arXiv:2601.09544v1 [math.CT] 14 Jan 2026

分解前有限群的跨度范畴

DAVID BARNES 和 NIALL TAGGART

摘要。与经典的 1-范畴理论相比， ∞-范畴理论的一大优势在于，它为对 ∞-范畴的图表取（余）极限提供了稳健且具有同伦意义的框架。然而，在构造此类（余）极限时，明确指定所使用的∞-范畴的∞-范畴是哪一种变体，既微妙又至关重要。本文通过一个具体案例研究，展示了在特定情形下 ∞-范畴的（余）极限如何表现。我们证明，有限群的跨度范畴可以实现为其关于开正规子群的商群所对应的跨度范畴的余极限，并给出了若干关于等变（高阶）代数的应用。

1. 引言

自 ∞-范畴理论创立以来，学界始终认同一点：与较为经典的同伦论方法相比， ∞-范畴的一大优势在于能够以具有同伦意义且一致的方式，考察 ∞-范畴的极限和余极限。例如，文献中充斥着各种工具和技术，它们能够在相当技术性的约束条件下，为模型范畴图表的同伦极限赋予模型结构；而模型范畴的同伦余极限这一概念，至今仍十分微妙，以至于尚未发展出完善的理论。不过，在 ∞-范畴的世界里，只要有一个良好的 ∞-范畴的∞-范畴，这些（余）极限便可形式化地构造出来。后者确实存在，而良好的模型范畴的模型范畴则并不存在。

例如，考虑稳定同伦范畴 $\mathcal{SH}$。自古以来，同伦论学家便一致认为，稳定同伦范畴应当由带基点空间的范畴 $\mathcal{S}_*$通过形式上将球面变为可逆而构造出来。对这一刻画的一种可能解释是，稳定同伦范畴是

$$\mathcal{SH} = \lim(\cdots \xrightarrow{\Omega} \mathcal{S}_* \xrightarrow{\Omega} \mathcal{S}_*)$$

对带基点空间反复应用环路自函子所得的极限。我们可以在模型范畴的框架内证明这一说法，但在许多方面，这样的证明很大程度上只能归因于运气：我们很幸运，存在一个方便的带基点空间模型范畴，满足构造同伦极限模型结构所需的技术条件；我们很幸运，反复应用环路函子会得到一个由右 Quillen 函子组成的序列图表；我们很幸运，存在良好的谱模型范畴；而且我们很幸运，能够手工构造出谱模型范畴与同伦极限模型结构之间的 Quillen 等价。

在 ∞-范畴的世界里，即使运气用尽，我们仍能看到稳定同伦范畴是通过反转球面得到的。我们可以将谱的 ∞-范畴 Sp 定义为

$$\mathrm{Sp} \coloneqq \lim(\cdots \xrightarrow{\Omega} \mathcal{S}_* \xrightarrow{\Omega} \mathcal{S}_*)$$

在 ∞-范畴的 ∞-范畴中，取有基点空间的 ∞-范畴上的环路函子的极限；稍加推导即可证明，任何良好谱模型范畴的底层 ∞-范畴都满足与我们的极限构造相同的泛性质：二者都是由单点空间在余极限下生成的自由稳定 ∞-范畴。

上述极限是在 ∞-范畴的 ∞-范畴中取的，但实际上还有更进一步的结论。例如，带基点空间的∞-范畴是可表的，而环路函子是一个右伴随，因此这个极限同样可以在可表 ∞-范畴及右伴随所构成的 ∞-范畴 Pr^R 中计算。转到相应的左伴随图表后，就得到可表 ∞-范畴及左伴随所构成的 ∞-范畴 Pr^L 中的一个图表

以及左伴随，并且我们可以将谱的 ∞-范畴解释为

$$\mathrm{Sp} \simeq \mathrm{colim}(\mathcal{S}_* \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{S}_* \xrightarrow{\Sigma} \cdots)$$

Pr^L 中对悬挂函子的迭代应用取余极限。这后一种描述更符合这样一种观点：稳定同伦范畴是通过将球面变为可逆对象而得到的。

在同伦论中，对 ∞-范畴取（余）极限的做法 ∞，即在某种形式的 ∞-范畴的Cat_∞、Pr^L或Pr^R中，现已无处不在，并带来了引人注目的应用，包括：Hermitian K-理论 [Cal+23；Cal+26；Cal+21]、等变稳定同伦论 [LNP25；BBB24],以及连续 K-理论 [Efi25]。

尽管这些构造已被广泛采用，文献中却缺少对它们通俗易懂、以实例为主的阐述。本文旨在填补这一空白。我们将概述 ∞-范畴的极限与余极限理论，并着重说明如何在多种形式的 ∞-范畴的 ∞-范畴中计算极限与余极限。

为展示读者如何应用这一理论，我们将以一个贯穿全文的例子为例：有限群的跨度范畴。有限群是紧致、豪斯多夫且全不连通的拓扑群。这类拓扑群还有一种更具代数性的描述：即有限群 G 可以分解为

$$G \cong \lim_{N \trianglelefteq_o G} G/N$$

其关于开正规子群的商群所构成的极限。我们对∞-范畴的（余）极限的研究，首先将这一结果范畴化为 G-集合范畴的结果。

定理 A （定理 3.2）。 设 G 是一个有限群。由[1] 的开正规子群所构成的集合索引的膨胀函子 G 汇集成一个 ∞-范畴

$$\operatorname*{colim}_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Fin}_{G/N} \simeq \mathrm{Fin}_G^{\delta},$$

之间的等价，其中左侧是有限 G/N-集合的 ∞-范畴所构成的余极限（在Cat_∞中），右侧是有限离散G-集合的 ∞-范畴。

这或许看起来与有限群的极限描述相矛盾；但通过普遍地添加滤过余极限，即转向 Ind-完备化，并考察这一过程如何与 ∞-范畴的（余）极限相互作用，我们便能得到一种类似的描述：将有限群视为其关于开正规子群的商群所构成的极限。

定理 B （推论 3.6）。 设 G 是一个有限群。固定点函子的集合[2] 组装成一个等价 ∞-范畴

$$\mathrm{Set}_G^{\delta} \simeq \lim_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Set}_{G/N}$$

介于离散 G-集合的 ∞-范畴与 G/N-集合的 ∞-范畴在 Pr^R 中的极限之间。对偶地，存在一个 ∞-范畴的等价

$$\operatorname*{colim}_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Set}_{G/N} \simeq \mathrm{Set}_G^{\delta}$$

介于 G/N-集合的 ∞-范畴在 Pr^L 中的余极限与离散 G-集合的 ∞-范畴之间 .

近年来同伦论诸多进展中的另一位关键参与者是 ∞-范畴，即跨度范畴，有时也称为对应范畴或有效伯恩赛德范畴。这是 ∞-范畴化增强，即 Lindner 的 [Lin76] (2,1)-跨度范畴。它在现代同伦论的诸多领域都有应用，包括：代数 K-理论 [BGT13], 等变同伦论 [BGS20],动机同伦论 [BH21], 高等代数 [Har20]以及六函子形式主义 [Sch25]。我们还对跨度 ∞-范畴的构造进行了通俗易懂的综述，并证明将其视为一个

[1] N-膨胀函子源自群的商 $G \to G/N$，通过前复合使一个有限 G/N-集合获得 G的作用。[2] N-不动点函子将一个有限 G-集合映射到由 N 的每个元素固定的元素所组成的集合；后一个集合带有由 G/N 给出的剩余作用。

适当变体之间的函子 ∞-范畴的 ∞-范畴，它保持极限和滤过余极限。这一分析结合定理A和定理B 证明了我们的下一个主定理。

定理 C （定理 4.6 和定理 4.9）。 设 G 是一个有限群。对 G 的开正规子群集合中的每个子群所考虑的不动点函子，组装成一个 ∞-范畴的等价

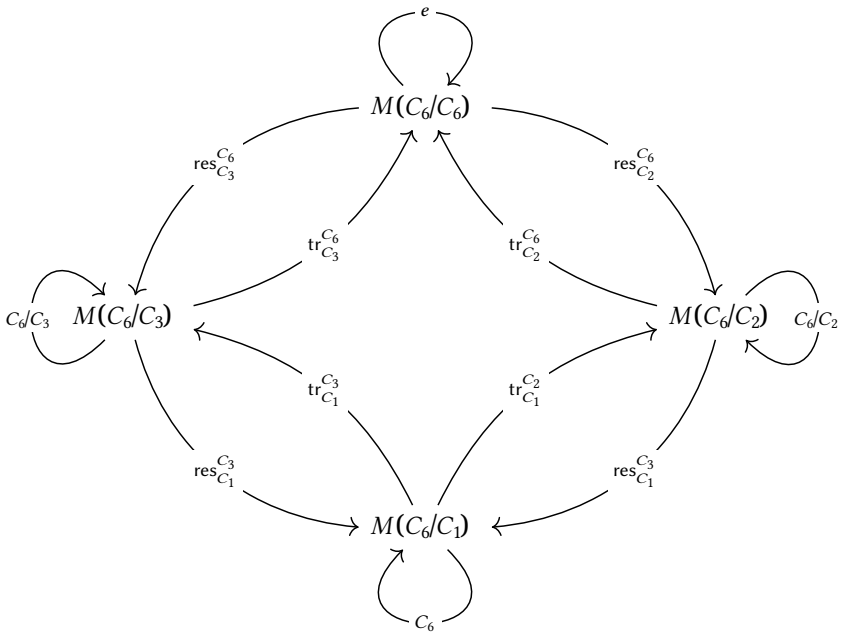
$$\mathrm{Span}(\mathrm{Set}_G^{\delta}) \simeq \lim_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Span}(\mathrm{Set}_{G/N})$$

