arXiv:2601.09546v1 [math.RA] 14 Jan 2026

具有多项式恒等式的代数的中心余特征的重数

WESLEY QUARESMA COTA[a], [1] 和 THAIS SILVA DO NASCIMENTO[b], *

[a] *IME, USP, Rua do Matão 1010, 05508-090, São Paulo, Brazil*[b] *IME, UFMT, Avenida Fernando Corrêa da Costa 2367, 78060-900, Cuiabá, Brazil*

Abstract. 对于特征零域 A 上的结合代数，设 $P_n(A)$和 $P_n^z(A)$分别表示次数为 n 的多线性多项式模去多项式恒等式后的空间，以及 A的中心多项式空间。我们还用 $\Delta_n(A)$表示次数为 n 的多线性中心多项式模去 A的多项式恒等式后的空间。相应的余长度、中心余长和真中心余长度序列，分别衡量 $P_n(A)$、$P_n^z(A)$和 $\Delta_n(A)$的 S_n-模分解中不可约分量的个数。本文研究了若干PI-代数的例子，并明确描述了它们的余特征、中心余特征和真中心余特征序列。由此，我们得到一个完整分类：在PI-等价意义下，所有余长度序列和中心余长序列均被某个常数所界定的代数。

1. Introduction

确定给定代数满足的全部多项式恒等式，是一个众所周知的难题。例如，关于 $n \times n$ 矩阵代数 $M_n(F)$ 的 T- 理想，目前仅对 $n \leq 2$ 已知。在这一背景下，Regev 和 Kemer 的研究通过引入与代数相关的数值不变量（如余维数序列和余长度序列），极大地推动了该理论的发展。这些不变量正是本文关注的核心，它们已成为研究多项式恒等式的基础工具，因为能够提供有关其渐近行为的重要信息。

设 F 是一个特征零域，A 是 F 上的一个结合代数。记 P_n 为次数为 n 的多线性多项式空间，$P_n(A)$ 为商空间

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)},$$

其中，$\mathrm{Id}(A)$ 是 A 的多项式恒等式构成的 T-理想。数值 $c_n(A) = \dim_F P_n(A)$ 称为 A 的第 n 个余维数。Regev [24] 证明，代数 A 满足一个非零多项式恒等式（即为 PI-代数），当且仅当序列 $c_n(A)$ $n \geq 1$ 指数有界。此外，Kemer [16] 表明，该序列要么多项式有界，要么呈指数增长。

除了多项式恒等式之外，代数A的中心多项式集合也是一个相关的研究对象。这些多项式的求值总是属于 A的中心。如果中心多项式在 A的中心中取非零值，则称其为真中心多项式。对于 A的中心多项式 T-空间 $\mathrm{Id}^z(A)$，Regev 引入了两列新的数值不变量：对于 $n \geq 1$，第 n个中心余维数和真中心余维数分别定义为

$$c_n^z(A) = \dim_F P_n^z(A) \text{ and } \delta_n(A) = \dim_F \Delta_n(A),$$
$$\text{where } P_n^z(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}^z(A)} \quad \text{and} \quad \Delta_n(A) = \frac{P_n \cap \mathrm{Id}^z(A)}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 16R10、16W50，次分类号 20C30。*Key words and phrases.* 多项式恒等式、中心多项式、余长度序列、中心余特征。
E-mail addresses: quaresmawesley@gmail.com（Cota）和 thais.nascimento@ufmt.br（do Nascimento）。
[1] 本研究部分得到 FAPESP 项目资助，项目编号：2025/05699-0。

* 通讯作者。

根据定义，有如下分解

$$c_n(A) = c_n^z(A) + \delta_n(A) \tag{1.1}$$

因此，如果 A 是 PI-代数，那么中心余维数序列和真中心余维数序列也都至多呈指数增长。

值得强调的是，目前只有少数几个 PI-代数的这些序列已被明确计算出来，其一般性质远未得到全面理解。尽管如此，通过考察这些序列的指数增长，相关研究已取得了一些进展。在这方面，Giambruno 和 Zaicev [11, 12] 证明，以下极限

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \qquad \exp^z(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^z(A)} \qquad \text{and} \qquad \exp^\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\delta_n(A)},$$

分别称为 PI-代数的 PI-指数、中心指数和真中心指数，它们总是存在且为非负整数。因此，他们在这一背景下肯定地解决了 Amitsur 猜想。

众所周知，空间 P_n(A)、 P_n^z(A)和 Δ_n(A)在对称群S_n 的自然作用下，可通过置换其变量而保持不变。这使得这些空间可分解为 S_n-模的直和，其中各不可约模由分拆 $\lambda \vdash n$索引。因此，它们对应的特征标分别可分解为

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad \chi_n^z(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda^z \chi_\lambda \quad \text{and} \quad \chi_n^\delta(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda^\delta \chi_\lambda,$$

其中， χ_λ 表示与 λ对应的 S_n 的不可约特征标，而 m_λ、 m_λ^z、 m_λ^δ 是相应的重数。特征标 χ_n(A)、 χ_n^z(A)和 χ_n^δ(A)分别称为 A的 n次余特征、中心余特征和真中心余特征。显然，我们有

$$\chi_n(A) = \chi_n^z(A) + \chi_n^\delta(A) \text{ and } m_\lambda = m_\lambda^z + m_\lambda^\delta.$$

确定这些余特征的完整分解，是 PI-理论中的一个核心且富有挑战性的问题。此外，近年来，对于包含在 var(UT_2) 和 var($\mathcal{G}$) 中的极小簇，其中心余特征和真中心余特征的分解研究已取得进展（例如，参见[4]）。

这些和

$$l_n(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda, \quad l_n^z(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda^z \quad \text{and} \quad l_n^\delta(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda^\delta$$

分别定义为 A的 n次余长度、中心余长度和真中心余长度。在 [21],中，Mishchenko、Regev 和 Zaicev 将多项式增长簇刻画为恰好满足序列 l_n(A) $n \geq 1$有界的那些簇。这促成了一种基于余长度序列对簇进行分类的新方法，详见 [7, 18]。

本文旨在通过依据簇的余长度序列和中心余长序列对其进行分类，来拓展这些结果。我们强调，余长度不超过 4 的簇的分类完全包含在由大小为 2 的上三角矩阵代数 UT_2 生成的簇的子簇之中，而该代数的结构已广为人知（见 [19, 定理 5.4]）。要确立我们所追求的结果，就必须研究 var(UT_2) 之外的簇，这也揭示了在处理更高余长度时问题的复杂程度更高。

值得一提的是，也有研究考察了具有其他附加结构的代数的余长度序列，详情请见 [2, 3, 20, 23, 26] 。

2. Polynomial identities and central polynomials

令 $F\langle X\rangle$ 为由特征零域 F 上可数集 $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ 中的变量生成的自由结合代数。

如果 A 满足一个非平凡多项式恒等式，也就是说，存在一个非零多项式 f ，它在 A 中的所有代入求值下均为零，那么我们称 A 为 PI-代数。在这种情况下，我们将 $f \equiv 0$ 记作 A 上的。与代数 A 相关，我们定义

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ on } A\}, \quad \mathrm{Id}^z(A) = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle \mid f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)\}$$

$$\text{and } \mathrm{Id}^z(A) - \mathrm{Id}(A)$$

A 的所有多项式恒等式、中心多项式和真中心多项式分别构成的集合，其中 Z（A）表示 A 的中心。这些集合构成 $F\langle X\rangle$ 的 T-空间，也就是说，它们是在自由代数的所有端同态作用下保持不变的子空间。此外，$\mathrm{Id}(A)$ 是自由代数的一个理想，因此称为 A 的 T-理想。

由于我们关注的是从多项式恒等式的角度进行研究，因此将由 A 生成的簇记作 $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$，定义为满足 A 的所有恒等式的代数类。如果两个代数 A 和 B 具有相同的 T- 理想，则称它们为 T- 等价，并记作 $A \sim_T B$。

在特征零的情形下，众所周知，$\mathrm{Id}(A)$、$\mathrm{Id}^z(A)$ 和 $\mathrm{Id}^{(z)} - \mathrm{Id}(A)$ 完全由它们的多线性多项式决定。对于每个 $n \geq 1$，我们将 P_n 定义为变量 x_1、.....、 x_n 中次数为 n 的多线性多项式所构成的向量空间，即

$$P_n = \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

为了研究 A 的多项式恒等式、中心多项式和真中心多项式的渐近行为，Regev [24]引入了三个序列：余维数序列 $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$、中心余维数序列 $\{c_n^z(A)\}_{n\geq 1}$ 和真中心余维数序列 $\{\delta_n(A)\}_{n\geq 1}$，其中它们的第 n 项分别定义为

$$c_n(A) = \dim_F P_n(A),\ c_n^z(A) = \dim_F P_n^z(A) \text{ and } \delta_n(A) = \dim_F \Delta_n(A),$$

$$\text{where } P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}, \quad P_n^z(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}^z(A)} \quad \text{and} \quad \Delta_n(A) = \frac{P_n \cap \mathrm{Id}^z(A)}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}.$$

下标 T 表示相应集合生成的是 T-空间，而上标 T 表示它们生成的是 T-理想。

例 2.1. [17, 25] 设 $\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \ldots \mid e_i e_j = -e_j e_i\rangle$ 为无限维 *Grassmann*代数，设 UT_2 表示定义在 F上的 2×2 上三角矩阵代数。那么，

$\mathrm{Id}(UT_2) = \mathrm{Id}^z(UT_2) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4]\rangle_T$， $\mathrm{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_3, x_4]\rangle_T$以及 $\mathrm{Id}^z(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2],\ \mathrm{Id}(\mathcal{G})\rangle^T$.此外，$c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$， $c_n^z(\mathcal{G}) = \delta_n(\mathcal{G}) = 2^{n-2}$， $c_n(UT_2) = c_n^z(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$ 以及 $\delta_n(UT_2) = 0$.

