侧映射是其中一个映射的拉回，故也是 Dwyer–Kan 等价。再应用一次三取二性质，即得所需结论。□

与定理 3.27 中一样，现在我们可以利用这一点建立同伦富化。

定理 5.4。 模型结构 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$ 具有 [7] 意义下的同伦 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Cat}}$-富化。

证明。 第一条公理由命题 5.3 得出。对于第二条，定理 3.27 的证明表明，对于所有余纤维化 $f, g \in$ **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 和 $h \in$ **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$，映射 $\phi_{f,g,h}$ 是一个 $\mathcal{J}_0$-余纤维化，因此是 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$中的平凡余纤维化。由于 **单纯集合**$^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Cat}}$ 和 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$ 中的余纤维化分别包含于其对应的 Segal 模型结构中的余纤维化，因此结论成立。□

至此，定理 4.1 最后一个陈述的证明完成。

5.2. **完全树枝塞加尔空间**。 现在，我们将模型结构**sSet**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$ 与 Cisinski 和 Moerdijk 在 [4], 中引入的完全树枝塞加尔空间模型结构进行比较；后者将 Rezk 在 [14] 中提出的完全 Segal 空间模型结构推广了。

定理 5.5。 范畴**sSet**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$上存在一个左正合单纯形模型结构，它是对**sSet**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Segal}}$ 关于态射 $i_!N[0] \to i_!NI[1]$ 作左 *Bousfield* 局部化得到的。该模型结构具有以下性质：

(i) 余纤维化为正规单态射。(ii) 纤维对象为完全树枝塞加尔空间。(iii) 纤维对象之间的纤维化（分别为弱等价）是 *Reedy* 纤维化（分别为 *Reedy* 弱等价）。(iv) 更一般地，树状 *Segal* 空间之间的弱等价是 *Dwyer–Kan* 等价。

我们将此模型结构记为 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$。

证明。 这由左 Bousfield 局部化的标准结果得出，但最后一个陈述除外；该陈述在 [8, 定理 12.36] 中得到证明。□

模型结构 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$ 与**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$ 的关系非常密切。从定义可明显看出，**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$ 中的余纤维化类包含**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$中的余纤维化类。更令人惊讶的是，这两种模型结构具有完全相同的弱等价。

引理 5.6。 设 $f\colon X \to Y$ 是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$中的一个态射。那么， f 是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$中的弱等价，当且仅当它是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$中的弱等价。

证明。 应用小对象论证，得到一个 $\mathcal{J}$-纤维化替换

$$j_Y \colon Y \longrightarrow \tilde{Y},$$

˜然后再次应用该论证，将复合映射 $X \to Y \to Y$ 分解为一个 $\mathcal{J}$-余纤维化

$$j_X \colon X \longrightarrow \tilde{X}$$

后接一个 $\mathcal{J}$-纤维化

$$\tilde{f} \colon \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}.$$

由于 $\mathcal{J}$ 中的每个映射都是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$中的平凡余纤维化，因此 j_X 和 j_Y 都是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$ 中的弱等价（当然，它们在**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$中也如此）。因此，$f$ 是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$（分别是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$）中的弱等价，当且仅当 $\tilde{f}$ 是弱等价。最后，由于 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$ 是树状 Segal 空间，根据 [8, 定理 12.36]，映射 $\tilde{f}$ 是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$ 中的弱等价，当且仅当它是 Dwyer–Kan 等价（即**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$中的弱等价）。□

注5.7。在单纯形设定中也有类似的结论。尽管 [13]只证明了一个方向，但完整的等价似乎尚未在那里被明确指出。正如我们将看到的，双向等价能够带来比 [13]中的论证更简洁的论证。

因此，情形可概括如下：模型结构 $\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$ 和$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$ 具有相同的弱等价；$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$ 的余纤维化包含$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$ 的余纤维化；而$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Op}}$ 的纤维化包含$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$的纤维化。由此立即得到以下结果。

定理 5.8. 恒等伴随

$$id_! \colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Op}} \rightleftarrows \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{CSS}} \colon id^*$$

是一个 *Quillen* 等价。

证明。 根据上述讨论，函子 $\mathrm{id}_!$ 保持余纤维化和平凡余纤维化，因此定义了一个 Quillen 伴随。引理 5.6 随即表明，这个 Quillen 伴随实际上是一个 Quillen 等价。□