即在 Cat_∞ 中， ∞-范畴的 G/N-集合的极限与离散 G-集合的 ∞-范畴之间的等价。此外，对 G 的开正规子群集合中的每个子群所考虑的膨胀函子，组装成一个 ∞-范畴的等价

$$\operatorname*{colim}_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_{G/N}) \simeq \mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G^{\delta}),$$

即在 Cat_∞ 中，有限 G/N-集合的 ∞-范畴的余极限与有限离散G-集合的 ∞-范畴之间的等价。这些等价彼此并非对偶。

我们将这一论述应用于等变（高阶）代数的研究。在稳定同伦论中，阿贝尔群嵌入稳定同伦范畴，且该嵌入是全忠实的。这是因为对于任意阿贝尔群 A，都可以赋予其 Eilenberg–MacLane 谱 HA，其同伦群可以恢复 A。在等变情形中，阿贝尔群被阿贝尔群的 Mackey 函子所取代。这些是由限制、迁移和共轭映射联系起来的阿贝尔群系统。例如，对于阶为 6 的循环群 C_6，阿贝尔群的 Mackey 函子 M 可以通过一个 Lewis 图表示：



由等变埃伦伯格–麦克莱恩谱函子，G 上的 Mackey 函子范畴 Mack(G; Ab)（取值于阿贝尔群）全忠实地嵌入到真正的等变稳定同伦范畴 $\mathcal{SH}_G$ 中。用更高代数的表述来说，等变谱的 ∞ 范畴就是由谱构成的 G-Mackey 函子的 ∞ 范畴，也就是说，存在一个等价

$$\mathcal{SH}_G \simeq \mathrm{Mack}(G; \mathcal{SH})$$

例如，参见 Barwick 的工作 [Bar17] 或 Guillou 和 May 的工作 [GM24]。当赋予等变结构的群是有限群时，稳定同伦论已由 Fausk [Fau08] 、第一位作者及其合作者 [BS24；BBB24]进行了深入研究。我们的最后一个主要结果为这些已知方法提供了一种替代方案和互补视角。此外，这个例子也让我们再次凸显了处理不同变体的 ∞范畴的 ∞-范畴时所涉及的细微差别，并进一步强调我们关于Cat_∞、Pr^R 和Pr^L中（余）极限之间微妙差异的观点。

定理 D (定理 5.6)。 设 $\mathcal{E}$ 是一个可表的半加性 ∞-范畴，且 G 是一个有限群。对 G的所有开正规子群取范畴固定点函子，构成一个 ∞-范畴的等价

$$\mathsf{Mack}(\mathsf{Fin}_G^{\delta}\,;\mathcal{E}) \simeq \lim_{N\leq_o G} \mathsf{Mack}(\mathsf{Fin}_{G/N}\,;\mathcal{E})$$

介于 G/N-*Mackey* 函子的 ∞-范畴在 Pr^R 中的极限，与 G-*Mackey* 函子的 ∞-范畴之间。对偶地，存在一个 ∞-范畴的等价

$$\operatorname*{colim}_{N\leq_o G} \mathsf{Mack}(\mathsf{Fin}_{G/N}\,;\mathcal{E}) \simeq \mathsf{Mack}(\mathsf{Fin}_G^{\delta}\,;\mathcal{E})$$

介于 G/N-*Mackey* 函子的 ∞-范畴在 Pr^L 中的余极限，与 G-*Mackey*$^{\frown}$函子的 ∞-范畴之间。如果 $\mathcal{E}$ 不可表，那么极限等价成立于可能较大的 ∞-范畴 Cat_∞ 中的 ∞-范畴，但余极限等价不成立。

致谢。 我们感谢 Kaya Arro 和 Bastiaan Cnossen 与我们进行了有益的交谈。NT 得到了英国工程与自然科学研究委员会的资助，资助编号为 EP/Z534705/1。

约定与记号。

- 我们用 Cat_∞ 表示（本质上）小的 ∞-范畴所构成的 ∞-范畴。
- 我们用 Pr^L 表示由可表 ∞-范畴及其左伴随构成的 ∞-范畴。这里，可表性意味着左伴随等价于保持所有余极限。
- 我们用 Pr^R 表示由可表 ∞-范畴及其右伴随构成的 ∞-范畴。这里，可表性意味着右伴随等价于保持所有极限。$^{\frown}$
- 我们用 Cat_∞ 表示（可能是）大型 ∞-范畴构成的 ∞-范畴。

2. ∞-范畴的（余）极限

本节旨在理解如何计算 ∞-范畴的极限和余极限。我们将首先讨论如何在小 ∞-范畴构成的 ∞-范畴中计算这些极限和余极限；相关讨论可直接推广到大型 ∞-范畴构成的 ∞-范畴。随后，我们将讨论如何在 ∞-范畴构成的 ∞-范畴的其他变体中计算（余）极限，并将其表述为相对于本质小 ∞-范畴构成的 ∞-范畴 Cat_∞，或可能是大型 ∞-范畴构成的 ∞-范畴 Cat_∞ 的相对陈述。

2.1. **∞-范畴的极限**。 根据 [Lur25，推论 02TL]，本质小的 ∞-范畴所构成的 ∞-范畴 Cat_∞ 具有所有小极限。我们将描述这些极限是如何构造的，但若需更全面的论述，请读者参阅 [Lur25，小节 02T0] 或 [Lur09，§3.3.3]。

设 I 表示一个小 ∞-范畴，并设 $\mathcal{C}_{(-)}\colon\ I \to \mathsf{Cat}_\infty$。由直化-反直化[3] 可知，函子 $\mathcal{C}_{(-)}$ 的数据等价于一个余笛卡尔纤维化的数据

$$U : \int_I \mathcal{C}_{(-)} \longrightarrow I,$$

其中 $\int_I \mathcal{C}_{(-)}$是 ∞的元素 $\mathcal{C}_{(-)}$范畴。 $\int_I \mathcal{C}_{(-)}$的对象由有序对（i， X）给出，其中 $i \in I$且 $X \in \mathcal{C}_i$，参见 [Lur25，例 026V]，；而 $\int_I \mathcal{C}_{(-)}$中从（i， X）到（j， Y）的态射由有序对（f， u）给出，其中 $f\colon\ i \to j$是 I中的一个态射，且 $u\colon \mathcal{C}_{(f)}\ (X)\ \to Y$是 $\mathcal{C}_j$中的一个态射，参见 [Lur25，例 026W]。关于 ∞元素范畴的全面介绍可见 [Lur25，第 026H]小节。根据 [Lur25，推论 02TK]，函子 $\mathcal{C}_{(-)}\colon\ I \to \mathsf{Cat}_\infty$ 的极限为

$$\lim_{i\in I} \mathcal{C}_i \simeq \mathsf{Fun}^{\mathrm{cocart}}_{/I}(I, \textstyle\int_I \mathcal{C}_{(-)}) =: \Gamma(I, \textstyle\int_I \mathcal{C}_{(-)}),$$

[3]有时也称为“（Lurie-）格罗滕迪克构造”，或“协变传输”。

the ∞-范畴的余笛卡尔截面，其中余笛卡尔纤维化为 $U\colon \int_I \mathcal{C}_{(-)} \to I$，即纤维化 U，它将 I中的每个态射映射为 U-余笛卡尔[4] 态射 $\int_I \mathcal{C}_{(-)}$。

2.2. **小型 ∞-范畴的余极限**。现在我们转而关注 ∞-范畴的余极限图这一情形。我们关注的情形仅限于滤过余极限，但为便于说明，也会简要讨论一般情形。根据 [Lur25，推论 02V1]， ∞-范畴 Cat_∞ （本质上）小的 ∞-范畴构成的范畴存在所有小余极限；更全面的论述见 [Lur25，小节 02UN]或 [Lur09，§3.3。。

给定一个函子 $\mathcal{C}_{(-)}\colon I \to \mathrm{Cat}_\infty$，我们再次用其关联的余笛卡尔纤维化表示 $\mathcal{C}_{(-)}\colon U\colon \int_I \mathcal{C}_{(-)} \to I$。根据 [Lur25，推论 02V0]， 函子 $\mathcal{C}_{(-)}$ 的余极限由下式给出

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i \simeq \int_I \mathcal{C}_{(-)}[W^{-1}],$$

在 W 个 U-余笛卡尔态射的集合处局部化 ∞-范畴 $\int_I \mathcal{C}_{(-)}$ of $\mathcal{C}_{(-)}$ 的元素 the s.

