arXiv:2601.09580v1 [math.GR] 14 Jan 2026

每个子括号都是理想的左 brace II

A. Ballester-Bolinches* R. Esteban-Romero*L.
A. Kurdachenko†‡ V. Pérez-Calabuig*

摘要

本文旨在进一步研究此前论文中开始探讨的 Dedekind 括号，即每个子括号都是理想的左 brace。本文分析了加法群非周期的 Dedekind 括号 A。我们证明了使 A 成为阿贝尔群的充分条件：只需每个元素在星运算下都是 2-幂零；此外，若 A 是超多置换的，则只需根的加法群无挠。这两个条件都可以用杨-巴克斯特方程的集合论解来表述。此外，对于 A 为 2 级多置换括号的情形，我们证明了一个结构定理。

*2020*年数学主题分类：16T25, 16N40, 81R50关键词：左 brace、杨-巴克斯特方程、Dedekind 左 brace、非周期群。

1 引言

Rump 在 中引入的左 *brace* 尤为重要，是解决杨-巴克斯特方程（Yang-Baxter 方程，YBE）解的分类问题的关键，

*瓦伦西亚大学数学系；Dr. Moliner, 50；46100 西班牙瓦伦西亚布尔哈索特；Adolfo.Ballester@uv.es, ORCID 0000-0002-2051-9075；Ramon.Esteban@uv.es,ORCID0000-0002-2321-8139；Vicent.Perez-Calabuig@uv.es, ORCID 0000-0003-4101-8656

†奥列斯·洪恰尔第聂伯罗国立大学代数与几何系，乌克兰第聂伯罗 49010；lkurdachenko@gmail.com；ORCID 0000-0002-6368-7319

‡该作者的部分研究工作是在瓦伦西亚大学数学系完成的；地址：Dr. Moliner, 50; 46100 布尔哈索特，瓦伦西亚，西班牙

这一重要方程在物理学和数学领域都有广泛应用。

左 brace 是一个三元组 $(A, +, \cdot)$，使得 $(A, +)$ 和 $(A, \cdot)$ 是群结构，$(A, +)$ 是阿贝尔的，并满足

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c - a, \text{ for every } a, b, c \in A.$$

左 brace 源于用所谓的 星运算 对雅各布森根环进行推广

$$* \colon (a, b) \in A \times A \longmapsto a * b = a \cdot b - a - b \in A.$$

特别地，如果两个运算重合，则称左 brace 为阿贝尔的；等价地，对每个 a, $b \in A$，都有 $a * b = 0$。

研究解的分类问题的一条自然途径，是分析左 brace 的代数结构如何决定解的性质（见 [18]）。不可分解解和多置换解是通过左 brace 的代数性质研究得尤为深入的解类（见 [9, 10, 11, 15, 14, 16, 22]）。在前一种情形中，所谓的扭转解与不可分解性相对立，并在描述解类时发挥关键作用（见 [1, 3]）。扭转解可以用左 brace 的阿贝尔性来描述，因此，在这一背景下，任何确保左 brace 具有阿贝尔性的条件都非常重要。另一方面，解的多置换层级衡量了解的可缩性程度（见 [13]）。对具有有限多置换层级的解的研究，在分类问题中具有重要意义。其重要性在于，几乎每个解都是多置换的（例如见 [17], ）。这些解的特征由相关代数结构的代数性质决定，例如左可序性和幂零性。在这一背景下，分类多置换解的主要方法之一，是首先研究其中多置换层级为 2 的子类。为实施这一策略，左 brace 的根基序列（见第 2 节）具有重要意义。

在 [4], 中，我们将满足每个子括号都是理想这一条件的 Dedekind 左括号定义为 *Dedekind 左 brace*（见第 2 节）。[4] 中的主要结果完整描述了加法群为周期群的 Dedekind 左括号。这些结构定理表明，这类 Dedekind 左括号产生了有趣的二级多置换解族。鉴于与解相关联的左 brace 结构也可能是无限的，研究 Dedekind 左括号无疑需要探索非周期情形，这正是本文的主要目标。

第 3 节给出了我们的主要定理。定理 A 为加法群非周期的 Dedekind 左 brace 的阿贝尔性提供了一个充分条件：只需考察星运算复合表的对角线即可。该条件可以用幂零元来表述（见第 2 节），从而改进了 [5] 中的一个结果。这一结果对解的分类问题有重要意义：若某个解的左 brace 结构是 Dedekind 的，我们便得到一个易于检验的充分条件，用以判定该解是否为扭转解（见推论 5）。

定理 B 和定理 C 讨论戴德金左括号的多置换性。定理 B 表明，根在加法下无挠的戴德金左括号是阿贝尔的。这意味着左 brace 结构为戴德金的多置换解必然是扭曲解，因此其层级为 1（见推论 6）。定理 C 聚焦于左 brace 多置换层级为 2 的有趣情形。对于这类左 brace，我们证明了一个结构定理，完整描述了加法群非周期的戴德金左括号。

2 预备知识

本节中，我们固定记号，并介绍有关左 brace 的已知概念和结果。

在全文中，我们将左 brace $(A, +, \cdot)$ 简称为 A，并用并置表示左 brace 上的乘积。左 brace 上的群结构具有共同的单位元，我们将其记为 0。我们遵循以下运算层级：$*$-乘积优先于乘积，而乘积又优先于左 brace 上的和。给定 $a \in A$，我们将 a 在 $(A, +)$ 中的阶称为 a 的加法阶 （有限或无限）。

所谓的 λ-作用关联了左 brace A中的两种群结构。它由同态 $\lambda\colon a \in (A, \cdot) \mapsto \lambda_a \in (A, +)$ 表示，使得对每个 $a, b \in A$，都有 $\lambda_a(b) = -a + ab$。因此，

$$ab = a + \lambda_a(b), \quad a + b = a\lambda_{a^{-1}}(b), \quad a * b = \lambda_a(b) - b, \quad \forall\, a, b \in A$$

下面的等式也很容易验证，并且在全文中被广泛使用：

$$a * (b + c) = a * b + a * c \tag{1}$$
$$(ab) * c = a * (b * c) + b * c + a * c \tag{2}$$

左 brace A 的非空子集 S 称为子括号，如果 $(S, +)$ 和 $(S, \cdot)$ 分别是 $(A, +)$ 和 $(A, \cdot)$ 的子群。记作 $S \leq A$。若 $I \leq A$ 是 A 的理想，则 $A * I, I * A \subseteq I$。左

brace 的 λ-不变子集，并允许考虑商左括号结构 $(A/I, +, \cdot)$，其中 $(I, +) \trianglelefteq (A, +)$，$(I, \cdot) \trianglelefteq (I, \cdot)$，且对每个 $a \in A$ 都有 $a + I = aI$。左 brace A 的子集 S 生成的子括号，是所有包含 S的子括号的交。我们分别用 $\langle S \rangle_+$ 和 $\langle S \rangle$. 表示 A 的加法群和乘法群中生成的子群。对于满足 $a \in A$ 的单元素集合 $\{a\}$，其生成子结构记作 $\langle a \rangle$。若X 和 Y是 A的子集，则 $X * Y = \langle x * y \mid x \in X, y \in Y \rangle_+$。

引理 1 ([4]). 设 $a \in A$ 满足 $a * a = 0$。那么， $\langle a \rangle = \langle a \rangle_+ = \langle a \rangle$. 是 A 的阿贝尔子 ***brace***。

左 ***brace*** 之间的同态 是保持加法和乘法的映射，而同构的左 brace 由同构给出，即双射同态。给定两个 brace A 和 B，左 brace $A \oplus B$ 的直积 由 A 和 B 的加法与乘法各自的直积定义。由于阿贝尔左 brace 中两种群结构相同，我们可以称它们同构 于这个共同的群结构。

左 brace 的幂零性概念自然地通过反复迭代星乘积而出现。按照 [18], , 左 brace A 的左序列和右序列 分别定义为

$$A^1 = A \geq A^2 = A * A \geq \ldots \geq A^{n+1} = A * A^n \geq \ldots$$
$$A^{(1)} = A \geq A^{(2)} = A * A \geq \ldots \geq A^{(n+1)} = A^{(n)} * A \geq \ldots$$

