arXiv:2601.09547v1 [math.CA] 14 Jan 2026

关于广义闵可夫斯基–芬克变换的小分母问题

Rui Han 和 Yaghoub Rahimi

谨以此文献给 *Boris Rubin*，祝贺他 *80* 岁生日。

摘要

Rubin 的广义闵可夫斯基–芬克变换 M_t^α在球面 $\mathbb{S}^n$ 上，对于无理半径 $t =$cos($\beta\pi$)，会引发一个由其谱乘子的渐近行为所决定的小分母问题。我们证明，对于勒贝格几乎处处的 β ，相应的双正弦小除数不等式有无穷多个解，并由此推出，在非临界情形 $\rho \neq 0,\ 1$ 时，$(M_t^\alpha)^{-1}$从 $\tilde{H}^{s+\rho+1}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 不是有界的。在临界情形 $\rho \in \{0, 1\}$ 下，我们证明了 Rubin 猜想 4.4 和 4.7，即逆变换不具备端点索伯列夫正则性。

1 引言

设 $n \geq 2$ ，并令 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 表示配备标准黎曼结构的单位球面。在他关于球面上的广义闵可夫斯基–芬克变换与小分母的开创性论文中， [8], Boris Rubin 引入了一族定义在 $\mathbb{S}^n$ 上的算子 M_t^α，它们在积分几何中的若干经典变换与双曲型偏微分方程的基本解算子之间进行插值。关于经典 Funk/Minkowski–Funk（球面 Radon）变换及相关球面积分变换的背景，可参见 Helgason [5] 和 Rubin 专著 [9]。关于 Minkowski–Funk变换的历史背景，也可参见 Dann [3] 。对于固定的 $\alpha \in \mathbb{C}$和 $t =$，若 cos $\theta \in (-1, 1)$，算子 M_t^α定义为对函数 f 在以 $x \in \mathbb{S}^n$ 为中心、测地半径为 θ 的球冠上进行积分，并采用依赖于 α的特定分数阶权重；精确定义及基本性质见[8] 。

算子 M_t^α是 SO($n + 1$)-等变的，因此相对于 $L^2(\mathbb{S}^n)$分解为球谐函数的标准分解是对角的。记

$$L^2(\mathbb{S}^n) \ = \ \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathscr{H}_j,$$

其中 $\mathscr{H}_j$ 是次数为 j的球谐函数有限维空间，我们有

$$M_t^\alpha Y = m_t^\alpha(j)\, Y, \qquad Y \in \mathscr{H}_j,$$

对于依赖于 t、 α、 n 和 j 的标量乘子 $m_t^\alpha(j)$。Rubin 用超几何函数和缔合Legendre函数给出了$m_t^\alpha(j)$的显式公式；更重要的是，就本文而言，他还给出了当 $j \to \infty$ 时的详细渐近展开。

M_t^α固定时， t 的反演和索оболев映射性质取决于当 j 较大时 $m_t^\alpha(j)$ 的行为。特别是，人们希望控制 $j^{\rho+1} m_t^\alpha(j)$ 的大小，其中

$$\rho := \alpha + \frac{n-1}{2},$$

从而获得关于平滑化阶数和有界求逆可能性的精确信息。Rubin 的论证表明，对于 $\beta = \theta/\pi$ 的有理数值，通常可以明确地理解 $m_t^{\alpha}(j)$ 的零点集。然而，当 β 为无理数时，他的渐近公式会导致一个涉及 β 微妙丢番图性质以及某些平移 $r_0,\ r_1$ 的小分母问题。在非临界情形 $\rho \neq 0,\ 1$ 中，这被表述为 [8, 第 3], 节中的问题 3.8；而在临界情形 $\rho \in \{0, 1\}$ 中，则引出了 [8, 第 4]节中的猜想 4.4 和 4.7。

我们研究 Rubin 关于广义闵可夫斯基–芬克变换的小分母问题。在临界情形 $\rho \in \{0, 1\}$ 下，我们证明了 Rubin 猜想 4.4 和 4.7，即端点索伯列夫正则性失效，从而完成了 Rubin 对临界指数处广义闵可夫斯基–芬克变换的分析。在非临界情形 $\rho \neq 0,\ 1$ 下，我们对 Rubin 的小分母问题给出了度量论解决：对于勒贝格几乎处处的无理数 β ，相关的小除数不等式对于每个阈值 $c > 0$都有无穷多个解。因此，对于几乎所有半径t =cos($\beta\pi$)，逆变换 $(M_t^{\alpha})^{-1}$ 在自然索伯列夫尺度上并非有界。一个关键步骤是将 Rubin 的双正弦小除数条件重新表述为一维非齐次移动目标型逼近问题。这个转换需要仔细分析振荡项之间的相互作用；一旦完成，便可通过适当的 Khintchine 型结果得出度量论结论。本文为纪念 Boris Rubin 80 岁生日而作。

度量丢番图输入与扰动逼近。 在度量层面，本文中的若干映射和有界性问题可归结为非齐次丢番图逼近，并可视为无理旋转的移动目标问题，其思想源自 Khintchine定理及其非齐次变体（例如参见 [2, 10]）。这不仅适用于临界情形 $\rho \in \{0, 1\}$ 中的端点结论（Rubin 猜想 4.4 和 4.7），也适用于我们在定理 2.6 中得到的非端点结果；该结果同样可归结为带有受限分母和移动目标的 Khintchine 型不等式。移动目标的推广近年来受到了广泛关注。在高维情形下，Hauke–Ram´ırez [4] 在达芬–舍弗/欣钦框架中证明了带移动目标的非齐次结果。然而，在一维中，移动目标框架更加微妙，通常需要额外假设，例如额外发散或对目标施加结构限制；参见 Michaud–Ram´ırez [7]。我们的证明遵循 Michaud–Ram´ırez [7], 的方法，并作了少量修改，以适应一个具有两个参数的目标族：目标同时依赖于分子和分母，且分母被限制在一个算术级数中；参见第 4 节。

Hussain–Ward 近期研究了相关的依赖于分子的扰动 [6](适用于任意维数)，他们考虑用形如$(\vec{a} + \epsilon_{\vec{a},q})/q$的扰动有理数进行逼近，其中$\epsilon_{\vec{a},q}$。在对$|\epsilon_{\vec{a},q}|$施加定量的小量性假设后，他们得到了 Hausdorff f–测度的 Jarn´ık 型零—满律，并在 [6, 问题 2] 中询问这一假设可以放宽到何种程度。我们的移动目标输入针对一维中的另一种情形：我们允许额外加入依赖于分母的平移 γ_q (它不一定趋于 0)，并假设结构化的依赖于分子的分量足够小，具体写作 $\gamma_{a,q} = \gamma_q + \epsilon_{a,q}$，其中 $\epsilon_{a,q}$ q在 a 上为周期函数，且$|\epsilon_{a,q}| \leq C_0\psi(q)$。当 $\gamma_q \neq o(\psi(q))$时，这种情形通常不满足 [6] 的小量性假设；然而，在定理 4.1 的发散条件下，通过 Michaud–Ram´ırez [7] 的移动目标框架，我们仍可得到满勒贝格测度结论，并且允许分母限制在一个算术级数中。

主要结果

我们用 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 表示球面上与 Laplace–Beltrami˜算子相对应的通常 Sobolev空间。沿用 Rubin 的记法，我们用 $\tilde{H}^s(\mathbb{S}^n)$ 表示去除 M_t^α有限维核后得到的子空间(详情见第 2 节)。

在非临界范围 $\rho \neq 0, -1$ 内，Rubin 证明，$(M_t^\alpha)^{-1}$ 从$\tilde{H}^{s+\rho+1}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 的有界性可由渐近乘子满足某个小除数条件推出；他还根据一个双正弦表达式 $F(j)$ 提出了一个明确的丢番图问题；见下文的问题 2.4。我们的首个主要结果（定理 2.5）对勒贝格几乎处处的 β 解决了这一问题：对任意固定的 $c > 0$，不等式 $|F(j)| < c$ 有无穷多个整数解j。由此我们得到，对几乎每个半径 $t = \cos(\beta\pi)$，逆变换 $(M_t^\alpha)^{-1}$ 从 $\tilde{H}^{s+\rho+1}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 不有界（定理 2.6）。

