arXiv:2601.09592v1 [math.SP] 14 Jan 2026

# 关于涉及扭转刚度、主特征值和周长的若干泛函

Vincenzo Amato、Carlo Nitsch、Cristina Trombetti 和 Federico Villone

**摘要**

本文研究区域 $\Omega$ 的第一狄利克雷特征值 $\Lambda(\Omega)$ 与扭转刚度 $T(\Omega)$ 之间的一些关系。我们考察在周长给定的集合中优化乘积$\Lambda(\Omega)T(\Omega)$的问题，既考虑具有有限周长的开集类，也考虑凸区域类。

我们还给出量 $\Lambda(\Omega)T(\Omega)^q$ 在 $q > 0$ 条件下的局部结果，其中约束条件为体积约束或周长约束。

关键词：Pólya 泛函，形状优化，形状优化中的稳定性。2020年数学主题分类：49Q10、35J25、49K20、35J05。

## 目录

1 引言 1 2 记号与预备知识 6 2.1 凸集的一些性质.6 2.2 形状导数与局部最优性 . . . . . 7 3 开集类中的优化 9 4 凸集类中的优化 12 5 近球形区域中球的最优性 16 5.1 关于改进的连续性条件 . . . . . 16 5.2 球的临界性 .19 5.3 关于强制性条件 .19 5.4 证明 定理 1.5和定理 1.6 . . . . . 27 6 可能的推广 27 6.1 开集类中的优化 . . . . . 27 6.2 凸集类中的优化 . . . . . 29 6.3 近球形集合类中的优化 . 30

## 1 引言

我们研究区域的形状如何影响与拉普拉斯算子相关的两个基本量： 扭转刚度，它衡量区域抵抗扭转力的能力；以及第一狄利克雷特征值，它对应于区域的主振动频率。这些量反映了区域几何性质的不同侧面：扭转刚度与弹性和机械稳定性有关，而第一特征值则与波传播和热扩散相关。自 20 世纪初以来，理解二者之间的相互作用一直是形状优化领域的核心问题，Pólya 的开创性工作尤为著名 [38]。

在本文中，我们着重研究在给定周长的区域中优化这两个量乘积的问题。对于可测集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$，我们将其德乔治周长定义为

$$P(\Omega) := \sup\left\{\int_\Omega \operatorname{div}\varphi\, dx : \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m),\ \|\varphi\|_\infty \le 1\right\},$$

并用 $V(\Omega)$ 表示其勒贝格测度。根据等周不等式，任何具有有限周长的集合也具有有限测度。

对于具有有限测度的 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$，$\Omega$ 的扭转刚度定义为

$$T(\Omega) := \max_{\varphi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\left(\int_\Omega \varphi \, dx\right)^2}{\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx}, \tag{1.1}$$

或者，等价地，

$$T(\Omega) = \int_\Omega w \, dx,$$

其中 $w \in H_0^1(\Omega)$ 是泊松问题的唯一解

$$\begin{cases} -\Delta w = 1 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

集合 $\Omega$ 的扭转刚度满足缩放性质

$$T(t\Omega) = t^{m+2} T(\Omega) \qquad \forall t > 0.$$

根据圣维南不等式，该不等式最初由 [42] 提出，并由 [39], 证明，固定体积区域中球的扭转刚度最大。因此，在周长给定的区域中，球的扭转刚度也最大。以缩放不变的形式表示，该不等式为

$$P(\Omega)^{-\frac{m+2}{m-1}} T(\Omega) \le P(B)^{-\frac{m+2}{m-1}} T(B), \tag{1.3}$$

其中 $B$ 表示一个球。

类似地，$\Omega$ 上拉普拉斯算子的第一狄利克雷特征值定义为

$$\Lambda(\Omega) := \min_{\varphi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx}{\int_\Omega \varphi^2 \, dx},$$

或者等价地，它可以刻画为使边值问题有解的最小 $\lambda > 0$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