引理 5.6 还有一个直接推论。由于左正规性和右适当性只取决于弱等价类，并且$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$ 作为左正规模型结构$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{Reedy}}$的左 Bousfield 局部化是左正规的，因此得到如下结论。

定理 5.9。 模型结构**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\text{幺半群}}$ 是左正规的。 □

5.3. **幺半群**。 回顾一下，范畴**幺半群** 具有 folk 模型结构，其中弱等价是拟运算子等价，纤维化是同构纤维化。

如预备知识部分所述，存在一个伴随

$$\tau_d : \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \rightleftarrows \mathbf{Op} : N_d.$$

然而，相对于模型结构**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{CSS}}$，树状神经函子并非右 Quillen。事实上，幺半群 $\mathcal{O}$ 的树状神经是完备的，当且仅当 $\mathcal{O}$ 中的每个同构都是恒等映射；大多数幺半群都不满足这一条件（例如 $i_1 NI[1]$）。

现在我们证明，使用模型结构**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}{}_{\text{幺半群}}$ 时，这个问题便会消失，因此上述伴随成为真正的 Quillen 伴随。

定理 5.10。该伴随

$$\tau_d : \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Op}} \rightleftarrows \mathbf{Op} : N_d$$

是一个 *Quillen* 伴随。

证明。 树状神经函子将每个幺半群映射为树状 Segal 空间，并将幺半群之间的同构纤维化映射为树状 Segal 空间之间的同构纤维化。此外，它将幺半群之间的等价映射为 Dwyer–Kan 等价。因此，N_d 保持纤维化和平凡纤维化，因而是一个右 Quillen 函子。□

5.4. **Segal 拓扑运算子**。 现在我们回顾 2.5 中的 Segal 预运算子范畴 $\mathcal{P}(\mathbf{Op})$，以及伴随三元组

$$\mathcal{P}(\text{算子}) \underset{\gamma_*}{\overset{\gamma_!}{\underset{\gamma^*}{\rightleftarrows}}} \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$$

定义 5.11。 A *Segal* 幺半群 是一个 Segal 预运算子 X，满足对于每棵树 T，典范映射

$$X_T \longrightarrow X_{\mathrm{Sp}[T]}$$

是一个平 凡纤维化的单纯集合。*Reedy* 纤维 *Segal* 幺半群 是一个 Segal 预运算子 X，满 h that $\gamma^* X$ 是一个 Segal 空间。

在 [4], 中，Cisinski 和 Moerdijk 证明了 Segal 拓扑运算子是 $\mathcal{P}(\mathbf{Op})$ 上某个模型结构的纤维对象。

定理 5.12。 范畴$\mathcal{P}(\mathbf{Op})$上存在一个左正规、余纤维生成的模型结构，记为 $\mathcal{P}(\mathbf{Op})_{\mathrm{Segal}}$，并具有以下性质：

(i) 纤维对象是 *Reedy* 纤维化 *Segal* 运算子。(ii) 弱等价恰好是那些在 $\mathbf{单纯集合}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{CSS}}$ 中为弱等价的映射。(iii) 余纤维化是正规单态射。

此外，伴随对 $\gamma^* \dashv \gamma_*$ 诱导出一个 *Quillen* 等价

$$\gamma^* \colon \mathcal{P}(\mathbf{Op})_{Segal} \rightleftarrows \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{CSS}} \colon \gamma_*.$$

证明。 这在 [4, 定理 8.13、8.15、8.17] 中得到了证明。 □

然而，这个伴随

$$\gamma_! \colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}} \rightleftarrows \mathcal{P}(\mathbf{Op}) \colon \gamma^*$$

并非相对于上述模型结构的 Quillen 伴随。在这一点上，$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{Op}}$ 模型结构也比$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{CSS}}$表现出更好的形式性质，以下结果对此作了说明。

定理 5.13。 伴随 $\gamma_! \dashv \gamma^*$ 和 $\gamma^* \dashv \gamma_*$ 诱导出 *Quillen* 等价

$$\gamma_! \colon \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Op}} \rightleftarrows \mathcal{P}(\mathbf{Op})_{\mathrm{Segal}} \colon \gamma^*$$

and

$$\gamma^* \colon \mathcal{P}(\mathbf{Op})_{\mathrm{Segal}} \rightleftarrows \mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{Op}} \colon \gamma_*.$$