现在我们将范围限制在以下情形： I 是一个滤过的 ∞-范畴。事实上，就我们的目的而言，只需考虑 I 是一个滤过的1-范畴的情形。关于滤过的 ∞-范畴余极限理论的全面介绍，读者可参阅 Lurie 的论述 [Lur25，小节 062Y] 以及 Rozenblyum 的论述 [Roz12]。

设 $\mathcal{C}_{(-)}\colon I \to \mathrm{Cat}_\infty$ 是一个函子，并且 I是一个滤过的 ∞-范畴，其含义见 [Lur25，定义 02P9]。$\mathrm{colim}_I \mathcal{C}_{(-)}$的对象由 $\mathcal{C}_i$的对象在典范函子 $\mathcal{C}_i \to \mathrm{colim}_I \mathcal{C}_{(-)}$下的像给出，即

$$\mathrm{Ob}\left(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i\right) = \coprod_{i\in I} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)/\sim$$

其中 $X_i \sim X_j$ 当且仅当存在一串锯齿形的映射 $i \xrightarrow{f} k \xleftarrow{g} j$，它们位于 I 中，并且在 $\mathcal{C}_k$ 中有一个等价 $\mathcal{C}_f(X_i) \simeq \mathcal{C}_g(X_j)$。由此看出，$\mathrm{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 的对象的这一刻画本质上是将余极限定义为元素 ∞-范畴的局部化后进行展开所得的练习。特别地，$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 中的对象 X 出现在某个 $\mathcal{C}_i$ 中。我们将相应的对象记为 X_i，从而 X_i 在典范映射 $\mathcal{C}_i \to \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 下映到 X。给定余极限 $\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 的两个对象 X 和 Y，我们可以找到一个 i、 $j \in I$，使得 X 在 $\mathcal{C}_j$ 中由 $X_i \in \mathcal{C}_i$ 表示，而 Y 由 Y_j 表示。由于 I 是滤过的，对于满足 $k \geq i$、 j 的 $k \in I$，对象 X 可以等价地表示为 $\mathcal{C}_f(X_i) = X_k \in \mathcal{C}_k$，其中 $f\colon i \to k$；同样，对象 Y 可以等价地表示为 $\mathcal{C}_g(Y_j) = Y_k \in \mathcal{C}_k$，其中 $g\colon j \to k$。因此，$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 中的映射空间为

$$\mathrm{Map}_{\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i}(X, Y) = \mathrm{colim}_{k\in I^{(i,j)/}} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_k}(X_k, Y_k).$$

其中， $I^{(i,j)/}$是 I 中以 $i \to k \leftarrow j$ 为对象的图表范畴。由于这类 k 在 I 中是余终的，通常写作

$$\mathrm{Map}_{\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i}(X, Y) = \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_i}(X_i, Y_i),$$

例如，参见 [Roz12，引理 0.2.1 及 §0。4]。

2.3. **潜在大 ∞-范畴的（余）极限**。 记 Cat_∞ 为潜在大∞-范畴的 ∞-范畴。通过转到一个更大的宇宙（我们在全文中一直省略未提），上述讨论可推广为提供计算 Cat_∞中（余）极限的方法；也就是说，余极限是格罗滕迪克构造的局部化，而极限则由与格罗滕迪克构造相关联的纤维化的笛卡尔截面给出。

[4]态射 $(f,u)\colon (i,X) \to (j,Y)$是 U-余笛卡尔的 当且仅当 $u\colon \mathcal{C}_f(X) \to Y$是 $\mathcal{C}_j$中的一个等价，见 [Lur25，注记 026X]。

2.4. **可表 ∞-范畴的（余）极限。** 记 Pr^L 为 ∞-范畴，其对象为可表 ∞-范畴，态射为左伴随；并记 Pr^R 为 ∞-范畴，其对象为可表 ∞-范畴，态射为右伴随，参见例如 [Lur09，定义 5.5.3。1]根据 [Lur09，命题 5.5.3.13 和定理 5.5.3，18] Pr^L 和Pr^R 都具有所有小极限，且包含函子[5]

$$\mathrm{Pr}^L \hookrightarrow \widehat{\mathrm{Cat}_\infty}$$
$$\mathrm{Pr}^R \hookrightarrow \widehat{\mathrm{Cat}_\infty}$$

保极限。由可表 ∞-范畴及左伴随构成的 ∞-范畴 Pr^L，与由可表 ∞-范畴及右伴随构成的 ∞-范畴 Pr^R 对偶；也就是说，存在一个等价 $(\mathrm{Pr}^L)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Pr}^R$，它是通过取伴随得到的，参见例如 [Lur09，推论 5.5.3.4]。由此可知，Pr^L 中的余锥是余极限余锥，当且仅当取右伴随所得到的锥是Pr^R中的极限锥。换言之，Pr^L 中的余极限是通过取伴随并计算 Pr^R中的极限得到的，而后者又可以在 $\widehat{\mathrm{Cat}_\infty}$中计算。

特别地，对于 $\mathcal{C}_{(-)} \colon I \to \mathrm{Pr}^L$，给定 Pr^L中的一组相容映射 $\{f_i \colon \mathcal{C}_i \to \mathcal{D}\}_{i\in I}$，可诱导出一个映射

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{D}.$$

转而考虑 $\{f_i\}_{i\in I}$的右伴随，可得到一个诱导映射

$$\mathcal{D} \longrightarrow \lim_{i\in I} \mathcal{C}_i$$

它位于 Pr^R 中。由上述讨论，以下引理显然成立。

引理 2.1。 设 $\mathcal{C}_{(-)} \colon I \to \mathrm{Pr}^L$ 是一个可表 ∞-范畴的图表，并设 $\mathcal{D}$ 是一个可表∞-范畴。若$\{f_i \colon \mathcal{C}_i \to \mathcal{D}\}_{i\in I}$是$\mathrm{Pr}^L$中的一族相容映射，则诱导映射

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{D}$$

是Pr^L 中的一个等价，当且仅当映射

$$\mathcal{D} \longrightarrow \lim_{i\in I} \mathcal{C}_i,$$

由$\{f_i\}_{i\in I}$的右伴随诱导的映射是Pr^R中的一个等价。

2.5. **（余）极限与函子范畴。** 我们先简要探讨一下笛卡尔闭 ∞-范畴的概况。关于此主题的全面论述可见 [Lur25，第 05UE 小节],不过，遵循本文的宗旨，我们只概述与我们相关的主要特征。基本上，一个∞-范畴 $\mathcal{C}$ 是 笛卡尔闭 的，当且仅当它具有有限积，并且对每个对象 C 属于 $\mathcal{C}$，函子

$$C \times (-) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

是一个左伴随。我们将右伴随记为 $\mathcal{C}(X, -) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，并称之为内部 Hom 对象；精确定义见例如 [Lur25, Definition 05UJ] 。迄今为止，本文讨论过的许多 ∞-范畴都是笛卡尔闭的，例如，小 ∞-范畴组成的 ∞-范畴 $\widehat{\mathrm{Cat}_\infty}$ 是笛卡尔闭的 [Lur25, Example 05UR] ；通过类似的论证，只需在“较大”的宇宙中进行，同样可知 ∞-范畴 Cat_∞ 也是笛卡尔闭的。不过，我们强烈建议读者不要在这些集合论问题上花费太多心思。在这两种情形下，内部 Hom 对象都由函子范畴 $\mathrm{Fun}(C, -)$ 给出。

这一事实想必为专家所熟知，但我们未能在文献中找到证明，尽管该证明的过程与在 1-范畴情形下完全相同。

引理 2.2。 设 $\mathcal{C}$ 是一个双完备笛卡尔闭 ∞-范畴。给定一个图表 $\mathcal{C}_{(-)} \colon I \to \mathcal{C}$，存在一个等价关系

$$\mathcal{C}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, D) \simeq \lim_{i\in I} \mathcal{C}(\mathcal{C}_i, D)$$

对每个 $D \in \mathcal{C}$。

[5]包含映射函子会“忘记”该 ∞-范畴是可表的，也会忘记该函子是左伴随（分别为右伴随）。

证明。我们将采用米田式论证，并证明对象 $\mathcal{C}(\operatorname{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i,\ D)$ 和 $\lim_{i\in I} \mathcal{C}(\mathcal{C}_i,\ D)$ 表示 $\mathcal{C}$ 上的同一个预层，即存在一个等价

$$\mathrm{Map}(C, \mathcal{C}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, D)) \simeq \mathrm{Map}(C, \lim_{i\in I} \mathcal{C}(\mathcal{C}_i, D))$$

对于每个 $C \in \mathcal{C}$。事实上，存在一系列等价

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}(C, \mathcal{C}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, D)) &\simeq \mathrm{Map}(C \times \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, D) \\
&\simeq \mathrm{Map}(\operatorname*{colim}_{i\in I} (C \times \mathcal{C}_i), D) \\
&\simeq \lim_{i\in I} \mathrm{Map}(C \times \mathcal{C}_i, D) \\
&\simeq \lim_{i\in I} \mathrm{Map}(C, \mathcal{C}(\mathcal{C}_i, D)) \\
&\simeq \mathrm{Map}(C, \lim_{i\in I} \mathcal{C}(\mathcal{C}_i, D))
\end{aligned}$$

其中，第一个、第二个和第四个等价本质上是应用了 $\mathcal{C}$是笛卡尔闭的这一事实，而第三个和第五个等价则是映射空间与（余）极限之间的标准关系。□

引理 2.3。设 $\mathcal{C}_{(-)}\colon\ I \to \mathrm{Cat}_\infty$ 是小 ∞-范畴的图。对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{D}$，存在一个等价

$$\mathrm{Fun}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \mathcal{D}) \simeq \lim_{i\in I} \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_i, \mathcal{D})$$

$\widehat{\ }$介于 ∞-范畴——即在余极限 $\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$（在$\mathrm{Cat}_\infty$中计算）上取值于 $\mathcal{D}$的函子范畴——与 $\mathcal{C}_i$上取值于 $\mathcal{D}$的函子范畴的∞-范畴的极限（在Cat_∞中）之间。

