arXiv:2601.09559v1 [math.OC] 14 Jan 2026

负罗宾边界条件下拉普拉斯扭转刚度的锐估计

Nunzia Gavitone、[a] David Krejčiřík [b] 和 Gloria Paoli [a]

a) Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli Federico II, Via Cintia, Monte S. Angelo, 80126 Napoli, Italy; nunzia.gavitone@unina.it, gloria.paoli@unina.it.b) Department of Mathematics, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, Czech Tech-nical University in Prague, Trojanova 13, 12000 Prague 2, Czechia; david.krejcirik@fjfi.cvut.cz.

2026年1月13日

摘要

受 Bandle和Wagner 的开创性工作启发， [4, 5], 给定一个有界利普希茨区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ，满足 $d \geq 3$, 我们考察边界参数为负值 α 时的罗宾拉普拉斯扭转刚度 $\tau_\alpha(\Omega)$，并证明当 $|\alpha|$ 足够小时， $\tau_\alpha(\Omega)$ 满足锐不等式。特别地，我们证明，若 $|\alpha|$ 小于第一个非平凡斯捷克洛夫-拉普拉斯特征值，则在周长或体积约束下，球在所有凸区域中使 $\tau_\alpha(\Omega)$ 取最大值。这解决了文献 [5]中提出的一个开放问题。我们还证明了该结果在平面情形下对单连通集合成立，并满足周长约束。

1 引言与主要结果

在体积给定的区域边界上被吸收的布朗运动，其预期寿命在球中最长。这就是著名的 Saint-Venant不等式 [25]。这一结果的另一种物理解释是：在所有横截面面积给定的弹性梁中，圆柱梁最能抵抗扭转变形。

对于具有其他边界条件的布朗运动，情况又如何？球仍然是最优的几何形状吗？出于这一物理上的好奇，我们考虑边值问题 [15]

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in} \quad \Omega\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha\, u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$， n 是有界利普希茨区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 的单位外法向量，且满足 $d \geq 1$。正值（分别为负值） α 对应于在边界上被吸收（分别为产生）的布朗粒子。诺伊曼（$\alpha = 0$）和狄利克雷（形式上， $\alpha = \infty$）实现分别对应于反射边界条件和吸收边界条件。布朗运动的预期寿命或扭转刚度（相差一个物理常数）为量 [7, 16]

$$\tau_\alpha(\Omega) := \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 u 是方程 (1) 的解。除了上述直接的物理解释外，扭转函数 u 还可作为磁学问题的一种便捷规范选择，发挥重要作用（近期应用示例见 [8, 17, 22] ）。

近年来，许多数学家研究了与 $\tau_\alpha(\Omega)$ 相关、受若干几何约束的形状优化问题（例如参见 [1, 2, 5, 6, 4, 14, 20, 27]）。特别需要强调的是， $\tau_\alpha(\Omega)$ 的行为和性质取决于 α 的符号。

在吸收情形（即 $\alpha > 0$）下，Bucur和Giacomini 在 [14] 中证明了球在体积约束下具有如下全局最优性。

定理1（Bucur和Giacomini [14]）。设 $d \geq 2$，且 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界Lipschitz集合。若$\alpha > 0$，则

$$\max_{|\Omega|=c} \tau_\alpha(\Omega) = \tau_\alpha(\Omega^*)\,, \tag{2}$$

其中，Ω^* 是与Ω体积相同、由给定正常数 c确定的球。

当将式（1）中的Robin边界条件替换为狄利克雷边界条件（$\alpha = \infty$）时，经典Saint-Venant不等式是式（2）的一个特例。在这种情况下，我们用 $\tau_D(\Omega)$表示扭转刚度。

本文旨在研究 α 为负值时会发生什么。事实上，据我们所知，就 $\alpha < 0$ 而言，目前在所有维数下都不存在满足测度约束的全局最优性结果。在这一情形下，Bandle和Wagner运用形状导数方法证明，当 $|\alpha|$ 足够小时，在所有固定体积的区域中，无论维数如何，球都是 $\tau_\alpha(\Omega)$的局部极小值。此后，Bandle和Wagner（另见其著作 [6,第 13]节）证明，当 $|\alpha|$ 足够小时，圆盘在平面情形下具有全局最优性。其取值足够小的条件取决于Ω的几何形状，更具体地说，可通过Steklov特征值问题对其进行量化

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 0 & \text{in} \quad \Omega\,, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = \sigma\,\phi & \text{on} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{3}$$

这表明 已知其具有一个离散特征值的无限序列（见 [21, 第 5] 节或 [23, 第 7]节）

$$0 = \sigma_0(\Omega) < \sigma_1(\Omega) \leq \sigma_2(\Omega) \leq \cdots \to +\infty\,.$$

更确切地说， [5] 中证明的全局优化结果如下所述。*

定理 2（Bandle和Wagner [5]）。设 $d = 2$ 并假设 Ω 是单连通的。若 $\alpha \in (-\sigma_1(\Omega), 0)$，则

$$\min_{|\Omega|=c} \tau_\alpha(\Omega) = \tau_\alpha(\Omega^*)\,, \tag{4}$$

其中，Ω^* 是与 Ω 具有相同面积的圆盘，该圆盘由给定的正常数 c确定。

我们特别强调， [5] 中的作者并未研究周长约束的情形；此外，他们还将先前结果推广到高维列为一个开放问题。本文的目标正是证明高维情形下和/或在替代性等周约束下的定理 2，前者解决了 [5]中提出的开放问题。

我们研究周长约束的动机源于以下 Robin 特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in} \quad \Omega\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha\, u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{5}$$

其中 λ 是一个实数，且 $\alpha < 0.$。事实上，对于 (5) 的最低特征值，已知当 $|\alpha|$ 较大时，在等体积约束下，球也不再是最优集合（见 [19]）；而在假设等周约束时，这种转变不会发生（见 [3, 11, 27]）。在此框架下，我们的第一个结果如下。

定理 3. 设 $d = 2$，并假设 Ω 是单连通的。如果 $\alpha \in (-\sigma_1(\Omega), 0)$，则

$$\min_{|\partial\Omega|=c} \tau_\alpha(\Omega) = \tau_\alpha(\Omega^*)\,, \tag{6}$$