在临界情形 $\rho = 0$ 和 $\rho = -1$ 中，Rubin 将 $(M_t^\alpha)^{-1}$ 在 Sobolev 空间之间的有界性与某些 Khintchine 型不等式的解的有限性联系起来，并对除端点外的所有指数证明了尖锐的度量结果。他猜想，对几乎每个 β，端点估计都不成立（ [8] 中的猜想 4.4 和 4.7）。我们的第二个主要结果（定理 2.9）证明了这两个猜想，从而解决了 Rubin 的广义闵可夫斯基–芬克变换的临界 Sobolev 映射问题。

论文结构

第 2 节回顾 Rubin 的广义闵可夫斯基–芬克变换，总结其关于乘子的渐近公式，并提出相关的小分母问题。随后，我们陈述几乎处处成立的小除数结果（定理 2.5）及其索伯列夫推论（定理 2.6），并回顾 Rubin 的临界情形与猜想。第 3 节给出定理 2.5 的证明，该证明基于带移动目标的 Khintchine 定理的一种变体。必要的度量丢番图理论内容，包括 Khintchine 定理的双参数移动目标版本，将在第 4 节中阐述。

致谢

R. Han 和 Y. Rahimi 得到了 NSF DMS-2143369 的部分资助。我们感谢 Felipe Ramˊırez 的有益讨论，并感谢他指出了一个在分母不受限情形下证明定理 4.2 的简短方法（$y,\ z$）$=(1,\ 0)$，该方法基于 Cassels 引理 9；他还指出了将其推广到$z = 0$ 的情形（即分母 $q \equiv 0$ (模 y)）；参见注 4.3。我们还感谢他提醒我们关注 [6] 及其中的问题 2。

2 Rubin 的 t 变换、小分母与有界求逆

我们简要回顾 Rubin 的工作中所需的记号和结果。始终固定 $n \geq 2$、$\alpha \in \mathbb{C}$，其中 $\alpha \neq -\frac{n}{2}$，$-\frac{n}{2} - 1$，$\ldots$，并记作–

$$\rho = \alpha + \frac{n-1}{2}.$$

我们还固定一个半径参数

$$t = \cos\theta \in (-1, 1), \qquad \theta = \beta\pi, \quad 0 < \beta < 1,\ \beta \neq \frac{1}{2}.$$

对于每个 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，令 $\mathscr{H}_j$ 表示 $\mathbb{S}^n$上 j 次球谐函数的空间，其正交投影为 P_j。$\mathbb{S}^n$ 上的 Laplace–Beltrami算子 Δ 满足

$$-\Delta Y = \lambda_j Y, \qquad Y \in \mathscr{H}_j, \quad \lambda_j = j(j+n-1),$$

因此，$\{\mathscr{H}_j\}_{j\ge 0}$ 是 $-\Delta$的特征空间分解。我们将 $H^s(\mathbb{S}^n)$、$s \in \mathbb{R}$记为 $\mathbb{S}^n$上的通常L^2 Sobolev空间，它定义为$(1-\Delta)^{s/2}$ 的定义域，并赋予图范数（等价地，可通过上述谱分解定义）。

Rubin 变换 M_t^α的作用方式为

$$M_t^\alpha f \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} m_t^\alpha(j) P_j f,$$

其中，乘子 $m_t^\alpha(j)$可用缔合Legendre函数和超几何函数明确表示（参见 [8, 第 2]节）。

遵循 Rubin 的做法，我们有时会在约化Sobolev空间上进行讨论，该空间通过去除 M_t^α的核得到。固定 α 和 t，我们定义

$$\tilde{H}^s(\mathbb{S}^n) := \overline{\{f \in H^s(\mathbb{S}^n) : f \perp \ker M_t^\alpha\}}^{H^s(\mathbb{S}^n)}.$$

~ ~等价地，$H^s($$\mathbb{S}^n)$是 $H^s(\mathbb{S}^n)$中 ker M_t^α的正交补的闭包。在 $H^s(\mathbb{S}^n)$上，算子 M_t^α是单射。

2.1 非临界情形 $\rho \neq 0,\ 1$

当 j 较大时，$m_t^\alpha(j)$ 的渐近性取决于参数 $\theta = \beta\pi$，尤其取决于 $\beta = \theta/\pi$。Rubin 引入了辅助参数

$$r_m := \frac{\rho - 1 - \beta n + \beta}{2} - m\Big(\beta + \frac{1}{2}\Big), \qquad m = 0, 1, 2, \dots,$$

并得到 $j \to \infty$ 时 $m_t^\alpha(j)$ 的完整渐近展开。对我们的目的而言，只需要这个展开的前两项。

命题 2.1 (Rubin渐近式，截断形式)。设 $t =$ 余弦θ，$\theta = \beta\pi$ 满足 $0 < \beta < 1$，$\beta \neq 1/2$，且 $\rho = \alpha + (n-1)/2 \notin \{0, 1\}$。则存在常数 $c_\beta \neq 0$（取决于 α、n 和 β，但不取决于 j）以及实参数

$$r_0 = \frac{\rho - 1 - \beta n + \beta}{2}, \qquad r_1 = r_0 - (\beta + 1/2),$$

使得

$$j^{\rho+1} m_t^\alpha(j) \;=\; c_\beta(1 + O(j^{-1}))\Big(j \sin\big(\pi(j\beta - r_0)\big) + \rho(\rho-1)\sin\big(\pi(j\beta - r_1)\big) + O(j^{-1})\Big) \tag{2.1}$$

当 $j \to \infty$ 时。

注 2.2。c_β 以及 $O(j^{-1})$误差项的精确形式对下文的讨论并不重要；重要的是 $c_\beta \neq 0$。更精确的展开式（包含明确的系数$c_{m,\ \beta}(j,\ \rho)$以及高阶项）可见于 [8, 第 2]节。

Rubin 利用（2.1）研究 M_t^α 在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{S}^n)$上的可逆性，方法是将 $j^{\rho+1}m_t^\alpha(j)$的增长或衰减与 β 的丢番图性质以及参数 r_0，r_1联系起来。

在 $\rho \neq 0, 1$ 的情形下，M_t^α的有界求逆所面临的主要障碍，来自某个量可能

$$F(\beta, j) := j\sin\big(\pi(j\beta - r_0)\big) + \rho(\rho-1)\sin\big(\pi(j\beta - r_1)\big)$$

沿某个子序列 $j \to \infty$ 任意趋近于零。事实上，(2.1) 表明

$$j^{\rho+1}m_t^\alpha(j) \;=\; c_\beta(1 + O(j^{-1})) \cdot \big(F(\beta, j) + O(j^{-1})\big),$$

因此，乘子的小分母问题体现在 $F(\beta, j)$ 的行为中。

利用这个渐近函数，Rubin 证明了以下结果。

定理 2.3 (Rubin [8, 定理 3.7])**.** 设 $t = \cos(\beta\pi)$，其中 $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，并设 $\rho = \alpha + (n-1)/2 \neq 0, 1$。那么 $(M_t^\alpha)^{-1}$ 对任意 $\mu \in [0, 1)$，都不是从 $H^{s+\rho+\mu}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 的有界算子。

对于 $\mu = 1$ 和无理数 β，正如 Rubin 在 [8, 第 3]，节所指出的，$(M_t^\alpha)^{-1}$ 从 $\tilde{H}^{s+\rho+1}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 的有界性引出了以下小分母问题。

问题 2.4 （Rubin 的小分母问题）。固定 $n \geq 2, \alpha \in \mathbb{C}$，使得 $\rho = \alpha + (n-1)/2 \neq 0, 1$，且 $t = \cos(\beta\pi)$，其中 $0 < \beta < 1, \beta \neq 1/2$。令 r_0, r_1 为命题 2.1 中出现的参数。考虑以下不等式，其中 $j \in \mathbb{N}$，

$$\big|F(\beta, j)\big| = \big|j\sin\big(\pi(j\beta - r_0)\big) + \rho(\rho-1)\sin\big(\pi(j\beta - r_1)\big)\big| < c, \tag{2.2}$$

其中 $c > 0$ 是一个充分小的常数。

Rubin 要求描述满足以下条件的那些 β：

1. 存在 $c > 0$，使得 (2.2) 只有有限多个整数解 j，因此对于所有充分大的 j，$j^{\rho+1}m_t^\alpha(j)$ 都一致地远离零；并且