存在非平凡解 $u \in H_0^1(\Omega)$。

集合 $\Omega$ 的第一狄利克雷特征值满足缩放性质

$$\Lambda(t\Omega) = t^{-2} \Lambda(\Omega), \qquad \forall t > 0,$$

根据法贝尔–克拉恩不等式，该不等式由 [41]提出猜想，并由 [25]和 [31] ,证明，在固定体积区域中，第一狄利克雷特征值在球上取得最小值。因此，在周长给定的区域中，球也使第一特征值最小。以缩放不变的形式表示，这可写为

$$P(\Omega)^{\frac{2}{m-1}} \Lambda(\Omega) \ge P(B)^{\frac{2}{m-1}} \Lambda(B). \tag{1.4}$$

如上所述，本文的主要目标是优化乘积

$$T(\Omega)\,\Lambda(\Omega)$$

在周长约束下。等价地，对于每个 $\Omega \in \mathcal{O}$，其中

$$\mathcal{O} := \{\text{open subsets of } \mathbb{R}^m \text{ with finite perimeter}\}, \tag{1.5}$$

我们考虑尺度不变泛函

$$G(\Omega) := \frac{T(\Omega)\,\Lambda(\Omega)}{P(\Omega)^{\frac{m}{m-1}}}. \tag{1.6}$$

由不等式 (1.3) 和 (1.4) 可知， $G(\Omega)$ 的优化并非易事，因为我们可以将其改写为一个乘积：

$$G(\Omega) = \left[P(\Omega)^{-\frac{m+2}{m-1}}\,T(\Omega)\right]\left[P(\Omega)^{\frac{2}{m-1}}\,\Lambda(\Omega)\right].$$

因此，我们可以看到这两个泛函之间存在竞争关系，它们在球上的表现恰好相反。

许多其他泛函中也能观察到同样的竞争关系，例如参见 [2, 4, 9, 8, 32]，尤其是尺度不变泛函

$$F(\Omega) := \frac{\Lambda(\Omega)T(\Omega)}{\mathrm{V}(\Omega)}, \qquad \forall \Omega \in \mathcal{O}, \tag{1.7}$$

由 Pólya 在 [38] 中引入。下文也将泛函 $F$ 称为 Pólya 泛函。 [35] 探讨了与该泛函相关的布拉施克-桑塔洛图。

泛函 $G$ 在（1.6）中引入，与（ $F$ 1.7）中的 Pólya 泛函密切相关，因为

$$G(\Omega) = F(\Omega)\,V(\Omega)\,P(\Omega)^{-\frac{m}{m-1}}. \tag{1.8}$$

这一关系有助于深入了解 $G$的性质，因为它的若干性质可以类比 $F$ 的性质来确立。

特别是，在 [10] 和 [6]中，作者证明了

$$\inf_{\Omega\in\mathcal{O}} F(\Omega) = 0 \qquad \text{and} \qquad \sup_{\Omega\in\mathcal{O}} F(\Omega) = 1, \tag{1.9}$$

并且这两个极值均未取到。结合（1.8）中的结果，我们得到以下命题。

**命题 1.1**。 设 $G$ 为（1.6）中定义的泛函，且$O$ 为（1.5）中定义的集合。则

$$\inf_{\Omega\in\mathcal{O}} G(\Omega) = 0, \qquad \sup_{\Omega\in\mathcal{O}} G(\Omega) = m^{\frac{m}{m-1}}\omega_m^{-\frac{1}{m-1}},$$

其中， $\omega_m$ 表示 $\mathbb{R}^m$中的单位球体积。此外，这两个极值都无法在 $O$ 类中取得。

例如，可以考虑越来越薄的集合，从而得到一个极小化序列；对于这些集合， $G(\Omega_n)$ 趋于零。反过来，可以通过对一个球进行适当的均匀化来构造一个极大化序列。这样，泛函 $F(\Omega_n)$ 趋近于 1，并且通过仔细调整孔洞的半径，可以控制式（1.8）中的相应等周比。