其中 Ω^* 是与 Ω 周长相同的圆盘，其周长由给定的正常数 c确定。

至于高维情形，我们的主要结果如下，它推广了定理2和定理3。

*实际上， [5] 中的定理并未要求 Ω 是单连通的；然而，对于其中给出的证明（基于下文的命题 1），这一假设似乎是必要的。

定理 4. 设 $d \geq 3$，并假设 Ω 是凸的。若 $\alpha \in (-\sigma_1(\Omega), 0)$，则

$$\min_{|\Omega|=c} \tau_\alpha(\Omega) = \tau_\alpha(\Omega^*) \qquad \textit{(respectively,} \ \min_{|\partial\Omega|=c} \tau_\alpha(\Omega) = \tau_\alpha(\Omega^*)\textit{)}, \tag{7}$$

其中，Ω^* 是与 Ω 具有相同体积（分别为相同周长）的球，并由给定的正常数 c确定。若 $d = 3$，则可将凸性条件替换为这样的假设：Ω 是轴凸的，且 $\partial\Omega$ 与球面同胚。

我们回顾一下，若一个三维欧几里得集合绕某一轴旋转不变，且它与任意垂直于对称轴的平面的交集要么是圆盘，要么是空集 [18]，则称其为轴凸。

定理 4 的证明基于下面的定理 5：该定理指出，在所有维数 $d \geq 2$ 下，任意凸域的狄利克雷扭转刚度都不小于具有相同体积的球壳的狄利克雷–诺伊曼扭转刚度。据我们所知，这一结果对于$d \geq 4$是新的。（情形 $d = 3$ 可由 [27]推出。）我们的证明基于按照 [11] 的思路对平行坐标法进行推广。

本文的组织结构如下。第 2 节从算子理论的角度对 (1) 进行表述，给出球的显式解，陈述证明中的关键要素（在 α 为负值时替代缺乏适用变分刻画的情况），并回顾凸集合的施泰纳公式。定理 3 和定理 4 的证明分别见第 3 节和第 4 节。

2 预备结果

2.1 记号与基本事实

全文中，我们假设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个非空有界利普希茨区域，且 $d \geq 2$（区域是一个开连通集）。Ω 的 d 维勒贝格测度和边界 $\partial\Omega$ 的 $(d-1)$ 维豪斯多夫测度分别记作 $|\Omega|$ 和 $|\partial\Omega|$。此外，我们用 B_R 表示以原点为中心、半径为 $R > 0$ 的 $\mathbb{R}^d$ 开球，并用 $A_{R_1球壳R_2} := B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}$表示球壳。我们还回顾一下，集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 的内切半径定义为

$$r_\Omega := \sup_{x\in\Omega} \rho(x), \qquad \text{where} \qquad \rho(x) := \inf_{y\in\partial\Omega} |x-y| \tag{8}$$

是 Ω 的边界的距离函数。

接下来，我们回顾凸体的一些性质，这些性质将在后文中用到（参考文献见 [26]）。设 $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个开、相对紧且凸的集合。我们将 K 在距离 $\rho \geq 0$ 处的外平行体定义为以下闵可夫斯基和

$$K + \rho B_1 = \{x + \rho y \in \mathbb{R}^d : \ x \in K, \ y \in B_1\}.$$

施泰纳公式断言

$$|K + \rho B_1| = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} W_i(K)\, \rho^i\,, \tag{9}$$

其中系数 $W_i(\Omega)$ 通常称为拟混合体积。因此，

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{|\partial(K+\rho B_1)| - |\partial K|}{\rho} = d(d-1)W_2(K)\,. \tag{10}$$

对于光滑的 K，有 $W_2(K) = \frac{1}{d}\int_{\partial K} H$，其中 $H := \frac{1}{d-1}(\kappa_1 + \cdots + \kappa_{d-1})$ 表示 ∂K的平均曲率，约定当 K 为凸集时，主曲率 κ_1、……、κ_{d-1} 均非负。

亚历山德罗夫–芬切尔不等式指出

$$\left(\frac{W_j(K)}{|B_1|}\right)^{\frac{1}{d-j}} \geq \left(\frac{W_i(K)}{|B_1|}\right)^{\frac{1}{d-i}}, \qquad \text{for} \qquad 0 \leq i < j < n\,, \tag{11}$$

当且仅当 K 是一个球时，等号成立。在 $i=0$ 和 $j=1$ 的情形下，我们得到经典等周不等式

$$|\partial K|^{\frac{d}{d-1}} \geq d^{\frac{d}{d-1}} |B_1|^{\frac{1}{d-1}} |K| .$$

当 $i=1$ 和 $j=2$时，(11) 可写为

$$W_2(K) \geq d^{-\frac{d-2}{d-1}} |B_1|^{\frac{1}{d-1}} |\partial K|^{\frac{d-2}{d-1}} . \tag{12}$$

对于每个 $t \in [0, r_\Omega]$，我们考虑距离函数的以下超水平集

$$\Omega_t := \{x \in \Omega : \ \rho(x) > t\} ,$$

w我们回顾以下两个引理，其证明例如可见于 [9] 和 [11]。

引理 1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中有界、凸的开集。那么，对于几乎所有 $t \in (0, r_\Omega)$，有

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\partial\Omega_t| \geq d(d-1)\, W_2(\Omega_t) ,$$

当 Ω 是一个球时，等号成立。

引理 2. 此外，设 $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 是一个非递减的 C^1 函数。定义 ne

$$u(x) := f(\rho(x)) \qquad and \qquad E_t := \{x \in \Omega \ : \ u(x) > t\}.$$

那么，

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\partial E_t| \geq d(d-1)\, \frac{W_2(E_t)}{|Du|_{u=t}} . \tag{13}$$

2.2 算子理论框架与关键引理

令 $-\Delta_\alpha^\Omega$ d 表示罗宾拉普拉斯算子，即 L^2(Ω)中与该二次型相对应的自伴算子形式

$$\delta_\alpha^\Omega[\psi] := \|\nabla\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \|\psi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} , \qquad \mathrm{dom}(\delta_\alpha^\Omega) := W^{1,2}(\Omega) , \tag{14}$$