2. 对每个 $c > 0$，不等式 (2.2) 都有无限多个整数解 j，从而导致小分母的出现。

在本文中，我们解决了几乎处处的 β所对应的问题。

定理 2.5. 对于勒贝格几乎处处的 $\beta \in (0,1)$，任意给定 $c > 0$，不等式 (2.2) 在 $j \in \mathbb{N}$ 中有无穷多个解。

我们将定理的证明推迟到第 3 节。作为第一个应用，我们记录以下关于 M_t^α在 Sobolev 空间上有界性的推论。

定理 2.6. 设 $n \geq 2$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}$ 满足 $\rho = \alpha + (n-1)/2 \neq 0, 1$，并设 $t = \cos(\beta\pi)$ 满足$\beta \in (0, 1)$ 且为无理数。对于勒贝格几乎处处的此类 β，算子 $(M_t^\alpha)^{-1}$ 不是从$\tilde{H}^{s+\rho+1}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$的有界算子。

注 2.7. 定理 2.5 和定理 2.6 一起给出了非临界情形 $\rho \neq 0, 1$ 下问题 2.4 的度量答案。事实上，对于勒贝格几乎处处的 $\beta \in (0,1)$，小除数不等式 (2.2) 对每个 $c > 0$ 都有无穷多个整数解，因此 $j^{\rho+1}m_t^\alpha(j)$ 沿某个子序列趋于 0，而逆变换 $(M_t^\alpha)^{-1}$ 不是从 $\tilde{H}^{s+\rho+1}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 的有界算子。

现在我们转而讨论互补的临界情形 $\rho \in \{0, 1\}$，此时乘子会简化，而 Rubin 的猜想涉及 $(M_t^\alpha)^{-1}$ 的临界索оболев映射性质。

2.2 临界情形 $\rho \in \{0,1\}$ 与 Rubin 猜想 4.4 和 4.7

在第 2.1 节中，我们采用了以下基本假设

$$\rho = \alpha + \frac{n-1}{2} \notin \{0,1\}.$$

Rubin 分别处理互补的、临界情形

$$\alpha = \frac{1-n}{2} \quad (\rho = 0), \qquad \alpha = \frac{3-n}{2} \quad (\rho = 1),$$

于 [8, 第 4]节。这些取值分别对应球面波动方程的解算子和球面截面变换，并导出特别简单的乘子公式。在这一情形下，小分母问题可以用经典丢番图不等式来表述。

记 $t = \cos(\beta\pi)$，其中 $\beta \in (0,1)$ 为无理数，并令 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 表示通常的 Sobolev 空间。Rubin 证明，对于 $\alpha = (1-n)/2$ 和 $\alpha = (3-n)/2$，$(M_t^\alpha)^{-1}$ 在 Sobolev 空间之间的有界性等价于某些 Khintchine 型丢番图不等式的解的有限性。

更确切地说，对于 $\mu \geq 1$ Rubin 引入了以下不等式

$$\left\| q\beta + \tfrac{1}{2} \right\| < \frac{c}{q^\mu}, \tag{2.3}$$

$$\left\| (q - \tfrac{1}{2})\beta + \tfrac{1}{2} \right\| < \frac{c}{q^\mu}, \tag{2.4}$$

$$\| q\beta \| < \frac{c}{q^\mu}, \tag{2.5}$$

$$\left\| (q - \tfrac{1}{2})\beta \right\| < \frac{c}{q^\mu}, \tag{2.6}$$

对于 $q \in \mathbb{N}$ 和某个常数 $c > 0$，其中 $\|\cdot\|$ 表示到最近整数的距离。他证明了以下等价关系：

当且仅当（2.3）（ n 为奇数时）或（2.4）（ n 为偶数时）只有有限多个解 $q \in \mathbb{N}$ （对于某个 $c > 0$）时，• $(M_t^{(1-n)/2})^{-1}$ 从 $H^{s+\mu}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 有界。

当且仅当（2.5）（ n 为奇数时）或（2.6）（ n 为偶数时）只有有限多个解 $q \in \mathbb{N}$ （对于某个 $c > 0$）时，• $(M_t^{(3-n)/2})^{-1}$ 从 $H^{s+1+\mu}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 有界。

Usin在丢番图逼近的度量理论中，他接着证明了以下 .

定理 2.8 （Rubin [8, 推论 4.3、4.5、4.6]）。设 $t = \cos(\beta\pi)$ 满足 $\beta \in (0,1)$且为无理数。

- 对于 $\mu > 1$，$(M_t^{(1-n)/2})^{-1}$，其从 $H^{s+\mu}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 的映射对于几乎所有 $\beta \in (0,\ 1)$都是有界的。
- 对于 $\alpha = (3-n)/2$ 和 $\mu > 1$，$(M_t^{(3-n)/2})^{-1}$ 从 $H^{s+1+\mu}(\mathbb{S}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{S}^n)$ 对于几乎所有 $\beta \in (0,\ 1)$都是有界的。
- 对于 $\alpha = (3-n)/2$，n 为奇数，且 $\mu = 1$时，甚至对几乎所有 $\beta \in (0,\ 1)$，都有 $(M_t^{(3-n)/2})^{-1} \in L(H^{s+2}(\mathbb{S}^n)\ H^s(\mathbb{S}^n))$，也就是说，使该有界性成立的 β 集合的勒贝格测度为0。

猜想 （Rubin [8, 猜想 4.4]）。 对于每个 $s \in \mathbb{R}$ 和 $n \geq 2$，使得以下条件成立的 $\beta \in (0, 1)$ 的集合

$$(M_t^{(1-n)/2})^{-1} \in L\big(H^{s+1}(\mathbb{S}^n), H^s(\mathbb{S}^n)\big)$$

具有零勒贝格测度。等价地，对于勒贝格几乎处处的 $\beta \in (0, 1)$，算子 $(M_t^{(1-n)/2})^{-1}$ 不能作为有界算子从 $H^{s+1}(\mathbb{S}^n)$ 映射到 $H^s(\mathbb{S}^n)$。

猜想 (Rubin [8, 猜想 4.7])。 对于偶数 $n \geq 2$ 和 $s \in \mathbb{R}$，使得

$$(M_t^{(3-n)/2})^{-1} \in L\big(H^{s+2}(\mathbb{S}^n), H^s(\mathbb{S}^n)\big)$$

具有零勒贝格测度。等价地，对于几乎处处的 $\beta \in (0, 1)$，算子 $(M_t^{(3-n)/2})^{-1}$不能作为有界算子从 $H^{s+2}(\mathbb{S}^n)$ 映射到 $H^s(\mathbb{S}^n)$。

我们的第二个主要结果如下。

定理 2.9。 *Rubin 在 [8] 中提出的猜想 4.4 和 4.7 是正确的。*

证明。 只需证明，对于 $\mu = 1$，对几乎处处的 β，任意 $c > 0$，不等式 (2.3)、(2.4) 和 (2.6) 均有无穷多个解。首先注意，由于 [10] 的非齐次丢番图不等式，(2.3) 成立。事实上，Sz¨usz 证明了，对于任意 $\gamma \in \mathbb{R}$ 以及任意非递增的 $\psi\colon\ \mathbb{N} \to (0, \infty)$，只要 $\sum_q \psi(q) = \infty$，不等式

$$\|q\beta - \gamma\| < \psi(q)$$

对几乎处处的 β，有无穷多个解。Sz¨usz 的结果适用于 (2.3) 中的 $\gamma = 1/2$，因为显然$\sum_q 1/q = \infty$。

关于 (2.4)：作变量代换 $\beta \to 2\beta$ 后，只需证明对任意 $c > 0$，不等式

$$\left\|q\beta + \tfrac{1}{2}\right\| < \frac{c}{q}$$

对几乎处处的 β，有无穷多个奇数解。这是一个带受限分母的固定目标非齐次 Khintchine 问题。在我们的情形下，只需将定理 4.2 应用于$\gamma_{a,\ q} = 1/2$。(2.6) 的分析与 (2.4) 类似。