在 [24], Regev 证明了：如果 A 是特征零域上的 PI-代数，那么存在常数α， $\beta \geq 0$ 使得

$$c_n(A) \leq \beta\, \alpha^n, \quad \text{for all } n \geq 1.$$

因此，由（1.1）可知，序列 $c_n^z(A)$ 和 $\delta_n(A)$， $n \geq 1$，也都是指数有界的。

这一结果开启了对多项式增长簇的系统研究。回忆一下，如果存在常数 α， $t \geq 0$ 使得，则称代数 A 具有多项式余维增长。

$$c_n(A) \leq \alpha n^t, \quad \text{for all } n \geq 1.$$

下面列出多项式增长簇的一些众所周知的刻画。

定理 2.2。 [10, 16] 设 A 是特征零域 F 上的代数。那么， A 具有多项式增长，当且仅当以下情形之一成立

1) $\mathcal{G}, UT_2 \notin \mathrm{var}(A)$。2) $A \sim_T B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$，其中每个 B_i 都是 F上的有限维代数，满足 $\dim B_i/J(B_i) \leq 1$，其中 $J(B_i)$ 表示其雅各布森根。

因此，由 $\mathcal{G}$ 和 UT_2 生成的簇是仅有的几乎多项式增长簇，也就是说，它们具有指数余维增长，而每个真子簇都具有多项式增长。

值得注意的是，根据 [11, 定理 3], ，代数 A 的余维数序列 $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ 具有多项式增长，当且仅当其中心余维序列 $\{c_n^z(A)\}_{n\geq 1}$ 也具有多项式增长。因此，$\mathrm{var}(UT_2)$ 和 $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ 恰好是中心余维数序列具有几乎多项式增长的簇。最近， [9], 中的作者对关于真中心余维数具有几乎多项式增长的簇进行了分类。因此，序列 $c_n(A)$、 $c_n^z(A)$以及$\delta_n(A)$、 $n \geq 1$要么有多项式上界，要么呈指数增长，不存在中间增长情形。

受前述结果的启发，La Mattina [19] 对几乎多项式增长簇中的子簇进行了分类。为陈述这一结果，我们先定义以下代数。

对于 $m \geq 2$，令 UT_m 为 $m \times m$ 上三角矩阵代数，并考虑元素$_{m-1}$ $_{m-1}E = \sum e_{i,}$ $_{i+1}$ 以及 $I_m = \sum e_{ii}$ 阶单位矩阵，其中 e_{ij} 表示初等矩阵$_{i=1}$ $_{i=1}$，其 $(i,\ j)$ 位置上的元素为 1，其余位置上的元素均为 0。定义 UT_m 的以下子代数

$$\begin{aligned} A_{m,1} &= \operatorname{span}_F\{e_{11}, E, \ldots, E^{m-2}; e_{12}, e_{13}, \ldots, e_{1m}\}, \\ A^*_{m,1} &= \operatorname{span}_F\{e_{mm}, E, \ldots, E^{m-2}; e_{1m}, e_{2m}, \ldots, e_{m-1\,m}\}, \\ N_m &= \operatorname{span}_F\{I_m, E, \ldots, E^{m-2}; e_{12}, e_{13}, \ldots, e_{1m}\}. \end{aligned}$$

此外，对于 $k \geq 2$，我们用 $\mathcal{G}_{2k} = \langle 1, e_1, \ldots, e_{2k} \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$ 表示由 $1, e_1, \ldots, e_{2k}$ 生成的无限维 Grassmann代数的子代数。显然可以验证 $\mathcal{G}_2 \sim_T N_3$。

定理 2.3. [19, 定理 5.2 和 5.4] 设 A 是特征零域上的一个代数。

1) 若 $A \in \operatorname{var}(\mathcal{G})$，则 A 与集合中的有限个代数的直和 *PI*-等价

$$\{N, C, \mathcal{G}_{2k}, \mathcal{G} \mid k \geq 1\}.$$

2) 若 $A \in \operatorname{var}(UT_2)$，则 A 与集合中的有限个代数的直和 *PI*-等价 *s* et

$$\{N, C, N_r, A_{m,1}, A^*_{m,1}, UT_2 \mid r \geq 3, m \geq 2\}$$

其中 N 表示一个幂零代数，C 表示一个交换非幂零代数。

众所周知，对称群 S_n 通过置换变量 $x_1, \ldots, x_n$，自然地作用于空间 P_n 上。由于 $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ 和 $P_n \cap \mathrm{Id}^z(A)$ 在此作用下保持不变，商空间 $P_n(A)$、$P^z_n(A)$ 和 $\Delta_n(A)$ 继承了自然的 S_n-模结构。我们将与 S_n-模 $P_n(A)$、$P^z_n(A)$ 和 $\Delta_n(A)$ 相关的特征标分别记作 $\chi_n(A)$、$\chi^z_n(A)$ 和 $\chi^\delta_n(A)$；它们分别称为 A 的 n 阶余特征、中心余特征和真中心余特征。

由于我们是在特征零域 F 上进行研究，对称群的表示论意味着 $P_n(A)$、$P^z_n(A)$ 和 $\Delta_n(A)$ 可分解为由分拆 $\lambda \vdash n$ 标记的不可约 S_n-模。因此，我们可以将其分解为

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad \chi^z_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m^z_\lambda \chi_\lambda \quad \text{and} \quad \chi^\delta_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m^\delta_\lambda \chi_\lambda \tag{2.1}$$

其中，χ_λ 表示与分拆 λ 对应的不可约特征标，而 m_λ、m^z_λ 和 m^δ_λ 表示相应的重数。于是，

$$\chi_n(A) = \chi^z_n(A) + \chi^\delta_n(A) \quad \text{and} \quad m_\lambda = m^z_\lambda + m^\delta_\lambda.$$

n 次 A 的余长度、中心余长和真中心余长分别定义为, by

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda, \quad l^z_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m^z_\lambda \quad \text{and} \quad l^\delta_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m^\delta_\lambda.$$

余维数序列与余长度序列之间存在紧密联系。事实上，Mishchenko、Regev 和 Zaicev [21] 证明，簇 $\mathcal{V}$ 具有多项式余维增长，当且仅当存在一个常数 $k \geq 0$，使得

$$l_n(A) \leq k, \quad \text{for all } n \geq 1.$$

这一关于具有多项式增长的簇的刻画，促使人们进一步研究根据序列 $\{l_n(A)\}_{n \geq 1}$ 的行为对簇进行分类。在这一方向上，Giambruno 和 La Mattina [7, 18]，做出了重要贡献，他们对余长度序列有界于 4 的簇进行了分类。

3. Constructing algebras with small colength

本节将介绍若干在本文后续结果中发挥基础作用的代数。对于所考虑的代数，我们将描述一些 T-理想和余维数，研究余特征，并计算余长度序列。这些计算将用于后续各节中的分类结果。

在介绍代数的详尽列表之前，我们先介绍一种用于计算m_λ 在 $\chi_n(A)$分解中的重数的有用工具。为此，我们需要借助一般线性群 GL_m的表示论。

令 $F_m := F\langle x_1, \dots, x_m\rangle$ 为秩为 m的自由结合代数，并定义子空间 $U_m := \mathrm{span}_F\{x_1, \dots, x_m\}$。注意，一般线性群 $GL(U_m) \cong GL_m$ 自然地作用于 U_m，并且该作用以对角方式扩展为对 F_m 的子空间 F_m^n 的作用，该子空间由所有次数为 n的多项式组成。

由于 $F_m^n \cap \mathrm{Id}(A)$在此作用下是不变的，商空间

$$F_m^n(A) := \frac{F_m^n}{F_m^n \cap \mathrm{Id}(A)}$$

继承了自然的 GL_m-模结构。该模的特征标记为 $\psi_n^m(A)$。

在特征零域 F 上， GL_m 的不可约多项式表示由分拆 $\lambda \vdash n$ 标记，其中相应图形的高度 $h(\lambda)$至多为 m。因此，我们可以将特征标 $\psi_n^m(A)$分解如下：

$$\psi_n^m(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \le m}} \widetilde{m}_\lambda \psi_\lambda, \tag{3.1}$$

其中 ψ_λ 是 与分拆 λ 对应的不可约特征， $\widetilde{m}_\lambda$ 表示其重数 y.

命题 3.1. [1, 6] 设 $\chi_n(A)$ 和 $\psi_n^m(A)$ 分别表示由方程 (2.1)和(3.1)定义的 A的第 n 个余特征和第 GL_m 个特征标。那么，对于满足 $h(\lambda) \le m$ 的每个分拆 $\lambda \vdash n$， $m_\lambda = \widetilde{m}_\lambda$

根据 [5, 定理 12.4.12], ，每个不可约 GL_m-模都是循环的，且由一个最高权向量生成，记作 f_λ，它对应于分拆 $\lambda \vdash n$。此外， f_λ 可以表示为某些多项式 f_{T_λ} 的线性组合，这些多项式的构造如下（见 [5, 命题 12.4.14]）。

给定分拆 $\lambda \vdash n$，形状为 λ 的初始杨表定义为：将整数 1 到 n 按从上到下、逐列递增的顺序填入其中。对于形状为 λ的杨表 T_λ ，设$\sigma \in S_n$ 为将初始多重杨表变换为 T_λ的唯一置换。那么，相应的最高权向量 f_{T_λ} 定义为

$$f_{T_\lambda} = \left(\prod_{i=1}^{\lambda_1} St_{h_i(\lambda)}(x_1, \dots, x_{h_i(\lambda)}) \right) \sigma^{-1},$$

其中， $St_t(x_1、\dots\dots、x_t)$表示次数为 t 的标准多项式， $h_i(\lambda)$ 是杨图 λ 的第 i 列的高度，且对称群 S_n 通过位置置换从右侧作用。

因此，我们现在可以陈述一个关键结果，该结果为计算重数 $\widetilde{m}_\lambda = m_\lambda$ 提供了一个实用判据。

命题 3.2 ([5])。 设 $\psi_n^m(A)$ 是 A 的 GL_m-特征标，如公式 (3.1) 所示。当且仅当存在一个多重杨表 T_λ 使得 $f_{T_\lambda} \notin \mathrm{Id}(A)$ 时， $\widetilde{m}_\lambda \neq 0$ 。此外， $\widetilde{m}_\lambda$ 等于 $F_m^n(A)$ 中线性无关的最高权向量 f_{T_λ} 的最大数量。

在下文中，接下来的注将会很有用。

注 3.3。 设 A、 B 和 $A \oplus B$ 为具有 n-阶余特征的代数

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash \langle n \rangle} m_\lambda \chi_\lambda, \quad \chi_n(B) = \sum_{\lambda \vdash n} m'_\lambda \chi_\lambda \quad \text{and} \quad \chi_n(A \oplus B) = \sum_{\lambda \vdash \langle n \rangle} \widetilde{m}_\lambda \chi_\lambda,$$

分别地。于是，对于所有 $\lambda \vdash n$，有 $\widetilde{m}_\lambda \le m_\lambda + m'_\lambda$。此外，若 $B \in \mathrm{var}(A)$ ，则对于所有 $\lambda \vdash n$，有 $m'_\lambda \le m_\lambda$。因此，对于所有 n，我们有 $l_n(B) \le l_n(A)$。

本文采用 [18] 中为此处讨论的代数所确立的记号。为与该框架保持一致，我们为此前介绍的某些代数引入新的记号，并在下文阐明它们之间的对应关系。

我们先考虑 UT_2 的以下子代数:

$$A_1 = A_{2,1} = Fe_{11} + Fe_{12} \text{ and } A_1^* = A_{2,1}^* = Fe_{22} + Fe_{12}.$$

引理 3.4. [7] 对于代数 A_1 和 A_1^*，有 $\mathrm{Id}(A_1) = \langle [x,y]z \rangle_T$，$\mathrm{Id}(A_1^*) = \langle x[y,z] \rangle_T$。此外，$l_n(A_1) = l_n(A_1^*) = 2$ 且 $l_n(A_1 \oplus A_1^*) = 3$，其中 $n > 3$。

定义 UT_3 的以下子代数:

$$\begin{aligned}
A_2 &= N_3 = F(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{23}, \\
A_4 &= A_{3,1} = Fe_{11} + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{23}, \\
A_4^* &= A_{3,1}^* = Fe_{33} + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{23}, \\
A_5 &= Fe_{22} + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{23}, \\
A_6 &= F(e_{11} + e_{33}) + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{23}.
\end{aligned}$$

在 [15], 中，作者给出了 A_6的一个有限生成集，列举如下。

$$\begin{aligned}
f_1 &= [x,y][z,w] + [z,w][x,y] + [y,z][x,w] + [x,w][y,z] + [z,x][y,w] + [y,w][z,x], \\
f_2 &= [x,y][z,w] + [z,w][x,y] + x[z,w]y - y[z,w]x, \\
f_3 &= 2xy[w,z] + wx[z,y] + wy[z,x] + zx[y,w] + zy[x,w] \\
&\quad + [x,y][z,w] + [x,z][w,y] - [w,y][x,z] + [y,z][w,x] - [w,x][y,z], \\
f_4 &= [x,y]z[w,t], \quad f_5 = [[x,y][z,w],t] \quad \text{and} \quad f_6 = [z[x,y]w,t].
\end{aligned}$$

引理 3.5. [7, 14, 15] 对于代数 A_2、A_4、A_4^*、A_5 和 A_6，有 $\mathrm{Id}(A_2) = \langle [x,y,z],\ [x,y][z,w] \rangle_T$，$\mathrm{Id}(A_4) = \langle [x,y]zw \rangle_T$，$\mathrm{Id}(A_4^*) = \langle xy[z,w] \rangle_T$，$\mathrm{Id}(A_5) = \langle x[y,z]w \rangle_T$ 以及 $\mathrm{Id}(A_6) = \langle f_1, \ldots\ldots, f_6 \rangle_T$.