其中， ψ 的边界迹仍以同一符号表示。若 α 满足 $0 \notin \sigma(-\Delta_\alpha^\Omega)$，则方程 (1) 有唯一解，其表达式为

$$u = (-\Delta_\alpha^\Omega)^{-1} 1 \tag{15}$$

这对所有正的 α 都成立。然而，如果 α 非正，则当且仅当存在某个 $k \in \mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}$，使得 $0 \in \sigma(-\Delta_\alpha^\Omega)$ $\alpha = -\sigma_k$(Ω) 时，情况才成立；其中 $(\sigma_k(\Omega))_{k\in\mathbb{N}}$ 是问题 (3) 的 Steklov 特征值序列（按重数重复）。我们回顾一下，$\{\sigma_k(B_R)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\frac{k}{R}\}_{k\in\mathbb{N}}$。

注 1. 在 [13], Bucur 和 Fragal`a 中，作者通过变分法考虑了另一种“扭转刚度” $\tilde{\tau}_\alpha$(Ω)，其定义如下

$$\tilde{\tau}_\alpha(\Omega)^{-1} := \inf_{\substack{\psi \in W^{1,2}(\Omega) \\ \psi \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\psi|^2 + \alpha \int_{\partial\Omega} |\psi|^2}{\displaystyle\left(\int_\Omega |\psi|\right)^2} . \tag{16}$$

（对于 $\alpha = \infty$ ，边界项不予考虑，测试函数空间取为 $W^{1,\,2\,0}$ (Ω)。）如果 $\alpha \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$，则这两种定义一致，即 $\tilde{\tau}_\alpha$(Ω) $= \tau_\alpha$(Ω)。在这种情况下，分母中的绝对值可以去掉，而 (1) 表示与 (16) 相关联的欧拉–拉格朗日方程；事实上，(1) 的解必为正。然而，如果 α 为负，则一般而言 $\tilde{\tau}_\alpha$(Ω) $\neq \tau_\alpha$(Ω)，因为 (1) 的解在 Ω 中不一定具有恒定符号。本文仅采用由 (1) 给出的、具有物理动机的定义。我们仅将 (16) 作为定理 5 中的一项技术工具，该定理讨论狄利克雷情形。

边值问题 (1) 可解释为能量泛函 $E_\alpha^\Omega[\psi] := \delta_\alpha^\Omega[\psi] - 2\int_\Omega \psi$ 的欧拉–拉格朗日方程，其定义域为 dom(E_α^Ω) := $W^{1,2}$(Ω)。显然， $E_\alpha^\Omega[u] = -\tau_\alpha$(Ω)。由于在 α 为负值时， τ_α(Ω) 缺乏适当的变分刻画，以下估计是我们证明中的关键内容。

引理 3（Bandle和Wagner [5, 引理 2]）。若 $\alpha \in (-\sigma_1(\Omega), 0)$，则

$$\tau_\alpha(\Omega) \geq \tau_D(\Omega) + \frac{|\Omega|^2}{\alpha|\partial\Omega|}. \tag{17}$$

等号在球的情形下成立。

[5, 引理 2] 的证明基于将 u 写成狄利克雷扭转刚度与一个调和函数之和，后者展开为 Steklov 特征函数的级数。

值得注意的是，[5] 给出的定理 2 的证明以及我们当前结果的证明，都可以归结为 d
关键不等式 (17)，以及从下方估计狄利克雷扭转刚度 $\tau_D(\Omega)$。

2.3 径向情形

2.3.1 某个区域的 Robin 扭转刚度 ball

容易验证，$\Omega = B_R$ 和 $\alpha \neq 0$ 的方程 (1) 的径向解为

$$u(x) = \frac{1}{2d}\left(R^2 - |x|^2\right) + \frac{R}{\alpha d}.$$

当 $-\alpha \notin \{\sigma_k(B_R)\}_{k\in\mathbb{N}}$时，它与 (15) 一致。我们注意到，$u$ 在 B_R中通常不具有恒定符号。更具体地说，当 $\alpha > 0$时，u 在 B_R 中为正；当 $\alpha \in [-\frac{2}{R}, \frac{1}{R}$时，$u$ 在 B_R 中为负；而每当 $\alpha < -\frac{2}{R}$时，u 在 B_R 中变号。

在条件 $-\alpha \notin \{\sigma_k(B_R)\}_{k\in\mathbb{N}}$下，我们验证得到

$$\frac{\tau_\alpha(B_R)}{|\mathbb{S}^{d-1}|} = \frac{R^{d+2}}{d^2(d+2)} + \frac{R^{d+1}}{\alpha d^2}. \tag{18}$$

由此可得

$$\tau_\alpha(B_R) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = -\frac{d+2}{R} =: \alpha_*.$$

此外，$\int_{B_R} u < 0$ 若 $\alpha \in (\alpha^*, 0)$，且 $\int_{B_R} u > 0$ 若 $\alpha \in (-\infty, \alpha^*) \cup (0, +\infty)$。注意，$\alpha_* < -\sigma_1(B_R)$。

2.3.2 球壳的狄利克雷–诺伊曼扭转刚度

最后，我们考虑球壳上的以下狄利克雷–诺伊曼扭转问题 ll:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in} \quad A_{R_1,R_2}, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial B_{R_2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on} \quad \partial B_{R_1}, \end{cases} \tag{19}$$

记 $\tau_{DN}(A_{R_1,R_2}) := \int_{A_{R_1,R_2}} u$，其中 u 是问题 (19) 的解。通过简单计算，我们得到

$$\tau_{DN}(A_{R_1,R_2}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{8}\left[4R_1^4 \log\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) + 3R_1^4 - 4R_1^2R_2^2 + R_2^4\right] & \text{if} \quad d = 2, \\ |\mathbb{S}^{d-1}|\left(\dfrac{R_2^{d+2}}{d^2(d+2)} + \dfrac{R_1^{d+2}}{(d^2-4)} - \dfrac{R_1^dR_2^2}{d^2} - \dfrac{R_1^{2d}R_2^{2-d}}{d^2(d-2)}\right) & \text{if} \quad d \geq 4. \end{cases} \tag{20}$$

3 较低维数的情形 $d = 2, 3$

在本节中，我们分别研究维数为 $d = 2$ 和 $d = 3$ 时的主要定理。

3.1 平面情形

我们先从平面情形入手，在等周约束下证明定理 3。与 [5], 中引用的定理 2 的证明一样，关键在于 Payne 和 Weinberger 给出的以下狄利克雷扭转刚度估计（见 [24]）。