□

3 定理 2.5 的证明

证明的关键在于以下引理：

引理 3.1。 对于任意给定的 x 和 B，以及 $A = 2\mathbb{Z}$ 或 $A = 2\mathbb{Z} + 1$，对任意 $c > 0$，存在一个 β 的满测集，使得以下方程有无穷多个解，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $j \in A$：

$$\left\|\frac{\beta}{4} - \frac{k+x}{j} + \frac{B}{j^2}\cos\frac{4\pi k}{j}\right\| \leq \frac{c}{j^2}.$$

引理 3.1 可视为 Khintchine 移动目标问题的一个变体。我们将其证明推迟到第 4 节。在这里，我们将说明它如何推出定理 2.5。回顾

$$\rho = \alpha + \frac{n-1}{2},$$

and

$$r_0 = \frac{\rho - 1 - \beta n + \beta}{2}, \text{ and } r_1 = r_0 - (\beta + \frac{1}{2}).$$

假设 n 为奇数（或偶数），并将引理 3.1 应用于 $x = (\rho-1)/4$、$B = \rho(\rho-1)/\pi$ 以及 $A = 2\mathbb{Z}$（或分别应用于 $2\mathbb{Z}+1$），则对于几乎处处的 β，存在无穷多个 j 使得

$$\left\| \frac{\beta}{4} - \frac{(\rho-1)/4 + k}{2j+n-1} + \frac{\rho(\rho-1)}{\pi(2j+n-1)^2} \cos \frac{4\pi k}{2j+n-1} \right\| \leq \frac{c}{j^2}.$$

这意味着存在一个整数 $m \in \mathbb{Z}$:

$$\left| \frac{\beta}{4} - \frac{(\rho-1)/4 + k}{2j+n-1} + \frac{\rho(\rho-1)}{\pi(2j+n-1)^2} \cos \frac{4\pi k}{2j+n-1} - m \right| \leq \frac{c}{j^2},$$

或者等价地

$$\left| \beta - \frac{\rho - 1 + 4k}{2j+n-1} + \frac{4\rho(\rho-1)}{\pi(2j+n-1)^2} \cos \frac{4\pi k}{2j+n-1} - 4m \right| \leq \frac{4c}{j^2}. \tag{3.1}$$

注意到（3.1）意味着

$$\left| \frac{4k}{2j+n-1} - \left(\beta - \frac{\rho-1}{2j+n-1} \right) + 4m \right| \leq \frac{4c + C_{\rho,n}}{j^2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \cos \frac{4\pi k}{2j+n-1} &= \cos \left(\beta\pi - \frac{\pi(\rho-1)}{2j+n-1} \right) + \varepsilon_1 \\ &= \cos(\beta\pi) \cos \left(\frac{\pi(\rho-1)}{2j+n-1} \right) + \sin(\beta\pi) \sin \left(\frac{\pi(\rho-1)}{2j+n-1} \right) + \varepsilon_1 \\ &= \cos(\beta\pi) + \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$|\varepsilon_1| \leq \frac{4\pi c + C_{\rho,n}}{j^2}, \text{ and } |\varepsilon_2| \leq \frac{C_{\rho,n}}{j}.$$

将（3.2）代入（3.1）可得

$$\left| \beta - \frac{\rho - 1 + 4k}{2j+n-1} + \frac{4\rho(\rho-1)}{\pi(2j+n-1)^2} \cos(\pi\beta) + \frac{\varepsilon_3}{j^2} - 4m \right| \leq \frac{4c}{j^2},$$

其中

$$|\varepsilon_3| \leq C_{\rho,n} \cdot \varepsilon_2 \leq \frac{(C_{\rho,n})^2}{j} \leq c \quad \text{for large enough } j.$$

这意味着

$$\left| \beta - \frac{\rho - 1 + 4k}{2j+n-1} + \frac{4\rho(\rho-1)}{\pi(2j+n-1)^2} \sin \pi(\beta + 1/2) - 4m \right| \leq \frac{4c + |\varepsilon_3|}{j^2} \leq \frac{5c}{j^2},$$

因此

$$\left| (2j+n-1)\beta - (\rho - 1 + 4k) + \frac{4\rho(\rho-1)}{\pi(2j+n-1)} \sin(\pi(\beta + 1/2)) - 4m(2j+n-1) \right| \leq \frac{10c}{j}, \tag{3.3}$$

对于足够大的 j。注意到

$$\left|\frac{4\rho(\rho-1)}{2j+n-1}-\frac{2\rho(\rho-1)}{j}\right|\le\frac{C_{\rho,n}}{j^2}\le\frac{c}{j}\quad\text{for large enough } j.$$

于是（3.3）推出

$$\left|(2j+n-1)\beta-(\rho-1+4k)+\frac{2\rho(\rho-1)}{\pi j}\sin(\pi(\beta+1/2))-4m(2j+n-1)\right|\le\frac{12c}{j}.$$

两边除以 2 并重新整理各项，得到

$$\left|j\beta+\frac{n-1}{2}\beta-\left(\frac{\rho-1}{2}+2k\right)+\frac{\rho(\rho-1)}{\pi j}\sin(\pi(\beta+1/2))-2m(2j+n-1)\right|\le\frac{6c}{j},$$

回忆一下$\frac{(n-1)\beta-(\rho-1)}{2}=-r_0$，因此上面的不等式变为：

$$\left|j\beta-r_0-2k+\frac{\rho(\rho-1)}{\pi j}\sin(\pi(\beta+1/2))-2m(2j+n-1)\right|\le\frac{6c}{j}.\tag{3.4}$$

这意味着

$$|j\beta-r_0-2k-2m(2j+n-1)|\le\frac{6c+C_\rho}{j}\ll 1.\tag{3.5}$$

因此

$$\begin{aligned}\sin\pi(j\beta-r_0)=&\sin\pi(j\beta-r_0-2k-2m(2j+n-1))\\=&\pi(j\beta-r_0-2k-2m(2j+n-1))+\frac{C_1}{j^3},\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 $|C_1|\le(6c+C_\rho)^3$。因此，（3.4）与（3.6）共同推出

$$\left|\sin\pi(j\beta-r_0)+\frac{\rho(\rho-1)}{j}\sin(\pi(\beta+1/2))\right|\le\frac{7\pi c}{j}.\tag{3.7}$$

回忆一下 $\beta-\frac{1}{2}=r_0-r_1=(j\beta-r_1)-(j\beta-r_0)$。因此

$$\begin{aligned}\frac{\rho(\rho-1)}{j}\sin(\pi(\beta+1/2))=&\frac{\rho(\rho-1)}{j}\left(\sin\pi((j\beta-r_1)-(j\beta-r_0))\right)\\=&\frac{\rho(\rho-1)}{j}[\sin\pi(j\beta-r_1)\cos\pi(j\beta-r_0)-\cos\pi(j\beta_1-r_1)\sin\pi(j\beta-r_0)]\\=&\frac{\rho(\rho-1)}{j}\sin\pi(j\beta-r_1)+\frac{C_2}{j^2},\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中 $|C_2|\le 2(6c+C_\rho)$。上文用到了 (3.5) 以及

$$\cos\pi(j\beta-r_0)=1-O_{c,\rho}(j^{-2}),\ \text{and}\ \sin\pi(j\beta-r_0)=O_{c,\rho}(j^{-1}).$$

将 (3.8) 代入 (3.7)，得到

$$\left|\sin\pi(j\beta-r_0)+\frac{\rho(\rho-1)}{j}\sin\pi(j\beta-r_1)\right|\le\frac{8\pi c}{j},$$

即

$$|j\sin\pi(j\beta-r_0)+\rho(\rho-1)\sin\pi(j\beta-r_1)|\le 8\pi c,$$

正如所声称的。 □

4 双参数移动目标的 Khintchine定理

注意，引理 3.1（见第 3 节）可视为 Khintchine 移动目标问题的一种变体。在表述与我们论证相关的版本之前，我们先回顾 Michaud– Ram´ırez 的一个结果。对于实数序列 $\gamma = (\gamma_q)$ 和逼近函数 $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$，定义

$$W(\psi,\gamma) = \left\{\beta \in [0,1] : \left\|\beta - \tfrac{a+\gamma_q}{q}\right\| < \tfrac{\psi(q)}{q} \text{ for infinitely many } (a,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 到最近整数的距离，并令 m 表示 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的勒贝格测度 .