此外，对于前述代数的直和，我们有。

引理 3.6. [7, 18] 对于代数 A_2，我们有 $l_n(A_2) = 3$, $n > 3$. 此外，对于所有 $n > 3$, $B_1 \in \{A_1 \oplus A_2, A_1^* \oplus A_2\}$ 和 $B_2 \in \{A_1 \oplus A_1^* \oplus A_2, A_4, A_4^*, A_5, A_6\}$，$l_n(B_1) = 4$ 且 $l_n(B_2) = 5$。

现在，我们考虑 UT_4 的以下子代数:

$$\begin{aligned}
A_7 &= F(e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44}) + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{14} + Fe_{23} + Fe_{24} + Fe_{34}, \\
A_8 &= F(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{14} + Fe_{23} + Fe_{24} + Fe_{34}, \\
A_8^* &= F(e_{22} + e_{33} + e_{44}) + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{14} + Fe_{23} + Fe_{24} + Fe_{34}, \\
A_9 &= A_{4,1} = Fe_{11} + F(e_{23} + e_{34}) + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{14} + Fe_{24}, \\
A_9^* &= A_{4,1}^* = Fe_{44} + F(e_{12} + e_{23}) + Fe_{13} + Fe_{14} + Fe_{24} + Fe_{34}.
\end{aligned}$$

注 3.7. 注意，尽管 N_4 和 A_7 是不同的代数，但它们是 *PI*-等价的。回想一下，根据 [22, 定理 5.5], ，对于代数 N_4，我们有

$$\chi_n(N_4) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + 2\chi_{(n-2,1^2)} + \chi_{(n-2,2)} + \chi_{(n-3,2,1)} \text{ and } l_n(N_4) = 7.$$

引理 3.8. [18, 19, 22] 对于代数 A_7、 A_8、 A_8^*、 A_9 和 A_9^*， 我们有

$$\mathrm{Id}(A_7) = \langle [x_1,x_2][x_3,x_4], [x_1,x_2,x_3,x_4]\rangle_T,$$

$\mathit{Id}(A_8) = \langle [x_1,x_2][x_3,x_4]x_5, [x_1,x_2,x_3]x_4\rangle_T$, $\mathit{Id}(A_8^*) = \langle x_5[x_1,x_2][x_3,x_4], x_4[x_1,x_2,x_3]\rangle_T$, $\mathit{Id}(A_9)$ $= \langle [x_1,x_2][x_3,x_4], [x_1,x_2]x_3x_4x_5\rangle_T$ 以及 $\mathit{Id}(A_9^*) = \langle [x_1,x_2][x_3,x_4], x_1x_2x_3[x_4,x_5]\rangle_T$. 此外， 对于所有 $n>4$， 我们有 $l_n(A_7)=7$, $l_n(A_8)=l_n(A_8^*)=8$ 以及 $l_n(A_9)=l_n(A_9^*)=10$.

考虑 UT_5 的以下子代数:

$$A_{10} = Fe_{11}+Fe_{12}+Fe_{13}+Fe_{14}+Fe_{15}+F(e_{23}+e_{45})+F(e_{24}-e_{35})+Fe_{25},$$

$$A_{10}^* = Fe_{55}+Fe_{15}+Fe_{25}+Fe_{35}+Fe_{45}+F(e_{12}+e_{34})+F(e_{13}-e_{24})+Fe_{14}.$$

引理 3.9. 对于代数 A_{10} 和 A_{10}^*， 我们有:

1) $\mathrm{Id}(A_{10}) = \langle [x_1,x_2]x_3x_4x_5\rangle_T$和 $\mathrm{Id}(A_{10}^*) = \langle x_1x_2x_3[x_4,x_5]\rangle_T$。 2) $c_n(A_{10}) = c_n(A_{10}^*) = n(n-1)(n-2)$。

证明。 注意到

$$A_{10} \sim_T \begin{pmatrix} A_4 & A_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，由 [14], 可得

$$\mathrm{Id}(A_{10}) = \langle \mathrm{Id}(A_4)\, x\rangle_T = \langle [x_1,x_2]x_3x_4x_5\rangle_T \quad \text{and} \quad \mathrm{Id}(A_{10}^*) = \langle x_1x_2x_3[x_4,x_5]\rangle_T,$$

和 $c_n(A_{10}) = c_n(A_{10}^*) = n\, c_{n-1}(A_4) = n(n-1)(n-2)$。 □

Re标记 3.10。 注意，根据前面的引理，我们有 $A_9 \in \mathrm{var}(A_{10})$。因此 ,

$$l_n(A_{10}^*) = l_n(A_{10}) \geq l_n(A_9) = 10, \ \textit{for all } n>4.$$

引理 3.11。 [8, 22] 对于代数 $\mathcal{G}_{2k}$， 我们有 $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_{2k}) = \langle [x_1,x_2,x_3], [x_1,x_2][x_3,x_4]\cdots[x_{2k+1},x_{2k+2}]\rangle_T$,$\chi_n(\mathcal{G}_{2k})$ $= \sum_{i=0}^{2k}\chi_{(n-i,1^i)}$ 以及 $l_n(\mathcal{G}_{2k}) = 2k+1$， 对所有 $k\geq 1$ 均成立。

考虑以下代数

$$\overline{\mathcal{G}_4} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_4 & \mathcal{G}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \mathcal{G}_4 \otimes A_1 \quad \text{and} \quad \overline{\mathcal{G}_4^*} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}_4 \\ 0 & \mathcal{G}_4 \end{pmatrix} \cong \mathcal{G}_4 \otimes A_1^*.$$

引理 3.12。 对于代数 $\mathcal{G}_4$， 我们有:

1) $\mathrm{Id}(\overline{\mathcal{G}_4}) = \langle [x_1,x_2,x_3]x_4,\ [x_1,x_2][x_3,x_4][x_5,x_6]x_7\rangle_T$.

2) $c_n(\overline{\mathcal{G}_4}) = n + (n-2)\binom{n}{2} + (n-4)\binom{n}{4}$.3) 这些多项式

$$x_1\cdots x_n,\ x_{i_1}\cdots x_{i_{n-2}}[x_n,x_t],\ x_{i_1}\cdots x_{i_{n-3}}[x_i,x_j]x_k,\ x_{i_1}\cdots x_{i_{n-5}}[x_l,x_m][x_p,x_q]x_r,$$

其中， $i_1<\cdots<i_{n-2}$、 $i<j$ 和 $l<m<p<q$构成了 P_n 模 $P_n\cap \mathrm{Id}(\mathcal{G}_4)$的一个基。 —

同样，$\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4^*) = \langle x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_1[x_2,x_3][x_4,x_5][x_6,x_7]\rangle_T$。

证明。 根据 [14], $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4) = \langle \mathrm{Id}(\overline{\mathcal{G}_4})x\rangle_T = \langle [x_1,x_2,x_3]x_4,\ [x_1,x_2][x_3,x_4][x_5,x_6]x_7\rangle_T$ 以及 $c_n(\mathcal{G}_4) = nc_{n-1}(\overline{\mathcal{G}_4})$ $= n + (n-2)\binom{n}{2} + (n-4)\binom{n}{4}$。

现在，我们证明证明 3) 中定义的多项式模 $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4)$ 线性无关。考虑 — er

$$f = \alpha x_1\cdots x_n + \sum_{\substack{t=1 \\ i_1<\cdots<i_{n-2}}}^{n-1} \beta_t x_{i_1}\cdots x_{i_{n-2}}[x_n,x_t] + \sum_{\substack{i<j,\,k \\ i_1<\cdots<i_{n-3}}} \gamma_{i,j,k}x_{i_1}\cdots x_{i_{n-3}}[x_i,x_j]x_k +$$

$$\sum_{\substack{l<m<p<q \\ i_1<\cdots<i_{n-5}}} \delta_{l,m}^{p,q,r} x_{i_1}\cdots x_{i_{n-5}}[x_l,x_m][x_p,x_q]x_r \in \mathrm{Id}(\overline{\mathcal{G}_4^*}).$$

首先，考虑求值 $x_v \mapsto 1 \otimes e_{11}$，对于所有 $v \in \{1, \ldots, n\}$，有 $\alpha = 0$。其次，固定$1 \leq t \leq n-1$并考虑求值 $x_t \mapsto 1 \otimes e_{12}$和 $x_i \mapsto 1 \otimes e_{11}$，对于所有 $i \neq t$，得到 $\beta_t = 0$。第三，固定 i、j、k，其中 $i < j$，求值 $x_i \mapsto e_1 \otimes e_{11}$、$x_j \mapsto e_2 \otimes e_{11}$、$x_k \mapsto 1 \otimes e_{12}$和 $x_v \mapsto 1 \otimes e_{11}$，对于所有 $v \notin \{i, j, k\}$，得到$\gamma_{i,j,k} = 0$。最后，固定 l、m、p、q、r，其中 $l < m < p < q$，求值 $x_l \mapsto e_1 \otimes e_{11}$、$x_m \mapsto e_2 \otimes e_{11}$、$x_p \mapsto e_3 \otimes e_{11}$、$x_q \mapsto e_4 \otimes e_{11}$和 $x_r \mapsto 1 \otimes e_{12}$以及 $x_v \mapsto 1 \otimes e_{11}$，对于所有 $v \notin \{l, m, p, q, r\}$，得到 $\delta^{p,l}_{q,r,m} = 0$。

由于 3) 中定义的多项式数量等于 $\mathcal{G}_4$ 的第 n 个余维数，并且我们已证明它们模$\overline{\mathcal{G}_4}\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4)$线性无关，因此得出它们构成 P_n 模 $P_n \cap \mathrm{Id}(\mathcal{G}_4)$ 的一组基。

□

注记 3.13. 根据 [18, 引理 9]，，我们有 $A_8 \in \mathrm{var}(\mathcal{G}_4)$。因此，$l_n(\mathcal{G}_4^*) = \overline{l_n}(\mathcal{G}_4) \geq \overline{l_n}(A_8) = 8.$

下面我们考虑前述某些代数的直和。

引理 3.14. 对于代数 $\mathcal{G}_4 \oplus A_1$ 和 $\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*$，我们有

1) $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*) = \langle x_1[x_2, x_3, x_4], [x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] \rangle_T$.
2) $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1) = \langle [x_1, x_2, x_3]x_4, [x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] \rangle_T$.
3) $\chi_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*) = \chi_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_1) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1^2)} + \chi_{(n-3,1^3)} + \chi_{(n-4,1^4)}$.
4) $l_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*) = l_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_1) = 6$.