命题 1（Payne 和 Weinberger [24]）。设 $d = 2$，并假设 Ω 是单连通的。那么

$$\tau_D(\Omega) \geq \tau_{DN}(A_{R_1,R_2})$$

其中 $A_{R_1,\ R_2}$ 是半径满足条件的圆环，使得 $|A_{R_1,\ R_2}| = |\Omega|$ 且 $|\partial B_{R_2}| = |\partial\Omega|$；显式表达式为 ，

$$R_1 := \frac{\sqrt{|\partial\Omega|^2 - 4\pi|\Omega|}}{2\pi} \qquad and \qquad R_2 := \frac{|\partial\Omega|}{2\pi}$$

注意， R_1 由等周不等式可良好定义。命题 1 的证明基于平行坐标法：选取等值线平行于边界 ∂ Ω 的函数作为 $\tau_D(\Omega)$ 变分刻画中的试探函数。于是我们可以给出定理 3 的证明

定理 3 的证明。为通过引理 3 证明定理 3，我们使用式 (20) 中给出的 $\tau_{DN}(A_{R_1,\ R_2})$ 的显式表达式，并将其与满足 $|\partial B_R| = |\partial\Omega|$ 的圆盘 B_R 的扭转刚度 $\tau_D(B_R)$ 进行比较，即 $R = R_2$ （将 $\alpha \to \infty$ 代入后，可由式 (18) 推导出显式公式）。定义$t := R_1/R_2 \in [0, 1)$ 并应用引理 3，得到

$$\tau_\alpha(\Omega) - \tau_\alpha(B_R) \geq \pi R^4 \left(-\frac{1}{2}t^4 \log(t) + \frac{3}{8}t^4 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{(1-t^2)^2 - 1}{2\alpha R} \right). \tag{21}$$

假设 $t \in (0, 1)$（ $t = 0$ 的情形显然成立），并要求右侧非负，由此得 d 到以下 关于 α 的小量条件:

$$-2\alpha R \leq \frac{(1-t^2)^2 - 1}{-\frac{1}{2}t^4 \log(t) + \frac{3}{8}t^4 - \frac{1}{2}t^2}.$$

注意，对于每个 $t \in (0, 1)$，分母都不为零（事实上为负值）。此外，右侧有下界 4。因此，只要 $\alpha \geq -\frac{2}{R}$，(21) 的右侧就非负。另外，引理 3 的假设要求 $\alpha > -\sigma_1(\Omega)$。根据 Weinstock 不等式， $\sigma_1(\Omega) \leq \sigma_1(B_R) = \frac{1}{R}$。定理 3 的证明至此结束。

□

3.2 三维情形

现在我们继续证明定理 4 的特殊情形，即维数为 $d = 3$。人们普遍认为，导出命题 1 的平行坐标法不易推广到高维。不过，最近 Vikulova [27] 成功将其应用于三维。她的方法得出了以下结果（尽管 [27] 中并未明确陈述）。

命题 2（Vikulova [27]）。设 $d = 3$，并假设有界域 Ω 要么是凸的，要么是轴凸的，且 $\partial\Omega$ 与球面同胚。那么

$$\tau_D(\Omega) \geq \tau_{DN}(A_{R_1,R_2})$$

其中， $\tau_{DN}(A_{R_1,R_2})$ 的定义与 (19) 中相同，但此时 $A_{R_1,R_2} := B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}$ 是一个半径满足 $|A_{R_1,R_2}| = |\Omega|$ 和 $|\partial B_{R_2}| = |\partial\Omega|$ 的球壳；具体而言，

$$R_1 := \frac{\sqrt[3]{|\partial\Omega|^{3/2} - 6\pi^{1/2}|\Omega|}}{2\pi^{1/2}} \qquad and \qquad R_2 := \frac{|\partial\Omega|^{1/2}}{2\pi^{1/2}}.$$

$d = 3$ 的定理 4 证明。按照平面情形的做法，为通过引理 3 得到定理 3，我们使用 (20) 中给出的 $\tau_{DN}(A_{R_1,R_2})$ 的显式表达式，并将其与满足 $|\partial B_R| = |\partial\Omega|$ 的圆盘 B_R 的扭转刚度 $\tau_D(B_R)$ 进行比较，即 $R = R_2$，见 (18)，得到

$$\tau_\alpha(\Omega) - \tau_\alpha(B_R) \geq \frac{4\pi}{45}\left(9R_1^5 - 5\frac{R_1^6}{R_2} - 5R_1^3R_2^2 + R_2^5\right) - \frac{4\pi}{45}R^5 + \frac{4\pi}{9\alpha}\left(\frac{(R_2^3 - R_1^3)^2}{R_2^2} - R^4\right), \tag{22}$$

其中，B_R 是一个球，满足 $|\partial B_R| = |\partial\Omega|$ 或 $|B_R| = |\Omega|$，分别对应等周约束或等体积约束。

若假设满足等周约束，则 $R = R_2$，因此 (22) 化简为

$$\tau_\alpha(\Omega) - \tau_\alpha(B_R) \geq \frac{4\pi}{45}R^5\left(9t^5 - 5t^6 - 5t^3 + 5\frac{(1-t^3)^2 - 1}{\alpha R}\right) \tag{23}$$

其中仍记 $t := R_1/R_2 \in [0, 1)$。假设 $t \in (0, 1)$，并要求右端非负，可得关于 α 的以下小量条件：

$$-\alpha R \leq 5\,\frac{(1-t^3)^2 - 1}{9t^5 - 5t^6 - 5t^3}\,.$$

注意，对每个 $t \in (0, 1)$，分母都不为零（事实上为负值）。此外，右端有下界 2。因此，只要 $\alpha \geq -\frac{2}{R}$，(23) 的右端就非负。另外，引理 3 的假设要求 $\alpha > -\sigma_1(\Omega)$。由推广到高维的 Weinstock 不等式，[12]，$\sigma_1(\Omega) \leq \sigma_1(B_R) = \frac{1}{R}$。若 $d = 3$，则定理 4 证明中的等周部分至此完成。

为了完成证明，最后我们来假设等体积约束。在这种情况下 $R = \sqrt[3]{R_2^3 - R_1^3}$，因此 (22) 化简为

$$\tau_\alpha(\Omega) - \tau_\alpha(B_R) \geq \frac{4\pi}{45}R^5\left(9t^5 - 5t^6 - 5t^3 + 1 - (1-t^3)^{5/3} + 5\frac{(1-t^3)^2 - (1-t^3)^{4/3}}{\alpha R}\right) \tag{24}$$