证明。 我们先考察伴随 $\gamma_! \dashv \gamma^*$。由于所有集合扩张在连通分支上都是单射，命题 4.8 与 [4, 引理 7.4] 共同推出， $\gamma_!$ 保余纤维化。由引理 5.1，要证明 $\gamma_!$ 保平凡余纤维化，只需证明它将 $\mathcal{J}$ 中的每个映射都送到 $\mathcal{P}(\mathbf{Op})_{\mathrm{Segal}}$中的弱等价。

展开定义，这相当于证明对于 $f \in \mathcal{J}$，映射 $\gamma^*\gamma_! f$ 是$\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{CSS}}$中的弱等价。若 f 是映射 $\eta \to i_! NI[1]$，则 f 是 Dwyer–Kan 等价，并满足$f = \gamma^*\gamma_! f$。若 f 具有如下形式

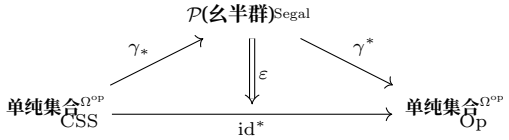
$$\partial T \cdot \Delta[n] \coprod_{\partial T \cdot \Lambda^k[n]} T \cdot \Lambda^k[n] \longrightarrow T \cdot \Delta[n]$$

对于 $T = \eta$，直接计算可得 $\gamma^*\gamma_! f$ 同构于 id_η。在所有其余情况下， f 在 η 处是同构，这意味着该自然性方块

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \gamma^*\gamma_! A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma^*\gamma_! f} \\ B & \longrightarrow & \gamma^*\gamma_! B \end{array}$$

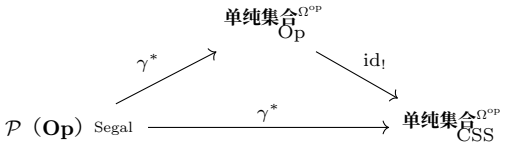
是一个推出方块。由于 f 是 $\mathbf{单纯集合}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ $_{\mathrm{CSS}}$ 中的平凡余纤维化，论证至此完成。

为了得出 $(\gamma_!, \gamma^*)$ 是一个 Quillen 等价，考虑由伴随 $\gamma^* \dashv \gamma_*$ 的余单位 $\varepsilon\colon \gamma_*\gamma^* \to \mathrm{id}_{\mathbf{sSet}^{\Omega^{\mathrm{op}}}}$ 所诱导的右 Quillen 函子图表：



由例 3.13 可知，余单位在**单纯集合**$_{\mathrm{CSS}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$的纤维对象上是弱等价，因此 $\gamma^*\gamma_*$ 和 id^* 的右导出函子一致。由此可得， $\gamma^*\gamma_*$ 是一个 Quillen 等价，因此根据定理 5.12 和三者中两者推出第三者， γ^* 也是 Quillen 等价。

最后，对于伴随 $\gamma^* \dashv \gamma_*$，注意到 Segal 预运算子的正规单态射在 η处是集合的映射，因此命题 4.8 蕴含 γ^* 保持余纤维化。此外，根据定理 5.12 和引理 5.6，函子 γ^* 保持并反映弱等价。将三者中两者推出第三者应用于左 Quillen 函子的图表



我们得出γ^* 是一个左 Quillen 等价。 □

推论 5.14。 模型结构 $\mathcal{P}$（**Op**）$_{Segal}$ 既是从**单纯集合**$_{\mathrm{Op}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 沿函子 γ^*左诱导的，也是右诱导的。□

证明。 这形式上由以下事实立即得到： γ^* 是完全忠实的，并且既是左 Quillen 等价，也是右 Quillen 等价；参见 [13, 引理 4.15]。□

由此，我们得到以下刻画。

推论 5.15. $\mathcal{P}(\mathbf{Op})_{Segal}$ 中纤维对象之间的纤维化（即 *Reedy* 纤维 *Segal* 运算子）恰好是同构纤维化。□

6. An application to homotopy limits and colimits

作为上述结果的一个应用，我们证明，对于足够良好的树状 Segal 空间图表，在$\mathbf{sSet}_{\mathrm{CSS}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$中计算同伦极限时，可以省略完备化步骤。这由下面的结果得出。

