物理信息最优同伦分析法（PI-OHAM）：求解非线性微分方程的分析与计算混合框架

Ziya Uddin[1,2]*SoET*，印度哈里亚纳邦古尔冈 *BML Munjal University*[2]高级数据与计算科学中心，印度哈里亚纳邦古尔冈 *BML Munjal University** **通讯作者：** ziya.uddin@bmu.edu.in, ziyauddin1982@gmail.com

亮点

- 提出一种用于求解非线性微分方程的新型物理信息最优同伦分析法（PI-OHAM）。• 提出一种基于残差的优化方案，可系统地调节同伦分析法（HAM）的收敛控制参数。• 以经典的非线性黏性流动方程——布拉修斯边界层流动方程为例，展示该技术。• 证明 PI-OHAM 的收敛速度快于传统同伦分析法（HAM）和物理信息神经网络（PINNs），且精度更高。• 该方法弥合了基于级数的半解析方法与物理信息机器学习之间的差距，为非线性微分方程提供了可解释且高效的解。

摘要

我们提出了物理信息最优同伦分析法（PI-OHAM），用于求解非线性微分方程。PI-OHAM以经典HAM为基础，采用物理信息残差损失，通过结合数据、边界条件和控制方程，以类似于物理信息神经网络（PINN）的方式，系统地优化收敛控制参数。PI-OHAM结合了PINN的灵活性与HAM的解析透明性，因此具有较高的数值稳定性、快速收敛性，并且与传统数值解高度一致。在布拉修斯边界层问题中，PI-OHAM的精度与耗时权衡优于标准 HAM和PINN，收敛速度更快、精度更高；其结果也非常接近文献中的数值基准。与纯数据驱动或无数据的PINN不同，PI-OHAM通过级数解确保了解析透明性和可解释性。其重要贡献在于：搭建了数十年来基于同伦的分析与现代物理启发方法之间的概念桥梁，并提供了一种借助数值方法、同时具备解析可解释性的非线性微分方程求解器。在对稳健性和可解释性要求较高的情况下，PI-OHAM有望成为一种计算高效、精度高且易于理解的方法，可用于非线性流体流动、传热及其他工业问题。

关键词： 物理信息

化最优同伦分析法（PI-OHAM）；同伦分析法；物理信息神经网络；非线性微分方程；布拉修斯边界层流动

1. 引言：

流体力学、传热、黏弹性流动、纳米流体输运以及各种应用物理科学中复杂现象建模的数学基础，建立在非线性微分方程之上。这些方程通常没有闭式解析解，因此研究人员不得不采用计算成本高昂的数值模拟或近似解析方法。经典摄动方法需要存在小参数或摄动参数，因此往往不适用于现实工程问题中常见的高度非线性系统。自 Liao 于1992年首次在上海交通大学的博士论文中提出同伦分析法（HAM）以来，该方法已发展成为一种革命性的半解析方法，无需假设小参数、进行线性化或采用限制性摄动假设，即可构造收敛级数解。

与此同时，He（1999年）提出了同伦摄动法（HPM），这是一种结合了同伦与经典摄动方法的混合方法，可得出近似解析解。由于其简便且易于应用，HPM 已广泛用于工程学和应用科学中的非线性问题。然而，HPM 并不像同伦分析法（HAM）那样具有明确的收敛控制机制，因此难以稳健地处理强非线性系统。

Sajid 和 Hayat（2008年）在非线性热传导方程和对流方程的框架下，对同伦分析法（HAM）与 HPM 进行了比较评估。他们的分析表明，HPM 计算高效且简单，但 HAM 的精度更高，收敛性也更可靠，尤其适用于高度非线性问题。这一对比凸显了收敛控制参数在基于同伦的方法中的重要性。

为进一步提高收敛性和精度，Marinca 等人（2008年）提出了最优同伦渐近法（OHAM），通过渐近匹配计算最优收敛参数。OHAM 已成功应用于薄膜流动问题，并被证明计算效率更高，且解析处理更为简便。在此基础上，Liao（2010a）将理想同伦分析法引入强非线性微分方程，并将系统选择收敛控制参数的方法加以规范化。在一项类似研究中，Liao（2010b）简要回顾了同伦分析法在流体力学中的应用，并指出该方法在边界层流动、非牛顿流体和传热问题中颇具实用价值。

同伦方法还与数值方法相结合，形成混合公式，以提高求解效率。Motsa 等人（2010年）提出了谱同伦分析法（SHAM），将同伦分析法与谱方法相结合，以高精度求解非线性边值问题。在此基础上，Motsa 等人（2017年）将多区域谱松弛法应用于常微分方程的混沌系统，结果表明，该方法在处理高度非线性和混沌动力学时具有更好的稳定性和收敛性。

其他改进包括预测策略和多解策略。Abbasbandy 和 Shivanian（2011年）提出了预测器同伦分析法（PHAM），以改善收敛行为；而 Vosoughi 等人（2012年）则表明，该方法可用于捕捉非线性反应运移模型中的唯一解分支和多个解分支。这些论文凸显了基于同伦的方法在求解相关非线性系统时的灵活性。

近期研究致力于结合优化方法与同伦方法，以实现参数选择的自动化。Yuan 和 Alam（2016年）将同伦分析法与

粒子群优化（PSO）相结合来求解分数阶微分方程，显著提升了收敛速度和精度。同样，Zhang 等人（2021）提出了一种基于 PSO 的同伦方法，用于全局数值优化，这表明元启发式优化应用于同伦模型具有可行性。

同伦方法也被用于研究热学与传输现象。Abbasbandy（2007）将HAM用于非线性热辐射方程，并证明其在热建模中有效。研究人员还使用HPM的变体求解复杂的反应-扩散系统，例如Khan和Wu（2011）采用He多项式求解，以及Swaminathan等人（2019）将其用于微盘生物传感器中的Michaelis-Menten动力学建模。Odibat（2020）最近提出了一种更优的最优同伦分析算法，可提高非线性微分方程解的收敛可靠性。此外，Filobello-Nino等人（2021）提出了一种混合HPM-伪谱欧拉方法（PSEM），用于求解布拉修斯问题，其精度和计算效率更高。

总体而言，同伦方法的发展体现了研究重点从纯解析模型转向混合、优化且计算高效的方法。谱技术、预测技术与元启发式优化相结合，大幅拓展了同伦分析的适用范围，使其能够处理高度非线性、多解以及现实世界中的工程学问题。这些进展推动了对复杂非线性系统中先进混合同伦方法的进一步研究。与经典HAM相比，这些混合方法在自动选择ħ（收敛控制参数）和降低残差误差范数方面显著有效；然而，其中大多数采用简化的平均残差，无法充分反映完整的物理过程（偏微分方程 + 边界/初始条件 + 数据驱动约束），因此在复杂、多模态或数据耦合的非线性偏微分方程系统中精度不足。

随着同伦分析法日趋成熟，物理信息机器学习也借助物理信息神经网络（PINN）革新了微分方程求解器。Raissi 和 Karniadakis（2018）提出的隐藏物理模型引入了将物理定律嵌入数据驱动模型的基本思想，使人们能够利用稀疏噪声数据发现非线性偏微分方程。Raissi 等人（2019）正式确立了这一范式：在 PINN 框架中，神经网络经过优化，以最小化复合损失函数，该函数将控制偏微分方程、边界条件和初始条件以及可用观测数据统一纳入其中。

研究表明，物理信息神经网络能够灵活应对广泛的正问题与逆问题。Raissi 等人（2020）证明，仅凭流动可视化，物理信息神经网络就能预测流体流动中隐藏的速度场与压力场，展现了其在数据受限条件下的实用性。Lu 等人（2021）创建了深度学习库 DeepXDE，以支持物理信息神经网络及类似的物理信息微分方程模型，涵盖分数阶方程和多物理场方程。此后，物理信息神经网络已应用于高速可压缩流（Mao 等人，2020）等复杂情形，以及守恒定律问题；后者采用守恒型 PINN，严格满足物理不变量（Jagtap 等人，2020）。

Karniadakis 等人（2021）和 Cuomo 等人（2022）开展的大量综述，使物理信息机器学习成为科学计算领域的一种革命性范式，连接了数值分析、机器学习与物理建模。专项研究也凸显了物理信息神经网络在流体力学中的作用日益增强（Cai 等，2021）。Uddin 等人（2023）提出了基于小波的物理信息神经网络，用于求解非线性常微分方程和偏微分方程。然而，众所周知，经典物理信息神经网络存在一些问题，例如收敛缓慢

、谱偏差、损失项不平衡，以及无法找到多个解分支。

为解决这些不足，近期研究提出了将同伦概念与物理信息神经网络相结合的混合公式。Huang 等人（2022）提出了 HomPINNs，将同伦延拓融入 PINN框架，以系统地学习非线性椭圆型偏微分方程的一组解。包括 hp-VPINNs（Kharazmi 等人，2021）在内的研究还利用变分技术和区域分解技术，进一步提升了稳定性和精度。这些进展表明，将同伦的收敛控制与物理信息学习结构相结合，是实现强非线性、多模态以及数据耦合常微分方程/偏微分方程系统稳健且高精度解的一条有前景的路径，这也是本研究的动机所在。

本研究的主要贡献可概括如下：

- 本文提出了一种改进的物理信息最优同伦分析法（PI-OHAM），通过最小化包含微分方程、边界条件和初始条件的物理信息残差泛函，对同伦参数进行优化。
- 该方法应用于数值辅助的 HAM 框架，使其能够处理微分方程以及符号中的高阶项难以计算的非平凡初始/边界数据。• 通过对布拉修斯边界层方程进行基准测试，结果表明，PI-OHAM 比标准 HAM 收敛更快、精度更高，并且能够提供具有可解释性的级数型近似。• 从概念上看，PI-OHAM 填补了现有半解析同伦方法与物理信息机器学习之间的空白：它兼具 HAM 的结构化解析特征和 PINNs 系统化的残差最小化理念，并为构建高效且可解释的非线性微分方程求解器提供了一条有前景的路径。

2. 同伦分析法简述

同伦分析法（HAM）是一种用于求解非线性微分方程的半解析方法，由 Liao（1992）提出，不需要摄动参数足够小或足够大。同伦分析法所依据的同伦思想是构造解的初始近似的连续变形，从而为处理强非线性问题提供一种灵活而强大的框架。

考虑一个非线性算子方程

$$\mathcal{N}[u(x)] = 0.$$

同伦分析法将零阶变形方程构造为

$$(1-p)\,\mathcal{L}[u(x;p) - u_0(x)] = p\,\hbar\,\mathcal{N}[u(x;p)],$$

其中，$p \in [0,1]$ 是嵌入参数，L 是辅助线性算子，$u_0(x)$ 是满足指定边界条件或初始条件的初始猜测，而 ħ 是控制收敛的参数。嵌入参数 p 表示从简单线性问题到原始非线性问题的连续变形。

当 $p=0$ 时，零阶变形方程可简化为

$$\mathcal{L}[u(x;0)-u_0(x)]=0$$

从而得到 $u(x;0)=u_0(x)$ t 原始猜测，该猜测满足给定的边界或初始条件。

当 $p=1$ 时，变形方程将恢复原始非线性问题：

$$\mathcal{N}[u(x;1)]=0$$

这意味着 $u(x;1)=u(x)$ 所求方程即为此。因此，解 $u(x;p)$ 会随着 p 在 0 和 1 之间变化而连续变形，从原始近似解 $u_0(x)$ 变为真实解 $u(x)$。