其中我们仍记 $t := R_1/R_2 \in [0, 1)$。假设 $t \in (0, 1)$，并要求右端非负，由此得到关于 α 的以下小量条件：

$$-\alpha R \leq 5\,\frac{(1-t^3)^{7/3} - (1-t^3)^{5/3}}{9t^5 - 5t^6 - 5t^3 + 1 - (1-t^3)^{5/3}}\,.$$

注意，对于每个 $t \in (0, 1)$，分母都不为零（事实上为负值）。此外，右端有下界 1。因此，只要 $\alpha \geq -\frac{1}{R}$，(23) 的右端便非负。另外，引理 3 的假设要求 $\alpha > -\sigma_1(\Omega)$。根据在等体积约束下推广至高维的 Weinstock 不等式 [10]，$\sigma_1(\Omega) \leq \sigma_1(B_R) = \frac{1}{R}$。若 $d = 3$，则定理 4 证明中的等体积部分即告完成。 □

4 任意维数的一般情形

在本节最后，我们将在所有维数下证明定理 4。为此，我们需要将命题 1 和 2 推广到所有维数的以下结果；据我们所知，这一结果对于 $d \geq 4$ 似乎是新的。

定理 5. 设 $d \geq 1$，并假设 Ω 是一个有界凸域。则

$$\tau_D(\Omega) \geq \tau_{DN}(A_{R_1,R_2})$$

其中，$\tau_{DN}(A_{R_1,\,R_2})$ 的定义与 (19) 中相同，但 $A_{R_1,\,R_2} := B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}$ 为半径满足 $|A_{R_1,\,R_2}| = |\Omega|$ 且 $|\partial B_{R_2}| = |\partial\Omega|$ 的球壳。

证明。 $d = 1$ 情形是初等的。同时，命题 1 在较弱的假设下涵盖了二维情形。因此，我们将范围限定为 $d \geq 3$。保留 $d = 3$ 情形是为了给出命题 2 的另一种证明。

如果 $d \geq 3$，则很容易验证，方程 (19) 的解 u 为

$$u(x) = \frac{R_2^2 - |x|^2}{2d} + \frac{R_1^d}{(d-2)d}\left(R_2^{2-d} - |x|^{2-d}\right).$$

注意到 u 为正且径向对称。定义 $\phi:\ [R_1, R_2] \to \mathbb{R}$，使得 $u(x) =: \phi(|x|)$，我们看到 ϕ 是递减的，并且

$$u_M := \sup_{A_{R_1,R_2}} u = \phi(R_1).$$

我们遵循 [11]，应用平行坐标法。其思路是在狄利克雷扭转刚度 (16) 的变分刻画中构造一个合适的试探函数 $\psi \in W^{1,\,2\,0}(\Omega)$，该函数仅取决于 Ω 的边界距离函数。更具体地说，我们令

$$\psi(x) := \begin{cases} \phi\big(R_2 - \rho(x)\big) & \text{if} \quad \rho(x) < R_2 - R_1\,, \\ u_M & \text{if} \quad \rho(x) \geq R_2 - R_1\,, \end{cases} \tag{25}$$

其中 $\rho(x)$ 是距离函数。显然，$\psi = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，并且

$$\psi_M := \max_{\Omega} \psi \leq u_M\,. \tag{26}$$

此外，对于每个 $t \in [0, u_M]$，我们有

$$|\nabla\psi|_{\psi=t} = |\nabla u|_{u=t} =: g(t)$$

定义以下集合:

$$\begin{aligned} E_t :=& \{x \in \Omega:\ \psi(x) > t\}\,, \\ A_t :=& \{x \in A_{R_1,R_2}:\ u(x) > t\}\,, \\ B_t :=& A_t \cup \overline{B_{R_1}}\,. \end{aligned} \tag{27}$$

By 由引理 2 和亚历山德罗夫–芬切尔不等式 (12)，对于几乎处处的 $t \in (0, \psi_M$),

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\partial E_t| \geq d(d-1)\frac{W_2(E_t)}{g(t)} \geq d(d-1)d^{-\frac{d-2}{d-1}}|B_1|^{\frac{1}{d-1}}\frac{|\partial E_t|^{\frac{d-2}{d-1}}}{g(t)}\,. \tag{28}$$

同时，对于几乎所有的 $t \in (0, u_M)$,

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\partial B_t| = d(d-1)d^{-\frac{d-2}{d-1}}|B_1|^{\frac{1}{d-1}}\frac{|\partial B_t|^{\frac{d-2}{d-1}}}{g(t)}\,. \tag{29}$$

B由于假设 $|\partial\Omega| = |\partial B_{R_2}|$，由 (28) 和 (29)，从 0 积分到 t，我们得到

$$|\partial E_t| \leq |\partial B_t|, \tag{30}$$

对于每个 $t \in (0, \psi_M)$。将此不等式与 (26) 一起代入余面积公式，我们得到

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2 = \int_0^{\psi_M} g(t)\,|\partial E_t|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{u_M} g(t)\,|\partial B_t|\,\mathrm{d}t = \int_{A_{R_1,R_2}} |\nabla u|^2\,. \tag{31}$$

No现在，我们定义 $\mu(t) := |E_t|$ 和 $\eta(t) := |B_t|$。再次利用余面积公式和 (30)，我们得到 n

$$\mu'(t) = -\int_{\{u=t\}} \frac{1}{|\nabla\psi|} = -\frac{|\partial E_t|}{g(t)} \geq -\frac{|\partial B_t|}{g(t)} = -\int_{\{v=t\}} \frac{1}{|\nabla u|} = \eta'(t)$$

对于每个 $t \in (0\psi_M)$。由于根据假设 $\mu(0) = \eta(0)$ $|\Omega| = |A_{R_1,\ R_2}|$，从 0 积分到 t可得

$$\mu(t) \geq \eta(t)$$

对于每个 $t \in [0, u_M)$。因此，

$$\int_\Omega \psi = \int_0^{u_M} t\,\mu(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{u_M} t\,\eta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{A_{R_1,R_2}} u\,. \tag{32}$$