A 称为左（右）幂零，如果左（右）序列达到 0；若 A 同时左幂零和右幂零（更多信息见 [2, 6, 12]），则称 A 为中心幂零。

根环中的恩格尔条件也可转换为左 brace。我们称左 brace A m-右幂零，如果对于每个 $a \in A$,

$$\underbrace{(\ldots((a * a) * \ldots) * a)}_{m \text{ times}} = 0;$$

类似地， A 称为 m-左幂零，如果对于每个 $a \in A$,

$$\underbrace{(a * (\ldots * (a * a))\ldots)}_{m \text{ times}} = 0$$

由此可知，左幂零左 brace 是左幂零的（见 [21]），但一般而言，右幂零左 brace 并非右幂零的（见 [5]）。不过，以下结论成立。

命题2 ([5]). 设 A 是一个有限左括号，且对每个 $a \in A$ 都有 $a*a=0$。那么，A 是中心幂零的。

右幂零性和中心幂零性在研究 Yang-Baxter 方程的多重置换解时发挥着重要作用。在此背景下，以下子结构尤为突出：给定左 brace A的一个子集 S，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}_A^l(S) &= \{a \in A \mid a*x=0, \text{ for all } x \in S\} = \\ &= \{a \in A \mid ax = a+x, \text{ for all } x \in S\}; \\ \mathrm{Ann}_A(S) &= \{a \in A \mid ax = a+x = xa, \text{ for all } x \in S\};\end{aligned}$$

分别是 S的左湮灭子 和湮灭子 。若 $S=A$，它们分别称为左 brace A 的根 Soc(A)和中心 $\zeta(A)$（例如参见 [6], [7] 或 [12], ）。由此可知，左 brace A 是阿贝尔的，当且仅当 $\zeta(A)=A$。此外，左 brace 中心的每个子括号都是阿贝尔理想，而根的每个子括号都是阿贝尔的。

引理3 ([4]). 设 A 是一个左 *brace*。对于 A的每个理想 I，$(\mathrm{Ann}_A^l(I),\cdot)$和 $(\mathrm{Ann}_A(I),\cdot)$ 都是$(A,\cdot)$的正规子群。

左 brace A 的根导出一个序数根基序列，该序列由 A的理想升链组成

$$0=\mathrm{Soc}_0(A) \le \mathrm{Soc}_1(A) \le \ldots \le \mathrm{Soc}_\alpha(A) \le \mathrm{Soc}_{\alpha+1} \le \ldots \mathrm{Soc}_\gamma(A),$$

其定义规则如下：$\mathrm{Soc}_1(A)$ =Soc(A)，并递归地，

$$\begin{aligned}\mathrm{Soc}_{\alpha+1}(A)/\mathrm{Soc}_\alpha(A) &= \mathrm{Soc}(A/\mathrm{Soc}_\alpha(A)), \quad \text{for every ordinal } \alpha, \\ \mathrm{Soc}_\lambda(A) &= \bigcup_{\mu<\lambda} \mathrm{Soc}_\mu(A), \quad \text{for every limit ordinal } \lambda.\end{aligned}$$

该序列的最后一项 $\mathrm{Soc}_\infty(A)$ =$\mathrm{Soc}_\gamma(A)$ 称为 A的超根。由此可知， A 是右幂零的当且仅当，对某个非负整数 n （见 [12]），有 $\mathrm{Soc}_n(A) = A$ 。在这种情况下， A 也称为具有有限多置换层数。若 $\mathrm{Soc}_\infty(A) = A$，则称 A 为超多置换的。

左 brace 与 Yang-Baxter 方程的解

Yang-Baxter 方程的一个解是一个有序对 (X， r)，其中 X是一个集合，且 r: $X\times X \to X\times X$是一个映射，满足对所有 x， $y \in X$， $r(x,\ y) = (\lambda_x(y)\ \rho_y(x))$ 。

- $r_{12}r_{23}r_{12} = r_{23}r_{12}r_{23}$ （集合论解），其中 $r_{12} =$ ($r \times$ 恒等映射$_X$) 和 $r_{23} =$ (恒等映射$_X \times r$);

- $r^2 =$恒等映射$_{X\times X}$ （对合的）；

对于每个 $x \in X$ （非退化），• λ_x 和 ρ_x 都是单射的。

对于每个 $x \in X$，扭曲解 扭转解 (X,r) 由 $r(x,y) = (y,x)$ 给出，即对于每个 $x \in X$，$\lambda_x = \rho_x = \mathrm{id}_X$。

约化解 $\mathrm{Ret}(X,r) = (X/\sim, r)$ 是借助 X 中的等价关系 $\sim$ 定义的：若 $\lambda_x = \lambda_y$ 且 $\rho_x = \rho_y$，则 $x \sim y$。于是，

$$\overline{r}\big([x],[y]\big) = \big([\lambda_x(y)],[\rho_y(x)]\big), \quad \text{for all } [x],[y] \in X/\sim.$$

约化序列递归定义如下

$$\begin{aligned} \mathrm{Ret}^0(X,r) &= (X,r) \\ \mathrm{Ret}^{\alpha+1}(X,r) &= \mathrm{Ret}\left(\mathrm{Ret}^{\alpha}(X,r)\right), \quad \text{for every ordinal } \alpha, \\ \mathrm{Ret}^{\lambda}(X,r) &= (X/\sim_\lambda, \overline{r}_\lambda), \quad \text{for every limit ordinal } \lambda, \end{aligned}$$

其中 $\sim_\lambda := \bigcup_{\mu<\lambda} \sim_\mu$，且对于每个 $\mu < \lambda$，$\sim_\mu$ 是 $\mathrm{Ret}^\mu(X,r)$ 中的等价关系。

若 m 是使 $\mathrm{Ret}^m(X,r)$ 的基数为 1 的最小非负整数，则称解 (X,r) 是第 级多置换的。例如，扭曲解是 1 级多置换解。若 $\mathrm{Ret}^\infty(X,r)$ 的基数为 1，则称 (X,r) 是超多置换的。当 X 是有限集时，显然，一个解是超多置换的，当且仅当它是有限级的多置换解。

根据 [18], ，每个左 brace A 都提供一个解（A，r_A），其中

$$r_A(a,b) = \big(\lambda_a(b), \lambda^{-1}_{\lambda_a(b)}(a)\big) \quad \text{for every } a,b \in A.$$

我们称 (A, r_A) 为 A的伴随解。

反过来，若（X，r）是一个解，并且对每个x，$y \in X$，都有 $r(x,\ y) = (\lambda_x($ $y)$ $\rho_y(x))$，则该解的结构群 定义为

$$G(X,r) := \langle x \in X \mid xy = \lambda_x(y)\rho_y(x), \text{ for every } x,y \in X \rangle$$

并且它具有左 brace 结构。我们称 $(G(X,r)\ +,\cdot)$ 为 (X,r) 的 左 *brace* 结构。特别地，如果 (X,r) 是一个扭转解，那么 $G(X,r)$ 是一个与 $\mathbb{Z}^X$ 同构的阿贝尔左 brace，其中 $\mathbb{Z}^X$ 是由 X 生成的自由阿贝尔群。此外，下图可交换

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{r} & X \times X \\ {\scriptstyle \iota\times\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota\times\iota} \\ G \times G & \xrightarrow[r_G]{} & G \times G \end{array} \tag{3}$$

其中 $G := G(X,r)$, (G, r_G) 是具有 G 的伴随解，并且典范包含 $\iota\colon X \to G$ (X,r) 是一个单射（见 [13]）。注意，对解的第一分量使用记号 λ，并不意味着与 λ-作用的记号冲突，因为图 (3) 保证二者在 X 中一致。

这一对应关系为通过左 brace 的幂零性刻画解的多置换性质铺平了道路。因此，(X,r) 是（超）多置换的，当且仅当 $G(X,r)$ 是（超）多置换的（见 [8]和 [12]）。

3 主要结果

本节汇总关于加法群非周期的戴德金左 brace 的主要结果。每个结果的证明均在相应的小节中给出。

在 [4], 中，我们将 戴德金左括号 定义为每个子括号都是理想的左 brace。显然，戴德金性质可由子 brace 和商继承。另一方面，加法群同构于无限循环群 $\mathbb{Z}$ 的左 brace，是加法群非周期的左 brace 的第一个自然例子。

命题 4. 同构于 $\mathbb{Z}$ 的阿贝尔左 *brace*，是加法群同构于无限循环群的左 *brace* 中唯一的戴德金左 *brace*。

证明。 显然，阿贝尔左 brace 是 Dedekind 的。另一方面， [19] 中证明了，在同构意义下，存在且仅存在两个其加法群与 $\mathbb{Z}$同构的左 brace。