证明。我们先证明第三项，因此考虑 $\chi_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$。根据注 3.3 和 [7, 引理 3]，我们有

$$m_\lambda = 1, \qquad 1 \leq m_{(n-1,1)} \leq 2 \quad \text{and} \quad m_\mu = 0,$$

对所有 λ，$\mu \vdash n$，满足 $\lambda \in \{(n), (n-2, 1^2), (n-3, 1^3), (n-4, 1^4)\}$ 以及 $\mu \notin \{\lambda, (n-1, 1)\}$。注意，若$m_{(n-1,1)} \neq 2$，则 $\chi_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*) = \chi_n(\mathcal{G}_4)$。由于 $\mathcal{G}_4 \in \mathrm{var}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*)$，因此必有 $P_n \cap \mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*) = P_n \cap \mathrm{Id}(\mathcal{G}_4)$，这与多项式 $[x_1, x_2, x_3]x_4 \cdots x_n \in P_n \cap \mathrm{Id}(\mathcal{G}_4) \setminus P_n \cap \mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*)$ 相矛盾。因此，$m_{(n-1,1)} = 2$，证明得证。

对于第一项，考虑

$$I = \langle x_1[x_2, x_3, x_4], [x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] \rangle.$$

直接检验可得 $I \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*)$。

根据 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理，P_n 中的任意元素模去 $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*)$ 后，都可以写成以下类型的多项式的线性组合：

(1) $x_1 \cdots x_n$,(2) $x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}}[x_a, x_b]$，其中 $i_1 < \cdots < i_{n-2}$ 和 $a < b$；(3) $x_{i_1} \cdots x_{i_{n-4}}[x_c, x_d][x_e, x_f]$，其中 $i_1 < \cdots < i_{n-4}$；
(4) $[x_i, x_j, x_k]x_{i_1} \cdots x_{i_{n-3}}$，其中 $i_1 < \cdots < i_{n-3}$。

注意，多项式 $w[y, x][y, z]$ 是 $x_1[x_2, x_3, x_4]$的推论。通过线性化，我们有$w[y_1, x][y_2, z] \equiv -w[y_2, x][y_1, z]$ 模去 $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*)$，因此可以假设 $c < d < e < f$ 出现在类型 (3) 的多项式中。

对于类型 (4) 的多项式，我们注意到，多项式 $h = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ 是 $f = x_1[x_2, x_3, x_4]$ 的推论。现在，我们注意到，多项式 $p = [x_1, x_2, x_3]x_4 - [x_1, x_2, x_4]x_3$ 是 h 和 f 的推论。结合恒等式 $[x_1, x_2, x_3] = [x_1, x_3, x_2] + [x_3, x_2, x_1]$ 的多项式 p，我们可以假设 $i = 1$ 和 $k < i_1 < \cdots < i_{n-3}$。

由于 $c_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*)) = \chi(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*))(1) = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + (n-1)$，且前述多项式模 $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*))$ 生成 P_n，因此它们模 $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*))$ 必须线性无关。因此，我们得出结论：$I = \mathrm{Id}(\mathcal{G}_4 \oplus A_1^*)$。

第二项的证明方法类似。

□

可以将前一个引理证明中使用的类似论证应用于代数$A_4 \oplus A_1$、$A_4 \oplus A_1^*$、$A_4^* \oplus A_1$、$A_4^* \oplus A_1^*$、$\mathcal{G}_4 \oplus A_1 \oplus A_1^*$、$\mathcal{G}_4 \oplus A_4$ 和 $\mathcal{G}_4 \oplus A_4^*$。对于其余的代数直和，可以构造足够多个线性无关的最高权向量，以计算相应的重数。因此，我们省略证明。

引理 3.15。 对于前述代数的直和，我们有：

1) $\chi_n(A_4\oplus A_1^*) = \chi_n(A_4^*\oplus A_1) = \chi_{(n)}+3\chi_{(n-1,1)}+\chi_{(n-2,1^2)}+\chi_{(n-2,2)}$ 和 $l_n(A_4\oplus A_1) = l_n(A_4\oplus A_1^*) = 6$。 2) $\chi_n(B\oplus A_2) = \chi_{(n)}+3\chi_{(n-1,1)}+2\chi_{(n-2,1^2)}+\chi_{(n-2,2)}$ 和 $l_n(B\oplus A_2) = 7$，对所有 $B \in \{A_4, A_4^*, A_5, A_6\}$.3) $\chi_n(B_1 \oplus B_2) = \chi_{(n)} + 4\chi_{(n-1,1)} + 2\chi_{(n-2,1^2)} + 2\chi_{(n-2,2)}$ 和 $l_n(B_1 \oplus B_2) = 9$，对所有 $B_1 \neq B_2$ 和B_1，$B_2 \in \{A_4, A_4^*, A_5, A_6\}$。 4) $\chi_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_1 \oplus A_1^*) = \chi_{(n)} + 3\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1^2)} + \chi_{(n-3,1^3)} + \chi_{(n-4,1^4)}$ 和 $l_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_1 \oplus A_1^*) = 7$。 5) $\chi_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_4) = \chi_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_4^*) = \chi_{(n)} + 3\chi_{(n-1,1)} + 2\chi_{(n-2,1^2)} + \chi_{(n-2,2)} + \chi_{(n-3,1^3)} + \chi_{(n-4,1^4)}$ 和 $l_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_4) = l_n(\mathcal{G}_4 \oplus A_4^*) = 9$。

4. Classifying varieties of bounded colength

本节中，我们对余长度序列有界于 7 的簇进行分类。需要指出的是，此处给出的结果拓展了现有文献；此前，这一方向的研究仅对余长度序列上界为 4 的簇进行了分类。

根据定理 2.2，类型为 $F + J(A)$ 的代数在余长度有界的簇的分类中发挥着重要作用。回顾一下，若 $A = F + J(A)$ 是有限维代数，则根据 [13,引理 9.7.1], ，我们可以将其分解为

$$J(A) = J_{10} + J_{01} + J_{00} + J_{11}, \text{ where} \tag{4.1}$$
$$J_{00} = \{j \in J \mid 1_F j = j1_F = 0\}, \quad J_{10} = \{j \in J \mid 1_F j = j \text{ and } j1_F = 0\}$$
$$J_{01} = \{j \in J \mid 1_F j = 0 \text{ and } j1_F = j\} \quad \text{and} \quad J_{11} = \{j \in J \mid 1_F j = j1_F = j\}.$$

此外，对于 i, k, r, $s \in \{0, 1\}$, $J_{ik}J_{rs} \subseteq \delta_{kr}J_{is}$，其中 δ_{kr}是克罗内克δ函数 .

我们先回顾 [7] 和 [18], 中的几个引理，并在接下来的两个引理中加以汇总。

引理 4.1. [7, 引理 9,10, 15, 20, 21] 设 $A = F + J(A)$ 是一个 F-代数。

1) 若 $J_{10} \neq \{0\}$，则 $A_1 \in$ *var(A)*。*2)* 若 $J_{01} \neq \{0\}$，则 $A_1^* \in$ *var(A)*。*3)* 若 $A_2 \notin$ *var(A)*，则 $[J_{11}, J_{11}] = \{0\}$。*4)* 若 $A_4 \notin$ *var(A)*，则 $J_{10}J_{00} = \{0\}$。*5)* 若 $A_4^* \notin$*var(A)*，则 $J_{00}J_{01} = \{0\}$。

6) 若 $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = \{0\}$ 且 $J_{01}J_{10} \neq \{0\}$，则 $A_5 \in$ *var(A)*。

7) 若 $J_{10}J_{01} \neq \{0\}$ 且 $J_{01}J_{10} = \{0\}$，则 $A_6 \in$ *var(A)*。

引理 4.2。 [18, 引理 13 和 16] 设 $A = F + J$（A）是一个 F-代数。

1）若 $A_7 \notin \mathrm{var}(A)$ 则 $[J_{11}, J_{11}, J_{11}] = \{0\}$。2）若 $\mathcal{G}_4$, A_7, A_8, $A_8^* \notin \mathrm{var}(A)$ 且 $J_{00} = J_{10}J_{01} = \{0\}$ 则 $A \in \mathrm{var}(UT_2)$。

现在，我们证明一系列辅助结果，以支持主要结果。

引理 4.3。设 $A = F + J$（A）是一个满足 $[J_{11}, J_{11}, J_{11}] = [J_{11}, J_{11}][J_{11}, J_{11}][J_{11}, J_{11}] = \{0\}$ 的代数。

1) *If* $[J_{11}, J_{11}][J_{11}, J_{11}]J_{10} \neq \{0\}$ *then* $\overline{\mathcal{G}_4} \in \mathrm{var}(A)$.

2) *If* $J_{01}[J_{11}, J_{11}][J_{11}, J_{11}] \neq \{0\}$ *then* $\overline{\mathcal{G}_4^*} \in \mathrm{var}(A)$.

证明。 由于第二项的证明类似，我们将重点放在第一项上。

令 $A = F + J_{10} + J_{01} + J_{11} + J_{00}$ 如 (4.1) 所给，并考虑 A 的子代数 $B = F + J_{10} + J_{11}$。由于 $[J_{11}, J_{11}, J_{11}] = \{0\}$，我们有 $[B, B, B] \subseteq J_{10}$。因此，$[x_1, x_2, x_3]x_4 \equiv 0$ 在 B 上。

此外，由于

$$[J_{11}, J_{11}][J_{11}, J_{11}][J_{11}, J_{11}] = [F, J_{11}] = [F, F] = \{0\},$$

我们还有 $[B, B][B, B][B, B] \subseteq J_{10}$，因此 $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]x_7 \equiv 0$ 在 B 上。因此，由引理 3.12，$\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4) \subseteq \mathrm{Id}(B)$。

为了证明反向包含，设 $f \in P_n \cap \mathrm{Id}(B)$。根据引理 3.12，我们可以将 f模 $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4)$ 写成

$$\alpha x_1 \cdots x_n + \sum_{\substack{t=1 \\ i_1<\cdots<i_{n-2}}}^{n-1} \beta_t x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}}[x_n, x_t] + \sum_{\substack{i<j,k \\ i_1<\cdots<i_{n-3}}} \gamma_{i,j,k} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-3}}[x_i, x_j]x_k +$$

$$\sum_{\substack{l<m<p<q\\ i_1<\cdots<i_{n-5}}} \delta_{l,m}^{p,q,r} x_{i_1}\cdots x_{i_{n-5}}[x_l,x_m][x_p,x_q]x_r.$$