定理 4.1 (移动目标Khintchine定理)。 *[7, 定理 1]* 设 $\gamma = (\gamma_q)$ 是任意实数序列，且 ψ 单调递减。假设存在 $\varepsilon > 0$ 和一个整数 $k \geq 2$，使得

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\psi(q)}{\sqrt{\log q\,(\log\log q)\,(\log\log\log q)\cdots(\log^{(k)} q)^{1+\varepsilon}}} = \infty,$$

其中 对数$^{(k)}$ 表示 k重迭代对数。则 $\mathrm{m}(W(\psi,\gamma)) = 1$。特别地，较弱的发散条件

$$\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q)\,(\log q)^{-1/2-\varepsilon} = \infty$$

已经足以保证满测度。

引理 3.1 的设定在思路上与定理 4.1 接近，但无法直接纳入该框架。在 Michaud–Ram´ırez 定理中，目标平移 γ_q 仅取决于分母 q。相比之下，在我们的应用中，相关扰动同时随分子和分母变化：由此得到一族如下形式的移动目标

$$\left(\gamma_{a,q}\right)_{a\in\mathbb{Z},\, q\in\mathbb{N}}, \qquad \gamma_{a,q} = \gamma_q + \epsilon_{a,q},$$

其中误差项 $\epsilon_{a,\ q}$ 一致地很小（例如 $|\epsilon_{a,\ q}| \ll \psi(q)$），且对每个固定的 q，关于 a 是 q-周期的，即 $\epsilon_{a+q,\ q} = \epsilon_{a,\ q}$。

因此，下面我们记录一个二参数且受同余式限制的移动目标命题版本（分母取自固定的算术级数），该版本足以满足我们的需求。我们不追求最大程度的普遍性，而是使结果契合此处出现的结构；也可以将其视为对 Michaud–Ram´ırez 方法的改编，以适用于这一稍丰富的目标族。

定理 4.2。 设 ψ 单调递减，并满足定理 *4.1* 的发散条件。设$(\gamma_q)_{q\in\mathbb{N}}$ 为任意实数序列。对每个 q，设$(\epsilon_{a,q})_{a\in\mathbb{Z}}$ 为一个 q-周期族（即$\epsilon_{a+q,q} = \epsilon_{a,q}$），满足$|\epsilon_{a,q}| \leq C_0\psi(q)$，其中 $C_0 > 0$为某个常数，并令$\gamma_{a,q} := \gamma_q + \epsilon_{a,q}$。那么，对任意 $y \in \mathbb{N}$ 及任意 $z \in \{0,1,\ldots,y-1\}$，

$$W_{y,z}(\psi,\gamma) = \left\{\beta \in \mathbb{T} : \left\|\beta - \frac{a+\gamma_{a,\ q}}{q}\right\| < \frac{\psi(q)}{q} \text{对于无穷多个}(a,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\text{，满足 } q \equiv z \pmod{y}\right\}$$

具有满勒贝格测度，即 $\mathrm{m}(W_{y,\ z}(\psi,\gamma)) = 1$。

取……即可将引理 3.1 直接推论为定理 4.2

$$\psi(q)=\frac{c}{q},\qquad \gamma_{a,q}=x-\frac{B}{q}\cos\Big(\frac{4\pi a}{q}\Big),$$

以及 $(y,\ z)\in\{(2,\ 0),\ (2,\ 1)\}$，这恰好给出了我们应用所需的移动目标。注意，对于引理 3.1，固定目标 Khinchine 不等式的一个变体就足以满足我们的应用，因为我们的 $\gamma_q\equiv x$ 是一个常数。

注 4.3 （在 $z=0$ 情形下的一个简短证明，由 Ramírez 提出）。 首先假设 $(y,\ z)=(1,\ 0)$，并假设 $\psi(q)\to 0$。根据 [2, 引理 9], ，对于任意长度趋于 0 的区间序列，如果将所有区间的长度乘以一个固定常数，则相应上极限集的勒贝格测度不变。特别地，

$$\mathrm{m}\big(W_{1,0}(\psi,\gamma)\big)=\mathrm{m}\big(W_{1,0}((C_0+1)\psi,\gamma)\big).$$

此外，如果

$$\Big\|\beta-\tfrac{a+\gamma_q}{q}\Big\|<\tfrac{\psi(q)}{q},$$

那么利用 $\gamma_{a,\ q}=\gamma_q+\epsilon_{a,\ q}$ 和 $|\epsilon_{a,\ q}|\le C_0\psi(q)$，我们得到

$$\Big\|\beta-\tfrac{a+\gamma_{a,q}}{q}\Big\|\le\Big\|\beta-\tfrac{a+\gamma_q}{q}\Big\|+\tfrac{|\epsilon_{a,q}|}{q}<\tfrac{(C_0+1)\psi(q)}{q}.$$

因此

$$W(\psi,(\gamma_q))\subseteq W_{1,0}((C_0+1)\psi,\gamma).$$

由于 ψ 满足定理 4.1 的发散条件且是递减的，Michaud–Ramírez 的移动目标结果推出 $\mathrm{m}(W(\psi,\ (\gamma_q)))=1$，从而 $\mathrm{m}(W_{1,\ 0}((C_0+1)\psi,\ \gamma))=1$。随后，Cassels 缩放引理给出 $\mathrm{m}(W_{1,\ 0}(\psi,\ \gamma))=1$。

Ramírez 还指出了一种处理限制条件 $q\equiv 0\pmod y$ 的简短论证。在单参数情形（目标仅依赖于 q）下，有

$$W_{y,0}(\psi,(\gamma_q))\ =\ T_y^{-1}\Big(W(\psi_y,(\gamma_{yq}))\Big),\qquad T_y(\beta)=y\beta\pmod 1,\quad \psi_y(q):=\psi(yq),$$

因此，由于 T_y^{-1} 是保测的，$\mathrm{m}(W_{y,0}(\psi,(\gamma_q)))=\mathrm{m}(W(\psi_y,(\gamma_{yq})))$。由于 ψ 是单调的，并满足定理 4.1 的发散假设，因此 ψ_y 也同样如此，从而 Michaud–Ramírez 给出 $\mathrm{m}(W_{y,0}(\psi,(\gamma_q)))=1$。最后，扰动界 $|\epsilon_{a,q}|\le C_0\psi(q)$ 蕴含 $W_{y,0}(\psi,(\gamma_q))\subseteq W_{y,0}((C_0+1)\psi,\gamma)$，而 Cassels 的缩放引理 [2, Lemma 9]（应用于子序列 $q\equiv 0\pmod y$）推出 $\mathrm{m}(W_{y,0}(\psi,\gamma))=1$。

这里我们不为 $z\neq 0$ 追求这种捷径的类似做法。

定理 4.2 的证明。 我们将 Michaud–Ramírez 的判据（下文的命题 4.9）应用于 $W_{y,\ z}(\psi,\ \gamma)$ 的上极限描述中出现的集合，然后利用 Beresnevich–Dickinson–Velani 的局部到整体引理（命题 4.10），将对每个非空开集 U 成立的 $\mathrm{m}(W_{y,\ z}(\psi,\ \gamma)\cap U)$ 的定量下界提升为满测度结论。具体而言，我们通过建立以下结果来验证命题 4.9 的假设： E_q 的大小估计、 $E_q\cap E_r$ 的两两交集界、 $E_q\cap U$ 的一致密度估计，以及发散条件 (4.13)。

我们可以假设当 $q\to\infty$ 时， $\psi(q)\to 0$；否则，对所有充分大的 q， $\psi(q)\ge c>0$，在这种情况下，对所有充分大的 q，$\mathrm{m}(W_{y,z}(\psi,\gamma))=1$ 显然成立。

预备设置。记

$$W_{y,z}(\psi,\gamma)=\limsup_{q\to\infty}E_{qy+z}=\bigcap_{Q=1}^{\infty}\bigcup_{q\geq Q}E_{qy+z},$$

其中

$$E_q=\bigcup_{a=0}^{q-1}I_{q,a},\qquad I_{q,a}:=\Big\{\beta\in\mathbb{T}:\ \Big\|\beta-\tfrac{a+\gamma_{a,q}}{q}\Big\|<\tfrac{\psi(q)}{q}\Big\}.$$