设 A 是一个左 brace，使得 $(A,+) = \langle a\rangle_+ \cong \mathbb{Z}$，其中 $a \in A$。若 A 不是阿贝尔的，则按如下方式定义 $(A,\cdot)$（见 [19]）：

$$(na)\cdot(ma) := \big((-1)^n m + n\big)a \quad \text{for every } n, m \in \mathbb{Z}.$$

由此可知， A 的子括号具有 $\langle ka\rangle_+$ 的形式，其中 $k \in \mathbb{Z}$。此外，$\mathrm{Soc}(A) = \langle 2a\rangle_+$，因为对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，$(2a)\cdot(na) = 2a + na$；并且对于每个奇整数 m，$(ma)\cdot(ma) = 0$。

设 m 为奇整数，且 $k \in \mathbb{Z}$ 满足 $m = 2k+1$。那么， $\langle ma\rangle_+$ 不是理想，因为

$$\begin{aligned}(ma) * a &= \big((2k+1)a\big) * a = \big((2ka)\cdot a\big) * a = \\ &= (2ka) * (a * a) + a * a + (2ka) * a = a * a = a\cdot a - 2a = \\ &= -2a \notin \langle ma\rangle_+\end{aligned}$$

因此， A 不是 Dedekind 左 brace。 □

命题2指出，2-右幂零（或等价地，2-左幂零）的左 brace 是中心幂零的。对于加法群不是周期群的戴德金左括号，我们还可以得出更多结论。

定理 A. 设 A是一个加法群非周期的 *Dedekind* 左 *brace*。若 $a*a=0$ 对每个元素 $a\in A$都成立，则 A 是阿贝尔的。

推论 5. 设 (X,r) 是一个解，且 $G(X,r)$ 是一个 *Dedekind* 左 *brace*。假设对每个 $x\in X$，都有 $r(x,x)=(x,x)$ 。那么，(X,r) 是一个扭转解，且 $G(X,r)$ 与 $\mathbb{Z}^X$阿贝尔同构。

接下来的定理分别讨论超多置换情形和第 2 级多置换情形。在前一种情形中，考虑到左 brace 的根是典范的阿贝尔子 brace，可见根的无挠性质是使 Dedekind 左 brace 成为阿贝尔的关键性质。后一种情形则基于对 Dedekind 左 brace 的根基序列中第一项与第二个非零项之间结构关系的全面研究。

定理 B. 设 A 是一个戴德金超多置换左 *brace*。若根的加法群无挠，则 A 是阿贝尔的。

推论 6. 设 (X,r) 是一个超多置换的解，其左 *brace* 结构 $G(X,r)$ 是戴德金的，且其加法群不是周期的。那么，(X,r) 是一个扭曲解。特别地，若 X 是一个有限集，则具有戴德金左 *brace* $G(X,r)$ 的多置换解 (X,r) 必定是扭曲解。

定理C. 设 A 是一个戴德金左 *brace*，使得 $A=$根$_2(A)$ 且 A 的加法群不是周期的。那么 A 嵌入到一个直和$T\oplus D$ 中，其中

1. T 是一个戴德金左 *brace*，其加法群是周期的；*2.* $T*T$ 的加法群是局部循环的；*3.* $\zeta(T)$ 包含 $T*T$；*4.* D 是阿贝尔的。

3.1 定理 A 的证明

定理 *A* 的证明。我们着手证明 $A*A=0$。令 $a,b\in A$ 为 A 的任意元素。由于二者都是 $a*a=0=b*b$，引理 1 表明

$\langle a\rangle_+, \langle b\rangle_+$ 是 A 的理想。假设 a 具有无限加法阶。若 b 具有有限加法阶，则 $\langle a\rangle_+ \cap \langle b\rangle_+ = \{0\}$。因此， $a*b = b*a = 0$。现在假设 b 具有无限加法阶且 $\langle a\rangle_+ \cap \langle b\rangle_+ \neq \{0\}$。由此可知，对于某些整数 n, k，有 $na = kb$。因此，应用等式 (1)，可得

$$0 = n(a*a) = a*(na) = a*(na) = a*(kb) = k(a*b)$$

但是 $a*b \in \langle a\rangle_+$。因此， $a*b = 0$。类似地，我们也得到 $b*a = 0$。

现在假设 a 的加法阶有限。若 b 的加法阶无限，根据前一段可得 $a*b = b*a = 0$。再假设 b 的加法阶也有限。由于 $(A, +)$ 不是周期的，存在 $c \in A$，使得 c 的加法阶无限。因此， $b+c$ 的加法阶无限，进而

$$0 = a*(b+c) = a*b + a*c = a*b + 0 = a*b$$

类似地，我们也得到 $b*a = 0$。 □

推论 5 的证明。根据图 (3)，对于每个$x \in X$， $r(x, x) = (x, x)$ 意味着，在与 $G(X, r)$ 相关联的左 brace 结构中， $x*x = 0$。现在，我们可以仿照前一个定理进行论证，从而对于每个$x, y \in X$，有 $x*y = 0$。同样，根据图 (3)，这意味着对于每个$x, y \in X$， $r(x, y) = (y, x)$。因此， $G(X, r) \cong \mathbb{Z}^X$，且 $G(X, r)$ 是阿贝尔的。

□

3.2 定理 B 的证明

我们着手证明定理 B。在整个小节中， A 表示一个左 brace， S 表示 $\mathrm{Soc}(A)$， C 表示 $\mathrm{Soc}_2(A)$。首先，我们需要以下两个关键引理。

引理 7. 假设 A 是一个 *Dedekind* 左 *brace*，并设 $d \in C$ 满足$d*d \neq 0$。那么，$\langle d\rangle = \langle d\rangle_+ + \langle d*d\rangle_+$。

证明。由于 $d \in C$，我们有 $d*a \in S$ 对每个 $a \in A$都成立。特别地，$0 \neq u := d*d \in S$。根据引理 1，有 $U := \langle u\rangle = \langle u\rangle_+$成立。由于 U 是一个理想，再次使用引理 1，可得 $\langle d+U\rangle = \langle d+U\rangle_+ = \langle d\rangle_+ + U$。因此， $\langle d\rangle \leq \langle d\rangle_+ + U$。另一侧的包含关系显然成立。 □

引理 8. $C \cap \mathrm{Ann}_A(S)$ 是一个包含 S 的子括号。此外，有：

1. $N := \mathrm{Ann}^l_C(S) = C \cap \mathrm{Ann}_A(S)$ 是$(C, \cdot)$ 的正规子群，使得 $N = C$ 或 $|C/N| = 2$ 且 $\lambda_a(u) = -u$，对每个 $a \in C \setminus S$ 及每个 $u \in S$ 均成立。

2. 若 $x \in C \cap \mathrm{Ann}_A(S)$, 则 $x^k * a = k(x*a) = (kx) * a$ 对每个 $a \in A$及每个非负整数 $k \in \mathbb{Z}$均成立；

3. 若$(S,+)$是无挠的，那么 $\big((C\cap \mathrm{Ann}_A(S))/S,+\big)$ 是无挠的。

证明。根据 $S=\mathrm{Ann}^l_A(A)$的定义，有$\mathrm{Ann}^l_A(S)=\mathrm{Ann}_A(S)$且$S\subseteq \mathrm{Ann}_A(S)$。由引理3可得$(\mathrm{Ann}_A(S)\ \cdot)\trianglelefteq(A,\cdot)$，因此，由于 C是一个理想，$(C\cap \mathrm{Ann}_A(S)\ \cdot)\trianglelefteq(A,\cdot)$。由于 C/S也是阿贝尔的，乘积与和在 C/S中相同，由此可得 $(C\cap\mathrm{Ann}_A(S))/S$是 C/S的一个子箍。因此， $C\cap\mathrm{Ann}_A(S)$是 A的一个子箍。

1. 显然，$\mathrm{Ann}^l_C(S)=C\cap\mathrm{Ann}_A(S)$，因为 $S=\mathrm{Ann}^l_A(A)$。因此， $N:=\mathrm{Ann}^l_C(S)=$核 $\bar\lambda$，其中

$$\bar\lambda\colon a\in C\mapsto \lambda_a|_S\in \mathrm{Aut}(S,+)$$

是将 λ-作用限制到理想 S上。因此，$(C/N,\cdot)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(S,+)$ 的一个子群。由于 S 是阿贝尔的， S 的每个子群都是 A 的子括号，因此也是一个理想。于是，$(S,+)$ 的所有子群都是λ-不变的。应用 [20] 的定理1.5.7可得，要么 $C=N$，要么 $|C/N|=2$，并且对每个 $u\in S$和每个 $a\in C\setminus S$，都有 $\lambda_a(u)=-u$。

