arXiv:2601.09565v1 [math.AC] 14 Jan 2026

整环在扩张与拉回构造下的局部性质

HYUNGTAE BAEK、JUNG WOOK LIM、OMAR OUZZAOUIT 和 ALI TAMOUSSIT

Abstract. 对于整环的一种性质 $\mathcal{X}$，若整环 D 的每个素理想P 对应的局部化 D_P 都具有性质 $\mathcal{X}$，则称 D 为 *locally* $\mathcal{X}$*-domain* 。本文研究整环的局部性质在若干扩张与构造下的传递，包括平坦上整环、Nagata 理想变换、多项式环及其商扩张，以及拉回构造。

1. Introduction

1.1. 局部性质。 局部化在交换代数中发挥着根本性的作用。特别是，它为研究某些交换环和模的类提供了一种有用的技巧。事实上，在素理想处局部化，可以将所有研究限制在局部情形。此外，许多类整环都是通过在特定类型理想处的局部化来定义或刻画的。例如，Pr¨ufer 整环、几乎 Dedekind 整环 [15] 和几乎 Krull 整环 [31]是通过在极大理想处局部化来定义的； t-几乎 Dedekind 整环 [19] （分别地，PvMD）是通过在极大 t-理想处局部化来定义（分别地，刻画）的；而 P-整环 [28]（即，局部本质整环）则是通过在伴随素理想处局部化来定义的。对于整环的一种性质 $\mathcal{X}$，若 D的任意一个在素理想（分别地，素 t-理想）处的局部化都具有性质 $\mathcal{X}$，则称 D为局部 $\mathcal{X}$整环 （分别地， t局部 $\mathcal{X}$整环）。按照这种命名体系，几乎 Dedekind 整环（分别地，几乎 Krull 整环、 PvMD 和 t- 几乎 Dedekind 整环）恰好是局部离散赋值环（分别地，局部 Krull 整环、 t-局部赋值整环和 t-局部离散赋值环）。

1.2. 星运算。为帮助读者更好地理解本文，我们回顾一些与星运算相关的定义和记号。设 D 是一个商域为 K的整环。设 F(D) 是D的非零分式理想的集合。对一个 $I \in$ F(D)，令 $I^{-1} := \{a \in K \mid aI \subseteq D\}$。定义在 F($D$) 上的映射 $I \mapsto I_v :=$(I^{-1}) $^{-1}$ 称为 D上的 v-运算；定义在 F(D) 上的映射 $I \mapsto I_t := \bigcup\{J_v \mid J$ 是 $I\}$ 的一个非零有限生成分式子理想，称为 D上的 t-运算。若 J 是 D 的一个理想，且 J 有限生成并满足 $J_v = D$，则称其为 Glaz–Vasconcelos 理想（简称 GV-理想），记作 $J \in$ GV(D)。对每个 $I \in$ F(D)， I 的 w-包络是集合 $I_w := \{x \in K \mid xJ \subseteq I$，其中 $J \in$GV(D)$\}$。定义在 F(D) 上的映射 $I \mapsto I_w$ 称为 D上的一个 w-运算。

Date: 2026年1月15日。词语和短语：局部性质、环扩张、拉回构造、Krull 型整环。2020年数学主题分类：13A15、13B30。

设 $* = v$, t 或 w。 D的一个非零分式理想 F称为分式 $*$-理想，如果 $F_* = F$。 D 的一个非零理想称为素 $*$-理想，如果它既是一个 $*$-理想，又是一个素理想。 D 的一个非零真理想若在 D的真 $*$-理想中是极大的，则称为极大 $*$-理想，记作 $*$-Max(D)。值得注意的是，任何极大 $*$-理想（如果存在）都是素理想。

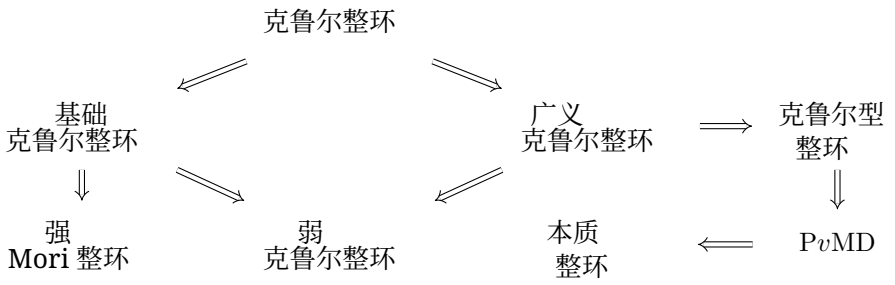
1.3. Krull 类整环及相关整环。 设 D 为一个整环， $X^1(D)$表示 D 的高度为一的素理想集合， $\mathfrak{A}$是 D的一个素理想集合。考虑以下五个条件：

(i) $D = \bigcap_{P\in\mathfrak{A}} D_P$，(ii) 对任意 $P \in \mathfrak{A}$， D_P 都是诺特整环，(iii) 对任意 $P \in \mathfrak{A}$， D_P 都是赋值整环，(iv) 对任意 $P \in \mathfrak{A}$， D_P 都是离散赋值环，(v) D 的每个非零元素仅属于 $\mathfrak{A}$中的有限多个元素。

基于这些陈述，我们作如下定义：

(1) 若 D 在 $\mathfrak{A} = X^1(D)$时满足(i)、(iv)和(v)，则称 D 为克鲁尔整环；(2) 若 D 在 $\mathfrak{A} = X^1(D)$时满足(i)、(ii)和(v)，则称 D 为infra-Krull 整环；(3) 若 D 在 $\mathfrak{A} = X^1(D)$时满足(i)、(iii)和(v)，则称 D 为广义Krull整环（按 Gilmer [14] 的定义）；(4) 若 D 在 $\mathfrak{A} = X^1(D)$时满足(i)和(v)，则称 D 为弱 Krull 整环；(5) 若存在 $\mathfrak{A}$使 D 满足(i)和(iii)，则称 D 为本质整环；(6) 若存在 $\mathfrak{A}$ 使 D 满足(i)、(iii)和(v)，则称 D 为 Krull 型整环；(7) 若 D 在 $\mathfrak{A} = t$-Max(D)时满足(iii)，则称 D 为 Pr ¨ufer v-乘法整环（简称 PvMD）；(8) 若 D 在 $\mathfrak{A} = t$-Max(D)时满足(ii)和(v)，则称 D 为强 Mori 整环（简称 SM 整环）。

以下是关于 Krull 类整环的众所周知的事实：弱 Krull 整环恰好是一个具有有限 t-特征的 t 维整环 [4, 引理 2.1(1)]；infra-Krull 整环恰好是一个 t 维强 Mori 整环[22, 页 199]；广义Krull整环恰好是一个具有有限 t-特征的 t 维 Pv MD [13, 定理 3 和 5] （回忆一下，若 t-Max(D) = $X^1(D)$，则 D 是一 t维整环；若每个非零非单位元只属于有限多个 t-理想 D，则 D 具有有限 t特征）。因此，我们可以轻松得到以下蕴含关系。