研究 O 类中的优化问题后，自然会进一步考察在附加几何约束下情况可能发生怎样的变化。具体而言，我们关注 O 类中凸区域这一子类，记为

$$\mathcal{C} := \{\text{open, bounded, and convex subsets of } \mathbb{R}^m\}. \tag{1.10}$$

转向凸类 $\mathcal{C}$后，关于 Pólya 泛函的若干已知结果已为 $F$的行为提供了重要信息。特别是，正如 [6, 定理 1。2] 和 [14, 注 4。1],所证明的，有

$$\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{m(m+2)} < F(\Omega) < 1-\varepsilon, \tag{1.11}$$

对于某个 $\varepsilon > 0$。关于受限凸平面集合类中的更精确下界，可参见[7, 定理 1.4 和 1.5]。

在 [5], 中，有人猜想，$\mathcal{C}$ 上的 $F$ 上确界可由塌缩圆锥序列逼近，而下确界可由塌缩柱体序列逼近。

另一方面， $G$ 在$\mathcal{C}$ 中的行为则有所不同；事实上，可以证明，若 $\Omega_n$ 是一个变薄序列（定义见定义 2.2）， $G(\Omega_n)$则收敛于 0。因此，极大化序列不可能塌缩，由此得到以下命题。

**命题 1.2**。 设 $G$ 为 (1.6) 中定义的泛函，且$\mathcal{C}$ 为 (1.10)中定义的集合。那么

$$\inf_{\Omega\in\mathcal{C}} G(\Omega) = 0, \qquad and \qquad \sup_{\Omega\in\mathcal{C}} G(\Omega) = \max_{\Omega\in\mathcal{C}} G(\Omega).$$

在平面情形（$m = 2$）下，我们能够证明，与其他容许集合相比， $G$ 在$\mathcal{C}$ 上的任意极大化子都具有更高的正则性。

**命题 1.3.** 令 $G$ 为 (1.6) 中定义的泛函，并令 $\mathcal{C}$ 为 (1.10) 中定义的集合。令$m = 2$ 并令 $\Omega \in\mathcal{C}$ 满足

$$G(\tilde{\Omega}) = \max_{\Omega\in\mathcal{C}} G(\Omega),$$

则 $\tilde{\Omega}$ 属于 $C^1$ 类。

命题 1.2 中的最大值是否由一个球取得，仍是一个未解决问题；数值模拟似乎支持这一猜想。沿着这一思路，我们证明该球是**局部极大化子**，其对应的泛函为 $G$。更确切地说，我们在以下定义的近球形区域类中对泛函 $G$ 进行优化。

**定义 1.4.** 令 $B_1$ 表示 $\mathbb{R}^m$中的单位球。对于所有满足 $\|h\|_{L^\infty(\partial B_1)} < \frac{1}{2}$ 的 $h \in C^0(\partial B_1)$，我们将通过其边界定义的集合 $B_h$ 记为

$$\partial B_h := \{\, x \in \mathbb{R}^m : x = (1 + h(y))y,\ y \in \partial B_1 \,\}.$$

对于任意 $\delta$， $\gamma > 0$，我们将近球形集合类 $S_{\delta,\ \gamma}$ 定义为

$$S_{\delta,\gamma} := \{\, B_h : h \in C^{2,\gamma}(\partial B_1), \quad \int_{\partial B_1} h\, d\mathcal{H}^{m-1} = 0, \quad \int_{\partial B_1} hx\, d\mathcal{H}^{m-1} = 0 \quad \text{and} \quad \|h\|_{C^{2,\gamma}} \le \delta \,\}. \tag{1.12}$$