2. 令 $x\in C\cap\mathrm{Ann}_A(S)$。于是， $x*a\in S$且 $x*(x*a)=0$。由归纳法可知，对每个非负整数 k，都有 $x^k*a=k(x*a)$。事实上，若对某个 $k\geq 1$有 $x^k*a=k(x*a)$，那么利用等式 (2) 和 (1)，可得

$$\begin{aligned}x^{k+1}*a=(xx^k)*a=x*(x^k*a)+x^k*a+x*a=\\ =x*\big(k(x*a)\big)+(k+1)(x*a)=k\big(x*(x*a)\big)+(k+1)(x*a)=\\ =(k+1)(x*a).\end{aligned}$$

此外，存在 $s\in S$ 使得 $x^ks=kx$，因为 $x^kS=kxS$。因此，

$$(kx)*a=(x^ks)*a=x^k*(s*a)+s*a+x^k*a=x^k*a$$

3. 假设存在 $x\in C\cap\mathrm{Ann}^l_A(S)\setminus S$以及一个正整数 m，使得 $mx\in S$。由于 $x\notin S$，存在 $a\in A$使得 $x*a\in S\setminus\{0\}$。根据上一段， $m(x*a)=x^m*a=(mx)*a=0$，这与 $(S,+)$无挠矛盾。 □

定理 *B* 的证明。假设 $A\neq S$。由于 A 是超多置换的，因此可得 $C\neq S$。

假设 $C\cap\mathrm{Ann}_A(S)\neq S$。取元素 $d\in C\cap\mathrm{Ann}_A(S)$，使得 $d\notin S$，并令 $D=\langle d\rangle$。由于 $d\in C$和 D根据假设是一个理想，因此对每个 $x\in A$，都有 $d*x\in D\cap S$。若 $D\cap S=0$，则 $d\in S$，矛盾。假设 $D\cap S\neq 0$。若 $d*d=0$，由引理 1， $D=\langle d\rangle_+$。于是存在正整数 k，使得 $kd\in S$。这与以下事实矛盾：$\big((C\cap\mathrm{Ann}_A(S))/S,\ +\big)$ 由引理 8 可知是无挠的。

若 $d*d\neq 0$，则由引理 7，$\langle d\rangle=\langle d\rangle_{+}+\langle d*d\rangle_{+}$。此外，由于 $\langle d*d\rangle_{+}\leq S$且 $((C\cap \mathrm{Ann}_A(S))/S,\ +)$由引理 8 可知是无挠的，因此 $\langle d\rangle_{+}\cap\langle d*d\rangle_{+}=0$。因此，$\langle d\rangle=\langle d\rangle_{+}\oplus\langle d*d\rangle_{+}$。取 $c:=2d\in\langle d\rangle$。于是，$d*c=d*(2d)=2(d*d)$。若 $c*c=0$，则由引理 1，$\langle c\rangle=\langle c\rangle_{+}=\langle 2d\rangle_{+}$。因此，根据上一段，$d*c\notin\langle c\rangle$。若 $c*c\neq 0$，则由引理 8 可得

$$c*c=(2d)*(2d)=2((2d)*d)=2((d^2)*d)=4(d*d).$$

由上一段可知，$\langle c\rangle=\langle c\rangle_{+}\oplus\langle c*c\rangle_{+}=\langle 2d\rangle_{+}+\langle 4(d*d)\rangle_{+}$。因此，$d*c\notin\langle c\rangle$。在这两种情况下，都可推出 $\langle c\rangle$ 不是理想，这与假设矛盾。因此，$C\cap \mathrm{Ann}_A(S)=S$。

现在，由引理 8，$|C/S|=2$ 且 $\lambda_a(u)=-u$，对每个 $u\in S$ 和每个 $a\in C\setminus S$均成立。注意，阶为 2 的左 brace 在同构意义下唯一，且与阶为 2 的循环群阿贝尔同构。特别地，若 $a\in C\setminus S$，则 $a^2\in S$ 且 $-a^2=\lambda_a(a^2)=aa^2-a=a^3-a$。由于 $a^2\in S$，可得 $a=a^3+a^2=a^2+a^3=a^2a^3=a^5$。因此，$a^4=0$。再次利用 $a^2\in S$，可得 $0=a^4=a^2a^2=a^2+a^2=2a^2$，这与$(S,\ +)$无挠矛盾。

这一矛盾推出 $A=S$，因此，A 是阿贝尔群。 □

推论 *6* 的证明。由于 $G(X,r)$ 是无挠的，我们可以对其应用定理 B。因此，$G(X,r)$ 是阿贝尔群，这意味着对于每个$x\in X$，$\lambda_x=\rho_x=\mathrm{id}_X$。 □

3.3 定理C的证明

本小节的证明中处处用到方程 (1) 和 (2)。上一小节的引理 7 也起着关键作用。

我们将定理 C 的证明分为几个步骤。我们的首要目标是证明，对于戴德金左括号，根基序列中第二个与第一个非零项之间的商的加法群是周期的（见命题 12）。为此，以下引理讨论左 brace A 中元素的加法阶。

引理 9。设 $a\in A$ 的加法阶无限。假设 $0\neq c:=a*a$ 满足 $c*c=a*c=c*a=0$。若 c 的加法阶无限，则$\langle a\rangle=\langle a\rangle_{+}\oplus\langle c\rangle_{+}$，且它包含一个不是理想的子括号。

证明。由假设不难证明 $\langle a\rangle=\langle a\rangle_{+}+\langle c\rangle_{+}$。

假设 $\{0\}\neq\langle a\rangle_{+}\cap\langle c\rangle_{+}$。如果 $\langle c\rangle_{+}\leq\langle a\rangle_{+}$，那么对于某个正整数 t，有 $c=ta$。因此，$tc=t(a*a)=a*(ta)=0$，这是不可能的。

类似地，如果 $\langle a\rangle_+ \le \langle c\rangle_+$，我们便得到 $a*a=0$，这就产生了矛盾。因此，$\langle a\rangle_+ \neq \langle a\rangle_+ + \langle c\rangle_+ \neq \langle c\rangle_+$。由于 $\{0\} \neq \langle a\rangle_+ \cap \langle c\rangle_+$，$\langle a\rangle_+ + \langle c\rangle_+$ 的 0-秩为 1，也就是说 $\langle a\rangle = \langle a\rangle_+ + \langle c\rangle_+ = \langle d\rangle_+ \oplus \langle u\rangle_+$，其中 d 的加法阶为无限，而 u 的有限加法阶为 n。令 $k,\ j \in \mathbb{Z}$，使得 $u = ka + jc$。成立

$$a*u = a*(ka+jc) = a*(ka) + a*(jc) = a*(ka) = k(a*a) = kc.$$

由此可得 $0 = a*0 = a*(nu) = n(a*u) = nkc$，这与 c 的加法阶矛盾。因此，$\{0\} = \langle a\rangle_+ \cap \langle c\rangle_+$，进而有 $\langle a\rangle = \langle a\rangle_+ \oplus \langle c\rangle_+$。

取 $w := a^2 = 2a + a*a = 2a + c \in \langle a\rangle$，其加法阶为无限阶。由此可得

$$\begin{aligned} c_1 := w*w = a^2*(2a+c) = 2(a^2*a) + a^2*c = \\ = 2\big(a*(a*a) + 2(a*a)\big) + 0 = 4(a*a) = 4c. \end{aligned}$$

此外，由于 $c*c=0$，有 $4c = c^4$。因此，$c_1 * c_1 = c^4 * c^4 = 0$,$w*c_1 = a^2*(4c) = 0$，且 $c_1 * w = c^4 * a^2 = 0$ 成立。由此，根据上一段，我们还可以得出 $\langle w\rangle = \langle w\rangle_+ \oplus \langle c_1\rangle_+$，因此 $\langle w\rangle$ 中的每个元素都可以唯一地写成

$$t_1 w + t_2 c_1 = t_1 a^2 + t_2 4c = t_1(2a+c) + t_2 4c = 2t_1 a + (4t_2 + t_1)c,$$

对于某些整数 t_1，t_2。

现在，注意到 $a*w = a*(a^2) = a*(2a+c) = 2(a*a) = 2c$，即 $a*w \notin \langle w\rangle$。因此可知，$\langle w\rangle$ 不是理想。 □

引理 10。设 A 是一个 ***Dedekind* 左 *brace***，且 $d \in \mathrm{Soc}_2(A)$ 具有无限加法阶。若 $d*d=0$，则 $d \in \mathrm{Soc}(A)$。