$\widehat{\ }$证明。 包含映射函子$\mathrm{Cat}_\infty \hookrightarrow \mathrm{Cat}_\infty$ 保持余极限，因此证明归结为说明$\widehat{\ }\mathrm{Fun}(-,\ -)$ 是 Cat_∞ 的内部 Hom 对象。这一点由 [Lur25，Example05UR]（经过大小论证的调整）得出。□

在上述引理的情形下，如果 $\mathcal{D}$ 是可表的，那么 ∞-范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}_i, \mathcal{D})$ 由 [Lur09，命题 5.5.3，可知是可表的。6]此外，余极限中的过渡映射 $f_i^j\colon\ \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}_j$ 诱导出一个伴随对

$$(f_i^j)_! : \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_i, \mathcal{D}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_j, \mathcal{D}) : (f_i^j)^*\ ,$$

且上面的极限取遍限制映射。由此可知，函子范畴的图表是 $\mathbf{Pr}^R$中的一个图表，因此可以在那里计算该极限。

推论 2.4。设 $\mathcal{C}_{(-)}\colon\ I \to \mathrm{Cat}_\infty$ 是小型 ∞-范畴的一个图表。对于任意可表的 ∞-范畴$\mathcal{D}$，存在一个等价

$$\mathrm{Fun}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \mathcal{D}) \simeq \lim_{i\in I} \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_i, \mathcal{D})$$

在 ∞-范畴的 $\mathcal{D}$-值函子范畴（在Cat_∞中计算的$\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$）与$\infty$-范畴的极限（在$\mathrm{Pr}^R$中）之间，其中这些范畴由从 $\mathcal{C}_i$上的 $\mathcal{D}$-值函子构成。

转而考虑伴随，即利用 $\mathbf{Pr}^R$ 中的极限就是 $\mathbf{Pr}^L$中的余极限，可得如下结论。

推论 2.5。设 $\mathcal{C}_{(-)}\colon\ I \to \mathrm{Cat}_\infty$ 是小 ∞-范畴的一个二元图。对于任意可表 ∞-范畴$\mathcal{D}$，存在一个等价

$$\mathrm{Fun}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \mathcal{D}) \simeq \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_i, \mathcal{D})$$

∞范畴与 $\mathcal{D}$值函子范畴之间的余极限 $\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$（在$\mathrm{Cat}_\infty$中计算），以及 $\mathcal{D}$值函子范畴的余极限（在Pr^L中）。

3. G-集合的范畴

设G为拓扑群。对我们的目的而言，只需考虑G为有限群的情形。我们将记 Set_G 为带有群 G作用的集合范畴。请注意，对底层集合没有任何有限性假设。

对于任意拓扑群 G 和其正规子群 N，典范投影 $G \to G/N$ 诱导出一个伴随

$$\inf_{G/N}^{G} : \mathsf{Set}_{G/N} \rightleftarrows \mathsf{Set}_G : (-)^N .$$

左伴随通常称为 膨胀 ，其定义使得 N 的作用平凡，因此单位映射

$$X \longrightarrow (\inf_{G/N}^{G}(X))^N,$$

等价于恒等映射。余单位

$$\inf_{G/N}^{G}(X^N) \longrightarrow X,$$

作为集合间的映射，对应于包含映射 $X^N \hookrightarrow X$，因此是一个单射。

设 G 是一个有限群。开正规子群的集合 $\{N \leq_o G\}$ 关于子群包含构成一个偏序集，而群 G 等价地可描述为以下函子的直（余滤）极限

$$(\{N \leq_o G\}, \subseteq) \longrightarrow \mathsf{Grp}, \quad N \longmapsto G/N.$$

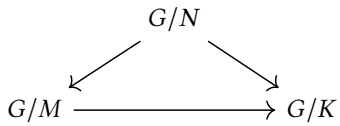
例如， p-进整数 $\mathbb{Z}_p$ 是以下图表的直极限

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^3 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/p$$

由典范投影诱导。对于 $M \subseteq N$，典范投影 $G/M \to G/N$ 诱导出一个伴随对

$$\inf_{G/N}^{G/M} : \mathsf{Set}_{G/N} \rightleftarrows \mathsf{Set}_{G/M} : (-)^M .$$

由于这些投影彼此相容，即图表



交换，上述伴随与偏序集结构相容，即图表



对于 G 的开正规子群 $K \subseteq M \subseteq N$，这些图表交换。因此，我们可以沿不动点函子取余滤极限，并沿膨胀函子取滤过余极限。

Set_G 有若干子范畴对我们至关重要，上述讨论也适用于其中任意一个子范畴。我们将有限 G-集范畴记为 Fin_G。

定义 3.1。 设 G是一个有限群。若一个 G-集 X满足以下条件，则称其为离散的[6]： 典范映射 p

$$\operatorname*{colim}_{N \leq_o G} X^N \longrightarrow X,$$

是一个同构。注意，当X 赋予离散拓扑时， G-集 X是离散的，当且仅当 G的作用是连续的。我们将离散 G-集范畴记为 Set_G^{δ} ，将有限离散 G-集范畴记为 Fin_G^{δ}。

有限离散 G 集合可以描述为有限商的滤过余极限。

[6]关于离散 G-集的更详尽讨论，参见 [BS24，定义 3.1] 及其后续讨论。

定理 3.2. 设 G 是一个有限群。遍历 G 的开正规子群所得的膨胀函子族，构成一个 ∞-范畴之间的等价

$$\operatorname*{colim}_{N\trianglelefteq_o G} \mathsf{Fin}_{G/N} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Fin}_G^{\delta},$$

在 Cat_∞ 中的余极限（由有限 G/N-集的 ∞-范畴构成）与有限离散G-集的 ∞-范畴之间。

证明。 设 N 是 G 的一个开正规子群。对于有限 G/N-集 X，将 X 膨胀为 G-集后仍然是有限且离散的，因为 $\inf_{G/N}^{G}$ 中的每个点都被 N 固定。因此，膨胀函子的集合组装成一个函子

$$\inf : \operatorname*{colim}_{N\trianglelefteq_o G} \mathsf{Fin}_{G/N} \longrightarrow \mathsf{Fin}_G^{\delta},$$

我们将证明这是 ∞-范畴之间的一个等价。为说明诱导函子是本质满的，注意任意有限离散 G-集 X 都被某个开子群 H 固定，而该子群必然包含一个开正规子群 N。

只需证明该函子是全忠实的。对于有限离散 G-集之间的映射 $X \to Y$，存在一个开正规子群 N，使得 X 和 Y 都被 N 固定。因此，该映射$X \to Y$ 出现在余极限的 N 项中。此构造为由 inf 诱导的映射的逆映射提供了一个逆：colim

$_{N\trianglelefteq_o G}$ 有限$_{G/N} \longrightarrow$ 关于映射集。□

通过 Ind-完备化（即形式上添入滤过余极限），我们可以将上述关于有限（离散） G-集的结果推广到所有 G-集。对于一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，如果一个函子 $H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 将 $\mathcal{C}$ 展示为 $\mathcal{C}$ 的*Ind*-完备化，我们就称之为如此；此时 $\mathcal{C}$ 存在滤过余极限，并且对于任意存在滤过余极限的 ∞-范畴 $\mathcal{D}$，所诱导的函子

$$\mathsf{Fun}^{\omega}(\hat{\mathcal{C}}, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

ˆ是以下两者之间的等价： ∞从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的保有限余极限函子的范畴，以及 ∞从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$的函子范畴，参见例如 [Lur25，定义 063K]。Ind-完备化构成一个函子

$$\mathsf{Ind} : \mathrm{Cat}_\infty \longrightarrow \mathrm{Acc},$$

从 ∞-范畴的 ∞-范畴到可达 ∞-范畴及其间的可达函子的 ∞-范畴。如果我们假设输入范畴具有有限余极限，则 Ind-完备化定义了一个函子

$$\mathsf{Ind} : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{rex}} \longrightarrow \mathrm{Pr}^L,$$

从有限余完备 ∞-范畴及右正合[7] 函子的 ∞-范畴到可表 ∞-范畴及左伴随的 ∞-范畴。根据 [Lur09，命题 5.4.2.19 和命题 5.5.7，10]此函子将后一个范畴表明为前一个范畴的局部化，因此 Ind-完备化（以这种形式）保持余极限，另见 [Lur09，命题 5.3.510]。Pr^L 中的余极限是通过等价 $(\mathrm{Pr}^L)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Pr}^R$ 转到右伴随所构成的图表，并计算其极限得到的。由于遗忘函子 $\mathrm{Pr}^R \to \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$ 保持极限 [Lur09，定理 5.5.3，18], 我们得到以下关于 ∞-范畴余极限的 Ind-完备化的描述。

引理 3.3. 设 $\mathcal{C}_{(-)}\colon I \to \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{rex}}$是有限余完备 ∞-范畴的一个图表。存在一个 ∞-范畴的等价

$$\mathsf{Ind}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i) \simeq \lim_{i\in I} \mathsf{Ind}(\mathcal{C}_i),$$

在 $\mathcal{C}_{(-)}$ 的余极限（在Cat_∞中）的 *Ind*-完备化与$\mathcal{C}_{(-)}$的 *Ind*-完备化的极限（在 Pr^R中）之间。