定理 6.1. 设 $F\colon J \to \mathbf{sSet}_{\mathrm{Op}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 是一个图表，且 $\alpha\colon X \Rightarrow F$是从对象 X到 F的一个锥。那么， α 是$\mathbf{sSet}_{\mathrm{Op}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中的同伦极限锥，当且仅当它是$\mathbf{sSet}_{\mathrm{CSS}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$中的同伦极限锥。对偶地， F 下的余锥是$\mathbf{sSet}_{\mathrm{Op}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中的同伦余极限，当且仅当它是$\mathbf{sSet}_{\mathrm{CSS}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$中的同伦余极限。

证明。这是引理 5.6 的直接推论，同时也用到了这样一个事实：同伦极限（对偶地，同伦余极限）的概念只取决于弱等价类。□

请注意，由于**单纯集合**$_{\mathrm{Op}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中的纤维化比**单纯集合**$_{\mathrm{CSS}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$更多，因此在**单纯集合**$_{\mathrm{Op}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 中满足单射纤维的条件比在**单纯集合**$_{\mathrm{CSS}}^{\Omega^{\mathrm{op}}}$中更弱，而余纤维化则相反。从这个意义上说，定理 6.1 表明，在计算同伦极限和余极限时，我们确实兼得两全：只需进行两种替换中较弱的那一种。特别地，任意拉回方形

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

其中 X、 Y 和 Y' 是树状 Segal 空间，且 f 是同构纤维化，都是**单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ CSS中的同伦拉回。对偶地，任意推出方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

其中 A、 B和 C 是树状空间，且 i 在 **单纯集合**$^{\Omega^{\mathrm{op}}}$ 幺半群中是一个同伦推出。

References

[1] B. Ahrens、K. Kapulkin 和 M. Shulman。单值范畴与 Rezk 完备化。 *Mathematical Structures in Computer Science* 25 5 1010 1039, 2015 , ( ): –。

[2] C. Berger 和 I. Moerdijk。关于 Reedy 范畴概念的扩展。 *Mathematische Zeitschrift*，269 3 4 977 1004，2010（–）：–。[3] D.-C. Cisinski 和 I. Moerdijk。作为同伦拟 operad 模型的树状集合。 *Journal of Topology*，4 2 257( )：–299，2011。[4] D.-C. Cisinski 和 I. Moerdijk。树状 Segal 空间与 ∞-operad。 *Journal of Topology*，6(3)：675–704，2013。[5] L. Guetta、L. Moser、M. Sarazola 和 P. Verdugo。纤维化诱导模型结构。arXiv: 2301 07801 。[ ], 2023

math.AT。[6] J. J. Guti´errez 和 C. Roitzheim。沿 Quillen 双函子的 Bousfield 局部化。 *Applied Categorical Structures*，25 6 1113( )：–1136，2017。[7] G. Heuts、V. Hinich 和 I. Moerdijk。Lurie 模型与无穷拟 operad 的树状模型之间的等价性。 *Advances in Mathematics*，302：869–1043，2016。[8] G. Heuts 和 I. Moerdijk。 *Simplicial and Dendroidal Homotopy Theory*。施普林格国际出版，2022。[9] P. Hirschhorn。 *Model Categories and Their Localizations*。美国数学会，2009。[10] A. Joyal。拟范畴理论及其应用。 *Centre de Recerca Matemàtica CRM Quaderns*，45-2，2008。[11] J. Lurie。 *Higher Topos Theory*， *Annals of Mathematics Studies*第170卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009。[12] I. Moerdijk 和 I. Weiss。树状集合。 *Algebraic & Geometric Topology*，7(3)：1441–1470，2007。[13] L. Moser 和 J. Nuiten。用 Segal 空间建模（∞,1）-范畴。arXiv:2412.10359 [math.AT], 2024。[14] C. Rezk。一个同伦理论之同伦理论的模型。 *Transactions of the American Mathematical Society* 353 3 973 1007, 2001 , ( ): –。

João Candeias: Departament de Matemàtiques i Informàtica Universitat de Barcelona (UB). Gran , , , Via de les Corts Catalanes 585. 08007 Barcelona Spain

Javier J. Gutiérrez: Departament de Matemàtiques i Informàtica Universitat de Barcelona (UB). , , , Gran Via de les Corts Catalanes 585. 08007 Barcelona Spain