回顾一下，$\gamma_{a,q}=\gamma_q+\epsilon_{a,q}$ 其中 $|\epsilon_{a,q}|\leq C_0\psi(q)$ 且 $\epsilon_{a+q,q}=\epsilon_{a,q}$ 对所有 $a\in\mathbb{Z}$、$q\in\mathbb{N}$ 均成立。特别地，对于每个固定的 q，量 $\gamma_{a,q}$ 仅取决于 a 模 q，因此在 $W_{y,z}(\psi,\gamma)$ 的定义中，只需限制在 $0\leq a\leq q-1$，这就得到上述关于 E_q 的表示。

基本集合的大小。

引理 4.4（基本集合的大小）。对于充分大的 q，

$$\mathrm{m}(E_q)=2\psi(q).$$

证明。上界是显然的，因为每个 $\mathrm{m}(I_{q,a})=\frac{2\psi(q)}{q}$。对于下界，只需证明当 q 足够大时，区间 $I_{q,a}$ 两两不相交。

设 $I_{q,a}\cap I_{q,a'}\neq\emptyset$ 满足 $a\not\equiv a'$（模 q）。则

$$\left\|\frac{a+\gamma_q+\epsilon_{a,q}}{q}-\frac{a'+\gamma_q+\epsilon_{a',q}}{q}\right\|\leq\frac{2\psi(q)}{q}.$$

由三角不等式，

$$\left\|\frac{a-a'}{q}\right\|\leq\frac{2\psi(q)+|\epsilon_{a,q}|+|\epsilon_{a',q}|}{q}\leq(2C_0+2)\frac{\psi(q)}{q}<\frac{1}{q},$$

当 q 足够大时（因为 $\psi(q)\to0$）。这与 $a\not\equiv a'$（模 q）矛盾。因此，当 q 足够大时，$I_{q,a}$ 互不相交，且 $\mathrm{m}(E_q)=q\cdot\frac{2\psi(q)}{q}=2\psi(q)$。 □

两两重叠上界。

引理 4.5（重叠估计）。对于所有充分大的整数 q 以及所有 $1\leq r<q$，有

$$\mathrm{m}(E_q\cap E_r)\leq4(C_0+1)\left(\mathrm{m}(E_q)\,\mathrm{m}(E_r)+\frac{\gcd(q,r)}{q}\mathrm{m}(E_q)\right).$$

证明。我们使用 [7]的记号。令

$$\Delta:=2\max\Big(\frac{\psi(q)}{q},\frac{\psi(r)}{r}\Big),\qquad\delta:=2\min\Big(\frac{\psi(q)}{q},\frac{\psi(r)}{r}\Big).$$

当 q，r 充分大时，引理 4.4 蕴含族 $\{I_{q,a}\}_a$ 和 $\{I_{r,b}\}_b$ 两两不相交。因此，如果 $\beta\in E_q\cap E_r$，则存在唯一的 $0\leq a\leq q-1$ 和 $0\leq b\leq r-1$，使得 $\beta\in I_{q,a}\cap I_{r,b}$。此外，

$$\mathrm{m}(I_{q,a}\cap I_{r,b})\leq\delta.$$

因此，只需界定满足以下条件的有序对（a，b）：$I_{q,a}\cap I_{r,b}\neq\varnothing$.

若 $I_{q,\ a} \cap I_{r,\ b} \neq \varnothing$，则中心满足

$$\left\| \frac{a+\gamma_q+\epsilon_{a,q}}{q} - \frac{b+\gamma_r+\epsilon_{b,r}}{r} \right\| \leq \frac{\psi(q)}{q} + \frac{\psi(r)}{r}.$$

由三角不等式可知

$$\begin{aligned} \left\| \frac{a+\gamma_q}{q} - \frac{b+\gamma_r}{r} \right\| &\leq \frac{\psi(q)+|\epsilon_{a,q}|}{q} + \frac{\psi(r)+|\epsilon_{b,r}|}{r} \\ &\leq (C_0+1)\left(\frac{\psi(q)}{q} + \frac{\psi(r)}{r} \right) \leq (C_0+1)\Delta. \end{aligned}$$

由于 $\frac{a}{q} - \frac{b}{r} \in (-1,\ 1)$ 对 $0 \leq a \leq q-1$ 和 $0 \leq b \leq r-1$成立，因此存在一个整数 k（仅取决于 $q,\ r$，至多有两种可能），使得

$$\left| \frac{a+\gamma_q}{q} - \frac{b+\gamma_r}{r} - k \right| \leq (C_0+1)\Delta,$$

等价地,

$$|(ar-bq) - kqr + (r\gamma_q - q\gamma_r)| < (C_0+1)qr\Delta.$$

对每个这样的 k，由于 $\gcd(q,\ r) \mid (ar-bq)$，至多有

$$2(C_0+1)\frac{qr\Delta}{\gcd(q,r)} + 1$$

个符合条件的 $(ar-bq)$ 值。对于每个符合条件的值，方程有至多 $\gcd(q,\ r)$ 个解 $(a,\ b)$。因此，满足 $I_{q,\ a} \cap I_{r,\ b} \neq \varnothing$ 的数对 $(a,\ b)$ 总数至多为

$$4(C_0+1)\left(qr\Delta + \gcd(q,r)\right).$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(E_q \cap E_r) &\leq 4(C_0+1)\left(qr\Delta + \gcd(q,r)\right)\delta \\ &\leq 4(C_0+1)\left(4\psi(q)\psi(r) + \frac{\gcd(q,r)\cdot 2\psi(q)}{q} \right) \\ &\leq 4(C_0+1)\left(\mathrm{m}(E_q)\,\mathrm{m}(E_r) + \frac{\gcd(q,r)}{q}\mathrm{m}(E_q) \right), \end{aligned}$$

在最后一行使用引理 4.4。 □

开集中的稠密性。

引理 4.6 (开集重叠)。 对于每个非空开集 $U \subset \mathbb{T}$，存在 $q_0 := q_0(U) > 0$使得

$$\mathrm{m}(E_q \cap U) \geq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{m}(E_q)\,\mathrm{m}(U) \quad \textit{for all } q \geq q_0.$$

证明。 首先假设 $U = I$ 是一个开区间。令 $\Gamma_q := (\mathbb{Z}+\gamma_q)/q$ 模 1，并设 $N :=\#(\Gamma_q \cap I)$。将 $\Gamma_q \cap I$ 中的点按递增顺序排列为

$$0 \leq \inf_{x\in I} x < \frac{a_1+\gamma_q}{q} - w_1 < \cdots < \frac{a_N+\gamma_q}{q} - w_N < \sup_{x\in I} x < 1, \tag{4.1}$$

其中 w_j为整数。这些点之间的间距为 $1/q$。由于$|\epsilon_{a,\ q}| \le C_0\psi(q)$ 和 $\psi(q) \to 0$，当 q 足够大时，扰动后顺序仍保持不变：

$$\frac{a_1+\gamma_q+\epsilon_{a_1,q}}{q}-w_1<\cdots<\frac{a_N+\gamma_q+\epsilon_{a_N,q}}{q}-w_N.$$

此外，当 q 足够大时，我们有

$$\begin{aligned}\frac{a_2+\gamma_q+\epsilon_{a_2,q}-\psi(q)}{q}-w_2 &\ge \frac{a_2+\gamma_q-(C_0+1)\psi(q)}{q}-w_2\\ &\ge \frac{a_1+\gamma_q}{q}-w_1+\frac{1-(C_0+1)\psi(q)}{q}\ge\frac{a_1+\gamma_q}{q}-w_1,\end{aligned}$$

类似地

$$\frac{a_{N-1}+\gamma_q+\epsilon_{a_{N-1},q}+\psi(q)}{q}-w_{N-1}<\frac{a_N+\gamma_q}{q}-w_N.$$

因此，对于 $2\le j\le N-1$,

$$\left(\frac{a_j+\gamma_q+\epsilon_{a_j,q}-\psi(q)}{q}-w_j,\ \frac{a_j+\gamma_q+\epsilon_{a_j,q}+\psi(q)}{q}-w_j\right)\subset I,$$