证明。 该函子

$$\mathsf{Ind} : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{rex}} \longrightarrow \mathrm{Pr}^L,$$

[7]如果一个函子保有限余极限，则称其为右正合 。

保持余极限，因为它将后一个范畴表示为前一个范畴的局部化。由两个范畴中余极限的计算方式可得结论：$\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{rex}}$中的余极限在$\mathrm{Cat}_\infty$ 中计算，而Pr^L 中的余极限作为Pr^R中的极限计算。□

例 3.4. 设 G 是一个有限群。有限 G-集的 ∞-范畴 Fin_G 的 Ind-完备化是所有 G-集构成的 ∞-范畴 Set_G。

证明。 根据 [Lur25， 注 065F], Ind-完备化与取神经的运算可交换，因此只需证明，1-范畴 G-集是作为 1-范畴的 Ind-完备化，即 1-范畴 Fin_G。这一完全经典的结论可由以下观察得出：包含映射 $\mathrm{Fin}_G \hookrightarrow \mathrm{Set}_G$ 是全忠实的，有限 G- 集是 G- 集范畴中的紧对象，并且每个 G- 集都可写成有限 G-集的滤过余极限。 □

例 3.5. 设 G 是一个有限群。有限离散G-集的 ∞-范畴 Fin_G^δ 的 Ind-完备化是离散 G-集构成的 ∞-范畴 Set_G^δ。

证明。 如上所述，这归结为一个 1-范畴论命题，其证明完全类似，只需利用离散 G-集的余极限描述即可。□

我们得到定理3.2的以下推论。

推论 3.6。 设 G 是一个有限群。不动点函子的集合构成一个等价的 ∞-范畴

$$\mathrm{Set}_G^\delta \xrightarrow{\simeq} \lim_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Set}_{G/N}$$

介于离散 G-集的 ∞-范畴与 G/N-集的 ∞-范畴在Pr^R中的极限之间。

证明。 根据定理3.2，存在一个等价

$$\operatorname*{colim}_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Fin}_{G/N} \simeq \mathrm{Fin}_G^\delta$$

介于有限 G/N-集的 ∞-范畴在 Cat_∞中的余极限与有限离散G-集的 ∞-范畴之间。对这个等价应用 Ind-完备化，即可得到一个等价

$$\mathrm{Ind}\left(\operatorname*{colim}_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Fin}_{G/N}\right) \simeq \mathrm{Ind}(\mathrm{Fin}_G^\delta)$$

有限 Cat_∞ 中 ∞-范畴余极限的 Ind-完备化与有限 G/N-集合的 ∞-范畴 Ind-完备化之间。根据引理 3.3 ， Ind-完备化将$\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{rex}}$中的余极限映为 Pr^R中的极限，因此存在一个等价

$$\lim_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Ind}(\mathrm{Fin}_{G/N}) \simeq \mathrm{Ind}(\mathrm{Fin}_G^\delta)$$

因为 ∞有限 G/N-集合的范畴是有限余完备的，且膨胀函子是右正合的。利用例 3.4 将等价左侧与引理陈述中所述等价的左侧对应起来，并类似地利用例 3.5 将右侧对应起来，即可得出结论。涉及的函子的对应关系由引理 2.1 给出。 □

4. SPAN CATEGORIES

我们依照 [Bar17，§3。7]作如下定义。关于记录单纯集合底层n-单纯形的精确定义 ∞-范畴可见于 [Bar17，定义 3。6]。

定义 4.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个允许拉回的 ∞-范畴。*span* ∞-范畴 $\mathrm{Span}(\mathcal{C})$ 的 $\mathcal{C}$是一个∞-范畴，其对象为 $\mathcal{C}$ 的对象，映射空间由下式给出：

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Span}(\mathcal{C})}(X, Y) = \left(\mathcal{C}_{/\{X,Y\}}\right)^{\simeq}.$$

复合

$$\left(\mathcal{C}_{/\{X,Y\}}\right)^{\simeq} \times \left(\mathcal{C}_{/\{Y,Z\}}\right)^{\simeq} \longrightarrow \left(\mathcal{C}_{/\{X,Z\}}\right)^{\simeq}$$

由拉回定义，且在相干同伦意义下唯一。

注 4.2。 对于 G 有限群，通常将有限 G-集的跨度范畴记为 $\mathrm{Span}(G)$。 当 G 为有限群时，通常（但不如对有限群那样普遍）将有限离散 G-集的跨度范畴记为 $\mathrm{Span}(G)$， 例如参见 [Bar17，例 B]。由于我们已经引入了有限群 G的许多变体范畴， G因此我们不会拘泥于这一命名惯例，而是始终将 $\mathrm{Span}(\mathcal{C})$ 写作 ∞的跨度范畴 $\mathcal{C}$。

这一构造汇集为一个函子

$$\mathrm{Span}(-) : \mathrm{Cat}^{\mathrm{lex}} \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty,$$

从 ∞-范畴 ∞到具有有限极限的范畴及其间的左正合[8] 函子，映至 ∞-范畴 ∞-范畴。现在，我们将依循 Haugseng、Hebestreit、Linskens 和 Nuiten 的工作 [Hau+23]，给出这个函子的另一种构造。Cnossen 正在编写的书中提供了一个互补的视角（及另一种动机） [Cno25]。

定义 4.3。 一个适当三元组 $(\mathcal{C},\ \mathcal{C}_B,\ \mathcal{C}_F)$由一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 以及两个宽[9] 子-∞-范畴 $\mathcal{C}_B$ 和 $\mathcal{C}_F$组成，其态射分别称为后向和前向态射，并满足

(1) 对任意后向态射 $f\colon\ y \to x$ 以及任意前向态射 $g\colon\ x' \to x$，存在一个拉回

$$\begin{array}{ccc} y' & \xrightarrow{f'} & x' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ y & \xrightarrow[f]{} & x \end{array}$$

(2) 在任意这样的拉回中， f' 是后向态射，且 g' 是前向态射。

适当三元组之间的函子 $F\colon (\mathcal{C}, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_F) \to (\mathcal{D}, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_F)$ 由函子 $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 给出，该函子保持水平映射为反向、垂直映射为正向的拉回方块。用 AdTrip 表示由适当三元组及其间函子张成的 $\mathrm{Fun}(\Lambda_2[2], \mathrm{Cat}_\infty)$ 的（非全）子-∞-范畴，参见例如 [Hau+23，定义 2.1]。

此定义的要点在于，适当三元组是跨度范畴最一般的输入。就我们的目的而言，只需以下事实：若 $\mathcal{C}$ 存在拉回（例如，它是 $\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{lex}}$ 中的一个对象），则 $(\mathcal{C},\ \mathcal{C},\ \mathcal{C})$ 是一个适当三元组。特别地，这给出了一个全忠实嵌入

$$\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{lex}} \hookrightarrow \mathrm{AdTrip}.$$

定理 4.4 ([Hau+23，定理 A])。 存在一对伴随函子

$$\mathrm{Tw}^r : \mathrm{Cat}_\infty \rightleftarrows \mathrm{AdTrip} : \mathrm{Span}(-)\ ,$$

其中 $\mathrm{Tw}^r(\mathcal{C})$ 是扭箭头 ∞-范畴[10]，它是 $\mathcal{C}$ 经由 *[Hau+23，例 2.8].*

由 [Hau+23，定理 2。13] 可知，右伴随（我们沿用相同记号）的限制

$$\mathrm{Span}(-) : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{lex}} \hookrightarrow \mathrm{AdTrip} \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty,$$

与 Barwick 在定义 4.1 中的构造一致。 ∞-范畴 AdTrip 具有所有极限，且这些极限的计算方式为

$$\lim_{i\in I}(\mathcal{C}_i, (\mathcal{C}_i)_B, (\mathcal{C}_i)_F) \simeq (\lim_{i\in I}\mathcal{C}_i, \lim_{i\in I}(\mathcal{C}_i)_B, \lim_{i\in I}(\mathcal{C}_i)_F),$$

其中右侧的极限是在Cat_∞中计算的，参见例如 [Hau+23，引理 2。4]。换言之，适当三元组的 ∞-范畴具有极限，且这些极限是在 $\mathrm{Fun}(\Lambda_2[2],\ \mathrm{Cat}_\infty)$中计算的，因此是逐层在 Cat_∞中计算的。

---

[8]若函子左正合，则它保持有限极限。[9]一个宽子∞-范畴 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 的子范畴包含 $\mathcal{C}$的所有对象。[10]扭箭头 ∞-范畴是与 hom 函子相关联的元素 ∞-范畴，参见例如 [Lur25，定义 046B]。上标“r”表示我们考虑投影映射为右纤维化的版本，参见例如 [Lur25，记号 03JK]。

引理 4.5. 函子

$$\mathrm{Span}(-) : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{lex}} \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty,$$

保留所有极限。

证明. 所讨论的函子是以下复合

$$\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{lex}} \hookrightarrow \mathrm{AdTrip} \xrightarrow{\mathrm{Span}(-)} \mathrm{Cat}_\infty.$$

根据上文对 ∞-适当三元组范畴中极限如何计算的讨论，左侧函子保极限。右侧函子作为右伴随，也保极限。因此，复合函子也必然保极限。□

上述引理的一个直接推论是，对离散 G-集合的跨度范畴作如下刻画。

定理 4.6. 设 G 是一个有限群。遍历 G 的开正规子群所得的不动点函子族构成了一个 ∞-范畴的等价

$$\mathrm{Span}(\mathrm{Set}_G^{\delta}) \xrightarrow{\simeq} \lim_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Span}(\mathrm{Set}_{G/N}),$$