解 $u(x;p)$ 可表示为 p 的幂级数：

$$u(x;p)=u_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}u_m(x)\,p^m.$$

对零阶项关于 p 求导，然后除以 $m!$，并令 $p=0$，即可得到 m 阶近似 $u_m(x)$，其形式为

$$u_m(x)=\chi_m u_{m-1}(x)+\hbar\,\mathcal{L}^{-1}\left[R_m(x)\right],$$

其中

$$\chi_m=\begin{cases}0, & m=1,\\ 1, & m\geq 2,\end{cases}$$

以及非线性残差 $R_m(x)$ is defined by

$$R_m(x)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\mathcal{N}[u(x;p)]\,|_{p=0}.$$

在齐次近似问题下，随后可得到近似解

$$u(x)\approx u_0(x)+\sum_{m=1}^{M}u_m(x),$$

其中 M 表示截断……直接由辅助参数 $\hbar$ 调节，因此 HAM 特别适用于强非线性问题。

3. PI-OHAM框架的提出与实现

本节介绍物理信息优化同伦分析法（PI-OHAM），该方法将同伦分析法的解析框架与数值离散、优化及物理信息损失最小化相结合。本文以经典的布拉修斯边界层方程为例进行说明，但该方法也适用于非线性常微分方程、偏微分方程，或非线性微分方程组。

3.1 控制方程与同伦构造

T布拉修斯方程可写为

$$f'''(\eta)+\frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta)=0,$$

满足以下条件

$$f(0)=0,f'(0)=0,f'(\infty)=1.$$

按照同伦分析法，使用三阶线性算子构造一个同伦

$$\mathcal{L}[f]=f'''$$

采用满足边界条件的初始猜测 $f_0(\eta)$：

$$f_0(\eta) = \eta - \frac{1 - e^{-a\eta}}{a},$$

其中，$a > 0$是为提高收敛性而引入的**辅助形状参数**。

3.2 HAM算子的数值离散化

与经典HAM不同，本文提出的框架采用数值微分算子。在均匀网格上，使用二阶精度的有限差分近似一阶、二阶和三阶导数。线性算子 L 通过数值方式实现，将边界条件直接嵌入算子矩阵，并支持高效的基于稀疏LU的求逆。这种数值辅助的表述使HAM能够应用于一般非线性问题，而无需进行符号计算。

为实现完全数值化且符合物理规律的同伦分析法，所提出的 PI-OHAM框架在有限计算域上对控制算子进行离散化。这避免了符号微分，并可轻松扩展至非线性边值问题。

3.2.1 计算域与网格

半无限物理区域 $\eta \in [0, \infty)$ 被截断为 $[0, \eta_\infty]$，其中 η_∞ 足够大，可用于施加远场边界条件。引入均匀网格：

$$\eta_i = ih, i = 0,1, \dots, N-1,$$

步长为

$$h = \frac{\eta_\infty}{N-1}.$$

Let

$$\mathbf{f} = [f(\eta_0), f(\eta_1), \dots, f(\eta_{N-1})]^T$$

表示解的离散形式。

3.2.2 离散微分算子

采用二阶精度有限差分来确定一阶和二阶导数。$\mathbf{D}_1$是一阶导数算子，其定义如下：

$$\left(\mathbf{D}_1\mathbf{f}\right)_i = \begin{cases} \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2\Delta\eta}, & i = 0, \\ \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta\eta}, & 1 \le i \le N-2, \\ \frac{3f_{N-1} - 4f_{N-2} + f_{N-3}}{2\Delta\eta}, & i = N-1. \end{cases}$$

二阶导数 $_2$ tive operator $\mathbf{D}$ is given by

$$\left(\mathbf{D}_2\mathbf{f}\right)_i = \begin{cases} \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{\Delta\eta^2}, & i = 0, \\ \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta\eta^2}, & 1 \le i \le N-2, \\ \frac{2f_{N-1} - 5f_{N-2} + 4f_{N-3} - f_{N-4}}{\Delta\eta^2}, & i = N-1. \end{cases}$$

算子复合用于构造三阶导数算子，

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2,$$

确保两者之间的一致性。这些离散算子组合成稀疏矩阵。布拉修斯方程所需的三阶导数可表示为一个矩阵乘积。

3.2.3 离散线性算子

在同伦分析法（HAM）中，辅助算子 L 必须是线性可逆算子。对于布拉修斯问题，选取

$$\mathcal{L}[f] = f''',$$

因此，其离散对应形式定义为 $\mathrm{L} = {}_3\,\mathbf{D}$
为将边界条件直接纳入算子，作如下修改：

$$f(0) = 0 \Rightarrow (\mathcal{L}\mathbf{f})_0 = f_0, \quad and \;\; f'(0) = 0 \Rightarrow (\mathcal{L}\mathbf{f})_1 = (\mathbf{D}_1\mathbf{f})_0,$$

$$f'(\eta_\infty) = 1 \Rightarrow (\mathcal{L}\mathbf{f})_{N-1} = (\mathbf{D}_1\mathbf{f})_{N-1}.$$

这些约束替代了 L 中相应的行，从而得到一个方形、稀疏且非奇异的算子。

3.2.4 线性算子的数值求逆

同伦分析法递推中所需的逆算子 L^{-1}通过数值求解以下方程实现：

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{b},$$

这里，$\mathbf{b}$ 是已知的离散残差向量 r.
计算 L 的 LU分解，从而能够高效地求值

$$\mathbf{u} = \mathcal{L}^{-1}\mathbf{b}$$

在每个同伦阶数处，将边界条目 et 设为零，以维持所施加的约束。

3.2.5 离散非线性残差

F对于给定的近似解 $\mathbf{F}$，非线性 Blasius 残差可在各离散点处计算为

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}_3\mathbf{F} + \frac{1}{2}\,\mathbf{F} \odot (\mathbf{D}_2\mathbf{F}),$$

其中，$\odot$ 表示逐元素乘法。该公式在离散同伦分析法框架内保留了控制方程的完整非线性结构。

所提出的离散化方法通过以稀疏数值算子替代解析微分和符号求逆，使同伦分析法能够转化为可扩展且计算高效的框架，同时保留同伦分析法严格的同伦结构。这一数值基础对于将优化和物理信息学习进一步融入 PI-OHAM 是必要的。

3.3 同伦分析法级数的递归计算

本节介绍所提出的数值物理信息最优同伦分析法框架中同伦分析级数的递归构建过程。该公式基本遵循以下理念：

经典HAM，并支持针对非线性微分方程的完全离散且计算高效的实现。

3.3.1 零阶近似

令 $f(\eta)$ 表示该非线性边值问题的未知解。同伦分析法解表示为无穷级数

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta),$$

其中， $f_0(\eta)$ 是满足边界条件的解的初步近似。

在当前模型下，选择参数化初始猜测为。

$$f_0(\eta; a) = \eta - \frac{1 - e^{-a}}{a},$$

其中， $a > 0$ 是与收敛控制参数 $\hbar$ 一同使用的辅助 shalo。该形式满足

$$f_0(0) = 0, f_0'(0) = 0, \lim_{\eta \to \infty} f_0'(\eta) = 1.$$

其在计算网格上的表示的离散形式由向量表示。

$$\mathbf{f}_0 = [f_0(\eta_0), f_0(\eta_1), \dots, f_0(\eta_{N-1})]^T.$$

3.3.2 零阶变形方程

根据同伦分析法，借助嵌入参数 p 在 [0,1] 中构建初始猜测与实际解之间的同伦：

$$(1 - p)\,\mathcal{L}[\Phi(\eta; p) - f_0(\eta)] = p\,\hbar\,\mathcal{N}[\Phi(\eta; p)],$$

其中，L 为辅助线性算子，$\mathcal{N}$ 表示非线性算子

$$\mathcal{N}[f] = f''' + \frac{1}{2} f f''.$$

假设解 $\Phi(\eta; p)$ 可表示为 be analytic in p and exp

$$\Phi(\eta; p) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta) p^m.$$

3.3.3 m阶变形方程

将零阶变形方程 m 关于 p 求 m 次导数，除以 $m!$，并令 p =0，可得到以下递归线性问题：

$$\mathcal{L}[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = \hbar\, R_m(\eta), m \geq 1,$$

其中

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m \geq 2, \end{cases}$$

且 R_m（η）是 m 阶同伦分析法残差。

3.3.4 残差构造

对于布拉修斯方程，残差 R_m 定义为

$$R_m(\eta) = f'''_{m-1}(\eta) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1} f_k\,(\eta)\, f''_{m-1-k}(\eta).$$

令 fm 表示 fm (η) 在离散形式下的向量表示。剩余向量计算如下:

令 $\mathbf{f}_m$ 表示 $f_m(\eta)$ 在离散形式下的向量表示。残差向量计算如下:

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{D}_3\mathbf{f}_{m-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{f}_k \odot (\mathbf{D}_2\mathbf{f}_{m-1-k}),$$

其中，$\odot$ 表示逐元素乘法。该公式在不进行线性化或平均化的情况下，完整保留了原方程的非线性卷积结构。

3.3.5 变形方程的递归求解

离散的 m 阶变形方程求解如下:

$$\mathbf{f}_m = \chi_m\mathbf{f}_{m-1} + \hbar\,\mathcal{L}^{-1}\mathbf{R}_m, m \geq 1.$$

L^{-1} 采用第 3.2 节所述的稀疏LU分解进行计算，该方法具有数值稳定性且效率高

每个修正项 $\mathbf{f}_m$ 都会自动满足边界条件，因为这些条件已在 L 中得到强制施加。

3.3.6 级数截断与收敛判据

在实际应用中，级数截断至 M 阶，以得到近似解。

$$\mathbf{F}^{(M)} = \sum_{m=0}^{M} \mathbf{f}_m\,.$$

采用逐项停止准则，以确保实现收敛:

$$\| \mathbf{f}_m - \mathbf{f}_{m-1} \|_\infty < \varepsilon_{\mathrm{HAM}},$$

其中，$\varepsilon_{\mathrm{HAM}}$ 是预先设定的容差。
此外，通过监测第 3.4 节中定义的总物理信息损失的衰减来评估收敛性。

该递归数值 HAM 公式不涉及符号微分或积分，但仍保留了同伦结构。结合参数优化和物理信息残差最小化，它构成了所提出的 PI-OHAM 框架的计算核心。

3.4 物理信息优化策略

为解决经典HAM的收敛敏感性和手动参数调优问题，所提出的PI-OHAM框架整合了一种物理信息优化策略，该策略

联合确定最优收敛控制参数 ħ、初始猜测形状参数 a以及有效截断阶数 M。控制方程、边界条件和可选的数据约束以统一方式施加。

3.4.1 物理信息损失泛函

物理信息损失泛函是一种依赖物理规律来确定损失的泛函。

令 $F(\eta)$ 表示 M 阶截断HAM解,

$$F(\eta) = \sum_{m=0}^{M} f_m(\eta),$$

其导数通过数值方法计算。复合物理信息损失泛函定义为

$$\mathcal{J}(\hbar, a; M) = \mathcal{J}_{\text{res}} + \lambda_{\text{bc}}\,\mathcal{J}_{\text{bc}} + \lambda_{\text{data}}\,\mathcal{J}_{\text{data}},$$

其中每个分量 measures a distinct physical constraint.