由于 $[J_{11},J_{11}][J_{11},J_{11}]J_{10}\neq\{0\}$，存在 a、b、c、$d\in J_{11}$ 和 $e\in J_{10}$，使得 $[a,b][c,d]e\neq 0$。首先，考虑求值 $x_v\mapsto 1_F$，对于所有 $v\in\{1,\ldots,n\}$，有 $\alpha=0$。其次，固定 $1\leq t\leq n-1$，并考虑求值 $x_t\mapsto e$ 和 $x_i\mapsto 1_F$，对于所有 $i\neq t$，得到 $\beta_t=0$。第三，固定 i、j、k，其中$i<j$，求值 $x_i\mapsto c$、$x_j\mapsto d$、$x_k\mapsto e$ 和 $x_t\mapsto 1_F$ 对于所有 $t\notin\{i,j,k\}$，给出$\gamma_{i,j,k}=0$。最后，固定 l、m、p、q、r，其中 $l<m<p<q$，求值 $x_l\mapsto a$、$x_m\mapsto b$、$x_p\mapsto c$、$x_q\mapsto d$ 和 $x_r\mapsto a$ 以及$x_v\mapsto 1_F$，对于所有 $v\notin\{l,m,p,q,r\}$，得到 $\delta^{p,q,r}_{l,m}=0$。

因此，我们证明了 $f\in\mathrm{Id}(\mathcal{G}_4)$，进而得到 $\mathcal{G}_4\sim_T B\in\overline{\mathrm{var}}(A)$。

□

考虑

$$\mathcal{I}_1=\{\mathcal{G}_4\oplus A_1\oplus A_1^*,\mathcal{G}_4\oplus A_4,\mathcal{G}_4\oplus A_4^*,A_7,\mathcal{G}_6,\overline{\mathcal{G}_4},\overline{\mathcal{G}_4^*}\}.$$

引理 4.4。设 $A=F+J(A)$ 满足 $\mathcal{G}_4\in\mathrm{var}(A)$。若对所有 $Q\in\mathcal{I}_1$，均有 $Q\notin\mathrm{var}(A)$，则 $A\sim_T B\oplus N$，其中 $B\in\{\mathcal{G}_4,\mathcal{G}_4\oplus A_1,\mathcal{G}_4\oplus A_1^*\}$，且 N是一个幂零代数。

证明。由于 $A_7\notin\mathrm{var}(A)$，根据引理 4.2(1)，有 $[J_{11},J_{11},J_{11}]=\{0\}$。因此，$F+J_{11}\in\mathrm{var}(\mathcal{G})$。由于 $\mathcal{G}_6\notin\mathrm{var}(A)$，根据定理 2.3，可得 $F+J_{11}\sim_T B_1\oplus N$，其中 $B_1\in\{F,A_2,\mathcal{G}_4\}$，且 N是一个幂零代数。在所有这些情况下，我们得到

$$[J_{11},J_{11}][J_{11},J_{11}][J_{11},J_{11}]=\{0\}.$$

现在，假设t hat $J_{10}=J_{01}=\{0\}$。那么 $A=(F+J_{11})\oplus J_{00}$，并且由于 $\mathcal{G}_4\in\mathrm{var}(A)$，可得

$$A\sim_T\mathcal{G}_4\oplus N.$$

现在假设 $J_{10}\neq\{0\}$。根据引理 4.1(1)，有 $A_1\in\mathrm{var}(A)$，因此 $\mathcal{G}_4\oplus A_1\in\mathrm{var}(A)$。由于 $\mathcal{G}_4\oplus A_1\oplus A_1^*\notin\mathrm{var}(A)$，我们得出 $A_1^*\notin\mathrm{var}(A)$，于是由引理 4.1(2)可知$J_{01}=\{0\}$。此外，由于 $\mathcal{G}_4\oplus A_4\notin\mathrm{var}(A)$，我们得到 $A_4\notin\mathrm{var}(A)$，引理 4.1(4)再次给出$J_{10}J_{00}=\{0\}$.。因此，我们可以写成 $A=B\oplus J_{00}$，其中 $B=F+J_{10}+J_{11}$。

我们固定 B 的一个基，它由 F、J_{10} 和 J_{11} 的基合并而成。由于 $[J_{11},J_{11},J_{11}]=\{0\}$，多项式 $[x_1,x_2,x_3]$ 在 B 的基元素上的任何非零求值，都必然要求至少有一个变量在 J_{10} 中取值。因此，$[B,B,B]\subseteq J_{10}$，于是 $[x_1,x_2,x_3]x_4\equiv 0$ 在 B 上。

此外，由于

$$[J_{11},J_{11}][J_{11},J_{11}][J_{11},J_{11}]=[F,J_{11}]=[F,F]=\{0\},$$

多项式 $[x_1,x_2][x_3,x_4][x_5,x_6]$ 在 B 的基上的非零求值必须满足：x_1,x_2,x_3,x_4 在 J_{11} 中取值，并且在变量 x_5 和 x_6 中，一个在 $F+J_{11}$ 中取值，另一个在 J_{10} 中取值。在这种情况下，我们有 $[B,B][B,B][B,B]\subseteq[J_{11},J_{11}][J_{11},J_{11}]J_{10}$。由于$\mathcal{G}_4\notin\mathrm{var}(A)$，根据引理 4.3，我们有

$$[J_{11},J_{11}][J_{11},J_{11}]J_{10}=\{0\}.$$

因此，$[x_1,x_2][x_3,x_4][x_5,x_6]\equiv 0$ 在 B 上。

由引理 3.14 可得 $B\in\mathrm{var}(\mathcal{G}_4\oplus A_1)$，因此 $B\sim_T\mathcal{G}_4\oplus A_1$.。由于 $A\sim_T B\oplus J_{00}$，结论得证。

类似地，若 $J_{01}\neq\{0\}$，则类似的论证可证明：若 $\mathcal{G}_4\oplus A_1\oplus A_1^*$，$\mathcal{G}_4\oplus A_4^*$，$\mathcal{G}_4^*\notin\mathrm{var}(\overline{A})$，则 $A\sim_T B\oplus N$，其中 $B=F+J_{01}+J_{11}\sim_T\mathcal{G}_4\oplus A_1^*$.

□

引理 4.5. 设 $A=F+J(A)$ 是一个代数。

1) 若 $A_9\notin\mathrm{var}(A)$，则 $ab^2=0$，对所有 $a\in J_{10}$ 和 $b\in J_{00}$均成立。

2) 若 $A_9^*\notin\mathrm{var}(A)$，则 $b^2a=0$，对所有 $a\in J_{01}$ 和 $b\in J_{00}$均成立。

证明。假设存在 $a\in J_{10}$ 和 $b\in J_{00}$ 使得 $ab^2\neq 0$。令 R 为由 1, a 和 b生成的 A的子代数，并令 I 表示由 b^3生成的 R 的 T-理想。容易验证，I 由元素 b^k 和 ab^k（对所有 $k\geq 3$）线性张成。

We 断言 $ab^2 \notin I$。事实上，反设 $ab^2 \in I$。那么我们可以写成

$$ab^2 = \sum_{k\geq 3} \alpha_k ab^k, \qquad \alpha_k \in F.$$

令 i 为满足 $ab^i \neq 0$ 的最小正整数。将上述等式右乘 b^{i-2}，得到

$$ab^i = \sum_{k\geq 3} \alpha_k ab^{k+i-2} = 0,$$

这与 i 的最小性矛盾。因此， $ab^2 \notin I$。于是，我们有 a， b， ab， $b^2 \notin I$。因此，商代数 R/I 由元素 $\mathbf{1}$， a， b， ab， ab^2 和 b^2. 线性生成。直接验证映射 $\varphi\colon \ \bar{R}/\bar{I} \longrightarrow \overline{A_9}$ 是容易的，其定义为

$$\bar{1} \mapsto e_{11}, \quad \bar{a} \mapsto e_{12}, \quad \bar{b} \mapsto e_{23}+e_{34}, \quad \overline{b^2} \mapsto e_{24}, \quad \overline{ab} \mapsto e_{13}, \quad \overline{ab^2} \mapsto e_{14}$$

是一个同构。因此， $A_9 \cong R/I \in \mathsf{var}(R) \subseteq \mathsf{var}(A)$。

□

引理 4.6。 令 $A = F + J\ (A)$ 为一个代数。

1) 若 A_9， $A_{10} \notin \mathsf{var}(A)$ 则 $J_{10}J_{00}^2 = \{0\}$。

2) 若 A_9^*， $A_{10}^* \notin \mathsf{var}(A)$ 则 $J_{00}^2 J_{01} = \{0\}$。

证明。 假设存在 $a \in J_{10}$ 和 b， $c \in J_{00}$ 使得 $abc \neq 0$。由于 $A_9 \notin \mathsf{var}(A)$，根据引理 4.5，我们有 $ab^2 = ac^2 = a(b+c)^2 = 0$，因此 $abc + acb = 0$。令 R 为由 $\mathbf{1}$， a 和 b 生成的 A 的子代数，并考虑由 b^2， c^2 和 $bc + cb$ 生成的 R 的 T-理想 I。

由于 $I \subseteq J_{00}$，于是 a， abc， ab， $ac \notin I$。因此，我们也有 b， c， bc， $cb \notin I$。现在，我们注意到商 R/I 由以下元素线性生成

$$\bar{1},\ \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \overline{ab},\ \overline{ac},\ \overline{abc},\ \overline{bc},\ \overline{cb}$$

满足 $\bar{b}^2 = \bar{c}^2 = \bar{a} \quad \overline{b^2} = \overline{ac^2} = \overline{bc} + \overline{cb} = \overline{abc} + \overline{acb} = 0$。因此，通过同构， $R/I \cong A_{10}$ 由 m 给出

$$\bar{1} \mapsto e_{11}, \quad \bar{a} \mapsto e_{12}, \quad \bar{b} \mapsto e_{23} - e_{45} \quad \text{and} \quad \bar{c} \mapsto e_{24} + e_{35}.$$

□

考虑以下集合

$$\mathcal{I}_2 = \{A_4 \oplus A_2, A_4 \oplus A_4^*, A_4 \oplus A_5, A_4 \oplus A_6, A_9, A_{10}\},$$
$$\mathcal{I}_3 = \{A_4^* \oplus A_2, A_4^* \oplus A_4, A_4^* \oplus A_5, A_4^* \oplus A_6, A_9^*, A_{10}^*\}.$$

引理 4.7. 设 $A = F + J$ 是一个代数。

1) 若对于所有 $Q \in \mathcal{I}_2$， $J_{10}J_{00} \neq \{0\}$ 和 $Q \notin \mathrm{var}(A)$，则 $A \sim_T A_4 \oplus N$ 或 $A \sim_T A_4 \oplus A_1^* \oplus N$成立。

2) 若对于所有 $Q \in \mathcal{I}_3$， $J_{00}J_{01} \neq \{0\}$ 和 $Q \notin \mathrm{var}(A)$，则 $A \sim_T A_4^* \oplus N$ 或 $A \sim_T A_4^* \oplus A_1 \oplus N$成立。

证明。 由于第二项的证明类似，我们着重证明第一项。

假设 $J_{10}J_{00} \neq \{0\}$ 和 $J_{01} \neq \{0\}$。由引理 4.1(2)(4)，可得 $A_1^*, A_4 \in \mathsf{var}(A)$，因此 $\mathsf{Id}(A) \subseteq \mathsf{Id}(A_4) \cap \mathsf{Id}(A_1^*)$。此外，由于 $J_{00} \subseteq A$，显然 $\mathsf{Id}(A) \subseteq \mathsf{Id}(J_{00})$。因此，$\mathsf{Id}(A) \subseteq \mathsf{Id}(A_4) \cap \mathsf{Id}(A_1^*) \cap \mathsf{Id}(J_{00})$。我们断言在这种情况下 $A \sim_T A_4 \oplus A_1^* \oplus J_{00}$。