离散 G-集合的跨度 ∞-范畴与 G/N-集合的跨度 ∞-范畴在 Cat_∞ 中的极限之间。

证明。 这由推论3.6 和引理4.5结合而得，并利用引理2.1来识别这些函子。 □

注记 4.7。 上述极限仅存在于 ∞-范畴Cat_∞中。这有两个根本原因：跨度的 -范畴不可表，而左伴随函子未必会在跨度范畴层面诱导出左伴随函子。事实上，底层范畴上的伴随何时会在跨度范畴上诱导出伴随，这是一个微妙的问题，参见注记 5.2。

适当三元组的 ∞-范畴也有滤过余极限，而且其计算方式与极限类似，即对于滤过的 ∞-范畴 I，我们有

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} (\mathcal{C}_i, (\mathcal{C}_i)_{\mathrm{B}}, (\mathcal{C}_i)_{\mathrm{F}}) \simeq (\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \operatorname*{colim}_{i\in I} (\mathcal{C}_i)_{\mathrm{B}}, \operatorname*{colim}_{i\in I} (\mathcal{C}_i)_{\mathrm{F}}).$$

这基本上源于这样一个事实：在映射空间层面，滤过余极限与拉回可交换。跨度函子也与滤过余极限可交换[11]。

引理 4.8。 该函子

$$\mathrm{Span}(-) : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{lex}} \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty,$$

保持滤过余极限。

证明。 由 [Hau+23，定义 2。12], 可知，所涉及的函子可以分解为复合函子

$$\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{lex}} \hookrightarrow \mathrm{AdTrip} \xrightarrow{S_{\mathrm{Tw}^r}} \mathcal{S}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\mathrm{ac}} \mathrm{Cat}_\infty,$$

其中 ac： $\mathcal{S}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 是关联范畴函子，它是 Rezk 神经N： $\mathrm{Cat}_\infty \to \mathcal{S}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$的左伴随，而$S_{\mathrm{Tw}^r}$ 是与扭曲箭头 ∞-范畴函子相关联的奇异复形函子

$$\mathrm{Tw}^r : \Delta \longrightarrow \mathrm{AdTrip}, \quad [n] \longmapsto \mathrm{Tw}^r(\Delta[n]).$$

例如参见 [Hau+23，构造 2。10]。

It w只需证明该复合函子中的每个函子都保持滤过余极限。右侧函 c-
tor 是左伴随，因此保持滤过余极限，而左侧的函子保持滤过余极限 by

[11]还有另一种证明该结果的方法：注意到所讨论的命题等价于扭箭头 ∞-范畴 Tw^r保持紧对象，并证明适当三元组 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_{\mathrm{B}}, \mathcal{C}_{\mathrm{F}})$ 在 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}_{\mathrm{B}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathrm{F}}$ 都是 Cat_∞ 中的紧对象时，本身也是紧对象。这个观察源于 AdTrip 中的态射空间是有限极限。

关于如何计算适当三元组的滤过余极限的上述讨论，因此证明归结为证明奇异复形

$$S_{\mathrm{Tw}^r} : \mathsf{AdTrip} \longrightarrow \mathcal{S}^{\Delta^{\mathrm{op}}},$$

保滤过余极限，即对于滤过图表 $\mathcal{C}_{(-)} \colon I \to \mathsf{AdTrip}$，典范映射

$$S_{\mathrm{Tw}^r}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i) \simeq \operatorname*{colim}_{i\in I} S_{\mathrm{Tw}^r}(\mathcal{C}_i),$$

是单纯空间之间的等价。由于单纯空间的余极限是逐层计算的，只需证明典范映射

$$S_{\mathrm{Tw}^r}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i)[n] \simeq \operatorname*{colim}_{i\in I} S_{\mathrm{Tw}^r}(\mathcal{C}_i)[n],$$

是每个 $[n] \in \Delta$ 对应的空间之间的等价。展开定义可知，奇异复形函子由下式给出

$$(\mathcal{C}, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_F) \longmapsto ([n] \longmapsto \mathrm{Map}_{\mathsf{AdTrip}}(\mathrm{Tw}^r(\Delta[n]), (\mathcal{C}, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_F)) = Q_\bullet(\mathcal{C})$$

这里我们采用简洁记号 $Q_\bullet(\mathcal{C})$，以体现单纯对象与 Q-构造之间的关系。单纯空间 $Q_\bullet(\mathcal{C})$ 是一个完全 Segal 空间，见 [Hau+23，定理 2。13], 也就是说，存在等价

$$Q_n(\mathcal{C}) \simeq Q_1(\mathcal{C}) \times_{Q_0(\mathcal{C})} \cdots \times_{Q_0(\mathcal{C})} Q_1(\mathcal{C})$$

它们与面映射和退化映射相容。由于滤过余极限与空间中的拉回可交换，只需证明函子 $Q_0(-)$ 和 $Q_1(-)$ 与滤过余极限可交换。

函子 $Q_0(-) : \mathsf{AdTrip} \to \mathcal{S}$ 等价于以下复合

$$\mathsf{AdTrip} \xrightarrow{\text{forget}} \mathrm{Cat}_\infty \xrightarrow{(-)^{\simeq}} \mathcal{S},$$

这两个函子都与滤过余极限交换：左侧函子是因为适当三元组的滤过余极限是在 Cat_∞ 中计算的；右侧函子则是因为群胚核函子可以描述为 $(-)^{\simeq} \simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{Cat}_\infty}(*, -)$，因为它是包含映射 $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathrm{Cat}_\infty$的右伴随，并且 $*$ 作为一个 ∞-范畴是紧致的，见 [Lur25，命题 0689]。

对于函子 $Q_1(-) : \mathsf{AdTrip} \to \mathcal{S}$ 的情形，只需证明给定一个映射

$$\Lambda_2[2] \simeq \mathrm{Tw}^r([1]) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$$

适当三元组之间的映射，对于一个滤过图表 $\mathcal{C}_{(-)} \colon I \to \mathsf{AdTrip}$，则正向和反向两条腿分别落在 $(\mathcal{C}_i)_B$和 $(\mathcal{C}_i)_F$中，其中某个 $i \in I$。这是因为适当三元组的滤过余极限是在 Cat_∞中计算的。□

定理 4.9. 设 G 是一个有限群。对 G 的开正规子群集合中的各个子群所对应的膨胀函子，合起来构成了一个 ∞-范畴等价

$$\operatorname*{colim}_{N\trianglelefteq_o G} \mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_{G/N}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Span}(\mathrm{Fin}_G^{\delta}),$$

，介于有限 G/N-集的 *span* ∞-范畴的余极限（在Cat_∞中）与有限离散 G-集的 *span* ∞-范畴之间。

证明。 结合定理3.2 和引理4.8，并利用引理2.1 来确定这些函子，即可得出结论。□

5. pro有限群的 Mackey 函子

作为该理论的一个应用，我们考虑 pro有限群的 Mackey 函子。为此，我们需要引入一些术语。若 ∞-范畴 $\mathcal{C}$具有半加性，则称其为半加性的；也就是说，若 $\mathcal{C}$ 有基点、同时具有积和余积，且

$$\coprod_{i\in I} C_i \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i,$$

从 $\mathcal{C}$中对象的有限余积到 $\mathcal{C}$中对象的有限积的典范映射是一个等价。我们用 $\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{sadd}}$表示由半加性 ∞-范畴及保持双积的函子所张成的 Cat_∞ 的子-∞-范畴。若一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 具有有限极限和有限余积，且后者互不相交并且是万有的，也就是说，若函子

$$\prod_{i\in I}\mathcal{C}_{/C_i}\longrightarrow\mathcal{C}_{/\coprod_{i\in I}C_i}$$

由余积给出的等价，参见例如，[Bar17，定义 4。2] 及其中的参考文献。我们用 $\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{disj}}$ 表示由 ∞-范畴和保持拉回与有限余积的函子所张成的 Cat_∞ 的子- ∞范畴。

考虑析取 ∞-范畴的关键原因是，跨度函子将析取 ∞-范畴映为半加性 ∞-范畴，参见例如，[Bar17，命题 4。3]这使我们可以作出以下定义，沿用 [Bar17，定义 6。1], 另见 [Bar17，记号 6。3], 请注意，前引文献讨论的情形比我们当前讨论的情形一般得多。

定义 5.1。令 $\mathcal{C}$ 为一个析取 ∞-范畴，$\mathcal{E}$为一个半加性 ∞-范畴。∞-范畴$\mathrm{Mack}(\mathcal{C};\mathcal{E})$ 表示 $\mathcal{E}$-值 *Mackey* 函子在 $\mathcal{C}$ 上的范畴，即 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}^{\oplus}(\mathrm{Span}(\mathcal{C})\ \mathcal{E})$，其对象为从 $\mathcal{C}$ 的跨度范畴到 $\mathcal{E}$的保（余）积函子[12]