从而

$$\mathrm{m}(E_q\cap I)\ge(N-2)\cdot\frac{2\psi(q)}{q}. \tag{4.2}$$

由 (4.1) 还可得

$$\mathrm{m}(I)\le(N+1)\cdot\frac{1}{q}. \tag{4.3}$$

结合 (4.2)、(4.3) 和引理 4.4 可得，当 q 足够大时，

$$\mathrm{m}(E_q\cap I)\ge\frac{N-2}{N+1}\,\mathrm{m}(E_q)\,\mathrm{m}(I)\ge\frac{3}{4}\,\mathrm{m}(E_q)\,\mathrm{m}(I),$$

由此可得区间所需的不等式（其中$_{1\ 2}$）。一般情形可通过从内部用有限个互不相交的开区间逼近开集 U 得到。 □

发散。 为完成命题 4.9（下文陈述）的假设验证，尚需检查发散条件 (4.13)。在我们的设定中，由重叠上界 (4.10) 得到的参数 $\eta(q)$ 可由一个除数型量从上方控制（最终由$d(qy+z)$控制），因此 (4.13) 可归结为一个除数加权级数的发散性。接下来的两个引理恰好给出所需的发散估计。

引理 4.7. 令 $y\ge1$ 为固定值，z 为整数。令 $d(n)$ 表示n的因数个数，并令 $f\colon[1,\infty)\to[1,\infty)$ 为递增函数。那么，对于所有充分大的 x，有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z\pmod y}}\frac{1}{f(\log d(n))\,d(n)}\ \gg_y\ \frac{x}{f((\log 2)\log\log x)\sqrt{\log x}}.$$

引理 *4.7* 的证明。定义

$$A_{y,z}(x) := \Big\{1 \le n \le x:\ n \equiv z \pmod{y},\ \log_2 d(n) \le \log\log x\Big\},$$

其中 $\log_2$ 表示以 2 为底的对数。由于 f 递增，且 $\log d(n) = (\log 2)\log_2 d(n)$，因此对于所有 $n \in A_{y,z}(x)$，都有 $\log d(n) \le (\log 2)\log\log x$，从而

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z \pmod{y}}} \frac{1}{f(\log d(n))\, d(n)} &\ge \sum_{n\in A_{y,z}(x)} \frac{1}{f(\log d(n))\, d(n)} \\ &\ge \frac{1}{f((\log 2)\log\log x)} \sum_{n\in A_{y,z}(x)} \frac{1}{d(n)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

接下来，我们比较$A_{y,z}(x)$的$1/d(n)$质量与整个等差数列的质量。若 $n \notin A_{y,z}(x)$，则 $\log_2 d(n) > \log\log x$，因此 $d(n) > (\log x)^{\log 2}$，从而

$$\frac{1}{d(n)} \le (\log x)^{-\log 2}.$$

因此，

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z \pmod{y}\\ n\notin A_{y,z}(x)}} \frac{1}{d(n)} \ \le\ \#\Big\{n \le x:\ n \equiv z \pmod{y}\Big\}(\log x)^{-\log 2} \ \ll_y\ \frac{x}{(\log x)^{\log 2}}. \tag{4.5}$$

另一方面，整个和具有如下的一致下界：

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z \pmod{y}}} \frac{1}{d(n)} \ \gg_y\ \frac{x}{\sqrt{\log x}}. \tag{4.6}$$

事实上，令 $g = (y, z)$，并记 $y = gy_1$, $z = gz_1$ 为满足 $(y_1, z_1) = 1$的数，则同余式 $n \equiv z \pmod{y}$ 等价于 $n = gm$ with $m \equiv z_1 \pmod{y_1}$，因此

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z \pmod{y}}} \frac{1}{d(n)} = \sum_{\substack{m\le x/g\\ m\equiv z_1 \pmod{y_1}}} \frac{1}{d(gm)}.$$

由于 $g \mid y$，则 e 约数函数是次乘性的，并给出 $d(gm) \le d(g)\, d(m)$。因此

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z \pmod{y}}} \frac{1}{d(n)} = \sum_{\substack{m\le x/g\\ m\equiv z_1 \pmod{y_1}}} \frac{1}{d(gm)} \ \ge\ \frac{1}{d(g)} \sum_{\substack{m\le x/g\\ m\equiv z_1 \pmod{y_1}}} \frac{1}{d(m)}.$$

对于固定的 y_1 和 $(y_1,\ z_1) = 1$，将算术级数中的塞尔伯格–德朗日理论应用于 $1/d(m)$，可得

$$\sum_{\substack{m\le X\\ m\equiv z_1 \pmod{y_1}}} \frac{1}{d(m)} \ \asymp_{y_1}\ \frac{X}{\sqrt{\log X}},$$

因此，取 $X = x/g$ 后，对于充分大的 x，有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z \pmod y}} \frac{1}{d(n)} \gg_{y_1} \frac{1}{d(g)}\cdot\frac{x/g}{\sqrt{\log(x/g)}} = \frac{x}{g\,d(g)\,\sqrt{\log(x/g)}}.$$

由于 y 固定，而 y_1 遍历 y 的因数，我们可以将对 y_1 的依赖吸收到隐含常数中，并写成

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z \pmod y}} \frac{1}{d(n)} \gg_{y} \frac{x}{g\,d(g)\,\sqrt{\log(x/g)}}.$$

最后，利用 $g \le y$、$d(g) \le d(y)$，以及 $\sqrt{\log(x/g)} \asymp_y \sqrt{\log x}$（当 x 足够大时，且其大小取决于 y），我们得到

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z \pmod y}} \frac{1}{d(n)} \gg_{y} \frac{x}{\sqrt{\log x}},$$

这就是 (4.6)。

将 (4.5) 与 (4.6) 结合，并利用 $\log 2 > 1/2$，可得对所有充分大的 x，

$$\sum_{n\in A_{y,z}(x)} \frac{1}{d(n)} \gg_{y} \frac{x}{\sqrt{\log x}}.$$

将此代入 (4.4)，证明即告完成。 □

现在，我们选取一个由定理 4.1 得到的特定递增函数 F，并利用引理 4.7 将发散从对数权转移到因数权。

固定 $\varepsilon > 0$ 和一个整数 $k \ge 2$，并定义

$$F(x) := x(\log x)(\log\log x)\cdots\left(\log^{(k-2)} x\right)^{1+\varepsilon},$$

其中 $\log^{(m)}$ 表示 m 重迭代对数。

引理 4.8。对于固定的 $y \ge 1$ 和整数 z，有

$$\sum_{\substack{n\ge 1\\ n\equiv z \pmod y}} \frac{\psi(n)}{F(\log d(n))\,d(n)} = \infty.$$

引理 *4.8* 的证明。如 [7, 节 4], 有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv z \pmod y}} \frac{1}{F((\log 2)\log\log n)\sqrt{\log n}} \asymp_y \frac{x}{F(\log\log x)\sqrt{\log x}}.$$

定义这两个非负数列

$$g(n) := \frac{1}{F(\log d(n))\,d(n)}, \qquad h(n) := \frac{1}{F((\log 2)\log\log n)\sqrt{\log n}},$$

及其沿等差数列 $n \equiv z$ （模 y）的部分和，

$$G(x) := \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv z \pmod y}} g(n), \qquad H(x) := \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv z \pmod y}} h(n).$$

由引理 4。 7，结合 $f = F$，并对足够大的 x 使用 $F((\log 2)\log\log x) \asymp F(\log\log x)$，我们得到 in

$$G(x) \gg_y \frac{x}{F(\log\log x)\sqrt{\log x}} \asymp_y H(x) \qquad (x \text{ sufficiently large}).$$

特别地，存在 x_0 和 $c = c(y) > 0$ 使得

$$G(x) \ge c\, H(x) \qquad \text{for all } x \ge x_0. \tag{4.7}$$

由于 ψ 递减，对序列 $a_n := g(n)\mathbf{1}_{n \equiv z \pmod y}$应用阿贝尔求和可得，对每个整数 $N \ge 1$，

$$\sum_{\substack{n \le N \\ n \equiv z \pmod y}} \psi(n)\, g(n) = \psi(N)\, G(N) + \sum_{m < N} \big(\psi(m) - \psi(m+1)\big)\, G(m).$$