1.4. 主要结果。 本文研究整环的局部性质向若干类扩张的传递，例如平坦上整环、Nagata 理想变换和多项式环扩张，以及向拉回构造的传递。更确切地说，对于给定的整环性质 $\mathcal{X}$，我们证明，局部 $\mathcal{X}$-整环（分别为 t-局部 $\mathcal{X}$-整环）的性质在平坦上整环（分别为 t-平坦上整环）扩张下保持不变（命题 2.2）。

此外，对于非准局部整环，我们用其 Nagata 理想变换来刻画局部 $\mathcal{X}$-整环（命题 2.5）。我们进一步证明，在对 $\mathcal{X}$ 作出适当假设的条件下，多项式环、其基环以及某些商扩张具有相同的局部 $\mathcal{X}$ 性质（定理 2.10 和 2.12）。最后，我们探讨拉回构造生成局部 Krull 类整环的充要条件（定理 3.8 和 3.10）。

2. Some extension of integral domains and their local properties

本节中，我们研究整环的各种扩张中某些局部性质的传递。

设 D 是一个整环。给定整环的一种性质 $\mathcal{X}$，若对于任意 $P \in \mathrm{Spec}(D)$（分别地，$P \in t\text{-}\mathrm{Spec}(D)$），$D$ 具有性质 $\mathcal{X}$，则称 D 为局部 $\mathcal{X}$-整环（分别地，t-局部 $\mathcal{X}$-整环）。显然，每个局部 $\mathcal{X}$-整环都是 t-局部 $\mathcal{X}$-整环；若 $\mathcal{Y}$ 是整环的一种性质，且 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{Y}$ 的子类，则局部 $\mathcal{X}$-整环也是局部 $\mathcal{Y}$-整环。此外，若 $\mathcal{X}$ 在商扩张下稳定，则 $\mathcal{X}$-整环类是局部 $\mathcal{X}$-整环类的子类。

下面的结果确立了 (t-)局部 $\mathcal{X}$ 性质向 (t-)平坦上整环的传递。此外，我们证明，当性质 $\mathcal{X}$ 在商扩张下保持稳定时，局部 $\mathcal{X}$整环（分别为 t-局部 $\mathcal{X}$整环）的定义可简化为在极大理想（分别为极大 t理想）处进行局部化。

命题 2.1. 设 D 是一个整环，$\mathcal{X}$ 是整环的一种性质。那么以下断言成立。

(1) D 是局部 $\mathcal{X}$整环，当且仅当 D 的每个平坦上环也是局部 $\mathcal{X}$整环。(2) D 是 t-局部 $\mathcal{X}$整环，当且仅当 D 的每个 t-平坦上环也是 t-局部 $\mathcal{X}$整环。(3) 若 $\mathcal{X}$ 在商扩张下保持稳定，则(a) D 是局部 $\mathcal{X}$整环，当且仅当对所有 $M \in$素谱(D)，D_M 都具有性质 $\mathcal{X}$。(b) D 是 t-局部 $\mathcal{X}$整环，当且仅当对所有 $M \in t$-素谱(D)，D_M 都具有性质 $\mathcal{X}$。

证明。(1) 假设 D 是局部 $\mathcal{X}$-整环。设 T 是 D 的平坦上环，$\mathfrak{p}$ 是 T 的一个素理想。于是 $T_{\mathfrak{p}} = D_{\mathfrak{p}\cap D}$ 具有性质 $\mathcal{X}$。因此 T 是局部 $\mathcal{X}$。反之显然。

(2) 证明与断言 (1) 的证明类似，只需利用以下事实：D 的平坦上环 t 中每个素 t-理想的收缩都是 D 的素 t-理想。

(3) 对于断言 (a)，假设 D_M 对任意 $M \in$Max(D) 都具有性质 $\mathcal{X}$。设 P 是 D 的一个素理想。那么存在一个包含 P 的 D 的极大理想 M。由于 $D_P =$(D_M)^{PD_M}，且性质 $\mathcal{X}$ 在商扩张下保持不变，因此 D_P 具有性质 $\mathcal{X}$。这意味着 D 是局部 $\mathcal{X}$-整环。反向显然成立。此外，断言 (b) 的证明与 (a) 类似，只需利用以下事实： D 的每个素 t-理想都包含在某个极大 t-理想中。□

由上述命题，我们可推出以下两个推论。

推论 2.2。 设 D 是一个整环。若 $\mathcal{X}$ 是整环的一种性质，则以下断言成立。

(1) D 是局部 $\mathcal{X}$整环，当且仅当对于 D的任意乘法子集 S， D_S 是局部 $\mathcal{X}$整环。(2) 若 D 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$整环，则对于 D的任意乘法子集 S， D_S 也是如此。

证明。 假设对于D的任意乘法子集 S， D_S 都是局部 $\mathcal{X}$整环。设 D的一个素理想为 P，并令 $S = D \setminus P$。则 $D_P =$(D_S)^{PD_S}具有性质 $\mathcal{X}$，这意味着 D是局部 $\mathcal{X}$ 整环。逆命题和断言 (2) 显然成立，因为每个商环都是一个（t-）平坦上环。□

根据 [30]，整环 D 的真上环 T 若不存在真包含于 T的 D 的真上环，则称其为极小上环。

推论 2.3。 设 D 为具有极小上环 T 的整环，并设 $\mathcal{X}$ 为整环的一种性质。假设 D 是局部 $\mathcal{X}$-整环。则下列断言成立。

(1) 如果 D 不是拟局部整环，而 T 是拟局部整环，则 T 具有性质 $\mathcal{X}$。(2) 如果 D 是整闭准局部整环，则 T 具有性质 $\mathcal{X}$。

证明。 注意，非准局部整环的每个拟局部极小上环，以及整闭准局部整环的极小上环，分别都是拟局部平坦上环 [30, 引理 3.1]和 [30, 引理 2.7], 。根据命题 2.1，断言成立。□

回顾一下，若整环 D 只有有限多个极大理想，则称其为半准局部环 D。

推论 2.4。 设 D 是一个整环，其商域为 K， $\{D_i \,|\, 1 \le i \le n\}$是 D 的一个有限半拟局部平坦上环集合，且 $T = \bigcap_{i=1}^{n} D_i$。假设$\mathcal{X}$ 是整环的一种在商扩张下保持稳定的性质。若D 是局部 $\mathcal{X}$-整环，则 T也是。

证明。 注意， T 中的每个非单位在某个 D_i 中也是非单位，因此 T 中的非单位集合恰好是 D_i的有限个收缩的极大理想的并。由于对于每个 $1 \le i \le n$， D_i 的极大理想个数有限，根据素理想避开引理， T 的每个极大理想都是某个 D_i 的极大理想的收缩。现在，假设 D 是一个局部 $\mathcal{X}$-整环，并令 T的一个极大理想为 $\mathfrak{m}$。那么存在 $1 \le i \le n$ 使得$\mathfrak{m} = M_i \cap T$，其中 $M_i \in$ Max(D_i)。由于 D_i 是 D的平坦上环，因此可得