证明。 由引理 1，成立 $\langle d\rangle = \langle d\rangle_+$。由于它是一个理想，我们有 $(\langle d\rangle_+,\ \cdot)$ 是 $(A,\ \cdot)$ 的正规子群，且 $\langle d\rangle_+$ 在 λ 下不变。因此，对每个 $x \in A$，要么 $x^{-1}dx = d$，要么 $x^{-1}dx = -d$，并且要么 $\lambda_x(d) = d$，要么$\lambda_x(d) = -d$。

令 $x \in A$并假设 $xd = dx$。由此可得 $d*x = dx - d - x = xd - x - d = x*d$。若 $\lambda_x(d) = d$，则 $d*x = x*d = \lambda_x(d) - d = 0$。若 $\lambda_x(d) = -d$，则$d*x = x*d = -2d \in \mathrm{Soc}(A)$。因此，$2d = d^2 \in \mathrm{Soc}(A)$。所以可得 $d^2 x = x d^2$ 并且 $x*d^2 = d^2*x = 0$，即 $\lambda_x(d^2) = d^2$。但这时我们看到

$$2d = d^2 = \lambda_x(d^2) = \lambda_x(2d) = 2\lambda_x(d) = -2d,$$

这就产生了矛盾。

现在假设 $dx = x(-d)$。那么， $dx = x(0-d) = 2x - xd$。如果 $\lambda_x(d) = d$，那么 $dx = 2x-(x+\lambda_x(d)) = x-d$。因此， $d*x = dx-d-x = -2d \in \mathrm{Soc}(A)$。于是， $2d = d^2 \in \mathrm{Soc}(A)$。由此可得

$$0 = d^2 * x = d*(d*x) + 2(d*x)$$

由于 $d*x \in \langle d\rangle = \langle d\rangle_+$ 和 $\langle d\rangle_+$ 是阿贝尔子 brace，因此$d*(d*x) = 0$。于是，$2(d*x) = 0$，这与 $\langle d\rangle_+$ 同构于无限循环群矛盾。

剩下的情况是， $dx = x(-d)$ 且 $\lambda_x(d) = -d$。那么， $dx = 2x-(x-d) = x+d$，因此， $d*x = dx-d-x = 0$。由此我们可以得出，对于每个 $x \in A$，都有$d*x = 0$，即 $d \in \mathrm{Soc}(A)$。 □

引理 11. 设 A 是一个 *Dedekind* 左 *brace*，且 $d \in \mathrm{Soc}_2(A)$ 具有无限加法阶。那么， $d*d$ 具有有限加法阶。

证明。由于 $d \in \mathrm{Soc}_2(A)$，可得 $c := d*d \in \mathrm{Soc}(A)$。假设 c 具有无限加法阶。由于 $\mathrm{Soc}(A)$ 是阿贝尔群，可得$\langle c\rangle = \langle c\rangle_+$ 是 A的子括号，因此也是一个理想。因此，$(\langle c\rangle_+, \cdot)$ 是 $(A,\cdot)$ 的正规子群，所以 $dcd^{-1} = c$ 或 $dcd^{-1} = -c = c^{-1}$。

假设 $dcd^{-1} = c$。由于 $c \in \mathrm{Soc}(A)$， $c*c = c*d = 0$。此外，$d*c = dc-d-c = cd-c-d = c*d = 0$。应用引理 9，可得存在一个不是理想的子括号；矛盾。

假设 $dcd^{-1} = -c$。那么，有

$$\begin{aligned} d*c = dc-d-c = -c+(-c)d-d = -2c+(-c)d+c-d = \\ = -2c+(-c)*d = -2c. \end{aligned}$$

另一方面，由于 $\mathrm{Soc}_2(A)/\mathrm{Soc}(A)$ 是阿贝尔的， $2d = d^2 s$ 对某个$s \in \mathrm{Soc}(A)$ 成立。因此，也有

$$\begin{aligned} (2d)*(2d) = (d^2 s)*(2d) = d^2*\big(s*(2d)\big) + s*(2d) + d^2*(2d) = \\ = d^2*(2d) = 2(d^2*d) = 2\big(d*(d*d)+2d*d\big) = \\ = 2(d*c+2c) = 2(-2c+2c) = 0 \end{aligned}$$

因此，由引理 10， $2d \in \mathrm{Soc}(A)$。于是， $2d+c \in \mathrm{Soc}(A)$，并且

$$d*(2d+c) = 2d*d + d*c = 0.$$

根据引理 7，我们可以写成 $\langle d\rangle = \langle d\rangle_+ + \langle c\rangle_+ = \langle d\rangle_+ + \langle 2d+c\rangle_+$。假设 $\langle d\rangle = \langle d\rangle_+ \oplus \langle 2d+c\rangle_+$。由于 $4d+c \in \mathrm{Soc}(A)$，因此 $\langle 4d+c\rangle = \langle 4d+c\rangle_+$是一个理想。然而，我们看到

$$d*(4d+c) = 4(d*d) + d*c = 4c-2c = 2c \notin \langle 4d+c\rangle_+ = \langle 2d+2d+c\rangle_+$$

因此，我们得到了矛盾。

假设 $\langle d\rangle_+ \cap \langle 2d+c\rangle_+ \neq \{0\}$。若 $\langle 2d+c\rangle_+ \leq \langle d\rangle_+$，则 $\langle d\rangle = \langle d\rangle_+$是一个 Dedekind 左 brace，其加法群同构于 $\mathbb{Z}$。因此，由命题 4 可得 $\langle d\rangle$是阿贝尔的，即 $d*d=0$，这与假设矛盾。若 $\langle d\rangle_+ \leq \langle 2d+c\rangle_+$，则 $d \in \mathrm{Soc}(A)$，矛盾。因此，

$$\langle d\rangle_+ \neq \langle d\rangle_+ + \langle 2d+c\rangle_+ \neq \langle 2d+c\rangle_+.$$

由于 $\{0\} \neq \langle d\rangle_+ \cap \langle 2d+c\rangle_+$，$\langle d\rangle$ 的 0-秩为 1。因此，$\langle d\rangle = \langle v\rangle_+ \oplus \langle u\rangle_+$，其中 v 具有无限加法阶，而 u 具有有限加法阶 n。令$l,\ m \in \mathbb{Z}$ 使得 $u = ld + m(2d+c)$。由此可得

$$d*u = d*\big(ld + m(2d+c)\big) = ld*d = lc.$$

另一方面，$0 = d*0 = d*(nu) = n(d*u) = nlc$，也就是说，$c$ 具有有限加法阶。由此便得到最终的矛盾。 □

命题 12. 设 A 是一个 *Dedekind* 左 *brace*。商 $\mathrm{Soc}_2(A)/\mathrm{Soc}(A)$ 的加法群是周期的。

证明. 令 $S := \mathrm{Soc}(A)$ 且 $C := \mathrm{Soc}_2(A)$。假设 C 包含一个元素 d，使得对所有整数 z都有 $zd \notin S$，也就是说，d 具有无限加法阶。特别地，引理 10 蕴含 $c = d*d \neq 0$。此外，根据引理 11，c 在 A中具有有限加法阶。因此，根据引理 7，我们可以写成 $\langle d\rangle = \langle d\rangle_+ \oplus \langle c\rangle_+$，其中 $\langle c\rangle_+$ 是一个有限子括号，因而也是一个有限理想。因此，$\langle c\rangle_+$ 是 $(A,\cdot)$ 的有限正规子群。于是，存在一个正整数 n，使得 $d^{-n}cd^n = c$。

现在，由于 C/S 是阿贝尔的，可知 $nd = d^n x$ 对某个 $x \in S$ 成立。于是，我们得到

$$(nd)*c = (d^n x)*c = d^n*(x*c) + x*c + d^n*c = d^n*c.$$

此外，由于 $cd^n = d^n c$，我们有 $(nd)*c = d^n*c = c*d^n = 0$。

取具有无限加法阶的 $v := nd$。于是，由引理 10 可得 $u := v*v \neq 0$，因此根据引理 7，有 $\langle v\rangle = \langle v\rangle_+ + \langle u\rangle_+$。由此可得

$$\begin{aligned} u = v*v = (nd)*(nd) = n\big((nd)*d\big) = n\big((d^n x)*d\big) = \\ = n\big(d^n*(x*d) + x*d + d^n*d\big) = n(d^n*d). \end{aligned}$$