将同一恒等式应用于 $b_n := h(n)\mathbf{1}_{n \equiv z \pmod y}$，得到

$$\sum_{\substack{n \le N \\ n \equiv z \pmod y}} \psi(n)\, h(n) = \psi(N)\, H(N) + \sum_{m < N} \big(\psi(m) - \psi(m+1)\big)\, H(m).$$

对所有 $m \ge x_0$ 使用 (4.7)，并利用 $\psi(m) - \psi(m+1)$的非负性，我们得到对所有充分大的 N

$$\sum_{\substack{n \le N \\ n \equiv z \pmod y}} \psi(n)\, g(n) \ge c \sum_{\substack{n \le N \\ n \equiv z \pmod y}} \psi(n)\, h(n) - O_{y,\psi}(1).$$

特别地，存在常数 $c = c(y) > 0$ 和 $C = C(y, z, \psi, F) > 0$，使得对所有充分大的 N，

$$\sum_{\substack{n \le N \\ n \equiv z \pmod y}} \frac{\psi(n)}{F(\log d(n))\, d(n)} \ge c \sum_{\substack{n \le N \\ n \equiv z \pmod y}} \frac{\psi(n)}{F((\log 2)\log\log n)\sqrt{\log n}} - C. \tag{4.8}$$

由于根据假设，

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\psi(q)}{F(\log\log q)\sqrt{\log q}} = \infty, \tag{4.9}$$

并且由于 ψ 递减，而当 q 充分大时， $F(\log\log q)\sqrt{\log q}$ 递增，因此 (4.9) 中的被加数最终递减；故限制在任意固定的模 y 剩余类上仍保持发散。特别地，

$$\sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv z \pmod y}}^{\infty} \frac{\psi(q)}{F(\log\log q)\sqrt{\log q}} = \infty.$$

再次利用 $F((\log 2)\log\log q) \asymp F(\log\log q)$，(4.8) 右端的部分和沿 $N \to \infty$ 趋于 $+\infty$，因此左端也如此。这就证明了所声称的发散。 □

下一个命题（引自 [7]）将上述大小/重叠估计与引理 4.8 中的发散结合起来，从而为每个开集U给出 $\mathrm{m}(W_{y,z}(\psi,\gamma)\cap U)$ 的定量下界。

命题 4.9。 *[7, 命题 8]* 对于每个 $q\ge 1$，令 $A_q\subset X$，其中 X 是一个度量空间，具有有限测度 μ，且每个开集都是 μ-可测的。设 $\eta:\ \mathbb{N}^2\to[1,\infty)$ 满足

$$\mu(A_q\cap A_r)\le \kappa\,\mu(A_q)\big(\mu(A_r)+\eta(q,r)\big)\qquad (1\le r\le q) \tag{4.10}$$

对于某个 $\kappa>0$成立。设 $U\subset X$ 是一个开集，且

$$\mu(A_q\cap U)\ge \frac{1}{2}\mu(A_q)\mu(U) \tag{4.11}$$

对所有充分大的 q都成立。令

$$\eta(q)=\sum_{r\le q}\eta(q,r),$$

并令 $h:\ [1,\infty)\ \to[1,\infty)$ 为递增的，且满足

$$h(2q)\ll h(q)\qquad \textit{and}\qquad \sum_{\ell\ge 0}\frac{1}{h(2^\ell)}<\infty. \tag{4.12}$$

If

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(A_q)}{\eta(q)\,h(\eta(q))}=\infty, \tag{4.13}$$

then

$$\mu\big(\limsup_{q\to\infty}A_q\cap U\big)\ge\frac{\mu(U)^2}{4\kappa}.$$

命题 4.10（Beresnevich–Dickinson–Velani, [1, 引理 6]）。设（X,d）是一个度量空间，具有有限测度 μ，且每个开集都是 μ-可测的。设 A 是 X 的一个博雷尔子集，并令 $f:$ $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 为递增函数，满足 $f\,(x)\ \to 0$，其中 $x\to 0$。若对于每个开集 $U\subset X$，都有

$$\mu(A\cap U)\ge f\big(\mu(U)\big),$$

then

$$\mu(A)=\mu(X).$$

继续定理 4.2 的证明，令

$$h(x)\ :=\ F(\log x).$$

显然， h 满足 (4.12) 中的条件。

现在，对每个 $q\ge 1$，定义

$$A_q:=E_{qy+z}.$$

于是 $\limsup_{q\to\infty}A_q=W_{y,\ z}(\psi,\ \gamma)$。

此外，由引理 4.6 可知，对每个非空开集 $U\subset\mathbb{T}$,

$$\mathrm{m}(A_q\cap U)\ \ge\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{m}(A_q)\,\mathrm{m}(U)\qquad \text{for all sufficiently large } q,$$

因此，序列（A_q）满足（4.11）。

根据引理 4.5，对于所有充分大的 q 以及所有 $1 \le r < q$，我们有

$$\mathrm{m}(A_q \cap A_r) \le 4(C_0+1)\left(\mathrm{m}(A_q)\,\mathrm{m}(A_r) + \frac{\gcd(qy+z, ry+z)}{qy+z}\mathrm{m}(A_q)\right).$$

因此，不等式 (4.10) 在 $\kappa = 4(C_0+1)$ 和

$$\eta(q,r) := \frac{\gcd(qy+z, ry+z)}{qy+z}.$$

因此，

$$\eta(q) = \sum_{1\le r\le q} \eta(q,r) \le \frac{1}{qy+z} \sum_{1\le m\le qy+z} \gcd(qy+z, m) = \sum_{e\mid(qy+z)} \frac{\varphi(e)}{e} \;\le\; d(qy+z).$$

由于 h 是递增的，我们有

$$h(\eta(q)) \le h(d(qy+z)) = F(\log d(qy+z)),$$

从而

$$\eta(q)\, h(\eta(q)) \le d(qy+z)\, F(\log d(qy+z)).$$

此外，根据引理 4.4，对所有充分大的 q，

$$\mathrm{m}(A_q) = \mathrm{m}(E_{qy+z}) = 2\psi(qy+z).$$

因此，对所有充分大的 q，

$$\frac{\mathrm{m}(A_q)}{\eta(q)\, h(\eta(q))} \;\ge\; \frac{2\psi(qy+z)}{d(qy+z)\, F(\log d(qy+z))}.$$

由引理 4.8 可得

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mathrm{m}(A_q)}{\eta(q)\, h(\eta(q))} = \infty.$$

因此，命题 4.9 表明，对于任意开集 $U \subset \mathbb{T}$，

$$\mathrm{m}\big(W_{y,z}(\psi,\gamma) \cap U\big) \;\ge\; \frac{\mathrm{m}(U)^2}{16(C_0+1)}.$$

由于 U 是任意的，命题 4.10 得出

$$\mathrm{m}\big(W_{y,z}(\psi,\gamma)\big) = 1,$$

完成证明。 □

参考文献

[1] V. Beresnevich、D. Dickinson 和 S. Velani，上极限集的测度论定律，《美国数学学会回忆录》**179** （2006），第 846 号。[2] J. W. S. Cassels，《丢番图逼近导论》，《剑桥数学与数理物理丛书》，第 45 号，剑桥大学出版社，1957 年。[3] S. Dann，论 *Minkowski–Funk* 变换，预印本，2010，arXiv:1003.5565。[4] M. Hauke 和 F. A. Ram´ırez，带移动目标的 *Duffin–Schaeffer* 猜想，预印本，2024，arXiv:2407.05344。[5] S. Helgason，积分几何与 *Radon* 变换，Springer，2010。[6] M. Hussain 和 B. Ward，关于圆环上极限集的一则注记，《Mathematika》**71** （2025），第 3 期，e70023。[7] G. Michaud 和 F. A. Ram´ırez，迈向带移动目标的 *Khintchine* 定理：额外发散还是有限中心目标，《Mathematika》**72** （2026），第 1 期，e70058。[8] B. Rubin，球面上的广义闵可夫斯基–芬克变换与小分母，《分数阶微积分与应用分析》**3** （2000），第 2 期，177–203。[9] B. Rubin，*Radon*变换导论：分数阶微积分与调和分析要素，剑桥大学出版社，2015 年。.[10] P. Sz¨usz，关于丢番图逼近的度量理论，《匈牙利科学院数学学报》**9** （1958），177–193。