对于任意 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(T)$， $T_{\mathfrak{m}} = T_{M_i \cap T} = (D_i)_{M_i}$ 具有性质 $\mathcal{X}$，因为根据命题 2.1(1)， D_i 是一个局部 $\mathcal{X}$-整环。因此我们证明，对于任意 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(T)$， $T_{\mathfrak{m}}$ 具有性质 $\mathcal{X}$。由此，根据命题 2.1(3)， T 是一个局部 $\mathcal{X}$-整环。□

接下来我们证明，当性质 $\mathcal{X}$ 在商扩张下保持稳定，且所考虑的整环不是拟局部整环时，局部 $\mathcal{X}$-整环这一性质在 Nagata 理想变换下得以保持。首先，对于整环 D （其商域为 K）的一个理想 I ，我们回顾***Nagata***（理想）变换 I 是 D 的上整环，定义如下:

$$T(I) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (D : I^n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{a \in K \mid aI^n \subseteq D\}.$$

为简便起见，若 $I = (a)$，则我们用 $T(a)$ 表示 $T((a))$。值得注意的是，对于 D 的每个非单位元 a ，有： $T(a) = D_S$，其中 $S = \{a^n \mid n \geq 1\}$ （参见 [7, 引理 2.2]）。我们还注意到，对于 D 的每个非单位元 a ， D 是 Pr¨ufer 整环或几乎 Dedekind 整环，当且仅当 $T(a)$ 也是如此（参见 [7, 命题 2.4 和 2.5]）。因此，下面我们将证明，对于任何在商扩张下保持稳定的整环性质，同样的结论也成立。

命题 2.5. 设 D 是一个非拟局部整环，且 $\mathcal{X}$ 是整环的一种性质。那么， D 是局部 $\mathcal{X}$-整环，当且仅当对于任意非单位元 $a \in D$， $T(a)$ 是局部 $\mathcal{X}$-整环。

证明。 假设 D 是局部 $\mathcal{X}$-整环。设 a 是 D的一个非单位元。那么 $T(a) = D_S$，其中 $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。因此，由推论 2.2 可知， $T(a)$是局部 $\mathcal{X}$-整环。反之，假设对于 D的每个非单位元 a ， $T(a)$都是局部 $\mathcal{X}$-整环。设 P 是 D的一个素理想。由于 D 不是拟局部整环， D 中存在一个不属于 P的非单位元。令 $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。那么 $T(a) = D_S$。由于 P与 S不相交，因此PD_S是 D_S的一个素理想。因此， $D_P = (D_S)_{PD_S}$具有性质 $\mathcal{X}$，这意味着 D 是局部 $\mathcal{X}$-整环。□

设 D 为一个整环，且 I 为 D的一个非零有限生成理想。则 $T(I) = \bigcap_{i=1}^{n} T(a_i)$，其中 a_i 是 I [7, 命题 1.4] 的生成元。因此，下一个结果可由推论 2.4 和命题 2.5 直接推出。

推论 2.6. 设 D 为一个非拟局部的半拟局部整环， I 为 D 的一个非零有限生成理想，且 $\mathcal{X}$ 为整环的一种性质。若 D 是局部 $\mathcal{X}$-整环，则 $T(I)$也如此。

对于给定的整环性质 $\mathcal{X}$ ，若整环 D 不是局部 $\mathcal{X}$ ，但其每个真上整环 D 都是局部 $\mathcal{X}$，则称其为极大局部 $\mathcal{X}$-整环。我们首先给出整环成为极大局部 $\mathcal{X}$的一个必要条件。

命题 2.7. 设 D 为一个整环，且 $\mathcal{X}$ 为整环的一种性质。若 D 是极大局部 $\mathcal{X}$-整环，则它是一个拟局部整环。

证明。 假设 D 是一个极大局部 $\mathcal{X}$-整环。那么 D 不是局部 $\mathcal{X}$-整环，因此存在 D 的一个素理想 P，使得 D_P 不具有性质$\mathcal{X}$。如果 D_P 是 D 的一个真上整环，那么 D_P 是一个局部 $\mathcal{X}$-整环，因为 D 是一个

极大局部 $\mathcal{X}$-整环。因此， D_P 具有性质 $\mathcal{X}$ ，因为它是一个拟局部整环，这就产生了矛盾。因此 $D_P = D$，这意味着 D 是一个拟局部整环。□

整环 D 是一个*Mori* 整环，当且仅当 D 满足 D 的 v-理想上的升链条件。注意，每个赋值 Mori 整环都是离散赋值环，因此我们可以轻易得出：极大局部 Mori 整环的任意真赋值整环上环都是离散赋值环。

命题 2.8. 设 D 是一个整闭整环。则下列断言成立。

(1) 若 D 是一个极大局部 *SM* 整环，则 D 的每个真商扩张都是近似克鲁尔整环。(2) 若 D 是一个极大局部 *Mori* 整环，则 D 要么是离散赋值环的交，要么是赋值整环。

证明。 **(1)** 设 D_S 是 D 的一个真商扩张，其中 S 是 D 的一个乘法子集。由于整闭性质在商扩张下保持，D_S 是一个整闭的局部 SM 整环。由于每个整闭 SM 整环都是克鲁尔整环， D_S 是一个近似克鲁尔整环。

(2) 由于 D 是整闭的，因此我们有$D = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$，其中 V_α 是赋值整环 [20, 定理 57]。若存在 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $D = V_\alpha$，则结论成立。此外，若对每个 $\alpha \in \Lambda$都有 $D \subsetneq V_\alpha$ ，则每个 V_α 都是离散赋值环。因此断言成立。□

设 D 是一个整环， S 是 D的一个乘法子集。令$N(S) = \{a \in D \setminus \{0\} \mid (a, s)_v = D$ 对所有 $s \in S\}$成立。则 $N(S)$是 D的一个饱和乘法子集。在这种情况下， $N(S)$称为 S的补集。

设 S 是 D的一个饱和乘法子集。回顾一下，若对每个 $a \in D \setminus \{0\}$，都存在 $s \in S$ 和 $t \in N(S)$使得 $a = st$，则称 S 为分裂集。现在，我们给出下一结果中使用的分裂集若干种推广的定义。

- 饱和乘法子集 S 是一个几乎分裂集，如果对于每个$a \in D \setminus \{0\}$，存在一个正整数 $n \in \mathbb{N}$、 $s \in S$ 以及 $t \in N(S)$，使得 $a^n = st$。

- 乘法子集 S 是一个 t-分裂集，如果对于每个 $a \in D \setminus \{0\}$，都有 $(a) = (IJ)_t$ ，其中存在 D的某些整理想 I 和 J ，使得对于所有$s \in S$， $I_t \cap (s) = sI_t$ ，并且 $J_t \cap S \neq \emptyset$。