令 $f \in P_n \cap \mathsf{Id}(A_4) \cap \mathsf{Id}(A_1^*) \cap \mathsf{Id}(J_{00})$。只要 $A_4 \oplus A_2$， $A_4 \oplus A_4^* \notin \mathsf{var}(A)$，那么 A_2， $A_4^* \notin \mathsf{var}(A)$。此外，由于 A_9， $A_{10} \notin \mathsf{var}(A)$，根据引理 4.1(3)(5) 和 4.6，我们有

$$[J_{11}, J_{11}] = J_{00}J_{01} = J_{10}J_{00}^2 = 0. \tag{4.2}$$

设 $J_{01}J_{10} \neq \{0\}$，并考虑 $I = J_{10}J_{00} + J_{01}J_{10}J_{00}$。注意到 I 实际上是 A的一个理想。此外，如果 $J_{01}J_{10} \subset I$，那么 $J_{01}J_{10} \subset J_{01}J_{10}J_{00}$，但这意味着 $J_{01}J_{10}J_{00} \subset J_{01}J_{10}J_{00}^2 = \{0\}$。因此，我们有 $J_{01}J_{10} \not\subset I$，从而 $R = A/I$ 是一个满足以下条件的代数

$$J(R)_{10}J(R)_{00} = J(R)_{00}J(R)_{01} = \{0\} \text{ and } J(R)_{01}J(R)_{10} \neq \{0\}.$$

由引理 4.1(6)，我们有 $A_5 \in \mathsf{var}(R) \subset \mathsf{var}(A)$，因此 $A_4 \oplus A_5 \in \mathsf{var}(A)$，这与假设矛盾。因此，$J_{01}J_{10} = \{0\}$。

现在，由于 $A_4 \oplus A_6 \notin \mathsf{var}(A)$，我们有 $A_6 \notin \mathsf{var}(A)$。因此，由引理 4.1(7)，我们有 $J_{10}J_{01} = \{0\}$.

考虑一个由 F、J_{10}、J_{11} 和 J_{00} 的基的并组成的 A 的基。因此，对 A 的基进行 f 的非零求值时，要么必须取自 $B_1 = F + J_{11} + J_{01}$ 中的元素，要么取在 $B_2 = F + J_{11} + J_{10} + J_{00}$ 上。在第一种情况下，由于 A_1^* 的 $\mathrm{Id}(f \in)$，因此 f 是 $f_1 = x_1[x_2, x_3]$ 的一个推论。由于在 B_1 上的 $f_1 \equiv 0$，我们有在 A 上的 $f \equiv 0$。

在第二种情况下，我们注意到，根据 (4.2)，对 B_2 进行 f 的非零求值时，要么必须取自 J_{00} 中的元素，要么至多有一个变量在 J_{00} 上取值。在第一种情况下，由于 J_{00} 的 $\mathrm{Id}(f \in)$，我们得到在 A 上的 $f \equiv 0$。在第二种情况下，我们注意到，$f_2 = [x_1, x_2]x_3x_4$ 在 A 的所有求值下都为零，其中至多一个变量在 J_{00} 上取值。由于 A_4 的 $\mathrm{Id}(f \in)$，由引理 3.5 可知，f 是 f_2 的一个推论，进而 f 是 A 的一个恒等式。

因此，我们得到 $\mathrm{Id}(A_4) \cap \mathrm{Id}(A_1^*) \cap \mathrm{Id}(J_{00}) \subseteq \mathrm{Id}(A)$，从而有 $A \sim_T A_4 \oplus A_1^* \oplus N$，其中 $N = J_{00}$ 是一个幂零代数。

最后，当 $J_{01} = \{0\}$ 时，可以通过重复上述论证以类似方式处理。在这种情况下，我们得到 $A \sim_T A_4 \oplus N$。□

接下来，设

$$\mathcal{I}_4 = \{A_5 \oplus A_2, A_5 \oplus A_6\}.$$

引理 4.8. 设 $A = F + J(A)$ 是一个满足 $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = \{0\}$ 的代数。若对所有 $Q \in \mathcal{I}_4$，都有 $J_{01}J_{10} \neq \{0\}$ 和 $Q \notin \mathrm{var}(A)$，则 $A \sim_T A_5 \oplus N$.

证明。 假设 $J_{01}J_{10} \neq \{0\}$。根据引理 4.1(6)，我们有 $A_5 \in \mathsf{var}(A)$。因此，

$$\mathrm{Id}(A) \subseteq \mathrm{Id}(A_5) \cap \mathrm{Id}(J_{00}).$$

令 $f \in P_n \cap \mathrm{Id}(A_5) \cap \mathrm{Id}(J_{00})$，并固定 A 的一个基，该基由 F、J_{10}、J_{01}、J_{11} 和 J_{00} 的各组基的并集构成。为证明 $f \equiv 0$ 在 A 上，我们首先证明 $J_{10}J_{01} = \{0\}$。

反设 $J_{10}J_{01} \neq \{0\}$。根据假设，$J_{01}J_{10}$ 是 A 的双边理想。因此，在商代数 $R = A/J_{01}J_{10}$ 中，我们有

$$J(R)_{10}J(R)_{00} = J(R)_{00}J(R)_{01} = J(R)_{01}J(R)_{10} = \{0\} \quad \text{and} \quad J(R)_{10}J(R)_{01} \neq \{0\}.$$

由引理 4.1(7)，可推出 $A_6 \in \mathsf{var}(R) \subseteq \mathsf{var}(A)$。由于 $A_5 \oplus A_6 \notin \mathsf{var}(A)$，我们得到矛盾。因此，$J_{10}J_{01} = \{0\}$.

接下来注意到 $A_5 \oplus A_2 \notin \mathsf{var}(A)$。因此，$A_2 \notin \mathsf{var}(A)$，并且根据引理 4.1(3)，我们得到 $[J_{11}, J_{11}] = \{0\}$。综上，我们得到

$$J_{00}J_{01} = J_{10}J_{00} = J_{10}J_{01} = [J_{11}, J_{11}] = \{0\}.$$

这些关系意味着，对 A 的基元素进行 f 求值时，任何非零结果都必须属于 J_{00} 或子空间 $B = F + J_{10} + J_{01} + J_{11}.$。在第一种情况下，由于 J_{00} 的 $\mathrm{Id}(f \in)$，因此 A 上的 $f \equiv 0$。如果是在 B 的元素上求值，那么注意到多项式 $f_1 = x_1[x_2, x_3]x_4$ 在 B 上满足 $f_1 \equiv 0$。由于 A_5 的 $\mathrm{Id}(f \in)$，引理 3.5 表明 f_1 蕴含 f，因此 A 上的 $f \equiv 0$。

因此，我们得出 $A \sim_T A_5 \oplus J_{00}$，证明至此完成。

□

引理 4.9。 设 $A = F + J(A)$ 是满足 $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = J_{01}J_{10} = \{0\}$ 的代数。若 $J_{10}J_{01} \neq \{0\}$ 且 $A_6 \oplus A_2 \notin \mathrm{var}(A)$，则 $A \sim_T A_6 \oplus N$.

证明。 与前一个引理类似，我们注意到，在该假设下，有 $A = B \oplus J_{00}$，其中 $B = F + J_{10} + J_{01} + J_{11}$ 是 A 的子代数。此外，由于 $J_{01}J_{10} = \{0\}$ 和 $J_{10}J_{01} \neq \{0\}$，根据引理 4.1(7)，我们得到 $A_6 \in \mathsf{var}(B)$。由于 $A_6 \oplus A_2 \notin \mathsf{var}(B)$，我们有 $A_2 \notin \mathsf{var}(B)$，从而 $[J_{11}, J_{11}] = \{0\}$。因此，我们得到恒等式

$$[J_{11}, J_{11}] = [J_{10}J_{01}, F] = [J_{10}J_{01}, J_{11}] = J_{01}J_{10} = \{0\}.$$

现在，通过冗长而详细的计算，可以验证，利用上述关系，子代数 B 满足引理 3.5 中的多项式 f_1，f_2，f_3，f_4，f_5 和 f_6。因此，$B \in \mathsf{var}(A_6)$，进而 $B \sim_T A_6$。

因此，我们证明了 $A \sim_T A_6 \oplus N$。 □

为方便记号，我们设 $\mathcal{I}_5 = \{A_6 \oplus A_2\}$.

注 4.10. 注意， $\mathcal{G}_6 \in \mathrm{var}(\mathcal{G})$ 以及 $A_4, A_4^*, N_4, A_9, A_9^* \in \mathrm{var}(UT_2)$。

现在我们可以证明本节的主要结果了。为此，我们定义以下集合：

$$\mathcal{I}_6 = \{A_7, A_8, A_8^*\}, \quad \mathcal{I}_7 = \{A_6 \oplus A_2, N_4, A_9, A_9^*, A_2 \oplus A_4, A_2 \oplus A_4^*, A_4 \oplus A_4^*\} \quad \text{and} \quad \mathcal{I} = \bigcup_{i=1}^{7} \mathcal{I}_i.$$

定理 4.11. 设 A 是一个定义在 F上的代数。以下条件等价：

1) $Q \notin \mathrm{var}(A)$，对所有 $Q \in \mathcal{I}$均成立。2) A 与以下某个代数 *PI*-等价：

$$N, C \oplus N, A_1 \oplus N, A_1^* \oplus N, A_1 \oplus A_1^* \oplus N, A_2 \oplus N,$$
$$A_1 \oplus A_2 \oplus N, A_1^* \oplus A_2 \oplus N, A_4 \oplus N, A_4^* \oplus N, A_4 \oplus A_1^* \oplus N,$$
$$A_4^* \oplus A_1 \oplus N, A_5 \oplus N, A_6 \oplus N, \mathcal{G}_4 \oplus N, \mathcal{G}_4 \oplus A_1 \oplus N, \mathcal{G}_4 \oplus A_1^* \oplus N,$$

其中 N 表示一个幂零代数，而 C 是一个交换非幂零代数。

3) $l_n(A) \leq 6$，当 n 足够大时。

证明。 由于当 n 充分大时，对于每个 $S \in \mathcal{I}$，都有 $l_n(S) \geq 7$，因此条件 3) 蕴含条件 1)。此外，根据第3节中得到的结果，我们已经证明了 2) 蕴含 3)。

现在假设对所有 $Q \in \mathcal{I}$，都有 $Q \notin \mathrm{var}(A)$。根据注 4.10，我们有 $\mathcal{G}$，$UT_2 \notin \mathrm{var}(A)$，因此由定理 2.2 可得

$$A \sim_T B_1 \oplus \cdots \oplus B_m,$$

其中每个 B_i 都是有限维代数，并且要么 B_i 是幂零的，要么 $B_i \cong F + J(B_i)$.