现在，我们在近球形集合类中，为球建立局部最优性与稳定性结果。

**定理 1.5.** 设 $G$ 为定义于 (1.6)中的泛函，并设 $\gamma \in (0,1)$。存在 $\delta > 0$ 和一个正常数 $C = C(m,\delta)$ 使得对每个 $B_h \in S_{\delta,\gamma}$ (定义于 (1.12))

$$G(B_1) - G(B_h) > C \|h\|^2_{H^1(\partial B_1)}.$$

出现在定理 1.5 中的常数未明确给出。

此外，我们采用类似的技巧，为其他 Pólya 型泛函建立局部最优性结果。特别地，对于任意 $q > 0$，我们考虑如下泛函族

$$F_q(\Omega) := \frac{T(\Omega)^q \Lambda(\Omega)}{\mathrm{V}(\Omega)^{\alpha_q}}, \qquad \text{where} \qquad \alpha_q = \frac{(m+2)q-2}{m}. \tag{1.13}$$

注意， $F_q$ 在*Kohler–Jobin* 泛函 [30, 29] 当$q = \frac{2}{m+2}$时与之相同，而在 $q = 1$时，则与*Pólya* 泛函 （1.7）中定义的相同。

文献中已确立了泛函 $F_q$ 的若干结构性质；例如参见 [5, 15]。

特别地，（1.11）给出了 Pólya 泛函的界，而在 [30] （另见 [12]）中，作者证明了

$$F_{\frac{2}{m+2}}(\Omega) = T(\Omega)^{\frac{2}{m+2}} \Lambda(\Omega) \ \geq \ T(B)^{\frac{2}{m+2}} \Lambda(B) \qquad \forall \Omega \in \mathcal{O}. \tag{1.14}$$

关于不同区域集合类及 $F_q$ 取值范围内 $q$ 的下确界与上确界的已知结果汇总见表1。

| 集合类 | $q \leq \frac{2}{m+2}$ | $\frac{2}{m+2} < q < 1$ | $q = 1$ | $q > 1$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{O}$ | $\min_{\mathcal{O}} F_q = F_q(B_1)$<br>上确界$_{\mathcal{O}}$ $F_q = +\infty$ | $\inf_{\mathcal{O}} F_q = 0$<br>上确界$_{\mathcal{O}}$ $F_q = +\infty$ | $\inf_{\mathcal{O}} F_q = 0$<br>上确界$_{\mathcal{O}}$ $F_q = 1$ | $\inf_{\mathcal{O}} F_q = 0$<br>上确界$_{\mathcal{O}}$ $F_q < +\infty$ |
| $\mathcal{C}$ | 最小值$_{\mathcal{C}}$ $F_q = F_q(B_1)$<br>上确界$_{\mathcal{C}}$ $F_q = +\infty$ | 最小值$_{\mathcal{C}}$ $F_q > 0$<br>上确界$_{\mathcal{C}}$ $F_q = +\infty$ | 下确界$_{\mathcal{C}}$ $F_q > 0$<br>上确界$_{\mathcal{C}}$ $F_q < +\infty$ | 下确界$_{\mathcal{C}}$ $F_q = 0$<br>最大值$_{\mathcal{C}}$ $F_q < +\infty$ |

表 1：对于不同的 $q$ 范围，泛函 $F_q$ 在各类区域上的下确界和上确界值汇总。

此外， [17] 证明存在 $q_1 > 1$ 使得对所有 $q \geq q_1$,

$$\max_{\mathcal{C}} F_q = F_q(B_1).$$

记 $j_{\frac{m}{2}-1}$为贝塞尔函数 $J_{\frac{m}{2}-1}$的第一个正零点，则我们有如下关于泛函 $F_q$的 $B_1$ 局部行为的刻画。

**定理 1.6**。设 $F_q$ 为(1.13) 中定义的泛函，且 $q > 0$，并设 $\gamma > 0$。则以下性质成立：

*(i)* 若 $q < \dfrac{2}{m+2}$，则存在 $\delta > 0$ 和一个常数 $C = C(m,\ \delta,\ q)$ 使得对于每个 $B_h \in S_{\delta,\ \gamma}$ (定义于 1.12)

$$F_q(B_h) - F_q(B_1) > C \|h\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)}.$$