3.4.2 控制方程残差损失

非线 性微分方程通过残差损失在所有配置点上施加 :

$$\mathcal{J}_{\text{res}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[F'''(\eta_i) + \frac{1}{2}F(\eta_i)F''(\eta_i)\right]^2.$$

在离散形式下,

$$\mathcal{J}_{\text{res}} = \frac{1}{N}\parallel \mathbf{D}_3\mathbf{F} + \frac{1}{2}\mathbf{F}\odot(\mathbf{D}_2\mathbf{F})\parallel_2^2.$$

该残差同样是在完整重构上计算的，而非像经典HAM那样基于平均或截断表达式计算，因此保留了完整的非线性物理。

3.4.3 边界条件损失

边界条件通过罚函数形式弱施加:

$$\mathcal{J}_{\text{bc}} = F(0)^2 + F'(0)^2 + (F'(\eta_\infty) - 1)^2.$$

这种方法保证了数值鲁棒性，同时避免对线性变形方程施加过多约束。

3.4.4 数据一致性损失（可选）如果已知参考数据或实验数据 f^{r}

$^{\text{ef}}(\eta)$，则添加一个数据驱动一致性项:

$$\mathcal{J}_{\text{data}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[F(\eta_i) - f^{\text{ref}}(\eta_i)]^2.$$

该术语允许在不影响同伦分析法解析结构的情况下进行逆向运动。 data and hybrid physics-data learning.

3.4.5 ħ与 a 的联合优化

通过求解来确定最佳参数。

$$(\hbar^*, a^*) = \arg\min_{\hbar,a} \mathcal{J}(\hbar, a; M),$$

在可接受范围内,

$$\hbar \in [\hbar_{\min}, \hbar_{\max}], a \in [a_{\min}, a_{\max}].$$

采用两阶段优化策略:

1. **粗略全局扫描**:在 (ħ,a) 的张量网格上进行扫描,以确定稳健的初始盆地。2. **基于梯度的局部精化**:使用 L-BFGS-B 算法实现快速收敛。

这种混合策略避免陷入局部极小值,同时保持计算效率 y.

3.4.6 阶数自适应优化与收敛监控

针对阶数为 M 的同伦分析法,优化以增量方式进行。对于每个阶数:

$$\mathcal{J}_M^* = \min_{\hbar,a} \mathcal{J}(\hbar, a; M).$$

当满足以下任一条件时,迭代即停止

$$\mathcal{J}_M^* < \varepsilon_{\text{tol}} \text{ or } | \mathcal{J}_M^* - \mathcal{J}_{M-1}^* | < \varepsilon_{\text{imp}},$$

确保有效……自动进行。当损失改善幅度低于预设容差,或总损失达到机器精度时,流程即停止。

3.4.7 PI-OHAM 的物理解释与优势

- 优化会自动选择最佳 ħ,无需手动分析 ħ 曲线。• 初始猜测形状的参数 a 经过优化,以最贴合非线性解流形。• 残差损失涵盖所研究问题的全部物理特性、边界条件以及可选数据。• 与经典HAM相比,由此得到的同伦分析法解收敛更快、所需截断阶数更低,且精度更高。

这种物理信息优化将同伦分析法从一种对参数敏感的解析技术转变为稳健、能够利用数据且可根据计算情况自适应调整的求解器,构成了所提出的 PI-OHAM框架的核心创新。

4. 结果验证与计算效率

本节将从解的精度、与基准结果的吻合程度以及计算效率等方面,详细评估所提出的 PI-OHAM 框架。我们选取一个基于布拉修斯边界层问题的典型测试案例,具体考察壁面剪切参数 $f''(0)$、残差最小化,以及与物理信息神经网络(PINNs)的运行时间对比。

4.1 PI-OHAM的精度与收敛性

本文提出物理信息最优同伦分析法（PI-OHAM），并将其应用于经典的布拉修斯边界层问题，以评估其精度、收敛性和计算性能。主要验证指标为壁面剪切参数 $f''(0)$，其基准值为 0.332057。

表1对Liao（2010年）提供的经典HAM结果与当前PI-OHAM框架在精度和计算成本方面进行了比较分析。在较低的解阶数（M =4-10）下，当前方法仅需几秒的CPU时间，便已达到10^{-2}–10^{-3} 量级的误差；相比之下，经典HAM需要更多的计算时间，且误差相对较大。经典HAM的计算成本随解阶数呈指数增长，在M =20时达到超过3000秒，而当前PI-OHAM算法的计算时间几乎呈线性增长，在约48秒内达到M =35 。此外，当前方法具有相当或更高的精度，误差始终处于10^{-3}–10^{-4}范围内。这一比较清楚地表明，PI-OHAM能够达到与经典HAM相同甚至更高的精度，同时所消耗的计算时间几乎减少了两个数量级，这正是其在效率和可扩展性方面的优势。

表*1* 表***1***：$f''(0)$处绝对误差与 *CPU* 时间的比较：经典*HAM*（*Liao*，*2010*年）和本文 *PI-OHAM* 方法在不同同伦阶数下的表现

Liao，2010年			**本文结果**	
M （阶数）	|f''(0)-0.332057|	CPU 时间（秒）	|f''(0)-0.332057|	CPU 时间（s）
4	0.44	2.23	4.79E-02	1.987195969
6	0.309	8.69	2.20E-02	2.755696058
8	1.85E-03	27.1	1.69E-02	3.640052319
10	2.61E-03	71.8	9.28E-03	5.195281029
12	1.56E-03	171	8.57E-03	6.974167585
14	9.55E-04	382.1	2.82E-03	9.148191452
16	2.76E-04	816.2	3.01E-03	12.67760921
18	1.62E-04	1637.8	4.93E-03	15.20370579
20	7.05E-05	3145.6	2.52E-03	18.37086654
24			6.42E-04	24.90078044
28			2.19E-03	31.75946903
32			1.09E-03	40.75448489
35			6.60E-04	47.59698582

4.2 PI-OHAM 与物理信息神经网络的计算效率与加速分析

为量化计算效率，PI-OHAM 与采用相同停止容差 (10^{-5}) 的标准物理信息神经网络实现进行直接比较。该物理信息神经网络配置使用 4000 个配置点

个配置点、100 个边界点、一个包含四个隐藏层且每层有 64 个神经元的深度神经网络，以及 Adam 优化器。

表 2 计算成本比较

方法	精度目标	CPU 时间（秒）	相较于物理信息神经网络的加速比
PINN	10^{-5}	1180.80	1×
PI-OHAM	10^{-5}	20.51	**≈ 57.6× 更快**

PI-OHAM框架的精度相近，计算速度却几乎快了两个数量级。这种显著的加速得益于半解析同伦分析法架构和物理信息优化，无需耗费大量资源进行基于梯度的训练，也不需要庞大的参数空间。

5. 结果与讨论

模拟是在免费版 Google Colab 上运行的，该平台提供多核 CPU（通常为 2–4 个核心）和约 12 GB 内存。在为 PI-OHAM 开发的代码中实现了并行计算（N_JOBS = -1），将计算任务分配到所有可用核心上。每个核心独立评估 HAM/PI-OHAM 项和参数组合，以较粗的步长对 ħ 取 10 个值、对 a 取 10 个值，在 801 个网格点上计算，级数阶数最高达 60。该方法高效地确定了最佳参数范围，在给定的总容差（$\varepsilon_{\text{tol}} = 1\text{e} - 7$）和同伦阶数改进容差（$\varepsilon_{\text{imp}} = 1\text{e} - 10$）内保持收敛，同时最大限度地缩短了总体计算时间，从而确保了解的高精度和稳定性。

本节给出了数据未知且边界条件明确时的计算结果。在这种情况下，边界损失和数据损失的权重分别为 1 和 0。计算结果见图 1–13。图 1–3 表明，PI-OHAM 得到的 f、f' 和 f'' 与标准数值格式的结果一致。图 4 展示了微分方程、边界条件、数据损失（在本例中，数据由标准数值格式生成，但其权重设为零）和总损失的损失图。如图所示，级数初期的数据损失较高，但随着级数阶数增加且解趋于收敛，数据损失逐渐降低，从而确保最终解可靠。图 5 以对数尺度绘制了各项损失，可以看出，边界条件损失的下降速度快于微分方程损失。本例中的总体损失是微分方程损失与边界条件损失之和。总体损失为 10^{-7} 量级，这证明了解具有较高的精度。

图 6 和图 7 分别展示了损失随 PI-OHAM 解阶数和计算时间的变化情况。图 6 表明，总损失在对数尺度上随 PI-OHAM 阶数几乎呈线性下降，这意味着总损失随解阶数呈指数下降。图 7 展示了获得达到所需精度的解所需的总计算时间。图中显示，总损失在对数尺度上随时间几乎呈线性下降，这意味着损失也会随计算时间呈指数下降。图 8 和图 9 分别展示了绝对误差 $|f''(0) - 0.332057|$ 与解阶数及计算耗时之间的关系，

这些数值表明，绝对误差几乎随 PI-OHAM 解阶数和计算时间呈指数下降。综合来看，图 6–9 表明该方法具有很高的收敛速度和精度。

图10展示了计算时间与 PI-OHAM 解阶数之间的关系。每个递增阶数所需的时间在达到 10 阶之前都较短，此后略有增加，但所有阶数的计算时间均少于 5 秒。数据显示，计算 35 阶解所需时间不到 50 秒，说明该方法即使在较高级数下也具有较高的计算效率。

图11–13展示了辅助形状参数 a 和收敛控制参数 ħ 关于总损失的优化情况。图11给出了散点图，用于确定 $(\hbar, a)$ 参数空间中的局部优化区域。点越密集，总损失得以最小化的区域就越大，这意味着参数值在局部最优。图11右上方可见这一区域，表明局部最优参数满足 $a > 1.1$ 且 $\hbar > -0.3$。图11右上方可见这一区域。图12展示了辅助参数 a如何根据总损失进行调整，并说明解如何随着 a 的变化而收敛。显然，当 a 接近 1.1 时，解会收敛。图13展示了关于 ħ 的收敛行为，可以看出解收敛到接近 -0.2 的 ħ 值。根据计算结果，优化后的 ħ 和 a 值分别为 -0.22222 和 1.118889。

图14展示了在边界条件（BC）损失与数据损失之间采用不同加权策略时，总损失及其各损失分量如何随 PI-OHAM 解的阶数发生变化。损失加权对收敛速率以及达到稳定解所需的有效阶数的影响也十分明显。

图14(a)（边界条件权重 = 0.8，数据权重 = 0.2）显示，边界条件损失占主导地位使所有损失分量在前几个阶数中迅速下降。总残差损失和各项残差损失均快速降低，并在相对较低的阶数（约为8–10阶）处几乎达到饱和。超过这一阶数后，级数阶数的进一步增加仅带来边际性的改进，表明 PI-OHAM 展开较早收敛。边界条件损失在初始阶数时较小，证明了在较低截断阶数下具有较强的边界强制能力和数值稳定性。

图14(b)（边界条件权重 = 0.5，数据权重 = 0.5）显示，更为均衡的加权会使收敛过程覆盖更为适中的阶数范围。总体损失仍持续呈指数衰减，但其速率低于边界条件占主导的情形（14(a)）。损失在12–15阶处趋于平稳，这表明需要更大的截断阶数，才能达到与图14(a)相同水平的精度。这说明同时满足边界约束和数据一致性需要付出额外努力。