上述定义的一个有用事实是，每个几乎分裂集都是一个t-分裂集 [8,命题 2.3]。

命题 2.9。 设 D 是一个整环，且 S 是 D的一个几乎分裂集。假设 $\mathcal{X}$ 是整环的一个性质。那么， D 是一个 t-局部$\mathcal{X}$-整环，当且仅当 D_S和 $D_{N(S)}$是 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。

证明。 假设 D_S 和 $D_{N(S)}$ 是 t-局部 $\mathcal{X}$-整环，并令 P 为 D 的一个素 t-理想。当 P 与 S [2, 不相交时，根据定理 4.9]， PD_S 是 D_S 的一个素 t-理想。因此 $D_P = (D_S)_{PD_S}$ 具有性质 $\mathcal{X}$。现在，假设 $P \cap S \neq \emptyset$。容易验证 $P \cap N(S) = \emptyset$。注意，根据命题 2.4]， $N(S)$ 是 D [3, 的一个几乎分裂集。因此再次由定理 4.9],

$PD_{N(S)}$ 是 $D_{N(S)}$的一个素 t-理想。这意味着 $D_P = (D_{N(S)})^{PD_{N(S)}}$ 具有性质 $\mathcal{X}$。因此，对于任意 $P \in t$-素谱(D)， D_P 都具有性质 $\mathcal{X}$，这表明 D 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。反向结论直接由推论 2.2(2) 得出。□

现在，我们研究多项式环及其一些商扩张的局部性质。设 D 为一个整环，并考虑以下三个 $D[X]$的乘法子集:

$$\begin{aligned} A &= \{f \in D[X] \mid f(0) = 1\}, \\ U &= \{f \in D[X] \mid f \text{ is monic}\}, \text{ and} \\ N &= \{f \in D[X] \mid c(f) = D\}, \end{aligned}$$

其中， $c(f)$ 是由 f 的系数在 D 中生成的理想。在这种情况下，$D[X]_A$ （分别是 $D[X]_U$ 和 $D[X]_N$）称为 D 的*Anderson* 环 （分别是*Serre* 猜想环 和 *Nagata* 环）。显然， $D[X]_A \subsetneq D[X]_U \subsetneq D[X]_N$ 和 $D[X]_U$ 是 $D[X]_A$ 对 U 的商环，而 $D[X]_N$ 是 $D[X]_U$ 对 N 的商环。研究上述环的局部性质时，有用的事实是，对于 $P \in$素谱(D)，$(D[X]_A)_{(P+XD[X])_A} = D_P[X]_{A_P}$ 和 $(D[X]_N)_{PD[X]_N} = D_P[X]_{N_P}$，其中 $A_P = \{f \in D_P[X] \mid f(0)$ 是 $D_P\}$ 中的单位，且 $N_P = \{f \in D_P[X] \mid c(f) = D_P\}$ [6, 引理 2.6(4)] 和 [32, 例 5.5.2(2)], 分别成立。

定理 2.10. 设 D 是一个整环， $\mathcal{X}$ 是整环的一种性质，该性质在商扩张和多项式扩张下保持不变。假设当任意整环的 *Nagata* 环具有性质 $\mathcal{X}$时，该整环就具有性质 $\mathcal{X}$ 。那么，以下断言等价。

(1) D 是局部 $\mathcal{X}$-整环。(2) $D[X]$ 是局部 $\mathcal{X}$-整环。(3) $D[X]_A$ 是局部 $\mathcal{X}$-整环。(4) $D[X]_U$ 是局部 $\mathcal{X}$-整环。(5) $D[X]_N$ 是局部 $\mathcal{X}$-整环。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\mathfrak{p}$ 是 $D[X]$ 的一个素理想，且设 $P = \mathfrak{p} \cap D$。则 $D[X]_{\mathfrak{p}} = D_P[X]_{\mathfrak{p}D_P[X]}$ [17, 引理 13.1]。由于 D_P具有性质 $\mathcal{X}$，根据我们的假设可得，$D[X]_{\mathfrak{p}}$ 也具有性质 $\mathcal{X}$ 。因此， $D[X]$ 是局部 $\mathcal{X}$-整环。

由推论 2.2(2) 可直接得出蕴含关系 (2) $\Rightarrow$(3) $\Rightarrow$(4)，因为 $D[X]_A$ （分别地，$D[X]_U$ 和 $D[X]_N$）是 $D[X]$ （分别地， $D[X]_A$ 和 $D[X]_U$）的商扩张。

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 M 是 D的一个极大理想。那么 $MD[X]_N$ 是一个极大理想 l $D[X]_N$的一个极大理想，因此 $(D[X]_N)_{MD[X]_N} = D_M[X]_{N_M}$具有性质 $\mathcal{X}$。根据我们的假设，可得 D_M具有性质 $\mathcal{X}$。因此， D是一个局部 $\mathcal{X}$整环 b y 命题 2.1(3)。□

回顾一下，如果对 D的任意伴随素理想 P， D_P 都是赋值整环，那么 D 就是一个*MZ*-赋值整环 。注意，MZ-赋值整环恰好就是局部本质整环。

下面的例子给出了整环满足定理 2.10 假设的性质 $\mathcal{X}$，以及 $\mathcal{X}$ 的性质;

后一种情况下，定理 2.10 的某个假设不成立，但定理 2.10 的等价条件仍然成立。

例 2.11。 (1) 设 $\mathcal{Y}$ 是属于以下某一类的整环的一个性质：PvMD、诺特整环、SM 整环和 Krull 整环。在 [29], 中，作者证明了 $\mathcal{Y}$ 满足定理 2.10 中该性质的条件$\mathcal{X}$。因此， D、 $D[X]$、 $D[X]_A$、 $D[X]_U$ 和 $D[X]_N$ 要么是局部$\mathcal{Y}$-整环，要么不是。

(2) 在 [16], 中，作者表明，本质整环一般而言在商扩张下并不保持稳定。然而，在 [24], 中，作者证明了D、 $D[X]$、 $D[X]_U$和 $D[X]_N$ 要么是 MZ-赋值整环，要么不是。因此， D、$D[X]$、 $D[X]_A$、 $D[X]_U$ 和 $D[X]_N$ 要么是局部本质整环，要么不是，因为局部本质整环在商扩张下是稳定的。

设 D 是一个整环。考虑集合 $N_v = \{f \in D[X] \mid c(f)_v = D\}$。那么 N_v 是 $D[X]$的一个乘法子集，因此我们得到环 $D[X]_{N_v}$。在这种情况下， $D[X]_{N_v}$ 称为 D 的 *t-Nagata* 环 。现在，我们可以研究多项式环、 Anderson 环、 Serre 猜想环以及（t-）Nagata 环的一些 t-局部性质。

定理 2.12。 设 D 是一个整环，且 $\mathcal{X}$ 是一种在商扩张下保持稳定的整环性质。假设一个离散赋值环具有性质 $\mathcal{X}$，并且一个整环具有性质 $\mathcal{X}$ 当且仅当其 *Nagata* 环具有性质 $\mathcal{X}$。那么以下断言等价。