总之，将 (31) 和 (32) 代入变分刻画 (16)，可得

$$\tau_D(\Omega) \geq \frac{\left(\int_\Omega \psi\right)^2}{\int_\Omega |\nabla\psi|^2} \geq \frac{\left(\int_{A_{R_1,R_2}} u\right)^2}{\int_{A_{R_1,R_2}} |\nabla u|^2} = \tau_{DN}(A_{R_1,R_2})\,.$$

至此，定理的证明完成。 □

鉴于定理 4 已在第 3.2 节中对 $d = 3$ 证明，只需对 $d \geq 4$ 应用定理 5。不过，为了将本文的公式与第 3.2 节中的公式进行比较，我们允许 $d = 3$ 。

仿照第 3 节和第 3.2 节的做法，将引理 3 与定理 5 结合，可得

$$\begin{aligned}&\tau_\alpha(\Omega) - \tau_\alpha(B_R)\\ &\quad\geq \frac{|B_1|R_2^{d+2}}{d(d+2)} + \frac{d|B_1|R_1^{d+2}}{(d^2-4)} - \frac{R_1^d R_2^2|B_1|}{d} - \frac{R_1^{2d}R_2^{2-d}|B_1|}{d(d-2)} - \frac{|\Omega|^2}{|\alpha||\partial\Omega|} - \frac{|B_1|R^{d+2}}{d(d+2)} + \frac{|B_R|^2}{|\alpha||\partial B_R|}\,,\end{aligned} \tag{33}$$

其中， B_R 是一个球，满足 $|\partial B_R| = |\partial\Omega|$ 或 $|B_R| = |\Omega|$，分别对应等周约束或等体积约束。

4.1 等周约束

若 $|\partial B_R| = |\partial\Omega|$，则 $R_2 = R$ ，且 (33) 变为

$$\tau_\alpha(\Omega) - \tau_\alpha(B_R) \geq \frac{d|B_1|R_1^{d+2}}{(d^2-4)} - \frac{R_1^d R^2|B_1|}{d} - \frac{R_1^{2d}R^{2-d}|B_1|}{d(d-2)} + \frac{|B_R|^2 - |\Omega|^2}{|\alpha||\partial\Omega|}\,, \tag{34}$$

其中最后一项根据等周不等式为正。接下来，为了确保右端非负，必须满足以下不等式

$$\frac{|B_R|^2 - |\Omega|^2}{|\alpha||\partial\Omega|} \geq \frac{|B_1|R_1^d R^2}{d(d^2-4)}\left((d^2-4) - d^2t^2 + (d+2)t^d\right) \tag{35}$$

其中 $t := R_1/R \in [0,1)$ 。我们强调，对于所有 $t \in$ (0,1)，右端均为正。在此条件下，回顾 $|\Omega| = |B_1|(R^d - R_1^d)$ 且 $|\partial\Omega| = d|B_1|R^{d-1}$，可知 (35) 成立当且仅当

$$-\alpha R \leq \frac{(d^2-4)[1-(1-t^d)^2]}{t^d\left[(d^2-4) - d^2t^2 + (d+2)t^d\right]}. \tag{36}$$

由于右端有下界 2，因此只要 $\alpha \geq -\frac{2}{R}$，(34) 的右端就非负。此外，引理 3 的假设要求 $\alpha > -\sigma_1(\Omega)$。由推广至高维的 Weinstock 不等式 [12], $\sigma_1(\Omega) \leq \sigma_1(B_R) = \frac{1}{R}$。至此，定理 4 的证明完成。

4.2 等体积约束

如果 $|B_R| = |\Omega|$，则有 $R_2^d - R_1^d = R^d$。若满足以下不等式，(33) 的右端非负

$$\begin{aligned}&\frac{(d^2-4)R^{d+1}f(t)}{|\alpha|} = \frac{d(d^2-4)|B_R|^2\left(|\partial\Omega| - |\partial B_R|\right)}{|\alpha||B_1||\partial\Omega||\partial B_R|}\\ &\geq (d^2-4)R_1^dR_2^2 + (d+2)R_1^{2d}R_2^{2-d} + (d-2)(R^{d+2} - R_2^{d+2}) - d^2R_1^{d+2}\\ &= R^{d+2}(1-t^d)^{-\frac{d+2}{d}}g(t)\,,\end{aligned} \tag{37}$$

其中 $t := R_1/R_2 \in [0,1)$ 且

$$f(t) := 1-(1-t^d)^{\frac{d-1}{d}},$$
$$g(t) := (d^2-4)t^d + (d+2)t^{2d} - d^2t^{d+2} - (d-2)\left[1-(1-t^d)^{\frac{d+2}{d}}\right].$$

引理 4. 设 $d \geq 3$。对于每个 $t \in (0,1)$，有 $g(t) > 0$。

证明。容易验证 $g(0) = 0 = g(1)$。计算导数可得

$$g'(t) = (d+2)t^{d-1}h(t), \tag{38}$$

其中

$$h(t) := d^2(1-t^2) - 2d(1-t^d) - (d-2)(1-t^d)^{2/d},$$

其中 $h(0) = d^2-3d+2 > 0$，当 $d \geq 3$ 时，且 $h(1) = 0$。

我们来研究区间 $(0,1)$ 上的函数 h。计算一阶和二阶导数可得

$$h'(0) = 0, \qquad h''(0) = -2d^2, \qquad \lim_{t\to 1^-} h'(t) = \lim_{t\to 1^-} h''(t) = +\infty.$$

关键在于计算三阶导数

$$h'''(t) = 2(d-1)(d-2)t^{d-3}\left[d^2 + (d-2)(1-t^d)^{2/d-3}(1+t^d)\right].$$

由于对于每个 $t \in (0,1)$，$h'''(t) > 0$，可知 h'' 在 $(0,1)$ 上严格递增。此外，由于 $h''(0) < 0$ 且 $h''(1) > 0$，存在唯一的 $t_1 \in (0,1)$，使得 $h''(t_1) = 0$。综上，$h'' < 0$ 在 $(0,t_1)$ 上，$h''(t_1) = 0$，而 $h'' > 0$ 在 $(t_1,1)$ 上。因此，h' 在 $(0,t_1)$ 上严格递减，并在 $(t_1,1)$ 上严格递增。现在，考虑到 $h'(0) = 0$ 且 $h'(1) > 0$，存在唯一的 $t_2 \in (0,1)$（实际上，我们知道 $t_2 \in (t_1,1)$），使得 $h'(t_2) = 0$，$h' < 0$ 在 $(0,t_2)$ 上，而 $h' > 0$ 在 $(t_2,1)$ 上。这意味着 h 在 $[0,t_2]$ 上严格递减，并在 $[t_2,1]$ 上严格递增。由于 $h(1) = 0$，必然.....