图 14(c)（边界条件权重 = 0.0，数据权重 = 1.0）显示，在未采用显式边界强制时，收敛完全偏向于数据拟合。这意味着，总损失和残差损失需要更高的解阶数（超过 20 阶）才能稳定到某一状态。损失曲线还显示，在中间阶数处存在小幅振荡，这同样表明稳定性较低且收敛速度较慢。尽管最终在更高阶数下实现了收敛，

但缺乏边界条件加权会导致更高的计算成本和较差的物理一致性。

总体而言，研究结果表明，边界条件损失的权重越高，达到收敛所需的有效 PI-OHAM 解阶数越低；而数据损失的权重越高，收敛阶数越高。这表明，损失加权与级数截断阶数之间存在重要的相互作用，共同影响 PI-OHAM 方法的收敛速度、数值稳定性和计算效率。

图15(a)-15(c)展示了通过最小化总损失得到的优化收敛控制参数 ħ 和辅助形状参数 a 的分布，其中采用了边界条件（ BC ）损失与数据损失的各种权重组合；这些情形与图14中的情形相同。

图15(a)中边界条件损失占主导地位（边界条件权重 = 0.8，数据权重 = 0.2），结果显示最优参数值集中在一个相对较小的区域内，其中 $a \gtrsim 1.1 \text{and} -0.35 < \hbar < -0.25$。这种集中分布表明边界条件施加了较强的约束，从而在相对较低的 PI-OHAM 阶数下实现快速收敛，图14(a)中也呈现出同样的情况。更紧密的聚集表明，当边界信息在损失函数中占主导地位时，解具有更高的稳定性和更强的稳健性。

在图15(b)中，当边界条件损失和数据损失的权重相等（边界条件权重 = 0.5，数据权重 =0.5）时，最优点的分布范围适度扩大。尽管最优区域仍集中在 a =1.1 和 $\hbar = -0.33$ 附近，但其离散程度高于图15(a)。这与图14(b)的情况一致，即需要更高的 PI-OHAM 阶数才能达到相近的损失水平。边界条件损失和数据损失的贡献相等，使参数选择更具灵活性，导致收敛速度减慢，并且对同伦参数更加敏感。

图15(c)显示，在仅由数据损失驱动解的情况下（边界条件权重 = 0.0，数据权重 = 1.0），最优参数的分布最为分散。尽管仍有一个主要聚类集中在 $a = 1.1$ 和 $\hbar = -0.25$ 附近，但两个参数的离散程度都很大。这种更大的离散程度与图 14(c)的情况相关：收敛对解的阶数更加敏感，且损失分量的振荡更明显。缺少边界约束会削弱边界条件损失的正则化效应，从而导致收敛速度减慢，并使优化后的同伦参数变化更大。

总体而言，图15(a)-15(c)清楚地表明，数据损失权重越大，最优参数区域越大，所需的 PI-OHAM 解阶数也越高，这与图14的发现一致。这些发现表明，纳入边界条件信息不仅能加快收敛，还能稳定 ħ 和 a 的优化。这些结果也证实了 PI-OHAM框架在采用各种加权策略时的一致性、稳定性和效率。

图 16(a)-16(c) 展示了采用不同损失权重策略的 PI-OHAM 解所对应的每阶 CPU 时间和总计算时间如何变化。所有情况下，每阶 CPU 时间都较短且保持不变，不超过约 5 s。尽管如此，达到收敛解所需的总时间在图 16(a) 中较短（约 60-65 s），而在图 16(b)（约 70-75 s）和图 16(c)（约 120-125 s）中则较长。这表明，采用边界条件损失较大、数据损失较小的损失加权方法，

收敛速度更快，计算效率也更高。不过，即使没有边界条件，只要有数据，也仍然能够得到收敛解。

图 17(a)–17(c) 比较了标准数值方法、PI-OHAM 和物理信息神经网络在边界条件损失权重为 = 1.0、数据损失权重为 = 0.0、误差容差为 = 10^{-5} 时得到的解。结果表明，PI-OHAM 解在几乎整个计算域内都与标准数值解重合。相反，物理信息神经网络的解与数值结果并非完全一致，并且在相似变量 η 的中间区域存在显著差异。此外，物理信息神经网络解的总计算时间约为 PI-OHAM 的 60 倍，这清楚地表明 PI-OHAM 框架具有较高的精度和计算效率。

PI-OHAM 的网格无关性、收敛性、稳定性与一致性

网格无关性

计算采用了 201、401 和 801 个网格点。计算结果表现出相同的收敛行为，最终结果仅有微小差异。较小的网格产生了更平滑的残差；网格点数超过 801 后，最终损失仅略有改善，这表明 801 个网格点足以减小离散误差。

收敛

PI-OHAM解的收敛性通过总体损失和绝对误差随解阶数与计算时间增加而单调下降得到证明。在对数尺度下，损失几乎呈线性下降（图6和图7），表明该方法具有指数收敛性。此外，绝对误差 $|f''(0) - 0.332057|$ 随着解阶数和时间的增加呈指数下降（图8和图9），这证明了其能够快速收敛至标准数值格式的参考解。

稳定性

PI-OHAM框架的稳定性体现在：收敛控制参数 ħ 和辅助形状参数 a 存在定义明确且有界的优化区域。图11—13表明，在优化范围（ħ $\approx 0.22, a \approx 1.12$）内，这些参数发生微小变化时，总体损失并不十分敏感。这种参数鲁棒性使解在级数阶数增加的整个过程中保持稳定，不会出现振荡或发散。

一致性

PI-OHAM 解具有一致性，因为解中 f f、 f' 和 f'' 的计算值与采用标准数值方法计算得到的值精确对应（图 13）。此外，微分方程残差和边界条件损失同时降低至 10^{-7} 的量级，表明控制方程和边界条件均满足所需精度，且数值 formulation 具有一致性。

结论与未来工作：

在本研究中，我们提出了 PI-OHAM，这是一个将经典同伦分析与当前物理信息神经网络理念相结合、用于求解非线性微分方程的统一框架。与传统 HAM 相比，该框架无需手动调整收敛控制参数和初始猜测辅助参数，并以基于残差的优化形式纳入完整的控制物理规律。与 PINNs 相比，PI-OHAM 以显著更低的计算成本达到相同或更高的精度，同时具有解析透明性和可解释性。

主要贡献包括：

- 提出统一的 PI-OHAM 公式，将同伦分析法级数展开与基于物理信息的残差最小化相结合；• 一种借助数值方法、同时具备解析可解释性的非线性偏微分方程求解器；• 在布拉修斯边界层问题上展现出更优的精度与计算时间权衡；• PI-OHAM 模型具有指数收敛性、对控制参数具有良好的数值稳定性，且与标准数值解具有良好的一致性。并且• 为三十多年来基于同伦的推理与现代物理启发的机器学习搭建了概念桥梁。

这些特性使 PI-OHAM 成为一种有效且稳健的替代方案，可用于求解纯数据驱动的物理信息神经网络所针对的非线性流体流动和传热问题，尤其适用于可解释性、稳健性和计算效率至关重要的情形。

未来的研究将致力于将 PI-OHAM 扩展至复杂、多维及复杂流动问题，以检验其在棘手情形下的效能。结合有限的实验数据或高保真数据，也有助于进一步提升对边界条件部分已知或不确定的系统的预测能力。通过开发全自适应策略，自动选择收敛控制参数和辅助参数，可提高效率、稳定性与收敛性。最后，该框架可推广至其他由微分方程描述的非线性系统，包括磁流体力学和反应扩散现象，并探索如何利用 PI-OHAM 实时或大规模求解科学与工程问题。

参考文献

1. Liao, S. J.（1992年）。用于求解非线性问题的同伦分析技术（博士论文，上海交通大学博士论文）。2. He, J. H.（1999年）。同伦摄动技术。《计算机方法：应用力学与工程》，178(3-4)，257-262。3. Sajid, M.，& Hayat, T.（2008年）。非线性热传导和对流方程中同伦分析法与 HPM 的比较。《非线性分析：真实世界应用》，9(5)，2296-2301。4. Liao, S. J.（2010年）。流体力学中的同伦分析法简述。《水动力学学报》，22，882-4。5. Marinca, V.，Herişanu, N.，& Nemeş, I.（2008年）。最优同伦渐近法及其在薄膜流动中的应用。《中欧物理学杂志》，6(3)，648-653。6. Liao, S.（2010年）。强非线性微分方程的最优同伦分析方法。《非线性科学与数值模拟通讯》，15(8)，2003-2016。7. Motsa, S. S.，Si banda, P.，& Shateyi, S.（2010年）。一种求解非线性二阶边值问题的新型谱同伦分析法。《非线性科学与数值模拟通讯》，15(9)，2293-2302。8. Motsa, S. S.，Magagula, V. M.，& Sibanda, P.（2017年）。用于常微分方程混沌系统的多区域谱松弛法。《混沌系统》。Nova Science Publishers，29-52。9. Abbasbandy, S.，& Shivanian, E.（2011年）。预测器同伦分析法及其在若干非线性问题中的应用。《非线性科学与数值模拟通讯》，16(6)，2456-2468。10. Vosoughi, H.，Shivanian, E.，& Abbasbandy, S.（2012年）。一类非线性反应输运模型的唯一 PHAM 级数解与多重 PHAM 级数解。《数值算法》，61(3)，515-524。11. Yuan, L. G.，& Alam, Z.（2016年）。一种基于粒子群优化的最优同伦分析法：在分数阶微分方程中的应用。《应用分析与计算杂志》，6(1)，103-118。12. Zhang, Z.，Li, X.，Luan, S.，& Xu, Z.（2021）。一种采用同伦策略进行全局数值优化的高效粒子群优化算法。《智能与模糊系统杂志》，40(3)，4301-4315。13. Abbasbandy, S.（2007年）。热辐射方程的同伦分析法。《国际传热与传质通讯》，34(3)，380-387。14. Khan, Y.，& Wu, Q.（2011年）。使用 He多项式求解非线性方程的同伦摄动变换法。《计算机与数学及其应用》，61(8)，1963-1967。15. Swaminathan, R.，Narayanan, K. L.，Mohan, V.，Saranya, K.，& Rajendran, L.（2019年）。微盘生物传感器中具有米氏动力学的反应/扩散方程：同伦摄动法。《国际电化学科学杂志》，14(4)，3777-3791。16. Odibat, Z.（2020年）。一种用于非线性微分方程的改进最优同伦分析算法。《数学分析与应用杂志》，488(2)，124089。17. Filobello-Nino, U.，Vazquez-Leal, H.，Huerta-Chua, J.，Jimenez-Fernandez, V. M.，Sandoval-Hernandez, M. A.，Delgado-Alvarado, E.，& Tlapa-Carrera, V. M.（2021）。A