(1) D 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。(2) $D[X]$ 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。(3) $D[X]_A$ 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。(4) $D[X]_U$ 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。(5) $D[X]_N$ 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。(6) $D[X]_{N_v}$ 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。(7) $D[X]_{N_v}$ 是一个局部 $\mathcal{X}$-整环。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 假设 D 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。设 $\mathfrak{m}$ 是 $D[X]$的一个极大 t-理想。则要么 $\mathfrak{m} \cap D = (0)$，要么对于某个 $M \in t\text{-Max}(D)$，有 $\mathfrak{m} = MD[X]$。若 $\mathfrak{m} \cap D = (0)$，则 $D[X]_{\mathfrak{m}}$ 是一个离散赋值环，因此根据我们的假设， $D[X]_{\mathfrak{m}}$ 具有性质 $\mathcal{X}$。另一方面，假设对于某个 $M \in t\text{-Max}(D)$，有 $\mathfrak{m} = MD[X]$ 。则 D_M具有性质 $\mathcal{X}$。因此， $D[X]_{MD[X]} = D_M[X]_{N_M}$也具有性质 $\mathcal{X}$。所以， $D[X]_{\mathfrak{m}}$ 具有性质 $\mathcal{X}$。根据命题 2.1， $D[X]$ 是一个 t-局部$\mathcal{X}$-整环。

蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) 成立，因为性质 $\mathcal{X}$在商扩张下保持不变；蕴含关系 (6) $\Rightarrow$ (7) 成立，因为 $D[X]_{N_v}$ 是一个 DW-整环。

(7) $\Rightarrow$ (1) 假设 $D[X]_{N_v}$ 是局部 $\mathcal{X}$-整环。令 M 为 D的一个极大t-理想。则 $MD[X]_{N_v}$是 $D[X]_{N_v}$的一个极大理想。因此， $D_M[X]_{N_M} = (D[X]_{N_v})_{MD[X]_{N_v}}$具有性质 $\mathcal{X}$，故根据我们的假设， D_M具有性质 $\mathcal{X}$。于是， D 是一个 t-局部 $\mathcal{X}$-整环。□

例 2.13。 容易证明，每个离散赋值环都是克鲁尔整环，并且 D 是克鲁尔整环，当且仅当 $D[X]_N$ 是克鲁尔整环 [1, 定理 5.2(1)]。因此

D、 $D[X]$、 $D[X]_A$、 $D[X]_U$、 $D[X]_N$ 和 $D[X]_{N_v}$ 要么是 t-局部克鲁尔整环，要么不是。此外， D 是 t-局部克鲁尔整环，当且仅当 $D[X]_{N_v}$ 是局部 Krull 整环。

3. Locally Krull-like domains in pullback constructions

本节将重点讨论某些局部性质向拉回的传递。为避免不必要的重复，我们先固定一些必要的记号。设 T 为整环， M为极大理想， $K = T/M$，且 D是 K的真子环，其商域为 k。考虑典范满同态 φ: $T \to K$。于是得到以下拉回图。

$$\begin{array}{ccc} R := \varphi^{-1}(D) & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\varphi} & K = T/M \end{array}$$

我们将其称为类型为（□）的拉回图。关于这一构造的理想结构及其环论性质的更多细节，读者可参阅[11, 12] 。对 M进行局部化后，我们还可得到以下拉回图（$\square_M$）。

$$\begin{array}{ccc} R_M & \longrightarrow & k \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_M & \longrightarrow & K \end{array}$$

注意，当 D 为域时，拉回图（$\square_M$）也可视为类型为（□）的拉回图。

在开始之前，我们先考察上述类型为（□）的拉回图中的一些有用事实。以下引理的陈述可见于 [5] 和 [12,第 1] 节，后文将频繁使用这些结论而不再特别说明。

引理 3.1. 对于类型为（□）的拉回图，以下断言成立。

(1) $M =(R:\ T)$且 $D \cong R/M$。*(2)* 若 P 是 D的素理想（分别地，极大理想），则 $\varphi^{-1}(P)$是 R的素理想（分别地，极大理想）。*(3)* 若 P 是 R 的素理想（分别地，极大理想），且 $M \subseteq P$，则存在 D 的唯一素理想（分别地，极大理想） Q，使得$P = \varphi^{-1}(Q)$。*(4)* 若 P 是 R 的素理想（分别地，极大理想），且不包含 M，则存在 T的唯一素理想（分别地，极大理想）Q，使得 $P = Q \cap R$。此时， $R_P = T_Q$。*(5)* $k = K$ 当且仅当 $R_M = T_M$，且当且仅当 T 是 R的平坦上环。

在 [23], 中，作者证明了，对于类型为（□）的拉回图， R 是局部诺特整环，当且仅当 T 是局部诺特整环、 D 是一个域且 $[K : k]$ 是有限的。受这一结果启发，自然会问，在 SM 整环的情形下是否也成立类似的结论。为回答这一问题，我们首先回顾以下预备引理。

引理 3.2 （[29, 定理 2.16]）。 对于类型为（□）的拉回图， R 是一个t-局部 *Mori* 整环，当且仅当 D 是一个域， T 是一个 t-局部 *Mori* 整环，并且T_M 是一个 *Mori* 整环。

引理 3.3 ([27, 定理 3.11])**.** 对于类型为 (□) 的拉回图， R 是 *SM* 整环，当且仅当 D 是域， T 是 *SM* 整环， T_M 是诺特的，并且$[K : k]$ 是有限的。

现在，我们可以研究局部 SM 概念向拉回的传递。

定理 3.4. 对于类型为 (□) 的拉回图， R 是局部 *SM* 整环，当且仅当 D 是域， T 是局部 *SM* 整环， T_M 是诺特整环，并且$[K : k]$ 是有限的。

证明。假设 R 是局部 SM 整环。那么 R 是一个 t-局部 Mori 整环，因此 D 是域，从而根据引理 3.2， M 是 R 的极大理想。因此，图（$\square_M$）可以视为类型为（□）的图。根据引理 3.3， T_M 是诺特整环，且 $[K : k]$ 是有限的，因为 R_M 是 SM 整环。现在，我们断言 T 是局部 SM 整环。若 T 是拟局部整环，则 $T = T_M$ 是诺特整环，因此 T 是局部 SM 整环。现在，假设 T 不是拟局部整环，并令 N 为 T 中一个不同于 M的极大理想。那么$P := N \cap R$是 R的一个不包含 M的素理想。因此， $T_N = R_P$是 SM 整环。由于 SM 性质在商扩张下保持稳定，根据命题 2.1(3)， T 是局部 SM 整环。反过来，假设后一个条件成立，并令 N 为 R的一个极大理想。若 N 不同于 M，则存在 T的一个极大理想 $\mathfrak{m}$ ，使得 $N = \mathfrak{m} \cap R$，因此 $R_N = T_{\mathfrak{m}}$是 SM 整环。另一方面，若 $N = M$，则图（$\square_M$）可以视为类型为（□）的图。根据引理 3.3，这意味着 R_N 是 SM 整环。由于 SM 性质在商扩张下保持稳定，根据命题 2.1(3)， R 是局部 SM 整环。□