$$h(t_2) = \min_{[0,1]} h < 0.$$

回顾 $h(0) > 0$，存在唯一一点 $t_3 \in (0,1)$，使得 $h > 0 \text{ in } (0,t_3)$、$h(t_3) = 0 \text{ and} h < 0 \text{ in } (t_3,1)$。

根据关系式 (38) 以及对 h 的前述分析，我们得出

$$g' > 0 \text{ in } (0,t_3) \quad \text{and} \quad g' < 0 \text{ in } (t_3,1), \quad \text{while} \quad g(1) = g(0) = 0. \tag{39}$$

这就得到了所需结论：g 在 $(0,1)$ 上为正。 □

根据该引理，对于每个 $t \in (0,1)$，(37) 右端均为正。在此条件下，只要满足以下条件，不等式 (37) 就成立：

$$-\alpha R \leq \frac{(d^2-4)\left[(1-t^d)^{\frac{d+2}{d}} - (1-t^d)^{\frac{2d+1}{d}}\right]}{g(t)}. \tag{40}$$

引理 5。设 $d \geq 3$。对于每个 $t \in (0,1)$，(40) 的右端有下界 1。

证明。该结论等价于如下性质：

$$k(t) := (d^2-4)\left[(1-t^d)^{1+\frac{2}{d}} - (1-t^d)^{2+\frac{1}{d}}\right] - g(t) \geq 0.$$

由于 $k(0) = k(1) = 0$，为了证明该断言，只需证明 k 有唯一的极值点，且该点是最大值。我们将沿用前一个引理 4 的方法，证明对于 k，(39) 也成立，其中 $t_3 \in (0,1)$ 可取某个（可能不同的）值。

计算导数可得

$$k'(t) = (d+2)t^{d-1}m(t), \tag{41}$$

其中

$$m(t) := (d-2)(2d+1)(1-t^d)^{1+\frac{1}{d}} - (d-2)(d+1)(1-t^d)^{\frac{2}{d}} - d^2(1-t^2) + 2d(1-t^d).$$

注意， $m(0) = m(1) = 0$。为简化计算，我们作变量代换$u := 1 - t^d \in (0,1)$，得到

$$M(u) := m(t(u)) = d^2(1-u)^{\frac{2}{d}} - (d-2)(d+1)u^{\frac{2}{d}} + (2d^2-3d-2)u^{1+\frac{1}{d}} + 2du - d^2. \tag{42}$$

通过计算一阶和二阶导数，我们得到

$$\begin{aligned} &\lim_{u\to 0^+} M'(u) = -\infty, \qquad &&\lim_{u\to 0^+} M''(u) = +\infty, \\ &\lim_{u\to 1^-} M'(u) = -\infty, \qquad &&\lim_{u\to 1^-} M''(u) = -\infty. \end{aligned} \tag{43}$$

与引理 4 中一样，关键在于计算三阶导数

$$M'''(u) = -\frac{(d-1)(d-2)}{d^3}\left[4d^2(1-u)^{\frac{2}{d}-3} + (d+1)(2d+1)u^{\frac{1}{d}-2} + 4(d+1)(d-2)u^{\frac{2}{d}-3}\right].$$

由于对每个 $u \in (0,1)$，都有 $M'''(u) < 0$，因此 M''在 $(0,1)$ 上严格递减。回顾式 (43) 中 M''的边界渐近行为，可知存在唯一一点 $u_0 \in (0,1)$，使得 $M''(u_0) = 0$。因此， $u_0 \in (0,1)$ 是 M'的唯一内部极大点。由于 M不是常数，且$M(0) = 0 = M(1)$，不可能对每个 $u \in (0,1)$ 都有 $M'(u) \le 0$。因此， $M'(u_0) > 0$。再结合式 (43) 中 M'的边界渐近行为，恰有两点 $u_1 < u_2$ 位于 $(0,1)$ 内，使得 $M'(u_1) = M'(u_2) = 0$。综上，

$$\begin{cases} M' < 0 & \text{in} \quad (0, u_1), \\ M' > 0 & \text{in} \quad (u_1, u_2), \\ M' < 0 & \text{in} \quad (u_2, 1). \end{cases}$$

这意味着， u_1 和 u_2 是满足 $u_1 < u_2$ 的 M 的两个唯一极值点，并且

$$M(u_1) = \min_{[0,1]} M < 0, \qquad M(u_2) = \max_{[0,1]} M > 0.$$

由此可知，存在唯一的 $u_3 \in (0,1)$，使得 $M(u_3) = 0$（实际上，我们知道 $u_3 \in (u_1, u_2)$）。回顾式 (42) 中函数 M 的定义，我们已证明存在唯一的 $t^* \in (0,1)$，使得

$$\begin{cases} m(t) > 0 & \text{in} \quad (0, t^*), \\ m(t^*) = 0, & \\ m(t) < 0 & \text{in} \quad (t^*, 1). \end{cases}$$

由式 (41) 可知， $t^* \in (0,1)$ 是 k 的唯一极值点，且满足

$$k(t^*) = \max_{(0,1)} k > 0.$$

最后，由于 $k(0) = 0 = k(1)$，我们得出 $k > 0$ 属于 $(0,1)$。 □

该引理意味着，只要 $\alpha \ge -\frac{2}{R}$成立，式 (37) 就成立。此外，引理 3 的假设要求 $\alpha > -\sigma_1(\Omega)$。根据在等体积约束 [10]下推广至高维的 Weinstock 不等式， $\sigma_1(\Omega) \le \sigma_1(B_R) = \frac{1}{R}$。至此，定理 4 证明中的等体积部分即告完成。

注 2. 对任意正的 $R_1 < R_2$，条件 (36) 和 (40) 均等价于

$$-\alpha R \le \frac{\dfrac{|B_R|^2}{|\partial B_R|} - \dfrac{|\Omega|^2}{|\partial\Omega|}}{\tau_D(B_R) - \tau_{DN}(A_{R_1,R_2})} R,$$