我们断言，对于每个正整数 m，都有 $d^m*d \in \langle c\rangle_+$。事实上，若对于某个 $m \geq 1$ 有 $d^m*d \in \langle c\rangle_+$，则结论成立

$$\begin{aligned} d^{m+1}*d = (dd^m)*d = d*(d^m*d) + d^m*d + d*d = \\ = d*(d^m*d) + d^m*d + c \in \langle c\rangle_+, \end{aligned}$$

因为 $\langle c\rangle_+$ 是一个理想。特别地，可得 $u \in \langle c\rangle_+$，因此对于某个整数 j，有 $u = jc$。于是， u 的加法阶有限，为 k。

现在， $v*u = j(v*c) = 0 = u*v$，因为 $u \in S$。我们断言，对每个正整数 t，都有 $(tv)*v = t(v*v) = tu$。事实上，假设 $(tv)*v = tu$。由于 $(t+1)v + S = v(tv) + S = v(tv)S$，于是对于某个 $y \in S$，有 $(t+1)v = v(tv)y$。因此，成立

$$\begin{aligned}\big((t+1)v\big)*v = \big(v(tv)y\big)*v = \big(v(tv)\big)*(y*v) + y*v + \big(v(tv)\big)*v = \\ = \big(v(tv)\big)*v = v*\big((tv)*v\big) + (tv)*v + v*v = \\ = v*(tu) + tu + u = t(v*u) + (t+1)u = (t+1)u.\end{aligned}$$

特别地，由此可得 $(kv)*(kv) = k\big((kv)*v\big) = k^2u = 0$。此外， $(kv) = knd \in \langle d\rangle_+$ 具有无限加法阶。因此，由引理 10 可得 $knd \in S$，这就产生了矛盾。 □

第二个关键步骤是证明：对于 Dedekind 左 brace A，若 $A = \mathrm{Soc}_2(A)$ 的加法群是非周期的，则根与 A 的中心重合。为此，我们证明，若 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 的加法群是非周期的，则 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 包含于 $\mathrm{Ann}_A(\mathrm{Soc}(A))$ 中（见命题 15）。

从现在起， A 表示一个 ***Dedekind* 左 *brace***。

引理 13. 设 $d \in \mathrm{Soc}_2(A)$ 具有无限加法阶。那么 $d*x, x*d \in \langle d*d\rangle_+$，对每个 $x \in \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Soc}(A))$均成立。

证明。 设 $x \in \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Soc}(A))$。命题 12 表明，存在一个正整数 n 使得 $nd \in \mathrm{Soc}(A)$。于是，$(nd)*x = x*(nd) = 0$。特别地，可得 $\lambda_x(nd) = nd$。由引理 7，$\langle d\rangle = \langle d\rangle_+ + \langle d*d\rangle_+$。此外，$U := \langle d*d\rangle_+$ 是一个子括号，因为 $d*d \in \mathrm{Soc}(A)$。因此， U 是 A 的一个理想，而引理 11 表明 U 是有限的。因此， $\langle d\rangle = \langle d\rangle_+ \oplus U$。

商 A/U也是一个 Dedekind 左 brace。于是，$(d+U)*(d+U) = (d*d) + U = U$。因此， $\langle d+U\rangle = \langle d+U\rangle_+ = \langle d\rangle_+ + U$是 A/U中的一个子括号，同时也是一个理想。此外， $d+U$ 具有加法无限阶，因此，引理 10 蕴含 $d+U \in \mathrm{Soc}(A/U)$。特别地，可得

$$U = (d+U)*(x+U) = (d*x) + U,$$

从而 $(d*x) \in U$。

另一方面，由于 $\langle d+U\rangle_+$是 A/U的理想，我们有$\lambda_{x+U}(\langle d+U\rangle_+) = \langle d+U\rangle_+$。因此，要么 $\lambda_{x+U}(d+U) = d+U$，要么 $\lambda_{x+U}(d+U) = -d+U$。在前一种情况下，我们得到

$$d+U = (x+U)(d+U) - (x+U) = xd - x + U.$$

因此，$x*d=xd-x-d\in U$。

现在假设 $\lambda_{x+U}(d+U)=-d+U$。那么，$\lambda_{x+U}(nd+U)=-nd+U$。另一方面，由于 $\lambda_x(nd)=nd$，我们得到 $\lambda_{x+U}(nd+U)=nd+U$，从而推出 $2nd+U=U$。由于 U 是有限的，这意味着 d 的加法阶有限，这与假设矛盾。□

引理 14.设 $d\in \mathrm{Soc}_2(A)$ 的加法阶有限。若 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 的加法群不是周期的，则对每个 $x\in \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Soc}(A))$，都有 $d*x, x*d\in\langle d*d\rangle_+$。

证明。令 k 为 d 的加法阶。那么，$0=d*(kd)=k(d*d)$。因此，由引理 7 可知，$\langle d\rangle=\langle d\rangle_+ +\langle d*d\rangle_+$ 是有限的。另一方面，命题 12 表明 Soc(A) 的加法群不是周期的。因此，存在一个 $b\in$ Soc(A)，其加法阶无限。故 $\langle b\rangle_+\cap\langle d\rangle=\{0\}$。由于 $\langle b\rangle_+$ 和 $\langle d\rangle$ 都是理想，我们有 $d*b=0=b*d$。由此可得

$$\begin{aligned}(b+d)*(b+d)=(bd)*(b+d)=(bd)*b+(bd)*d=\\ =b*(d*b)+b*b+d*b+b*(d*d)+b*d+d*d=\\ =d*d,\end{aligned}$$

令 $x\in$ Ann$_A$(Soc(A))。由于 $b+d$ 的加法阶是无限的，引理 13 蕴含 $(b+d)*x, x*(b+d)\in\langle d*d\rangle_+$。但我们看到

$$\begin{aligned}(b+d)*x=(bd)*x=b*(d*x)+b*x+d*x=d*x,\\ x*(b+d)=x*b+x*d=x*d,\end{aligned}$$

因为 $b\in$ Soc(A) 且 $x\in$ Ann$_A$(Soc(A))。因此，引理得证。□

命题 15. 假设$\mathrm{Soc}_2(A)$ 的加法群不是周期的。那么 $\mathrm{Soc}_2(A)\leq \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Soc}(A))$。特别地，若 $A=\mathrm{Soc}_2(A)$，则$\mathrm{Soc}(A)=\zeta(A)$。

证明。设 $N:=$ Soc$_2$(A)∩Ann$_A$(Soc(A))，由引理 8 可知这是一个子箍，因此是 A 的理想。假设 $B\neq$ Soc$_2$(A)。那么，引理 8 蕴含 $|\mathrm{Soc}_2(A)/N|=2$ 且 $\lambda_u(a)=-a$，对每个 $u\in$Soc(A) 以及每个 $d\in$Soc$_2$(A) $\setminus N$ 都成立。固定 $d\in$Soc$_2$(A) $\setminus N$。由于每个二阶左 brace 都是阿贝尔的，因此可得 d^2，$2d\in N$。

假设 d具有无限加法阶。那么，由命题 12 可知，存在一个正整数 t，使得 $t(2d)\in$ Soc(A)。由此可得$\lambda_d(2td)=-2td$。另一方面，

$$\lambda_a(2td)=-d+d(2td)=-d+2td^2-(2t-1)d=2td^2-2td.$$

因此，$0 = 2td^2 = 2t(2d + d * d) = 4td + 2(d * d)$。但是，引理 11 表明 $d * d$ 具有有限加法阶。因此，$4td$ 具有有限加法阶，这与假设矛盾。故 d 具有有限加法阶 m，于是，

$$0 = d * 0 = d * (md) = m(d * d).$$

现在，由于 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 的加法群不是周期的，且 $\mathrm{Soc}_2(A) = \langle d \rangle_+ + N$，可知 B 的加法群不是周期的。令 $u \in N$具有无限加法阶。于是，根据引理 14，$d * u \in \langle d * d \rangle_+$，因此，$d*u$ 具有有限加法阶。另一方面，根据命题 12，存在一个正整数 n，使得 $nu \in \mathrm{Soc}(A)$。由此可得 $\lambda_d(nu) = -nu$。但是，这意味着

$$n(d * u) = d * (nu) = \lambda_d(nu) - nu = -2nu,$$

这意味着 u 具有有限加法阶。这就产生了最终矛盾 .
□

最后一个关键步骤是证明：如果 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 的加法群是非周期的，那么 $\mathrm{Soc}(A)$ 包含一个与周期的局部循环群同构的阿贝尔理想，其商是一个阿贝尔箍（见推论 19 和 20）。