值得指出的是，上述论证不仅证明了前一个定理；事实上，我们还有如下评注。

注 3.5. 考虑类型为 (□) 的拉回图。在定理 3.4 的证明中，我们证明了：若 R 是局部 SM 整环，则当 T 是拟局部整环时， T 是诺特整环，D 是域，且 $[K : k]$ 是有限的。因此，根据定理 4.6]， R 是诺特整环。这意味着，当 T 是拟局部整环时，局部 SM 整环与诺特整环（因而也与 SM 整环）的概念相同。因此，若要通过拉回构造一个不是 SM 整环的局部 SM 整环，就必须从条件“T 不是拟局部整环”出发。

此外，由于克鲁尔整环恰好就是 SM 整环和 PvMD 两者兼具的整环，我们得到如下评注。

注记3.6。 考虑类型为 (□) 的拉回图。设 R 是克鲁尔整环或局部 Krull 整环。则 R 既是局部 SM 整环，也是局部 PvMD。这由定理 3.4 和推论 3.3] 得出 $k = K$ 和 [21, 。这与 D 是 K 的真子环这一事实相矛盾。因此， R 不可能是克鲁尔整环或局部 Krull 整环。

局部 Krull 整环永远不可能作为拉回出现，这一事实自然引出了这样一个问题: 拉回能否成为克鲁尔整环的某种推广。因此，我们继续研究拉回何时能够成为克鲁尔整环的某种推广。为此，我们首先建立以下引理。

引理 3.7。 对于类型为 (□) 的拉回图，以下断言成立。

(1) R 是弱 *Krull* 整环，当且仅当 D 是域，T 是弱 *Krull* 整环，且 $\mathrm{ht}(M) = 1$。(2) R 是 *infra-Krull* 整环，当且仅当 D 是域，T 是 *infra-Krull* 整环，$\mathrm{ht}(M) = 1$，并且 $[K: k]$ 有限。(3) R 是 *Krull* 型整环，当且仅当 D 是半拟局部 *B´ezout* 整环，T 是 *Krull* 型整环，T_M 是赋值整环，且 $k = K$。

证明。 断言 (1) 和 (3) 分别见 [9, 定理 1] 和 [18, 命题 4.1], 。

(2) 假设 R 是 infra-Krull 整环。那么 R 既是强 Mori 整环，也是弱 Krull 整环。由断言 (1) 和引理 3.3，D 是域，ht(M) $= 1$，且 $[K: k]$ 有限。现在我们证明 T 是 infra-Krull 整环。由于 T 是弱 Krull 整环，只需证明对于任意 $Q \in X^1(T)$，T_Q 是诺特整环。因为 D 是域，拉回图 ($\square_M$) 可视为类型为 (□) 的图。现在注意到 R_M 是诺特整环，因此由引理 3.3 可知 T_M 是诺特整环。设 $Q \in X^1(T)$，其中 $Q \neq M$ 且 $P = Q \cap R$。则 $P \in X^1(R)$，且由 $T_Q = R_P$ [9, 推论 2]可知。因此 $T_Q = R_P$ 是诺特整环。所以 T 是 infra-Krull 整环。反过来，假设后一个条件成立。由断言 (1)，R 是弱 Krull 整环。令$P \in X^1(R)$。则存在 $Q \in X^1(T)$，使得 $P = Q \cap R$ [9, 由推论 2]成立。由于 T 是 infra-Krull 整环，T_Q 是诺特整环。若 $Q \neq M$，则$R_P = T_Q$ 是诺特整环，其中等式由 [9, 推论 2] 得出。另一方面，令 $Q = M$。则 $P = M$。在 M处局部化，可得到类型为 (□) 的拉回图 ($\square_M$)。因此由[12, 定理 4.6]可知，$R_P = R_M$ 是诺特整环。故 R 是 infra-Krull 整环。□

下一个结果是朝着我们确定拉回何时可以成为 Krull 类整环这一目标迈出的部分一步。

定理 3.8。 对于类型为 (□) 的拉回图，以下断言成立。

(1) R 是局部弱 *Krull* 整环，当且仅当 D 是一个域，T 是局部弱 *Krull* 整环，且 $\mathrm{ht}(M) = 1$。(2) R 是局部 *infra-Krull* 整环，当且仅当 D 是一个域，T 是局部 *infra-Krull* 整环，$\mathrm{ht}(M) = 1$，且 $[K: k]$ 有限。(3) R 是局部 *Krull* 型整环，当且仅当 D 是局部 *B´ézout* 整环，T 是局部 *Krull* 型整环，T_M 是赋值整环，且 $k = K$。

证明。 (1) 假设 R 是局部弱 Krull 整环。令 $\mathfrak{m}$ 为 D 的一个极大理想，并令 $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$。那么 $\mathfrak{p}$ 是包含 M 的 R 的一个极大理想。因此，我们可以得到如下的、类型为 (□) 的拉回图。

$$\begin{array}{ccc} R_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & D_{\mathfrak{m}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_M & \longrightarrow & K \end{array}$$

由于 $R_{\mathfrak{p}}$ 是弱 Krull 整环， $D_{\mathfrak{m}}$ 是域，ht(MT_M) $= 1$，且 T_M 是弱 Krull 整环，因此由引理 3.7(1)， D 是域，ht(M) $= 1$。现在我们断言， T 是局部弱 Krull 整环。令 Q 为 T 的一个极大理想，并令 $P := Q \cap R$。若 $Q \neq M$，则 P 是 R 的一个不包含 M 的素理想。因此， $T_Q = R_P$ 是弱 Krull 整环。由命题 2.1(3)， T 是局部弱 Krull 整环。反过来，假设后一个条件成立。令 P 为 R 的一个极大理想。若 P 不包含 M，则存在 T 的一个极大理想 Q，使得 $P = Q \cap R$ 且 $R_P = T_Q$。因此， R_P 是弱 Krull 整环。另一方面，若 $P = M$，则有类型为 (□) 的拉回图 (□$_M$)。由于 T_M 是弱 Krull 整环，ht(MT_M) $=$ht(M) $= 1$，且 k 是域，因此由引理 3.7(1)， R_M 是弱 Krull 整环。于是 R 是局部弱 Krull 整环。