如果对于每个 i， B_i 都是幂零的，那么 $A \sim_T N$，其中 N 表示一个幂零代数。因此，我们可以假设对于某个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，有 $B_i \cong F + J(B_i)$。

将 (4.1) 中给出的雅各布森根分解记为 $J(B_i) = J_{10} + J_{01} + J_{00} + J_{11}$。根据引理 4.7，我们有如下结论：

- 若 $J_{10}J_{00} \neq \{0\}$，则 $B_i \sim_T A_4 \oplus N$ 或 $B_i \sim_T A_4 \oplus A_1^* \oplus N$；
- 若 $J_{00}J_{01} \neq \{0\}$，则 $B_i \sim_T A_4^* \oplus N$ 或 $B_i \sim_T A_4^* \oplus A_1 \oplus N$。

因此，现在我们可以假设 $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = \{0\}$。根据引理 4.8，若 $J_{01}J_{10} \neq \{0\}$，则

$$B_i \sim_T A_5 \oplus N.$$

因此，我们考虑 $J_{01}J_{10} = \{0\}$ 的情形。在这种情况下，由引理 4.9 可知，若 $J_{10}J_{01} \neq \{0\}$，则

$$B_i \sim_T A_6 \oplus N.$$

因此，我们现在假设

$$J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = J_{01}J_{10} = J_{10}J_{01} = \{0\}.$$

注意，在这些条件下， $B_i = B \oplus J_{00}$，其中 $B = F + J_{10} + J_{01} + J_{11}$。注意，根据引理 4.4，若 $\mathcal{G}_4 \in \mathrm{var}(B_i)$，则 B_i 与以下某个代数 PI-等价：

$$\mathcal{G}_4 \oplus N \quad \text{or} \quad \mathcal{G}_4 \oplus A_1 \oplus N \quad \text{or} \quad \mathcal{G}_4 \oplus A_1^* \oplus N.$$

因此，我们也假设 $\mathcal{G}_4 \notin \mathrm{var}(B_i)$，从而 $\mathcal{G}_4 \notin \mathrm{var}(B)$。由于对所有 $Q \in \mathcal{I}_6$，都有 $Q \notin \mathrm{var}(B)$，引理 4.2(2) 推出 $B \in \mathrm{var}(UT_2)$。利用定理 2.3 中给出的分类，并结合对所有 $Q \in \mathcal{I}_7$，都有 $Q \notin \mathrm{var}(B)$），我们得出 B 与下列某个代数 PI-等价：

$$N, C \oplus N, A_1 \oplus N, A_1^* \oplus N, A_1 \oplus A_1^* \oplus N, A_2 \oplus N, A_1 \oplus A_2 \oplus N,$$
$$A_1^* \oplus A_2 \oplus N, A_1 \oplus A_1^* \oplus A_2 \oplus N, A_4 \oplus N, A_4^* \oplus N, A_4 \oplus A_1^* \oplus N \text{ or } A_4^* \oplus A_1 \oplus N$$

其中， N 表示一个幂零代数，而 C 是一个交换的非幂零代数 a.

最后，我们回顾一下， A 与由 B 型代数组成的直和与幂零代数 PI-等价。由于这些代数中的某些直和已从 $\mathrm{var}(A)$ 中排除，因此结论成立。□

因此，我们现在能够给出满足 $l_n(A) = 7$ 的簇的分类，其中 n 足够大。继续之前，我们先陈述一个对下文至关重要的辅助结果。

命题 4.12. 设 A 是一个代数，且 $B \in \mathrm{var}(A)$。若存在一个整数 $k \geq 0$，使得对所有 $m \geq k$，都有$P_m \cap \mathrm{Id}(A) = P_m \cap \mathrm{Id}(B)$，则 $A \sim_T B \oplus N$，其中 N 是一个幂零代数。

证明。 首先注意到，由于 $B \in \mathsf{var}(A)$，我们有 $P_n \cap \mathsf{Id}(A) \subseteq P_n \cap \mathsf{Id}(B)$，对所有 n. 均成立。此外，已知存在一个幂零代数 N，其恒等式的 T-理想由下式给出

$$I = \langle P_l \cap \mathrm{Id}(A),\ x_1 \cdots x_k \mid 1 \leq l \leq k-1 \rangle_T .$$

根据 I的定义，显然

$$P_n \cap \mathrm{Id}(A) \subseteq P_n \cap \mathrm{Id}(B) \cap \mathrm{Id}(N) = P_n \cap \mathrm{Id}(B \oplus N),\ \text{for all } n.$$

此外，我们注意到， N 的任意次数为 $n < k$ 的多线性恒等式都是恒等式 $P_l \cap \mathsf{Id}(A)$ 的推论，对所有 $1 \leq l \leq k-1$均成立。因此，

$$P_n \cap \mathrm{Id}(B) \cap \mathrm{Id}(N) \subseteq P_n \cap \mathrm{Id}(N) \subseteq P_n \cap \mathrm{Id}(A),\ \text{for all } n < k.$$

最后，由于 N的幂零指数为 k，且对所有 $m \geq k$均有 $P_m \cap \mathsf{Id}(A) = P_m \cap \mathsf{Id}(B)$，我们得到

$$P_n \cap \mathrm{Id}(A) = P_n \cap \mathrm{Id}(B \oplus N), \text{for all } n \geq k.$$

因此，对所有 n均有 $P_n \cap \mathsf{Id}(A) = P_n \cap \mathsf{Id}(B \oplus N)$，从而 $A \sim_T B \oplus N$. □

定义 $\mathcal{I}$ 的子集 $\mathcal{B}$，它由满足 $l_n(A) = 7$（ n 足够大）的代数 A 构成，即

$$\mathcal{B} = \{A_7, \mathcal{G}_6, A_4 \oplus A_2, A_4^* \oplus A_2, A_5 \oplus A_2, A_6 \oplus A_2, \mathcal{G}_4 \oplus A_1 \oplus A_1^*\}$$

推论 4.13. 设 A 是特征零域上的代数。那么，当 $l_n(A) = 7$, n 足够大时，当且仅当 A 与某个 $B \oplus N$PI-等价，其中 $B \in \mathcal{B}$且 N是幂零代数。

证明。 首先注意，若 A 与以下代数之一 T-等价： $A_7, \mathcal{G}_6, A_4 \oplus A_2, A_4^* \oplus A_2, A_5 \oplus A_2$,$A_6 \oplus A_2$ 和 $\mathcal{G}_4 \oplus A_1 \oplus A_1^*$，则由引理 3.8、3.11 和 3.15 可知，当 n 足够大时， $l_n(A) = 7$。

反过来，假设存在 $k \geq 0$，使得对所有 $n \geq k$，都有 $l_n(A) = 7$。由定理 4.11，必有 $S \in \mathsf{var}(A)$，其中 $S \in \mathcal{B}$。注意，对所有 $n \geq k$，都有 $7 = l_n(P) \leq l_n(A) = 7$，因此，对所有 $n \geq k$，都有 $P_n \cap \mathsf{Id}(S) = P_n \cap \mathsf{Id}(A)$。由命题 4.12，我们得出 $A \sim_T S \oplus N$。□

5. Classifying varieties of small central colength

本节中，我们研究与上述代数相关的中心多项式和中心余特征。我们描述其中若干代数的中心余特征序列及相应的中心余长。因此，我们得到了中心余长不超过 2 的簇的分类。

在多项式恒等式的研究中，上块三角矩阵代数扮演着重要角色，记作 $UT(d_1, \ldots\ldots, d_k)$。该代数定义为 $M_{d_1+\cdots+d_k}(F)$ 的子代数，由以下形式的矩阵组成：

$$UT(d_1, \ldots, d_k) = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & A_{k-1,k} \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix},$$

其中，当 $1 \leq i \leq k$ 时，$A_i \cong M_{d_i}(F)$；当 $1 \leq i < j \leq k$ 时，$A_{ij} \cong M_{d_i \times d_j}(F)$。一个

基本结果由 [10, 引理 1] 证明：若 $k > 1$，则该代数不含真中心多项式。因此，我们有

$$l_n^{\delta}(UT(d_1, \ldots, d_k)) = 0, \quad \text{for } k > 1.$$

这个例子产生了一个由代数组成的无限列表，它们的真中心余长均为零。这一事实表明，至少在初步阶段，按照序列$l_n^{\delta}(A)$对簇进行分类似乎遥不可及。

这里，我们关注序列 $l_n^z(A)$ $n \geq 1$。在给出本节的主要结果之前，我们先考虑以下结果。

注 5.1. 观察　　证明，若 $Z(A)=\{0\}$，则 $\chi_n^z(A)=\chi_n(A)$，$l_n(A)=l_n^z(A)$ 且 $l_n^\delta(A)=0$。特别是，

$$\chi_n^z(A_1)=\chi_n^z(A_1^*)=\chi_{(n)}+\chi_{(n-1,1)} \quad and \quad l_n^z(A_1)=l_n^z(A_1^*)=2.$$

此外，$l_n^z(A_1\oplus A_1^*)=3$ 以及 $l_n^z(A_4)=l_n^z(A_4^*)=5$。

以下引理可在 [4] 中验证。

引理 5.2. 对于代数 A_2、N_4 和 $\mathcal{G}_{2k}$，有

1) $\chi_n(A_2)=\chi_{(n)}$，$l_n^z(A_2)=1$ 以及 $l_n^\delta(A_2)=2$.2) $\chi_n^z(N_4)$ $=\chi_{(n)}+\chi_{(n-1,1)}+\chi_{(n-2,1^2)}$ $l_n^z(N_4)=3$ 以及 $l_n^\delta(N_4)=4$.3) $\chi_n^z(\mathcal{G}_{2k})$ $=\sum_{i=0}^{k-1}\chi_{(n-i,1^{2i})}$ $l_n^z(\mathcal{G}_{2k})=k$ 以及 $l_n^\delta(\mathcal{G}_{2k})=k+1$，对所有 $k\geq 1$。

引理 5.3. 对于代数 A_5 和 A_6，我们有

1) $\chi_n^z(A_5)=\chi_n^z(A_6)=\chi_{(n)}+2\chi_{(n-1,1)}$ *and* $\chi_n^\delta(A_5)=\chi_n^\delta(A_6)=\chi_{(n-2,2)}+\chi_{(n-2,1^2)}$.
2) $l_n^z(A_5)=l_n^z(A_6)=3$ *and* $l_n^\delta(A_5)=l_n^\delta(A_6)=2$.

证明。首先注意到，代数 A_5 和 A_6 的中心为

$$Z(A_5)=Z(A_6)=\mathrm{span}_F\{e_{13}\}.$$

我们证明 A_5 的结论，并省略 A_6 的证明，因为论证完全类似。

首先考虑分拆 (n) 及其最高权向量 $f_{(n)}=x_1^n$。在 $x_1\mapsto e_{22}$ 处求值，得到$f_{(n)}\mapsto e_{22}\notin Z(A_5)$。这表明 $1\leq m_{(n)}^z\leq m_{(n)}=1$，从而 $m_{(n)}^z=1$。

接下来，考虑分拆 $(n-1,1)$ 及其对应的最高权向量

$$f_{(n-1,1)}^1=[x_1,x_2]x_1^{n-2} \quad \text{and} \quad f_{(n-1,1)}^2=x_1^{n-2}[x_1,x_2].$$

在 $x_1\mapsto e_{22}$和 $x_2\mapsto e_{12}+e_{23}$ 处求值时，我们有 $f_{(n-1,1)}^1\mapsto -e_{12}\notin Z(A_5)$ 和 ${f^2}_{(n-1,1)}\mapsto e_{23}\notin Z(A_5)$。此外，多项式 ${f^1}_{(n-1,1)}$和 $f_{(n-1,1)}^2$ 模 $\mathrm{Id}^z(A_5)$ 线性无关。因此，$2\leq m_{(n-1,1)}^z\leq m_{(n-1,1)}=2$，这意味着 $m_{(n-1,1)}^z=2$。

最后，对于分拆（$n-2$，2）和（$n-2$，1^2），可以验证，与它们相关联的每个最高权向量都是中心的。因此，$m_{(n-2,2)}^z=m_{(n-2,1^2)}^z=0$.