用于求解布拉修斯问题的HPM与PSEM方法相结合的新版本。《自然与社会中的离散动力学》，*2021*(1), 5909174. 18. Raissi, M., & Karniadakis, G. E. (2018). 隐藏物理模型：非线性偏微分方程的机器学习。《计算物理学杂志》，*357*, 125-141. 19. Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). 物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题与逆问题的深度学习框架。《计算物理学杂志》，*378*，686-707. 20. Raissi, M., Yazdani, A., & Karniadakis, G. E. (2020). 隐藏流体力学：从流动可视化中学习速度场与压力场。《科学》，*367*(6481), 1026-1030. 21. Lu, L., Meng, X., Mao, Z., & Karniadakis, G. E. (2021). DeepXDE：用于求解微分方程的深度学习库。《SIAM评论》，63(1), 208-228. 22. Mao, Z., Jagtap, A. D., & Karniadakis, G. E. (2020). 用于高速流动的物理信息神经网络。《计算机方法：应用力学与工程》，*360*，112789. 23. Karniadakis, G. E., Kevrekidis, I. G., Lu, L., Perdikaris, P., Wang, S., & Yang, L. (2021). 物理信息机器学习。《自然评论：物理学》，*3*(6), 422-440. 24. Cuomo, S., Di Cola, V. S., Giampaolo, F., Rozza, G., Raissi, M., & Piccialli, F. (2022). 通过物理信息神经网络实现科学机器学习：现状与未来方向。《科学计算杂志》，*92*(3), 88. 25. Jagtap, A. D., Kharazmi, E., & Karniadakis, G. E. (2020). 离散域上的守恒型物理信息神经网络及其在守恒定律中的应用：正问题与逆问题。《计算机方法：应用力学与工程》，*365*，113028. 26. Cai, S., Mao, Z., Wang, Z., Yin, M., & Karniadakis, G. E. (2021). 用于流体力学的物理信息神经网络（PINNs）：综述。《力学学报》，*37*(12), 1727-1738. 27. Uddin, Z., Ganga, S., Asthana, R., & Ibrahim, W. (2023). 基于小波的物理信息神经网络：求解非线性微分方程。《科学报告》，*13*(1), 2882. 28. Huang, Y., Hao, W., & Lin, G. (2022). HomPINNs：用于学习非线性椭圆型微分方程多个解的同伦物理信息神经网络。《计算机与数学及其应用》，*121*，62-73. 29. Kharazmi, E., Zhang, Z., & Karniadakis, G. E. (2021). hp-VPINNs：结合区域分解的变分物理信息神经网络。《计算机方法：应用力学与工程》，*374*，113547.

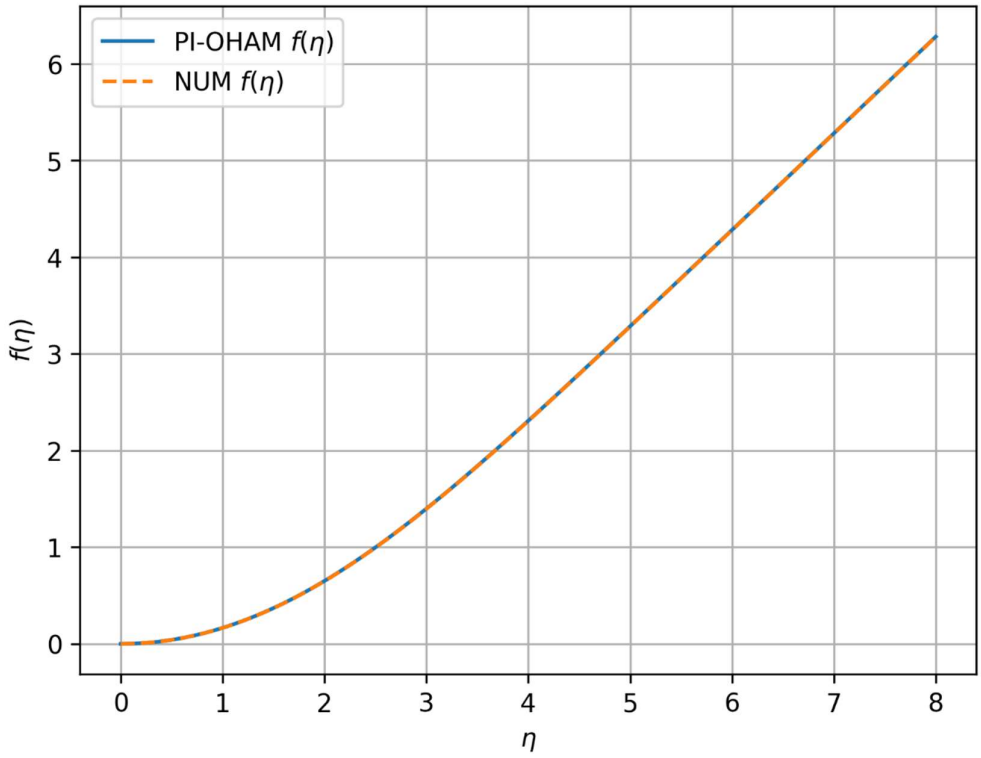
PI-OHAM $f(\eta)$
NUM $f(\eta)$
$f(\eta)$
η
0
1
2
3
4
5
6
7
8

图1

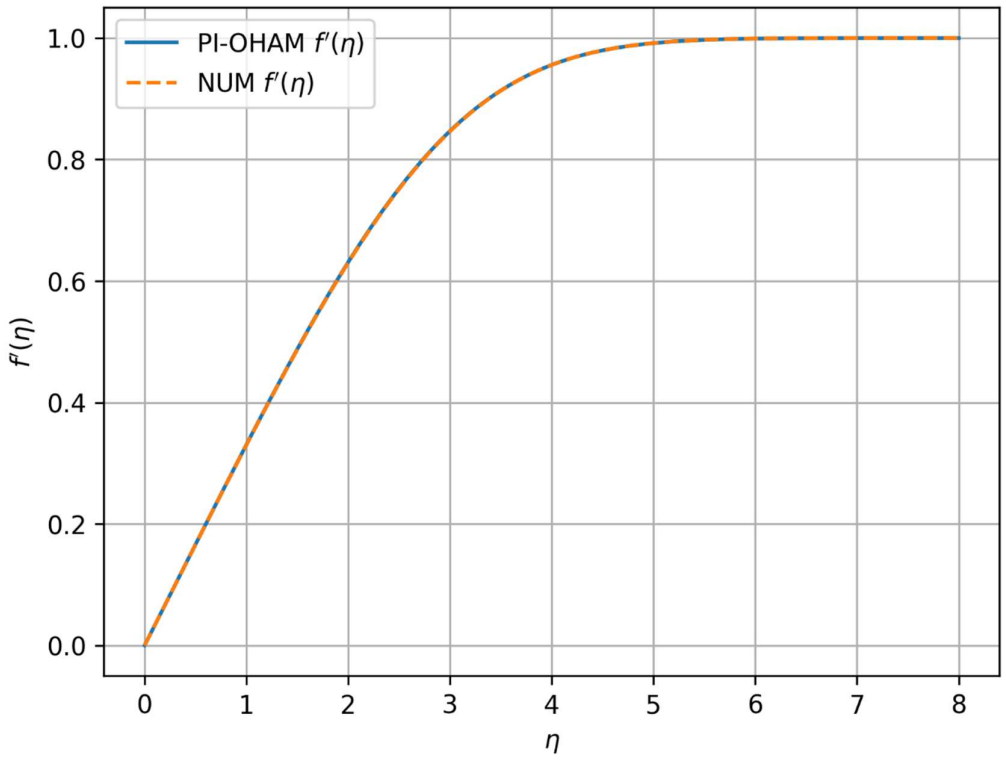
PI-OHAM $f'(\eta)$
NUM $f'(\eta)$
$f'(\eta)$
η
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

图 2

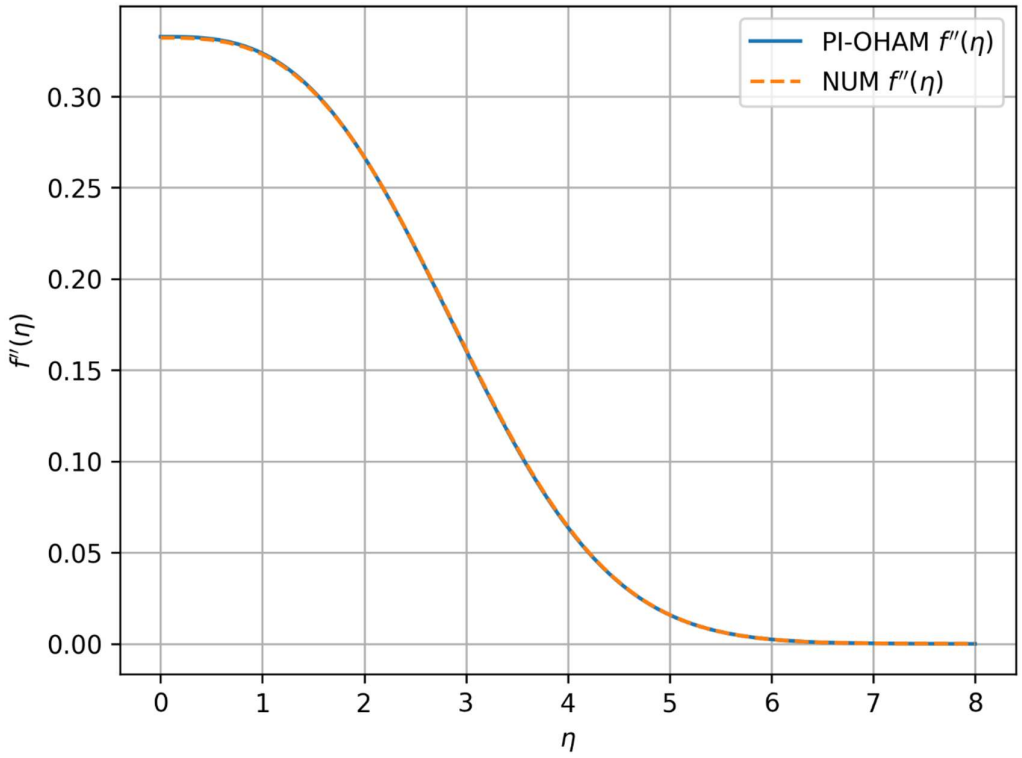
PI-OHAM $f''(\eta)$
NUM $f''(\eta)$
$f''(\eta)$
η
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0
1
2
3
4
5
6
7
8

图 3

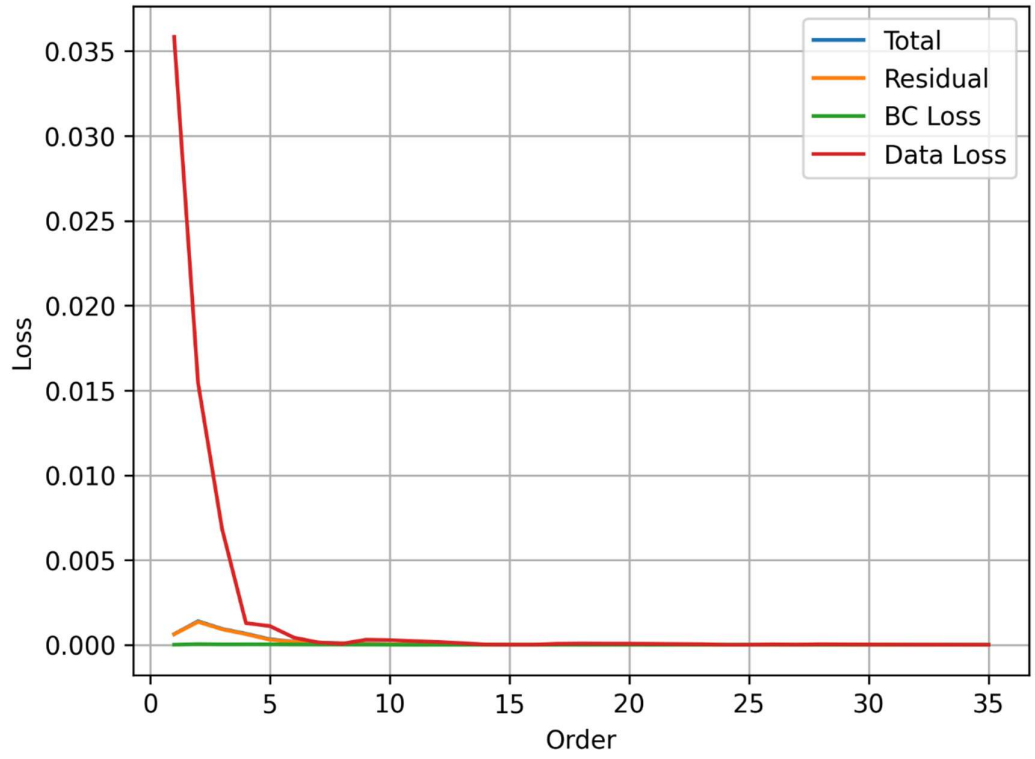
Total
Residual
BC Loss
Data Loss
Loss
Order
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035
0
5
10
15
20
25
30
35