∞-范畴中取值于 $\mathcal{E}$ 的 Mackey 函子，其定义在 $\mathcal{C}$ 上；它具有 $\mathcal{E}$ 所具有的所有极限和余极限，并且这些极限和余极限都是逐层计算的，参见例如 [Bar17，推论 6.5.1]。假设 $\mathcal{E}$ 是双完备的，则 Mackey 函子的 ∞-范畴是 [BGS20，引理 3.5] 中所述的 $\mathrm{Span}(\mathcal{C})\ \mathcal{E}$ 的 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathcal{C})\ \mathcal{E})$ 的一种 smashing [13] 局部化。因此，若 $\mathcal{E}$ 是可表的，则 $\mathcal{C}$ 中取值于 $\mathcal{E}$ 的 Mackey 函子的 ∞-范畴也是可表的。从现在起，我们假设 $\mathcal{E}$ 是可表且半加性的。两个析取 ∞-范畴之间的函子 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$（它必然保持有限余积和拉回）会诱导出一个伴随对

$$F_!:\mathrm{Mack}(\mathcal{C};\mathcal{E})\rightleftarrows\mathrm{Mack}(\mathcal{C};\mathcal{E}):F^*,$$

其中，右伴随由沿所诱导函子的限制给出

$$\mathrm{Span}(F):\mathrm{Span}(\mathcal{C})\to\mathrm{Span}(\mathcal{D}),$$

而左伴随由伴随函子定理 [Lur09，推论 5.5.2。9], 参见例如 [Bar17，记号 6。9]。

注 5.2。假设如上，$F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 具有右伴随 $G\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$。一般而言，$\mathrm{Span}(F)$ 不必是 $\mathrm{Span}(G)$ 的左伴随，因此在 Mackey 函子的层面上，F^* 不必等价于 $G_!$。事实上，当以下方块时，$\mathrm{Span}(F)$ 是 $\mathrm{Span}(G)$ 的左伴随

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & GF(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GF(f)} \\ X' & \xrightarrow{\eta} & GF(X') \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} FG(Y) & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \\ {\scriptstyle FG(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ FG(Y') & \xrightarrow{\varepsilon} & Y' \end{array}$$

对于每个映射 f，$X\to X'$在 $\mathcal{C}$中以及$g\colon Y\to Y'$在 $\mathcal{D}$中都存在拉回。考虑膨胀与不动点函子之间的伴随时，我们发现，在跨度范畴的层面上并不存在伴随对：对于该伴随，

$$\inf_{G/N}^{G}:\mathrm{Fin}_{G/N}\rightleftarrows\mathrm{Fin}_G:(-)^N,$$

[12]该 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}^{\oplus}(\mathrm{Span}(\mathcal{C})\ \mathcal{E})$ 定义为由保持（余）积的函子张成的 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathcal{C})\ \mathcal{E})$ 的全子范畴。[13]严格来说，[BGS20，引理 3。5] 仅证明了 Mackey 函子的 ∞-范畴是一个局部化。要说明它是 smashing 的，即局部化函子保持所有余极限，需要注意到全忠实包含保持所有余极限，而这正是 [Bar17，命题 6。5]的内容。

相应的图表为

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & (\inf_{G/N}^{G} X)^N \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\inf_{G/N}^{G}(f))^N} \\ X' & \xrightarrow{\eta} & (\inf_{G/N}^{G} X')^N \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \inf_{G/N}^{G}(Y^N) & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \\ {\scriptstyle \inf_{G/N}^{G}(g^N)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \inf_{G/N}^{G}((Y')^N) & \xrightarrow{\varepsilon} & Y' \end{array}$$

上方左侧的方形是拉回，因为单位是同构；但右侧的方形不一定是拉回，因为余单位只是单射。

本节旨在为有限群上的 Mackey 函子范畴提供一个（余）极限描述。由于 Mackey 函子是以保积函子的形式定义的，我们需要以下引理。

引理 5.3. 设 $\mathcal{E}$ 是一个（可能较大的） ∞-范畴，具有有限积；设 $\mathcal{C}_{(-)}\colon I \to \mathrm{Cat}_\infty^\times$ 是由具有有限积的小型 ∞-范畴组成的滤过图表。函子 $F\colon$ 余极限$_{i\in I}\ \mathcal{C}_i \to \mathcal{E}$ 保积，当且仅当每个分量 $F_i\colon \mathcal{C}_i \to \mathcal{E}$ 都保积。

证明。 设 $\mathcal{C}_{(-)}\colon I \to \mathrm{Cat}_\infty^\times$ 是由具有（有限）积的 ∞-范畴及保积映射组成的滤过图表。余极限 $\operatorname{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 按如下方式继承积。对于 $\operatorname{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 中的对象 X 和 Y，存在 $i,j \in I$，使得对于某些 $X_i \in \mathcal{C}_i$ 和 $Y_j \in \mathcal{C}_j$，有 $X = \eta_i(X_i)$ 且 $Y = \eta_j(Y_j)$，其中 $\eta_k\colon \mathcal{C}_k \to \operatorname{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 是典范映射。由于 I 是滤过的，存在（至少一个） $k \in I$ 满足 $i,j \le k$，使得对于 $X_k, Y_k \in \mathcal{C}_k$，有 $X = \eta_k(X_k)$ 且 $Y = \eta_k(Y_k)$。于是，积 $X \times Y$ 由下式给出

$$X \times Y = \eta_k(X_k \times Y_k).$$

特别地，根据定义，典范映射

$$\eta_k : \mathcal{C}_k \longrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$$

是保持积的。

现在考虑复合映射：

$$\mathcal{C}_i \xrightarrow{\eta_i} \underset{i\in I}{\text{余极限}}\ \mathcal{C}_i \xrightarrow{F} \mathcal{E}, \qquad F_i$$

它实现了引理 2.3中的等价。若 F 保持积，那么 F_i 对每个 $i \in I$ 也保持积，因为保持积的映射在复合下封闭。

反过来，假设对每个 $i \in I$，映射 $F_i\colon \mathcal{C}_i \to \mathcal{E}$ 都保持积。那么对于 X 和 Y 这两个 $\operatorname{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 的对象，存在 $k \in I$，使得

$$\begin{aligned} F(X \times Y) &\simeq F(\eta_k(X_k \times Y_k)) \\ &\simeq F_k(X_k \times Y_k) \\ &\simeq F_k(X_k) \times F_k(Y_k) \\ &\simeq F(\eta_k(X_k)) \times F(\eta_k(X_k)) \\ &\simeq F(X) \times F(Y) \end{aligned}$$

其中，第一个等价是根据余极限范畴中积的计算方式得出的，第二个等价是 F_k 作为复合的定义，第三个等价利用了 F_k 被假设为保持积这一事实，倒数第二个等价再次根据 F_k 作为复合的定义得出，而最后一个等价则根据指标范畴为滤过范畴时余极限范畴中对象的描述得出，见第2.2节。□

本节主定理（定理 5.6）证明的核心技术在于以下观察：函子 函$^{\otimes}(-,\ \mathcal{E})$ 保极限。

引理 5.4。 设 $\mathcal{E}$ 是一个可表半加性 ∞-范畴，并设 $\mathcal{C}_{(-)}: \quad I \to$ 范畴$_\infty^{\mathrm{sadd}}$是一个由半加性 ∞-范畴组成的滤过图表。存在一个 ∞-范畴的等价

$$\mathsf{Fun}^{\oplus}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \mathcal{E}) \simeq \lim_{i\in I} \mathsf{Fun}^{\oplus}(\mathcal{C}_i, \mathcal{E})$$

之间 n $\mathcal{E}$ 值保积函子在 $\mathcal{C}_{(-)}$ 的余极限（位于 Cat_∞ 中）与该
范畴 上取值于 $\mathcal{E}$ 的函子在 $\mathcal{C}_i$ 上的范畴。

证明。 考虑如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Fun}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\simeq} & \lim_{i\in I} \mathsf{Fun}(\mathcal{C}_i, \mathcal{E}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathsf{Fun}^{\oplus}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \lim_{i\in I} \mathsf{Fun}^{\oplus}(\mathcal{C}_i, \mathcal{E}) \end{array}$$

其中竖直箭头是全忠实包含，最上方的水平箭头根据引理 2.3是一个等价。我们希望证明下方的水平箭头是（可能较大的） ∞-范畴之间的等价。

对于本质满射性，设 $\{F_i\}_{i\in I}$是 $\lim_{i\in I}\mathsf{Fun}^{\oplus}(\mathcal{C}_i, \mathcal{E})$中的一个对象；也就是说，对每个 $i \in I$，函子F_i: $\mathcal{C}_i \to \mathcal{E}$ 保持积，而这类函子构成了第 2.1 节意义下的余笛卡尔截面。将余笛卡尔截面 $\{F_i\}_{i\in I}$ 嵌入更大的范畴 $\lim_{i\in I}\mathsf{Fun}(\mathcal{C}_i, \mathcal{E})$中，我们得到一个函子

$$F : \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{E},$$

其在上方等价下的像恰好是 $\{F_i\}_{i\in I}$。函子 F根据引理 5.3保持积，因此可提升为 $\mathsf{Fun}^{\oplus}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \mathcal{E})$中的一个对象，从而底部的映射是本质满射。

要证明底部的箭头是全忠实的，注意到复合

$$\mathsf{Fun}^{\oplus}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \mathcal{E}) \hookrightarrow \mathsf{Fun}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i, \mathcal{E}) \xrightarrow{\simeq} \lim_{i\in I} \mathsf{Fun}(\mathcal{C}_i, \mathcal{E})$$