(2) 假设 R 是局部 infra-Krull 整环。则 R 是局部弱 Krull 整环，因此 ht(M) $= 1$，并且根据断言 (1)， D 是一个域。由于 D 是一个域，拉回图（□$_M$）属于类型（□）。因此 T_M 是一个 infra-Krull 整环，并且根据引理 3.7(2)，$[K : k]$ 是有限的。设 T 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 满足 $\mathfrak{m} \neq M$和 $P = \mathfrak{m} \cap R$。那么 $T_{\mathfrak{m}} = R_P$ 是一个 infra-Krull 整环。因此 T 是一个局部 infra-Krull 整环。反过来，假设后一条件成立。设 R的极大理想为P。若 $P \neq M$，则存在 T的极大理想 Q，使得 $P = Q \cap R$ 且 $R_P = T_Q$。因此 R_P 是一个 infra-Krull 整环。另一方面，若 $P = M$，由于 D是一个域，拉回图（□$_M$）属于类型（□）。由于 T_M是一个 infra-Krull 整环，ht(MT_M) $=$ht(M) $= 1$， k是一个域且 $[K : k]$ 是有限的，所以 R_M 是一个 infra-Krull 整环。因此 R 是一个局部 infra-Krull 整环。

(3) 假设 R 是一个局部 Krull 型整环。设 D 的 $P = \varphi^{-1}(Q)$ 为非零素理想 Q。那么 P 是 R 的一个包含 M 的素理想。因此，我们得到如下类型为 (□) 的拉回图。

$$\begin{array}{ccc} R_P & \longrightarrow & D_Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_M & \longrightarrow & K \end{array}$$

由于 R_P 是 Krull 型整环，根据引理 3.7(3)， $k = K$， D_Q 是 B´ezout 整环，而 T_M 是赋值整环。这意味着 T 是 R 的平坦上整环，因此根据命题 2.1(1)， T 是局部 Krull 型整环。反过来，假设后一个条件成立。设 P 是 R 的一个素理想。若 $P = M$，则 $R_P = R_M = T_M$ 是 Krull 型整环，因为 $k = K$。若 P 包含 M，则存在一个素理想 Q，使得 $\varphi^{-1}(Q) = P$，因此我们可以得到以下关于 (□) 的拉回图。

$$\begin{array}{ccc} R_P & \longrightarrow & D_Q \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ T_M & \longrightarrow & K \end{array}$$

由于 D_Q 的商域等于 K， T_M 既是赋值整环，也是 Krull 型整环，而 D_Q 是拟局部 B´ezout 整环，根据引理 3.7(3)， R_P 是 Krull 型整环。另一方面，若 P 不包含 M，则存在 T 的一个素理想 Q，使得 $Q \cap R = P$ 且 $R_P = T_Q$。因此 R_P 是 Krull 型整环。于是，对于任意 $P \in \mathrm{Spec}(R)$， R_P 都是 Krull 型整环。因此， R 是局部 Krull 型整环。□

回顾一下，广义Krull整环（分别地，局部广义 Krull 整环）是 Krull 型整环（分别地，局部 Krull 型整环）。下面的评注给出了一种很好的方法，用于构造不是广义Krull整环（分别地，局部广义 Krull 整环）的 Krull 型整环（分别地，局部 Krull 型整环）。

评注 3.9. 考虑类型为 (□) 的拉回图。设 R 是广义Krull整环或局部广义 Krull 整环。那么， R 是局部弱 Krull 整环，因此根据定理 3.8， D 是一个域。相反，由于 R是局部 PvMD， $D = K$ [21, 推论 3.3]。这与 D 是 K的真子环这一事实矛盾。因此， R 不可能是广义Krull整环，也不可能是局部广义 Krull 整环。下面给出一个具体例子来说明这一点：设 $D \subseteq E$ 是一个整环扩张，则有 $R := D + XE[X]$是广义Krull整环，当且仅当 $D = E$ 是广义Krull整环（参见 [26, 推论 1.7(1)]）。这表明，如果 $D + XE[X]$ 是广义Krull整环，那么 $D + XE[X]$ 绝不可能由类型为 (□) 的拉回图得到。

另一方面，我们可以利用引理 3.7(3)和定理 3.8(3)构造一个 Krull 型整环和一个局部 Krull 型整环。

在 [10], El Baghdadi 定义了一种新型的 Krull 类整环，它不同于此前已知的四类 Krull 类整环（即弱 Krull 整环、基础 Krull 整环、广义克鲁尔整环和 Krull 型整环）。若一个整环 D 是强离散 PvMD（即</style}，对于每个极大 -理想，都是强离散赋值整环），且每个主理想只有有限个极小素理想，则称其为广义 *Krull* 整环。等价地， D是 PvMD，且对于 D的每个素 t-理想 P，都存在 D 的一个有限生成理想 J，使得 $P = \sqrt{J_t}$ 且 $P \neq (P^2)_t$。为避免混淆，我们将使用简称*GK*-整环 来指代 El Baghdadi 意义上的广义 Krull 整环。需要指出的是，（经典的）Gilmer 意义上的广义 Krull 整环与 GK-整环的定义并不互相蕴含。注意，GK-整环严格位于 Krull 整环与 PvMD 之间，并且 GK-整环在商扩张下保持稳定。

回顾一下， R 是 GK-整环，当且仅当 D 和 T 是 GK-整环， $K = k$和 T_M 是赋值整环 [10, 定理 4.3]。

定理 3.10. 对于类型为(□)的拉回图， R 是局部 *GK*-整环，当且仅当 D 和 T 是局部 *GK*-整环， T_M 是赋值整环且 $k = K$。

证明。 假设 R 是一个局部 GK-整环。那么 R 是一个局部 PvMD，因此$K = k$、 T_M 是赋值整环 [21, 推论 3.3]。这意味着 T 是 R的平坦上环，从而根据命题 2.1(1)， T 是一个局部 GK-整环。现在，我们断言 D 是一个局部 GK-整环。设 Q 是 D 的一个极大理想，并设$P := \varphi^{-1}(Q)$。那么 P 是 R 的一个包含 M的素理想。因此，我们得到如下类型为（□）的拉回图。

$$\begin{array}{ccc} R_P & \longrightarrow & D_Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_M & \longrightarrow & K \end{array}$$

因此，根据 [10, 定理 4.3]， D_Q 是一个 GK-整环。 consequently，依据命题 2.1(3)， D 是一个局部 GK-整环。反过来，假设后一个条件成立。设 P 是 R的一个极大理想。如果 $P = M$，那么 $R_P = T_M$ 是一个 GK-整环。现在，如果 $P \neq M$，则存在 T 的一个极大理想 Q ，使得 $Q \cap R = P$ 且$R_P = T_Q$，因此 R_P 是一个 GK-整环。所以，根据命题 2.1(3)， R 是一个局部 GK-整环。□

结合引理 3.7、定理 3.8 和 3.10，我们得到

推论 3.11. 设 K 为一个域，且 D 是 K 的一个(真) 子环，其商域为 k。假设 R 具有 $D + XK[X]$ 或 $D + XK[\![X]\!]$的形式。则有以下结论。