从现在起，我们假设 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 的加法群是非周期的。

引理 16。设 T 是$\mathrm{Soc}(A)$的加法群的周期部分。那么，商$\mathrm{Soc}_2(A)/T$ 是阿贝尔的。

证明。若 $\mathrm{Soc}(A)$ 的加法群是周期的，则 $T = \mathrm{Soc}(A)$，因此 $\mathrm{Soc}_2(A)/T = \mathrm{Soc}_2(A)/\mathrm{Soc}(A)$，而它是阿贝尔的。

假设 $\mathrm{Soc}(A)$ 的加法群不是周期的。由于 $\mathrm{Soc}(A)$ 是阿贝尔的，因此我们有 T 是 A 的子箍，进而是 A 的理想。另一方面，根据命题 15，$\mathrm{Soc}_2(A) \leq \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Soc}(A))$。

设 $d \in \mathrm{Soc}_2(A)$ 的加法阶有限。那么，$d * d \in T \leq \mathrm{Soc}(A)$，并且根据引理 14，对于每个 $x \in \mathrm{Soc}_2(A)$，都有 $d * x, x * d \in \langle d * d \rangle_+ \leq T$。

现在假设 $d \in \mathrm{Soc}_2(A)$ 具有无限加法阶。根据引理 7 和引理 11，我们有 $\langle d \rangle = \langle d \rangle_+ \cap \langle d * d \rangle_+$，其中 $d * d \in \mathrm{Soc}(A)$ 具有有限加法阶。因此，$\langle d * d \rangle_+ \leq T$。现在，引理 13 意味着，对于每个 $x \in \mathrm{Soc}_2(A)$，都有 $d * x, x * d \in \langle d * d \rangle_+ \leq T$。
□

引理 17. 假设 $\mathrm{Soc}(A)$ 的加法群的周期部分是某个素数 p 对应的 p-子群。如果 a, $b \in \mathrm{Soc}_2(A)$ 满足 $a * a \neq 0 \neq b * b$，那么 $\langle a * a \rangle_+ \leq \langle b * b \rangle_+$ 或 $\langle b * b \rangle_+ \leq \langle a * a \rangle_+$。

证明。 设 $u := a * a, v := b * b \in \mathrm{Soc}(A)$。引理 16 表明， u 和 v具有有限加法阶。

首先，我们断言 $\langle u\rangle_+ \cap \langle v\rangle_+ \neq \{0\}$。事实上，假设 $\{0\} = \langle u\rangle_+ \cap \langle v\rangle_+$。由引理13和14， $a * b$， $b * a \in \langle u\rangle_+ \cap \langle v\rangle_+ = \{0\}$。特别地， $a + b = ab$。由此可得

$$\begin{aligned}(a+b)*(a+b) &= (ab)*(a+b) = (ab)*a + (ab)*b = \\ &= a*(b*a) + b*a + a*a + a*(b*b) + a*b + b*b = \\ &= a*a + b*b = u + v.\end{aligned}$$

再次由引理13和14， $a*(a+b) \in \langle (a+b)*(a+b)\rangle_+ = \langle u+v\rangle_+$。但是，我们看到 $a*(a+b) = a*a + a*b = a*a = u$。因此，我们得出矛盾，因为 $\langle u\rangle_+ \cap \langle v\rangle_+ = \{0\}$ 和 $\langle u\rangle_+$， $\langle v\rangle_+$ 是 p-子群。

令 $U := \langle u\rangle_+ \cap \langle v\rangle_+$ ，它是 Soc(A) 的子括号，因此也是 A 的理想。假设 $U \neq \langle u\rangle_+$ 和 $U \neq \langle v\rangle_+$ 都不成立。由此可知，商 $\langle u\rangle_+/U$ 和 $\langle v\rangle_+/U$ 均非平凡。于是我们得到

$$\begin{aligned}(a+U)*(a+U) &= a*a + U = u + U \neq U,\\ (b+U)*(b+U) &= b*b + U = v + U \neq U.\end{aligned}$$

该假设对商 A/U 也成立，因此根据第一个断言， $\langle u+U\rangle_+ \cap \langle v+U\rangle_+$ 非零。这与 U 的定义矛盾。

□

命题 18. 假设$\mathrm{Soc}(A)$ 的加法群的周期部分是某个素数 p 的 p-子群。那么以下结论成立

1. $\mathrm{Soc}(A)$包含一个阿贝尔理想 P，它同构于循环 p-群或 ***Prüfer*** p-群；
2. 商 $\mathrm{Soc}_2(A)/P$ 是阿贝尔 ***brace***。

证明。 如果 $a * a = 0$ 对每个元素 $a \in \mathrm{Soc}_2(A)$ 都成立，那么定理 A 表明 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 是一个阿贝尔子 brace，结论得证。因此，假设 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 有一个元素 a_1 ，使得 $0 \neq c_1 := a_1 * a_1 \in \mathrm{Soc}(A)$。根据引理 11，存在某个正整数 k_1 ，使得 $p^{k_1}c_1 = 0$。此外， $\langle c_1\rangle_+$ 是 A的一个理想，因为 $\langle c_1\rangle_+$ 是 Soc(A) 的一个子括号。

如果 $a*a \in \langle c_1\rangle_+$ 对于每个元素 $a \in \mathrm{Soc}_2(A)$都成立，那么定理 A 表明，$\mathrm{Soc}_2(A)/\langle c_1\rangle_+$ 是一个阿贝尔箍，结论得证。因此，假设 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 中存在一个元素 a_2 ，使得 $c_2 := a_2 * a_2 \notin \langle c_1\rangle_+$。同样，引理 11 意味着 c_2 具有有限加法阶，因此对于某个正整数 k_2，有 $p^{k_2}c_2 = 0$。此外， $\langle c_2\rangle_+$ 也是 A的一个理想，而引理 17 意味着$\langle c_1\rangle_+ \leq \langle c_2\rangle_+$，因此 $k_1 < k_2$。

递归地重复上述论证，我们得到：要么 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 中存在一个元素 a_t，使得 $\langle a_t * a_t\rangle_+ \leq \mathrm{Soc}(A)$ 同构于一个循环 p-群，并且商 $\mathrm{Soc}_2(A)/\langle a_t * a_t\rangle_+$ 是阿贝尔的；要么 $\mathrm{Soc}_2(A)$ 包含一个无限子集 $\{a_j \mid j \in \mathbb{N}\}$，其元素满足：对于每个 $j \in \mathbb{N}$，c_j:$\mathrm{Soc}(A)$ 具有有限加法阶 p^{k_j}，其中某个正整数为 k_j。在后一种情况下，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，同样有 $\langle c_j\rangle_+$ 是一个理想，满足$c_{j+1} \notin \langle c_j\rangle_+$、$\langle c_j\rangle_+ \leq \langle c_{j+1}\rangle_+$和 $p^{k_j} < p^{k_{j+1}}$。令 $P := \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\langle c_j\rangle_+ \leq \mathrm{Soc}(A)$。显然，$P$ 是一个同构于 Prüfer p-群的阿贝尔理想。

假设存在 $d \in \mathrm{Soc}_2(A)$，使得 $d * d \notin P$。根据引理 11，$d * d$ 的加法阶有限，为 p^m，其中 m 是某个正整数。选取 $r \in \mathbb{N}$，使得 $m < r$。根据引理 17，我们有 $\langle d * d\rangle_+ \leq \langle c_r\rangle_+$ 或 $\langle c_r\rangle_+ \leq \langle d * d\rangle_+$。由于 $d * d \notin P$，可得 $\langle c_r\rangle_+ \leq \langle d * d\rangle_+$，这与 r 的选取矛盾。

因此，我们得出，对于每个 $a \in \mathrm{Soc}_2(A)$，都有 $a * a \in P$。所以，由定理 A 可知，$\mathrm{Soc}_2(A)/P$ 是一个阿贝尔箍。 □

推论 19. 由此可知，$\mathrm{Soc}(A)$ 包含一个阿贝尔理想 P，该理想同构于一个周期的局部循环群。此外，商 $\mathrm{Soc}_2(A)/P$ 是一个阿贝尔箍。

证明。令 T 为 $\mathrm{Soc}(A)$ 的加法群的周期部分。我们有 $T = \bigoplus_{p\in\pi(T)} T_p$，其中 T_p 是 T 的 p-分量，$p \in \pi(T)$。固定 $p \in \pi(T)$，并令 $R_p := \bigoplus_{q\neq p} T_q$，使得 $T = T_p \oplus R_p$。由于 $\mathrm{Soc}(A)$ 是阿贝尔的，R_p是一个子括号，因此也是 A 的一个理想。由命题 18，T/R_p包含一个阿贝尔理想 B_p/R_p，它同构于一个循环 p-群或一个 Prüfer p-群。此外，也有 $\mathrm{Soc}_2(A)/R_p * \mathrm{Soc}_2(A)/R_p \leq B_p/R_p$。因此，我们有 $B_p = C_p \oplus R_p$，其中 $C_p \leq \mathrm{Soc}(A)$ 是一个阿贝尔理想，同构于一个循环 p-子群或一个 Prüfer p-群。