因此，我们得出结论：

$$\chi_n^z(A_5)=\chi_{(n)}+2\chi_{(n-1,1)} \quad \text{and} \quad \chi_n^\delta(A_5)=\chi_{(n-2,2)}+\chi_{(n-2,1^2)}.$$

□

此处我们指出，注 3.3 中的类似陈述对于中心余特征也成立。因此，我们得到以下结果。

引理 5.4. 对于前述若干代数的直和，我们有

1) $\chi_n^z(A_2\oplus A_1)=\chi_n^z(A_2\oplus A_1^*)=\chi_{(n)}+\chi_{(n-1,1)}$.2) $\chi_n^z(\mathcal{G}_4\oplus A_1)=\chi_n^z$ $(\mathcal{G}_4\oplus A_1^*)=\chi_{(n)}+\chi_{(n-1,1)}+\chi_{(n-1,1^2)}$.3) $l_n^z(A_2\oplus A_1)=l_n^z(A_2\oplus A_1^*)$ $=l_n^\delta(A_2\oplus A_1)=l_n^\delta(A_2\oplus A_1^*)=2$.4) $l_n^z(\mathcal{G}_4\oplus A_1)=l_n^z(\mathcal{G}_4\oplus A_1^*)=l_n^\delta($ $\mathcal{G}_4\oplus A_1)=l_n^\delta(\mathcal{G}_4\oplus A_1^*)=3$.

考虑

$$\mathcal{T}_1=\{\mathcal{G}_4\oplus A_1,\mathcal{G}_4\oplus A_1^*,N_4,\mathcal{G}_6\}.$$

引理 5.5. 设 $A=F+J(A)$ 使得 $\mathcal{G}_4\in\mathrm{var}(A)$。若对所有 $Q\in\mathcal{T}_1$，都有 $Q\notin\mathrm{var}(A)$，则 $A\sim_T\mathcal{G}_4\oplus N$，其中 N 是一个幂零代数。

证明。由于 $\mathcal{G}_4\in\mathrm{var}(A)$ 且 $\mathcal{G}_4\oplus A_1$, $\mathcal{G}_4\oplus A_1^*\notin\mathrm{var}(A)$，可得 $A_1,A_1^*\notin\mathrm{var}(A)$。由引理 4.1(1)(2)，我们得出 $J_{10}=J_{01}=\{0\}$，因此

$$A=(F+J_{11})\oplus J_{00}.$$

Mo此外，由于 $N_4\notin\mathrm{var}(A)$，我们也有 $A_7\notin\mathrm{var}(A)$，因此根据 [18, 引理 13　　],

$$[J_{11},J_{11},J_{11}]=\{0\}.$$

这意味着　　在 $F + J_{11} \in \text{var}(\mathcal{G})$ 处。此外，$\mathcal{G}_6 \notin \text{var}(A)$，因此根据定理 2.3，我们得到

$$F + J_{11} \sim_T \mathcal{G}_4 \oplus N_1,$$

其中 N_1 是幂零代数。最后，由于 J_{00} 是幂零的，结论得证。

□

为了陈述本节的主要结果，我们引入以下集合：

$$\mathcal{R} = \{A_1 \oplus A_1^*, A_4, A_4^*, A_5, A_6\} \cup \mathcal{T}_1.$$

定理 5.6。设 A 是一个定义在 F 上的代数。以下条件等价　　*t:*

(1) $Q \notin \text{var}(A)$，对所有 $Q \in \mathcal{R}$ 均成立。(2) A 与以下

某个代数 *PI*-等价：

$$N,\ C \oplus N,\ A_1 \oplus N,\ A_1^* \oplus N,\ A_2 \oplus N,\ A_2 \oplus A_1 \oplus N,\ A_2 \oplus A_1^* \oplus N,\ \mathcal{G}_4 \oplus N$$

其中 N 表示一个幂零代数，C 是一个交换非幂零代数。

(3) $l_n^z(A) \leq 2$，当 n 足够大时。

证明。由于对所有 $B \in \mathcal{R}$，$l_n^z(B) \geq 3$，因此 (3) $\Rightarrow$ (1) 显然成立。此外，由注 5.1 以及引理 5.2 和 5.4，可得 (2) $\Rightarrow$ (3)。因此，只需证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。

假设对每个 $Q \in \mathcal{R}$，都有 $Q \notin \text{var}(A)$。根据注 4.10，这意味着 $UT_2, \mathcal{G} \notin \text{var}(A)$。因此，由定理 2.2，代数 A 具有多项式增长，并且

$$A \sim_T B_1 \oplus \cdots \oplus B_m,$$

其中每个 B_i 都是有限维的，且要么是幂零的，要么具有 $F + J(B_i)$ 的形式。如果所有代数 B_i都是幂零的，则无需证明。

现在假设某个指标 i 满足 $B_i = F + J(B_i)$。由于 A_4,A_4^*, A_5, $A_6 \notin \text{var}(A)$，由引理 4.1 得

$$J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = J_{10}J_{01} = J_{01}J_{10} = \{0\}.$$

因此，$B_i = B \oplus J_{00}$，其中 $B = F + J_{10} + J_{01} + J_{11}$.

若 $\mathcal{G}_4 \in \text{var}(B)$，那么，由于对每个 $Q \in \mathcal{T}_1$ 都有 $Q \notin \text{var}(B)$，引理 5.5 蕴含 $B \sim_T \mathcal{G}_4$。因此，

$$B_i \sim_T \mathcal{G}_4 \oplus N,$$

其中 $N = J_{00}$ 是幂零的。

因此，我们可以假设 $\mathcal{G}_4 \notin \text{var}(B)$。在这种情况下，由于 $\mathcal{G}_4, A_7, A_8$,$A_8^* \notin \text{var}(B)$，引理 4.2 蕴含 $B \in \text{var}(UT_2)$。此外，由于 $N_4, A_4, A_4^*, A_1 \oplus A_1^* \notin \text{var}(B)$，定理 2.3 证明 B_i 与下列代数之一 T-等价：

$$N, \quad C \oplus N, \quad A_1 \oplus N, \quad A_1^* \oplus N, \quad A_2 \oplus N, \quad A_2 \oplus A_1 \oplus N, \quad A_2 \oplus A_1^* \oplus N,$$

其中 N 是幂零代数，且 C 是交换非幂零代数。

最后，由于 $A \sim_T B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ 以及上述代数中某些直和不属于 var(A)，我们得出 (1) $\Rightarrow$(2)，由此完成证明。

□

致谢

References

[1] A. Berele. *Homogeneous polynomial identities*. Israel J. Math. 42 (1982) 258–272. [2] W. Q. Cota. *Minimal G-graded varieties of quadratic growth and small colength.* J. Algebra Appl. DOI: 10.1142/S0219498826502087. [3] W. Q. Cota, A. Ioppolo, F. Martino 和 A. C. Vieira. *On the colength sequence of G-graded algebras.* Linear Algebra Appl. 701 (2024) 61-96. [4] W. D. S. Costa, J. P. Cruz, T. S. do Nascimento 和 A. C. Vieira. *Central cocharacters of the subvarieties of varieties of superalgebras with almost polynomial growth.* 已提交。

[5] V. Drensky. *Free algebras and PI-algebras.* 新加坡：Springer-Verlag. 2000.

[6] V. Drensky. *Representation of the symmetric group and varieties of linear algebras*. Mat. Sb. 115 (1981) 98–115（俄文）。英文译本见：Math. USSR Sb. 43 (1981) 85–101. [7] A. Giambruno 和 D. La Mattina. *PI-algebras with slow codimension growth.* J. Algebra. 284 (2005) 371-391. [8] A. Giambruno, D. La Mattina 和 V. Petrogradsky. *Matrix algebras of polynomial codimension growth*. Israel J. Math. 158 (2007) 367-378. [9] A. Giambruno. D. La Mattina 和 C. P. Milies. *On almost polynomial growth of proper central polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. 152 (2024) 4569-4584. [10] A. Giambruno 和 M. Zaicev. *A characterization of algebras with polynomial growth of the codimensions*. Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2000) 59–67. [11] A. Giambruno 和 M. Zaicev. *Central polynomials of associative algebras and their growth*. Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), no. 3, 909–919. [12] A. Giambruno 和 M. Zaicev. *Exponential codimension growth of PI-algebras: an exact estimate*. Adv. Math. 142 (1999) 221-243.[13] A. Giambruno 和 M. Zaicev. 多项式恒等式与渐近方法。数学调查与专著。美国数学学会。普罗维登斯。122 (2005). [14] A. Guterman 和 A. Regev. *On the growth of identities*. 载于：代数，莫斯科，1998，de Gruyter，柏林，（2000）319–330. [15] S. M. A. Jorge 和 A. C. Vieira. *On minimal varieties of quadratic growth.* Linear Algebra Appl. 418 (2006) 925-938. [16] A. R. Kemer. *Varieties of finite rank*. 第15届全联盟代数会议论文集，克拉斯诺亚尔斯克。2 (1979)（俄文）。[17] Yu. N. Malcev. *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices*（俄文）。Algebra i Logika 10 (1971) 393-400. 英文译本：Algebra and Logic 10 (1971). [18] D. La Mattina. *Characterizing varieties of colength* ≤ 4. Commun. Algebra. 37 (2009) 1793-1807. [19] D. La Mattina. *Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties*. Manuscripta Math. 123 (2007) 185-203. [20] D. La Mattina, T. S. do Nascimento 和 A. C. Vieira. *Minimal star-varieties of polynomial growth and bounded colength*. J. Pure App. Algebra. 222 (2018) 1765-1785. [21] S. P. Mishchenko, A. Regev 和 M. V. Zaicev. *A Characterization of P.I. Algebras with Bounded Multiplicities of the* . J. *Cocharacters* 219 1999 356 368 Algebra. ( ) - . [22] T. S. do Nascimento, R. B. dos Santos 和 A. C. Vieira. *Graded cocharacters of minimal subvarieties of supervarieties of almost polynomial growth.* 219 2015 913 929 J. Pure Appl. Algebra. ( ) - . [23] T. S. do Nascimento 和 A. C. Vieira. *Superalgebras with graded involution and star-graded colength bounded by 3.* Linear Multilinear Algebra. 67 (2019) 1999-2020. [24] A. Regev. *Existence of identities in* $A \otimes B$. Israel J. Math. 11 (1972) 131–152. [25] *Growth for the central polynomials* 44 2016 10, 4411 4421 A. Regev. . Commun. Algebra. [26] *Supervarieties of small graded colength.* 217 2013 322 ( ), no. – A. C. Vieira. J. Pure Appl. Algebra. ( ) -333.