(1) 以下条件等价。*(i)* R 是一个（局部）弱 *Krull* 整环。*(ii)* D 是一个域。*(2)* 以下条件等价。*(i)* R 是一个（局部）诺特整环。*(ii)* R 是一个（局部）*SM* 整环。*(iii)* R 是一个（局部）*infra-Krull* 整环。*(iv)* D 是一个域，且 $[K : k]$ 有限。*(3)* 以下条件等价。*(i)* R 是一个 *Krull* 型整环。*(ii)* D 是一个半拟局部 *B´ezout* 整环，且 $k = K$。*(4)* 以下条件等价。*(i)* R 是一个局部 *Krull* 型整环。*(ii)* D 是一个局部 *B´ezout* 整环，且 $k = K$。*(5)* 以下条件等价。*(i)* R 是一个局部 *GK*-整环。*(ii)* D 是一个局部 *GK*-整环，且 $k = K$。

在本节末尾，我们考察一些构造出的整环示例：它们具有某一性质，却不满足另一性质。根据推论 3.11，我们得到

例 3.12。 (1) 由于 $[\mathbb{R}:\ \mathbb{Q}]=\infty$、 $\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X]$ 和 $\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[\![X]\!]$ 根据推论 3.11(1) 和 (2) 是（局部）弱 Krull 整环，但既不是（局部）infra-Krull 整环，也不是诺特整环。

（2）由于 $\mathbb{Z}$ 是一个有无穷多个极大理想的 B´ezout 整环，根据推论 3.11(3) 和 (4)， $\mathbb{Z}+X\mathbb{Q}[X]$和 $\mathbb{Z}+X\mathbb{Q}[\![X]\!]$ 是局部 Krull 型整环，但不是 Krull 型整环。

References

[1] D. D. Anderson、D. F. Anderson 和 R. Markanda, *The rings $R(X)$ and $R\langle X\rangle$*, 《代数学杂志》95 (1985) 96-115。[2] D. D. Anderson、D. F. Anderson 和 M. Zafrullah, *The ring $D+XD_S[X]$ and t-splittingsets*, 《交换代数》《阿拉伯科学与工程杂志》C辑主题专刊 26 (1) (2001) 3-16。[3] D. D. Anderson、T. Dumitrescu 和 M. Zafrullah, *Almost splitting sets and AGCD domains*, 《代数通讯》32 (2004) 147-158。[4] D. D. Anderson、J. Mott 和 M. Zafrullah, *Finite character representations for integraldomains*, 《意大利数学联合会通报》6 (1992) 613–630。[5] D. F. Anderson、A. Bouvier、D. E. Dobbs、M. Fontana 和 S. Kabbaj, *On Jaffard domains*, 《数学展望》6 (1988) 145-175。[6] H. Baek 和 J. W. Lim, *A special subring of the Nagata ring and the Serre's conjecture ring*, arXiv: 2408.08758[7] J. Brewer, *The ideal transform and overrings of an integral domain*, 《数学杂志》407 (1968) 301-306。[8] G. W. Chang, *Almost splitting sets in integral domains*, 《纯粹与应用代数学杂志》197 (2005) 279-292。[9] G. W. Chang, *Weakly Krull and related pullback domains*, 《纯粹与应用数学》11(2) (2004) 117-125。[10] S. El Baghdadi, *On a class of Prüfer v-multiplication domains*, 《代数通讯》30 (2002) 3723-3742。[11] M. Fontana 和 S. Gabelli, *On the class group and the local class group of a pullback*, 《代数学杂志》181(3) (1996) 803-835。[12] S. Gabelli 和 E. G. Houston, *Ideal theory in pullbacks*, *in: Non-Noetherian CommutativeRing Theory*, 《数学应用》520, Kluwer Academic, 多德雷赫特, 2000。[13] L. T. N. Giau 和 P. T. Toan, *On generalized Krull power series rings*, 《韩国数学会通报》55 (4) (2018) 1007–1012。[14] R. Gilmer, *Multiplicative ideal theory*, Dekker, 纽约, 1972。[15] R. Gilmer, *Integral domains which are almost Dedekind*, 《美国数学会会刊》15 (1964) 813-818。[16] W. Heinzer, *An essential integral domain with a non-essential localization*, 《加拿大数学杂志》33 (1981) 400-403。[17] J. A. Huckaba, *Commutative Rings with Zero Divisors*, Marcel Dekker, 1988。[18] S. Kabbaj 和 A. Mimouni, *t-Class semigroups of integral domains*, 《纯粹与应用数学杂志》612 (2007) 213-229。[19] B. G. Kang, *Prüfer v-multiplication domains and the ring $R[X]_{N_v}$*, 《代数学杂志》123 (1989) 151-170。[20] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, 芝加哥大学出版社, 芝加哥, 1974。[21] M. Khalis 和 D. Nour El Abidine, *On the class group of a pullback*, 纯粹与应用数学讲义185, Marcel Dekker, 纽约, 1997。[22]H. Kim, *Overrings of t-coprimely packed domains*, 《韩国数学会杂志》48 (1) (2011) 191–205。[23] H. Kim、O. Ouzzaouit 和 A. Tamoussit, *Noetherian-like properties and zero-dimensionalityin some extensions of rings*, 《非洲数学》34 (2023) 42。[24] H. Kim 和 A. Tamoussit, *Integral domains issued from associated primes*, 《代数通讯》50(2) (2022) 538-555。[25] D. J. Kwak 和 Y. S. Park, *On t-flat overrings*, 《中国数学杂志》23 (1995) 17-24。

[26] J. W. Lim, *Generalized Krull domains and the composite semigroup ring $D + E[\Gamma^*]$*, 《代数学杂志》357 (2012) 20-25。[27] A. Mimouni, *TW-domains and Strong Mori domains*, 《纯粹与应用代数学杂志》177 (2003) 79-93。[28] J. L. Mott 和 M. Zafrullah, *On Prüfer v-multiplication domains*, 《数学手稿》35 (1981) 1-26。[29] O. Ouzzaouit 和 A. Tamoussit, *On the transfer of some t-locally properties*, 《哈哲特佩数学与统计学杂志》50(3) (2021) 825-832。[30] I. J. Papick, *Local minimal overrings*, 《加拿大数学杂志》27 (1976) 788-792。[31] E. M. Pirtle, *Integral domains which are almost Krull*, 《广岛大学科学杂志》Ser. A-I Math. 32(2) (1968) 441-447。[32] F. G. Wang 和 H. Kim, *Foundations of Commutative Rings and Their Modules*, 代数与应用22, 施普林格, 新加坡, 2016。

(Baek) School of Mathematics, Kyungpook National University, Daegu 41566, Re-public of Korea*Email address*: htbaek5@gmail.com
(Lim) Department of Mathematics, College of Natural Sciences, Kyungpook National University, Daegu 41566, Republic of Korea*Email address*: jwlim@knu.ac.kr
(Ouzzaouit) Laboratory of Research in Sciences and Technique (LRST), The Higher School of Education and Training, Ibnou Zohr University, Agadir, Morocco *Email address*: o.ouzzaouit@uiz.ac.ma(Tamoussit) Department of Mathematics, The Regional Center for Education andTraining Professions Souss Massa, Inezgane, Moroccо*Email address*: a.tamoussit@crmefsm.ac.ma; tamoussit2009@gmail.com