图 4

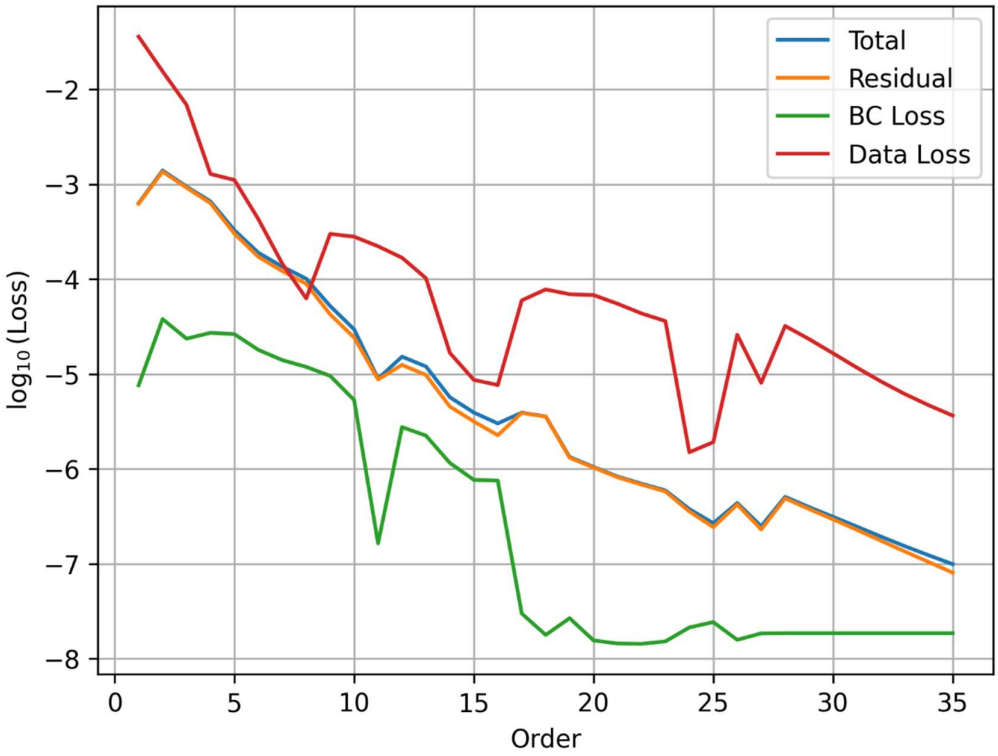
Total
Residual
BC Loss
Data Loss
log₁₀(Loss)
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
0
5
10
15
20
25
30
35
Order

图 5

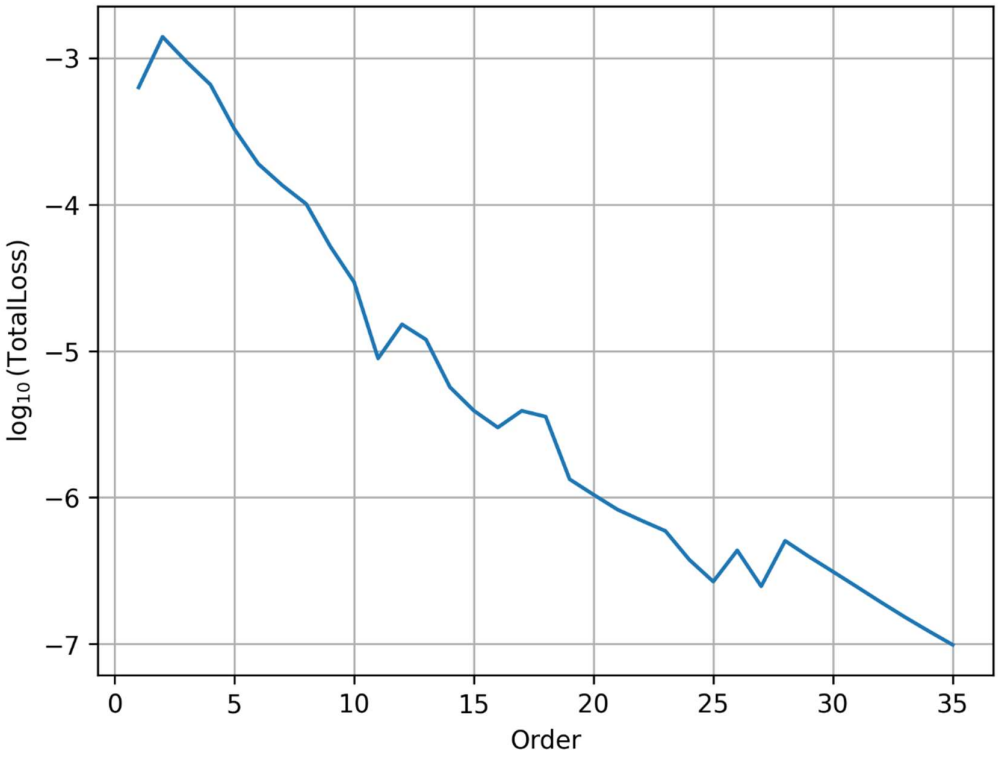
log₁₀(TotalLoss)
−3
−4
−5
−6
−7
0
5
10
15
20
25
30
35
Order

图 6

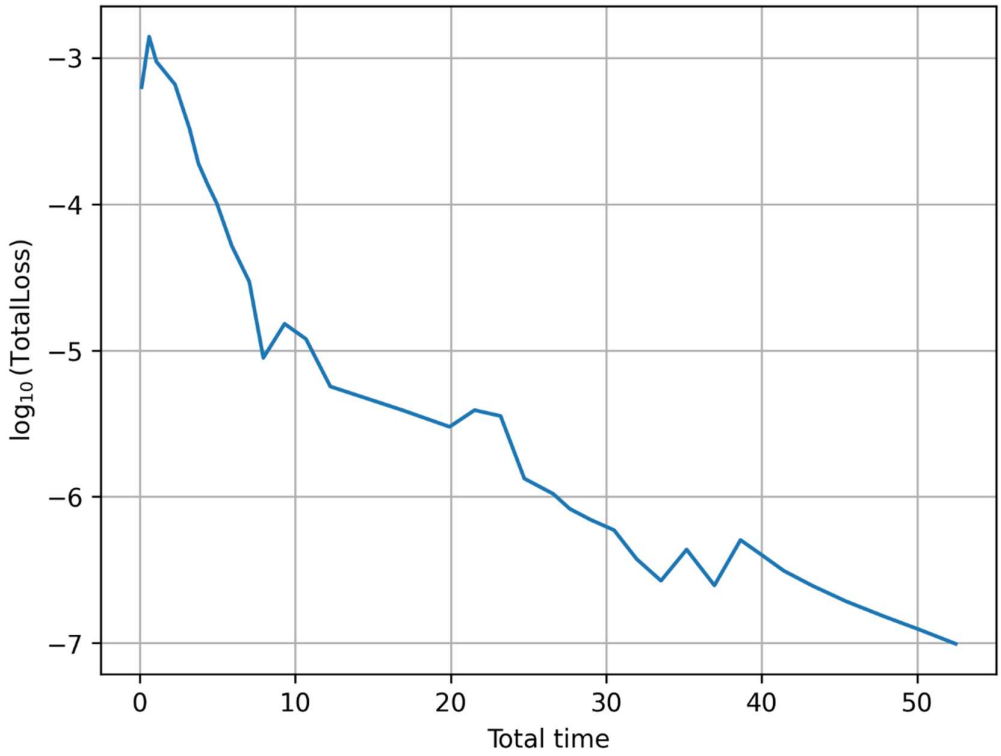
−3
−4
−5
−6
−7
log10 (TotalLoss)
0
10
20
30
40
50
Total time

图 7

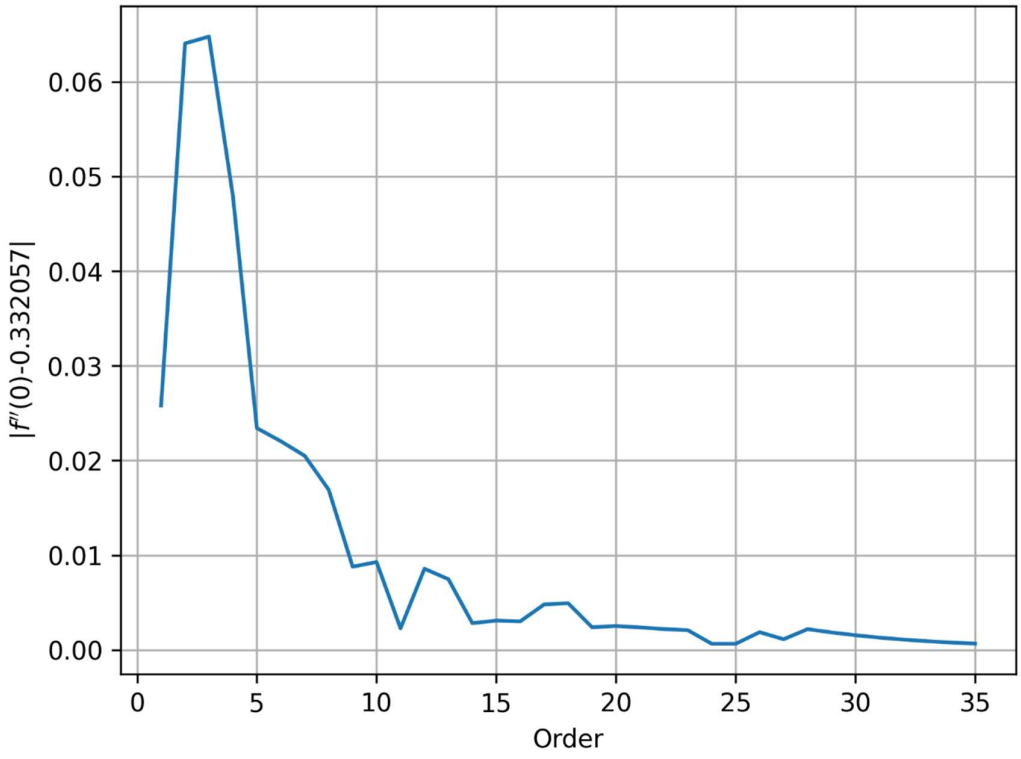
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
|f''(0)-0.332057|
0
5
10
15
20
25
30
35
Order