是两个全忠实函子的复合，因此也是全忠实的。因此，只需证明这个复合的像落在 $\lim_{i\in I}\mathsf{Fun}^{\oplus}(\mathcal{C}_i, \mathcal{E})$中。这由引理 5.3 得出，因为 F: 余极限$_{i\in I}$ $\mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{E}$ 保持积，当且仅当每个复合

$$\mathcal{C}_i \xrightarrow{\eta_i} \underset{i\in I}{\text{余极限}}\ \mathcal{C}_i \xrightarrow{F} \mathcal{E}$$

$$\mathcal{C}_i \xrightarrow{F_i} \mathcal{E}$$

保持积。 □

引理 5.5。 设 $\mathcal{E}$是一个半加性 ∞-范畴，且 $\mathcal{C}_{(-)}: \quad I \to \mathsf{Cat}_\infty^{\mathrm{disj}}$是一个不相交 ∞-范畴的滤过图表。存在一个 ∞-范畴的等价

$$\mathsf{Mack}(\operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{C}_i\,; \mathcal{E}) \simeq \lim_{i\in I} \mathsf{Mack}(\mathcal{C}_i\,; \mathcal{E})$$

在 $\mathcal{E}$-值 *Mackey* 函子（定义在 $\mathcal{C}_{(-)}$ 的余极限（在Cat_∞ 中）上）与 $\mathcal{C}_i$ 上 $\mathcal{E}$-值 *Mackey* 函子的范畴之极限（在 Pr^R 中）之间。

证明。回想一下，在一个析取 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 上取值于 $\mathcal{E}$ 的 Mackey 函子的 ∞-范畴定义为

$$\mathsf{Mack}(\mathcal{C}\,; \mathcal{E}) = \mathsf{Fun}^{\oplus}(\mathsf{Span}(\mathcal{C}), \mathcal{E}).$$

给定一个滤过图表

$$\mathcal{C}_{(-)} : I \to \mathsf{Cat}_\infty^{\mathrm{disj}}, \quad i \longmapsto \mathcal{C}_i$$

关于析取 ∞范畴，引理4.8 给出了一个滤过图表

$$\mathsf{Span}(\mathcal{C}_{(-)}) : I \to \mathsf{Cat}_\infty^{\mathrm{sadd}}, \quad i \longmapsto \mathsf{Span}(\mathcal{C}_i)$$

半加性 ∞-范畴，因为包含映射 $\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{sadd}} \subseteq \mathrm{Cat}_\infty$ 保持滤过余极限。要看出这一点，请注意该包含映射可分解为

$$\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{sadd}} \hookrightarrow \mathrm{Cat}_\infty^{\times} \hookrightarrow \mathrm{Cat}_\infty$$

通过具有有限积的 ∞-范畴 $\mathrm{Cat}_\infty^{\times}$ of ∞-范畴。包含映射

$$\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{sadd}} \hookrightarrow \mathrm{Cat}_\infty^{\times}$$

pre由于它是左伴随，因此保有所有余极限；其右伴随由取交换幺 id obj子给出。包含映射

$$\mathrm{Cat}_\infty^{\times} \hookrightarrow \mathrm{Cat}_\infty$$

根据具有有限积的滤过余极限中积的公式，保有滤过余极限，因此复合包含映射也保有滤过余极限。现在通过应用引理 5.4，证明即告完成。 □

现在我们专门讨论所关注的情形，即有限群。

定理 5.6. 设 $\mathcal{E}$ 是一个半加性 ∞-范畴，并设 G 是一个有限群。对 G 的开正规子群所成集合取遍的范畴固定点函子，组装成一个 ∞-范畴的等价

$$\mathrm{Mack}(\mathrm{Fin}_G^{\delta}; \mathcal{E}) \xrightarrow{\simeq} \lim_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Mack}(\mathrm{Fin}_{G/N}; \mathcal{E})$$

介于 ∞-范畴的 *G-Mackey* 函子与（在 Pr^R 中的） ∞-范畴的 *G/N-Mackey* 函子的极限之间。

证明。 结合引理 5.5与定理 3.2。为将这些函子识别为范畴固定点，结合引理 2.1 与 [Bar17, §B.7]。 □

取 $\mathcal{E} = \mathrm{Sp}$ 为 ∞-范畴的谱，将 G-谱识别为谱 G-Mackey 函子范畴 [Bar17；GM24]。这为第一作者、Balchin 和 Barthel 提出的连续模型（用于 G-谱范畴）提供了另一种存在性证明。 [BBB24, 定理 6。5]。

推论 5.7. 设 G 是一个有限群。遍历 G 的开正规子群所得的范畴固定点函子族构成一个 ∞-范畴的等价

$$\mathrm{Sp}_G \xrightarrow{\simeq} \lim_{N \trianglelefteq_o G} \mathrm{Sp}_{G/N}$$

介于 G-谱的 ∞-范畴与 G/N-谱的 ∞-范畴在 （Pr^R） 中的极限之间。

参考文献

[BH21] T. Bachmann 和 M. Hoyois。《动机同伦论中的范数》。第 425 卷。Astérisque。巴黎：法国数学会（SMF），2021。doi: 10.24033/ast.1147.[BBB24] S. Balchin、D. Barnes 和 T. Barthel。前有限等变谱及其张量三角几何。2024。arXiv: 2401.01878 [math.AT].[BS24] D. Barnes 和 D. Sugrue。《前有限群上的有理 G-谱分类 G》。Algebr. Geom. Topol. 24.7（2024），第 3801–3825 页。doi: 10.2140/agt.2024.24.3801.[Bar17] C. Barwick。《谱 Mackey 函子与等变代数 K 理论 I》。Adv. Math. 304（2017），第 646–727 页。doi: 10.1016/j.aim.2016.08.043.[BGS20] C. Barwick、S. Glasman 和 J. Shah。《谱 Mackey 函子与等变代数 K 理论 II》。Tunis. J. Math. 2.1（2020），第 97–146 页。doi: 10.2140/tunis.2020.2.97.[BGT13] A. J. Blumberg、D. Gepner 和 G. Tabuada。《高阶代数 K 理论的一个普适刻画》。Geom. Topol. 17.2（2013），第 733–838 页。doi: 10.2140/gt.2013.17.733.[Cal+21] B. Calmès、E. Dotto、Y. Harpaz、F. Hebestreit、M. Land、K. Moi、D. Nardin、T. Nikolaus 和 W. Steimle。稳定 ∞范畴的厄米 K 理论 III：环的 Grothendieck-Witt 群。（即将在《数学年刊》发表。）2021。arXiv: 2009.07225 [math.KT]。

[Cal+23] B. Calmès、E. Dotto、Y. Harpaz、F. Hebestreit、M. Land、K. Moi、D. Nardin、T. Nikolaus 和 W. Steimle。《稳定 ∞范畴的厄米 K 理论 I：基础》。Sel. Math., New Ser. 29.1（2023）。编号 10，页 269。doi: 10.1007/s00029-022-00758-2.[Cal+26] B. Calmès、E. Dotto、Y. Harpaz、F. Hebestreit、M. Land、K. Moi、D. Nardin、T. Nikolaus 和 W. Steimle。稳定 ∞范畴的厄米 K 理论 II：配边范畴与可加性。2026。doi: 10.4310/acta.2025.n235.n2.a1.[Cno25] B. Cnossen。《稳定同伦论与高等代数》。作者网站可获取：https://sites.google.com/view/bastiaan-cnossen/home。2025。[Efi25] A. I Efimov。《大范畴的 K 理论与局部化不变量》（2025）。arXiv: 2405.12169[math.KT].[Fau08] H. Fausk。《pro-谱的等变同伦论》。Geom. Topol. 12.1（2008），第 103–176 页。doi: 10.2140/gt.2008.12.103.[GM24] Bertrand J. Guillou 和 J. Peter May。《以谱的预层为模型的 *G*-谱》。Algebr. Geom. Topol. 24.3（2024），第 1225–1275 页。doi: 10.2140/agt.2024.24.1225.[Har20] Y. Harpaz。《两可性与有限跨度的普适性》。Proc. Lond. Math. Soc. (3) 121.5（2020），第 1121–1170 页。doi: 10.1112/plms.12367.[Hau+23] R. Haugseng、F. Hebestreit、S. Linskens 和 J. Nuiten。《二变量纤维化、分解系统与 ∞跨度范畴》。Forum Math. Sigma 11（2023）。编号 e111，页 70。doi: 10.1017/fms.2023.107.[Lin76] H. Lindner。《关于 Mackey 函子的一点说明》。Manuscr. Math. 18（1976），第 273–278 页。doi: 10. 1007/BF01245921.[LNP25] S. Linskens、D. Nardin 和 L. Pol。《通过部分松弛极限研究整体同伦论》。Geom. Topol. 29.3（2025），第 1345–1440 页。doi: 10.2140/gt.2025.29.1345.[Lur09] J. Lurie。《高阶拓扑斯理论》。第 170 卷。Ann. Math. Stud. 新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2009。doi: 10.1515/9781400830558.[Lur25] J. Lurie。Kerodon。https://kerodon.net。2025。[Roz12] N. Rozeblyum。滤过余极限的 ∞范畴。https://www.math.toronto.edu/nick/notes/ colimits.pdf。2012。[Sch25] P. Scholze。《六函子形式主义》（2025）。arXiv: 2510.26269 [math.AG]。

(Barnes) 贝尔法斯特女王大学电子邮箱
地址: d.barnes@qub.ac.uk

(Taggart) 贝尔法斯特女王大学电子邮箱
地址: n.taggart@qub.ac.uk