现在，令 $P := \bigoplus_{p\in\pi(T)} C_p \leq \mathrm{Soc}(A)$。那么，$P$是一个阿贝尔理想，同构于一个周期局部循环子群，并且对每个$p \in \pi(T)$，都有 $C_p \oplus R_p = P + R_p$。因此，对每个 $p \in \pi(T)$，也有 $\mathrm{Soc}_2(A) * \mathrm{Soc}_2(A) \leq C_p \oplus R_p = P + R_p$。因此，$\mathrm{Soc}_2(A) * \mathrm{Soc}_2(A) \leq \bigcap_{p\in\pi(T)} P + R_p$。

令 $U := \bigcap_{p\in\pi(T)} P + R_p$，并将 U 的 p 分量记为 U_p，$p \in \pi(T)$。固定 $p \in \pi(T)$。显然，$C_p \leq U_p$，因为 $P \leq U$。另一方面，我们还有 $U_p \leq U \leq P + R_p = C_p + R_p$。因此，$U_p = C_p + (U_p \cap R_p)$。由于 R_p 不包含 p-元素，$U \cap R_p = \{0\}$，从而 $U_p = C_p$。因此，$U = P$，并且我们有

$$\mathrm{Soc}_2(A) * \mathrm{Soc}_2(A) \leq \bigcap_{p\in\pi(T)} P + R_p = P. \qquad \square$$

推论20. 设 A 是一个 ***Dedekind*** 左 ***brace***，满足 $A = \mathrm{Soc}_2(A)$，且 A 的加法群不是周期的。那么，以下结论成立：

- $\zeta(A)$ $=\mathrm{Soc}(A)$，且 $A/\zeta(A)$ 的加法群是周期的。
- $\zeta(A)$ 包含一个与周期局部循环群同构的阿贝尔理想 P，且 A/P 是一个阿贝尔箍。

证明。 由命题15和12以及推论 19可得。 □

定理C的证明。 由推论20， $\zeta(A)$包含一个与周期局部循环群同构的阿贝尔理想 P，并且满足 $A*A \leq P$。在 $\zeta(A)$中选取一个子括号 B，使其在性质 $B \cap P =\{0\}$下极大。假设商 $\zeta(A)/B$ 的加法群不是周期的，即存在 $u+B \in \zeta(A)/B$ 具有无限加法阶。令$U/B := \langle u+B\rangle_+$，其中 U 是 $\zeta(A)$ 的一个子括号。由于$(P+B)/B \cong P$的加法群是周期的，交 $U/B \cap (P+B)/B$ 为零。因此 $U \cap P = \{0\}$，从而得到矛盾。这个矛盾表明， $\zeta(A)/B$ 的加法群是周期的。此外，由推论20， $A/\zeta(A)$的加法群也是周期的。因此， $T := A/B$ 的加法群是周期的。

现在，由于 $P \leq \zeta(A)$，我们有 $(P+B)/B \leq \zeta(A/B)$。另一方面，由于 $A*A \leq P$and $T*T = (A/B)*(A/B) = (A*A+B)/B$，可得 $T*T \leq (P+B)/B$。因此， $T*T \leq \zeta(T)$，且 $T*T$ 的加法群是周期的、局部循环的。

最后，取 $D := A/P$。由于 $B \cap P = \{0\}$，可知 A 同构于直和 $A/B \oplus A/P$ 的某个子括号，这就证明了该定理。

□

致谢

第一、第二和第四位作者得到科学、创新与大学部、国家研究署、欧洲区域发展基金（项目编号：PID2024-159495NB-I00）以及瓦伦西亚自治区政府教育、大学与就业部（项目编号：CIAICO/2023/007）的资助。第三位作者非常感谢自治区政府创新、大学、科学与数字社会部（西班牙瓦伦西亚自治区）和瓦伦西亚大学提供的经费支持，以便在瓦伦西亚自治区的研究中心接收受乌克兰战争影响的研究人员。

参考文献

[1] D. Bachiller、F. Cedó、E. Jespers 和 J. Okniński。左 brace 的非对称积与简单性；杨-巴克斯特方程的新解。《当代数学通讯》，21(8):1850042，2019年。[2]A. Ballester-Bolinches、R. Esteban-Romero、M. Ferrara、V. Pérez- Calabuig 和 M. Trombetti。左斜 brace 的中心幂零性与杨-巴克斯特方程的解。《太平洋数学杂志》，335(1):1–32，2025年。[3]A. Ballester-Bolinches、R. Esteba n-Romero、P. Jiménez-Seral 和 V. Pérez-Calabuig。可解斜左 brace 与杨-巴克斯特方程的可解解。《数学进展》，455：论文编号 109880，共 27 页，2024年。[4] A. Ballester-Bolinches、R. Esteban-Romero、L. A. Kurdachenko 和 V. Pérez-Calabuig。论每个子括号都是理想的左 brace。《数学成果》，80(1):1–21，2025年。[5] A. Ballester-Bolinches、M. Ferrara、V. Pérez-Calabuig 和 M. Trom- betti。关于右幂零与强幂零斜 brace 的札记。《爱丁堡皇家学会会刊：*A*辑，数学》，即将刊出，2024年。[6] M. Bonatto 和 P. Jedlička。斜 brace 的中心幂零性。《代数与应用杂志》，22(12)：论文编号 2350255，共 16 页，2023年。[7] F. Catino、I. Colazzo 和 P. Stefa nelli。具有非平凡湮灭子的斜左 brace。《代数与应用杂志》，18(2):1950033，共 23 页，2019年。[8] F. Cedó、E. Jespers、Ł. Kubat、A. Van Antwerpen 和 C. Verwimp。关于杨-巴克斯特方程的集合论解之结构幺半群和群的各种幂零类型。《纯粹与应用代数杂志》，227(2):107194，2023年。[9] F. Cedó、E. Jespers 和 J. Okniński。集合论杨-巴克斯特方程解的可缩性。《数学进展》，224(6):2472–2484，2010年。[10] F. Cedó、E. Jespers 和 J. Okniński。brace 与杨-巴克斯特方程。《数学物理通讯》，327:101–116，2014年。[11] F. Cedó 和 J. Okniński。无平方因子基数的杨-巴克斯特方程不可分解解。《数学进展》，430:109221，共 26 页，2023年。

[12] F. Cedó、A. Smoktunowicz 和 L. Vendramin。幂零型斜左胚。伦敦数学会会刊，118(6):1367–1392，2019年。[13] P. Etingof、T. Schedler 和 A. Soloviev。量子杨-巴克斯特方程的集合论解。《杜克数学杂志》，100:169–209，1999年。[14] T. Gateva-Ivanova。杨-巴克斯特方程的集合论解、胚与对称群。《数学进展》，338:649–701，2018年。[15] T. Gateva-Ivanova 和 P. Cameron。杨-巴克斯特方程的多置换解。《数学物理通讯》，309(3):583–621，2012年。[16] P. Jedlička 和 A. Pilitowska。置换群非阿贝尔且多置换级为 2 的杨-巴克斯特方程不可分解对合解。《组合论杂志》*A*辑，197：论文编号 105753，共 35 页，2023 年。[17] E. Jespers、A. Van Antwerpen 和 L. Vendramin。斜胚的幂零性与杨-巴克斯特方程的多置换解。《当代数学通讯》，25(09)：论文编号 2250064，共 20 页，2023 年。[18] W. Rump。胚、根环与量子杨 - 巴克斯特方程。《代数杂志》，307:153–170，2007年。[19]W. Rump。循环胚的分类。《纯粹与应用代数杂志》，209:671–685，2007年。[20] R. Schmidt。群的子群格，第 14 卷，收录于数学中的 *De Gruyter* 论著。Walter de Gruyter，柏林，1994年。[21] A. Smoktunowicz。关于杨-巴克斯特方程集合论解的札记。《代数杂志》，500:3–18，2018年。[22] A. Smoktunowicz。关于恩格尔群、幂零群、环、胚与杨-巴克斯特方程。《美国数学会汇刊》，370(9):6535–6564，2018年。