图 8

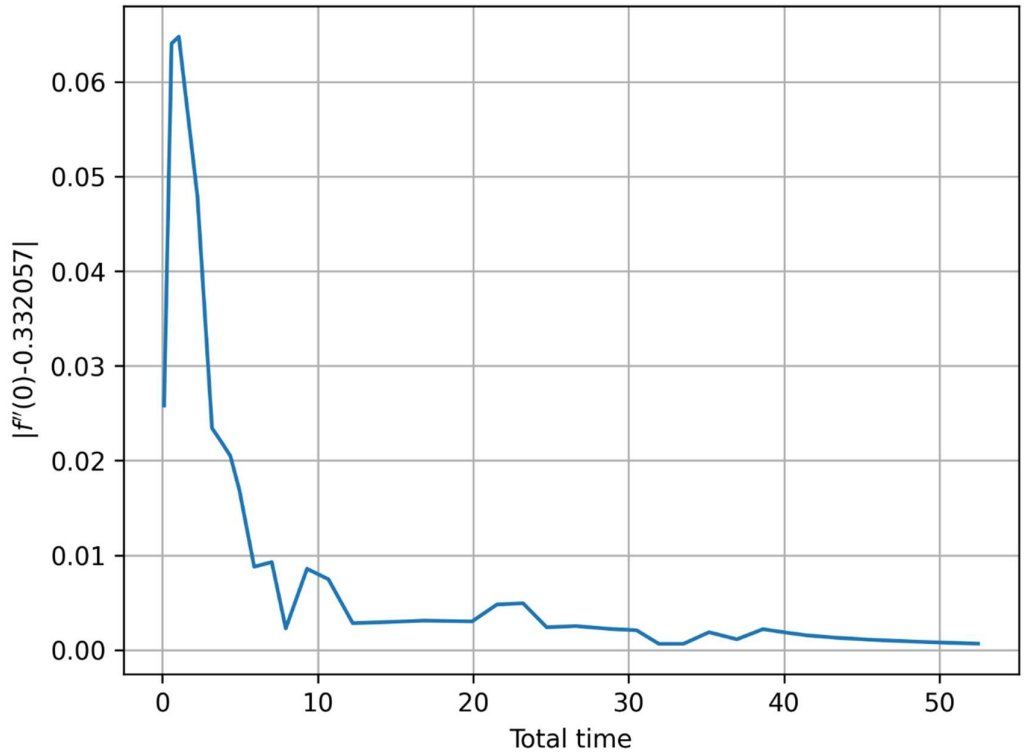
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
|f''(0)-0.332057|
0
10
20
30
40
50
Total time

图9

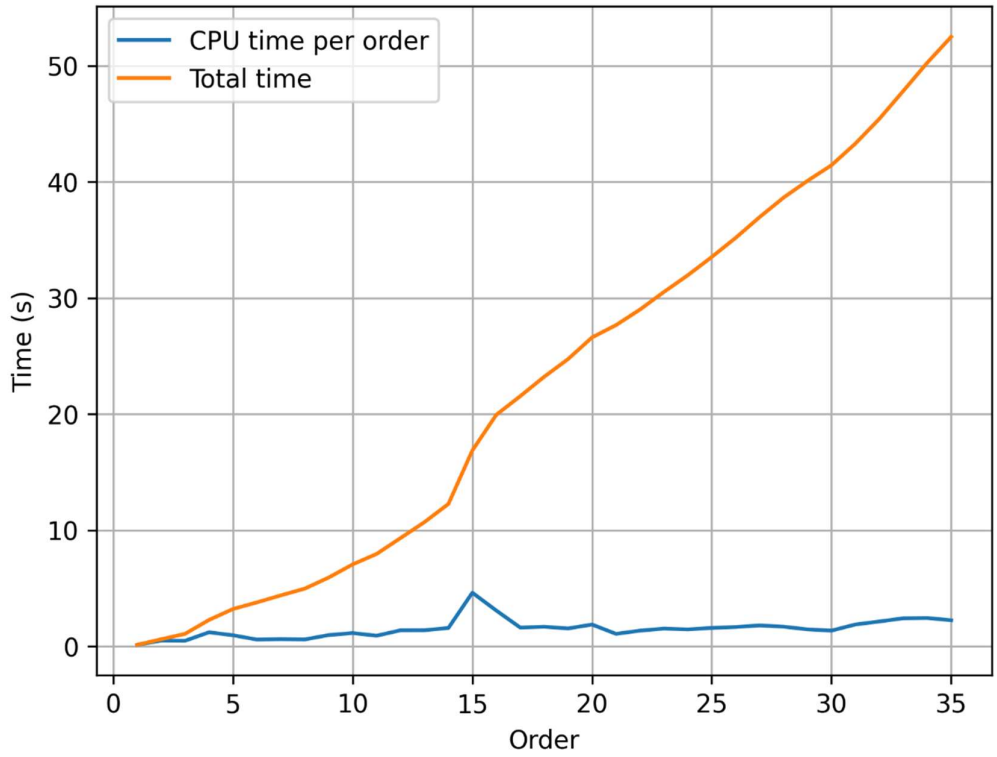
CPU time per order
Total time
50
40
30
20
10
0
Time (s)
0
5
10
15
20
25
30
35
Order

图10

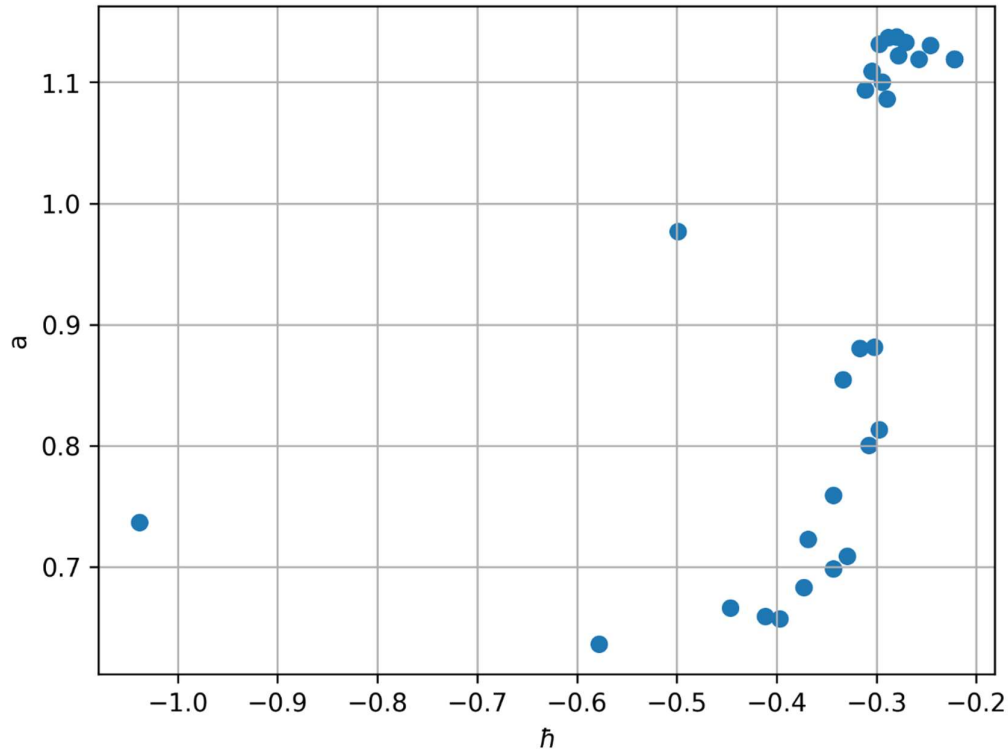
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
a
−1.0
−0.9
−0.8
−0.7
−0.6
−0.5
−0.4
−0.3
−0.2
ħ

图 *11*

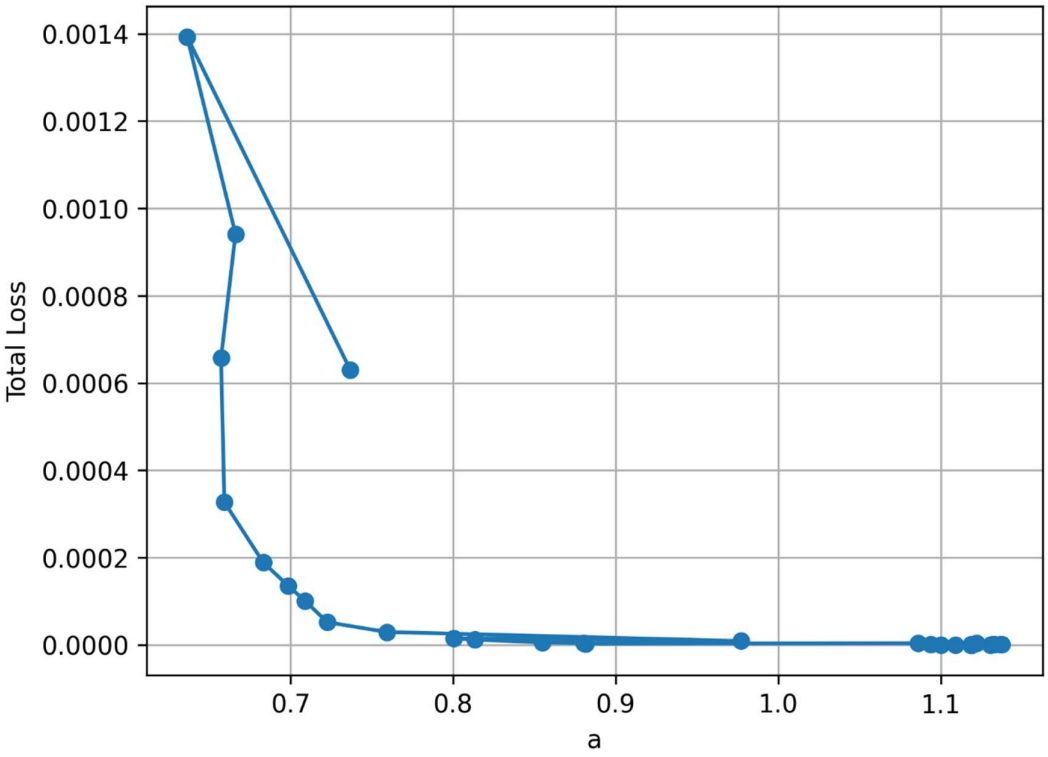
0.0014
0.0012
0.0010
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0.0000
Total Loss
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
a