其中 $|\Omega| := |A_{R_1,\ R_2}|$ 且 $|\partial\Omega| := |\partial B_{R_2}|$ （即，数值 $|\Omega|$ 和 $|\partial\Omega|$ 由给定的半径 R_1、R_2唯一确定，此处不再考虑集合 Ω 的初始问题）。等周约束（分别为等容约束）意味着 $|\partial B_R| = |\partial B_{R_2}|$ （分别为 $|B_R| = |A_{R_1,\ R_2}|$），对应于选择 $R := R_2$ （分别为 $R := (R_2^d - R_1^d)^{1/d}$）。(36) 右端（分别为 (40) 右端）的下界为 2（分别为 1，见引理 5），由此得到一个非平凡的定量估计

$$\tau_D(B_R) - \tau_{DN}(A_{R_1,R_2}) \le c\, R \left(\frac{|B_R|^2}{|\partial B_R|} - \frac{|\Omega|^2}{|\partial\Omega|} \right), \tag{44}$$

其中，在等周约束或等体积约束下，分别有 $c := 1/2$ 或 $c := 1$。注意到（44）的两边均为正数。

致谢

N. Gavitone 和 G. Paoli 得到了意大利高等数学研究院（INdAM）数学分析与概率及其应用国家小组（GNAMPA）的部分资助。

N. Gavitone 获得了 MUR PRIN-PNRR 2022 项目“线性与非线性偏微分方程：新方向与应用”（P2022YFA）以及 INdAM 的 GNAMPA 小组的资助。

G. Paoli 获得了“INdAM - GNAMPA项目”（CUP E5324001950001）以及 PRIN 2022 PNRR 项目“面向边缘智能的可持续可信迁移学习平台（STRUDEL）”（CUP E53D23016390001）的资助，该项目在欧盟“下一代欧盟”计划框架下实施。

D. Krejčiřík 得到了捷克科学基金会 26-21940S 号项目的资助。

参考文献

[1] A. Alvino、C. Nitsch 和 C. Trombetti，具有 Robin边界条件的椭圆问题解的 Talenti 比较结果，《纯粹与应用数学通讯》76（2023），第3期，585–603。MR 4544805[2] V. Amato、R. Barbato、S. Cito、A. L. Masiello 和 G. Paoli，具有 Robin边界条件的定量 Talenti 型比较结果，arXiv 预印本：2511.11316（2025）。[3] P. R. S. Antunes、P. Freitas 和 D. Krejčiřík，负边界参数下 Robin特征值的界与极值区域，《高级微积分与变分》10（2017），第4期，357–379。MR 3707083[4] C. Bandle 和 A. Wagner，Robin边界条件问题的二阶区域变分，《优化理论与应用杂志》167（2015），第2期，430–463。MR 3412445[5] ———,具有异号 Robin边界条件的椭圆问题的区域扰动，《代数与分析》28（2016），第2期，34–57。MR 3593002[6] C. Bandle 和 A. Wagner，《形状优化》，De Gruyter，柏林／波士顿，2023。[7] R. Ba˜nuelos、van den Berg 和 T. Carroll，布朗运动的扭转刚度与预期寿命，《伦敦数学学会杂志》66（2002），499–512。[8] J.-M. Barbaroux、L. Le Treust、N. Raymond 和 E. Stockmeyer，关于 Dirichlet-Pauli算子的半经典谱，《欧洲数学学会杂志》23（2021），3279–3321。[9] B. Brandolini、C. Nitsch 和 C. Trombetti，利用等周亏缺给出凸域上非线性特征值的上界，《巴塞尔数学档案》94（2010），第4期，391–400。MR 2643973[10] F. Brock，Stekloff问题特征值的一个等周不等式，《应用数学与力学杂志》81（2001），69–71。[11] D. Bucur、V. Ferone、C. Nitsch 和 C. Trombetti，负边界参数下第一 Robin-Laplacian特征值的一个锐估计，《意大利林琴国家科学院数学与应用数学纪要》30（2019），665–676。MR 4030345

[12] ———, 高维中的 Weinstock 不等式, 《微分几何杂志》118（2021）, 1–21。MR 4255070[13] D. Bucur 和 I. Fragal`a, 关于 Robin拉普拉斯特征值的蜂窝猜想, 《当代数学通讯》21（2019）, 1850007。[14] D. Bucur 和 A. Giacomini, 带 Robin边界条件的拉普拉斯算子的 Saint-Venant不等式, 《米兰数学杂志》83（2015）, 327–343。[15] M. Campanino 和 G. Del Grosso, 多边形区域中热扩散对应随机过程的一种构造, 《意大利数学联合会公报》13-B（1976）, 876–895。[16] T. Carroll, 关于低音音符、扭转函数与双曲度量的新旧成果, 《爱尔兰数学学会通讯》47（2001）, 41–65。[17] B. Colbois、C. L´ena、L. Provenzano 和 A. Savo, 平面中磁性Neumann特征值的几何界, 《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）179（2023）, 454–497。[18] J. Dalphin、A. Henrot、S. Masnou 和 T. Takahashi, 关于总平均曲率的最小化, 《几何分析杂志》26（2016）, 2729–2750。[19] P. Freitas 和 D. Krejˇciˇr´ık, 负边界参数下的第一Robin特征值, 《数学进展》280（2015）, 322–339。MR 3350222[20] N. Gavitone 和 R. Molinarolo, 关于带 Robin边界条件的 Serrin 问题, arXiv 预印本: 2509.24557（2025）。[21] A. Henrot, 《形状优化与谱理论》, De Gruyter, 华沙, 2017。[22] A. Kachmar 和 V. Lotoreichik, 通过扭转函数得到最低磁性Neumann特征值的几何界, 《SIAM数学分析杂志》56（2024）, 5723–5745。[23] M. Levitin、D. Mangoubi 和 I. Polterovich, 《谱几何专题》, 美国数学学会, 普罗维登斯, 2023。[24] L. E. Payne 和 H. F. Weinberger, 关于膜振动频率与扭转刚度的一些等周不等式, 《数学分析与应用杂志》2（1961）, 210–216。[25] G. P´olya 和 G. Szeg˝o, 《数学物理中的等周不等式》, 《数学年刊研究丛书》第27号, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 1951。[26] R. Schneider, 《凸体: Brunn-Minkowski理论》, 第2版（扩充版）, 剑桥大学出版社, 2013。[27] A. V. Vikulova, 三维中的平行坐标与锐谱等周不等式, 《数学研究》71（2022）, 41–52。