图 *12*

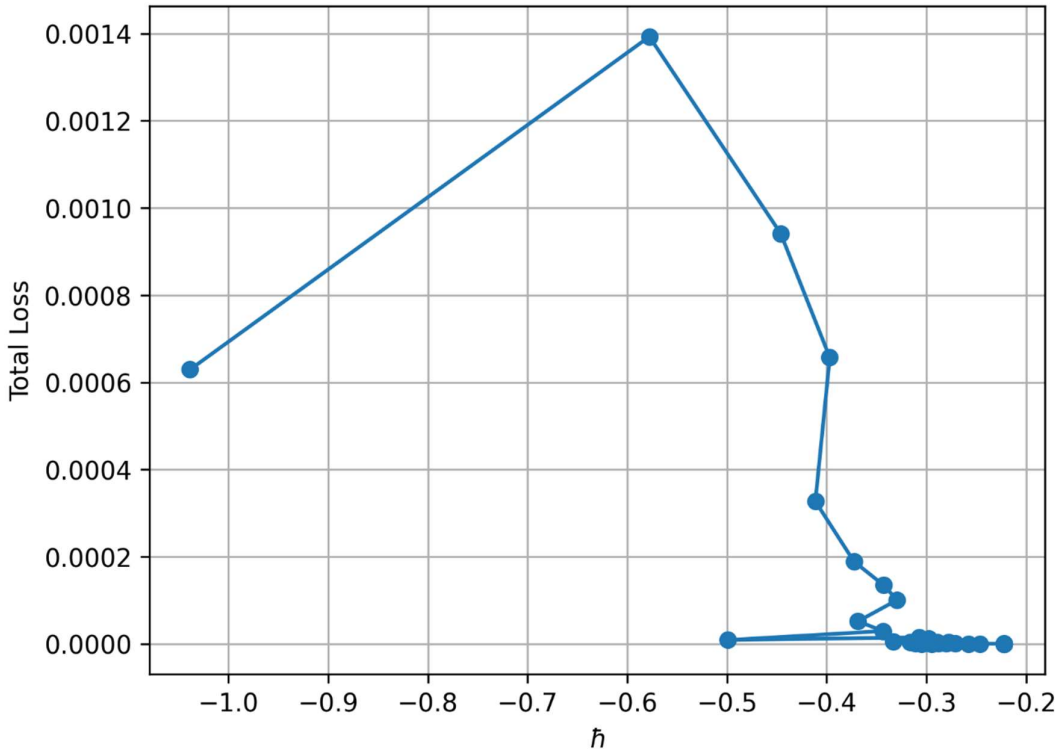
0.0014
0.0012
0.0010
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0.0000
Total Loss
−1.0
−0.9
−0.8
−0.7
−0.6
−0.5
−0.4
−0.3
−0.2
ħ

图 *13*

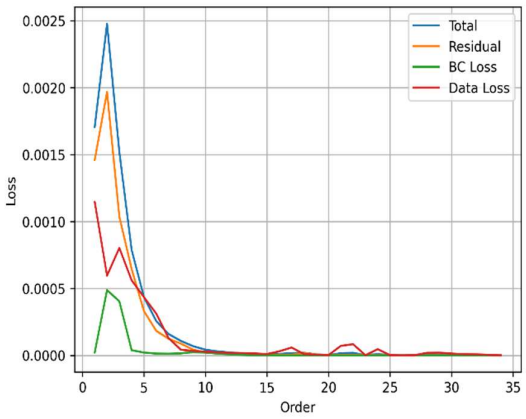

图*14(a)* 边界条件权重 *=0.8*，数据权重 *=0.2*

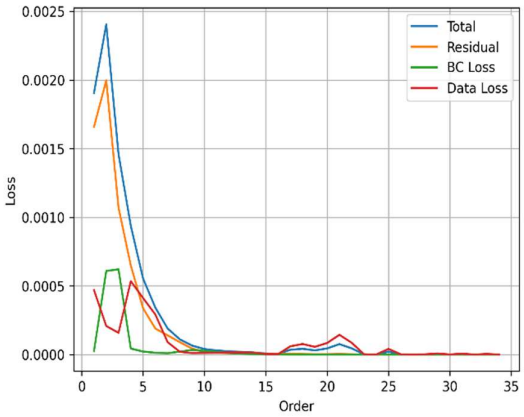

图*14(b)* 边界条件权重 *=0.5*，数据权重 *=0.5*

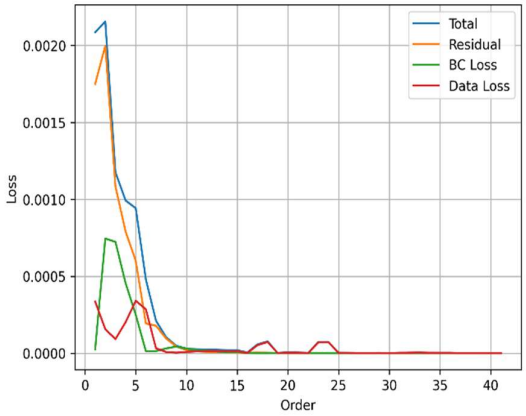

图 *14(c)* 边界条件权重 *=0.0*，数据权重 *=1.0*

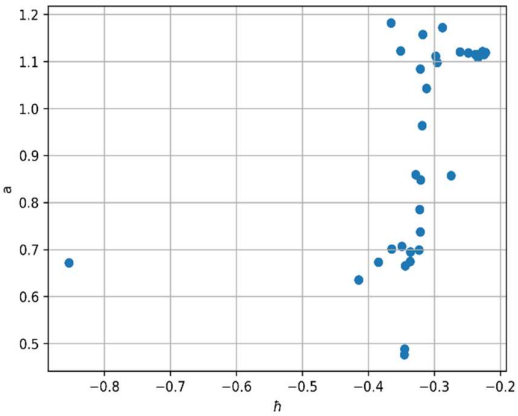

图*15(a)* 边界条件权重 *=0.8*，数据权重 *=0.2*

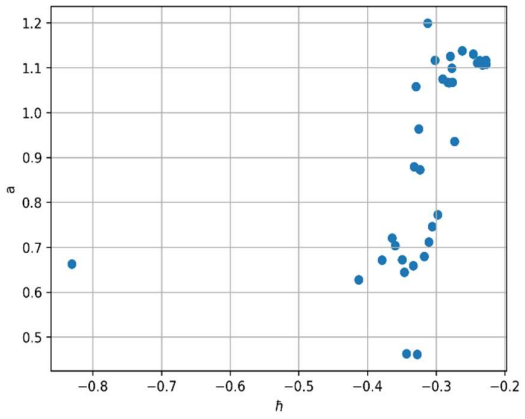

图*15(b)* 边界条件权重 *=0.5*，数据权重 *=0.5*

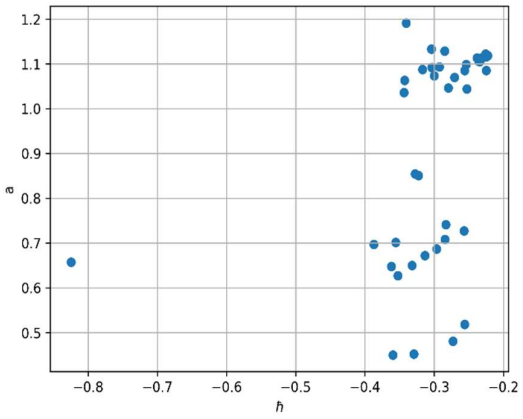

图*15(c)* 边界条件权重 *=0.0*，数据权重 *=1.0*

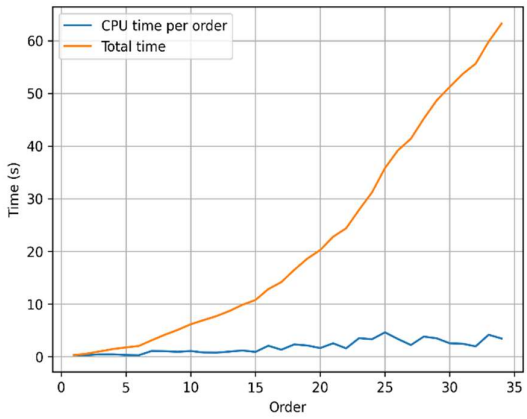

图16(a) 边界条件权重 =0.8，数据权重 =0.2

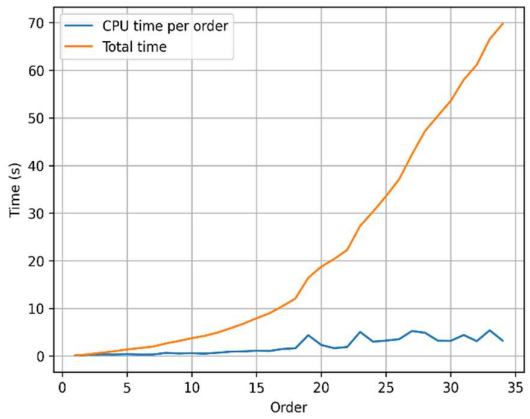

图16(b) 边界条件权重 =0.5，数据权重 =0.5

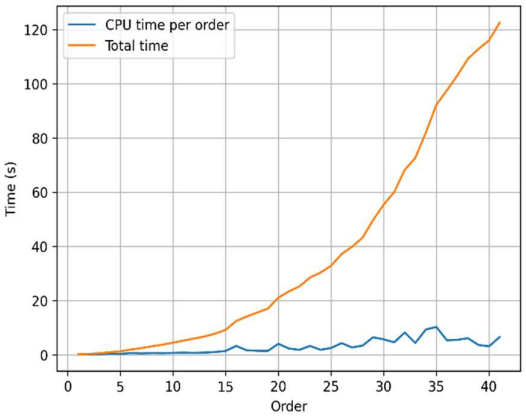

图16(c) 边界条件权重 =0.0，数据权重 =1.0

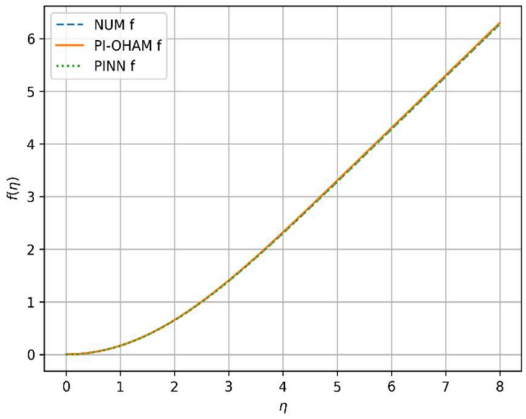

图17(a) 边界条件权重 =1.0，数据权重 =0.0，容差=1e-05

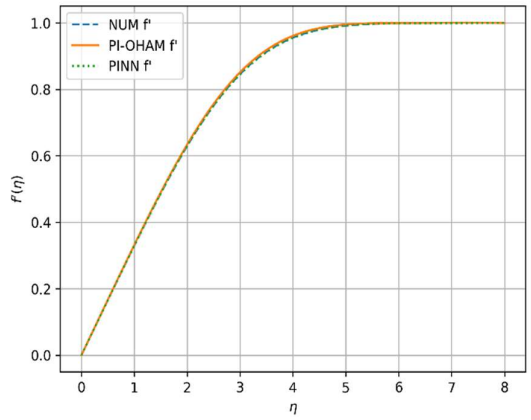

图17(b) 边界条件权重 =1.0，数据权重 =0.0，容差=1e-05

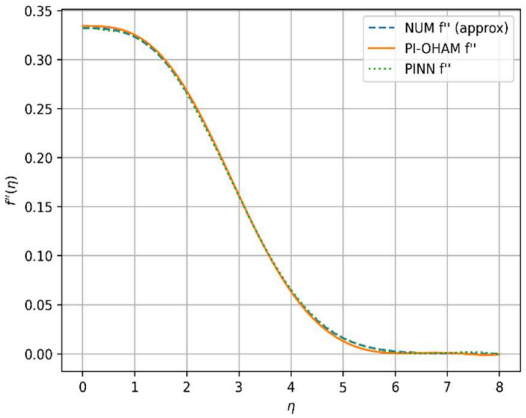

图17(c) 边界条件权重 =1.0，数据权重 =0.0，容差=1e-05