*(ii)* 若 $\dfrac{2}{m+2} < q < q^* := \dfrac{2}{m+2}\left(\dfrac{j^2_{\frac{m}{2}-1}}{m} - 1\right)$，$B_1$ 既非局部极大值也非局部极小值，即对于所有 $\delta > 0$，都存在 $B_{h_1}, B_{h_2} \in S_{\delta,\ \gamma}$ 使得

$$F_q(B_{h_1}) < F_q(B_1) \quad and \quad F_q(B_{h_2}) > F_q(B_1).$$

*(iii)* 若 $q > q^*$，则存在 $\delta > 0$ 以及一个正常数 $C = C(m、\ \delta、\ q)$，使得对每个 $B_h \in S_{\delta,\ \gamma}$

$$F_q(B_1) - F_q(B_h) > C \left\| h \right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)}.$$

**注 1.7**。由于 $2m < j^2_{\frac{m}{2}-1} < m\left(\frac{m}{2}+2\right)$（见 [28]），可得 $\dfrac{2}{m+2} < q^* < 1$。因此，在每个维数下，都存在一个区间，使得在该区间内 $q$ 的取值 $B_1$ 表现为鞍点。

**论文结构**。在 第 2 节中，我们回顾一些预备概念。在 第 3 节中，我们研究 $\mathcal{O}$ 类上的优化问题。第 4 节 致力于证明 $G$ 在 $\mathcal{C}$ 类上的极大化子的存在性与正则性。在 第 5 节中，我们考察近球形区域类中 $G$ 和 $F_q$ 的局部性质。最后，在 第 6 节中，我们讨论一些可能的推广。

## 2 记号与预备知识

本节分为两部分。第一部分回顾凸集的主要定义和性质，第二部分总结本文将用到的形状导数关键结果。

### 2.1 凸集的一些性质

**定义 2.1.** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^m$的一个有界、开且凸的子集。$\Omega$ 的支撑函数 定义为

$$h_\Omega(y) = \sup_{x\in\Omega}(x \cdot y), \qquad y \in \mathbb{R}^m.$$

此外，$\Omega$ 在方向 $y \in \mathbb{R}^m$ 上的宽度 为

$$\omega_\Omega(y) = h_\Omega(y) + h_\Omega(-y),$$

并且，由于宽度关于方向连续，$\Omega$ 存在最小宽度，其值为

$$w(\Omega) = \min\{\omega_\Omega(y) \mid y \in \mathbb{S}^{m-1}\}.$$

此外，我们将 $\Omega$ 的直径 定义为

$$\operatorname{diam}(\Omega) := \sup\{\|x - y\|_{\mathbb{R}^m} \mid x, y \in \Omega\}.$$

**定义 2.2**。设 $\{\Omega_n\}$是由 $\mathbb{R}^m$中的非空、有界、开凸集构成的序列。若 $\Omega_n$ 是一个变薄区域序列，则称

$$\lim_n \frac{w(\Omega_n)}{\operatorname{diam}(\Omega_n)} = 0.$$

若将 $R_\Omega$ 记作 Ω 的内切半径，即

$$R_\Omega = \sup\{r \in \mathbb{R} : B_r(x) \subset \Omega \text{ for some } x \in \Omega\},$$

我们有以下估计，该估计在 [11]平面情形中得到证明，并在 [13] 中推广至任意维数。

**命题 2.3**。 *[13, 引理 B。1 ]* 对于任意Ω ∈$\mathcal{C}$，其中$\mathcal{C}$ 定义于(1.10)，我们有

$$\frac{1}{m} \le \frac{V(\Omega)}{P(\Omega)R_\Omega} < 1. \tag{2.1}$$

对于一列变细圆柱，上界是尖锐的；而下界是尖锐的，例如球便能达到。此外，对于 $m = 2$，任意外切多边形（即内切圆与所有边都相切的多边形）都能取到下界等号。

最后，我们回顾凸集的直径、周长、体积和最小宽度之间的以下关系。

**命题 2.4**。 *[24, 引理 4。1]*对于任意Ω $\in \mathcal{C}$，其中$\mathcal{C}$ 定义于(1.10)，则存在一个维数常数 $C = C(m)$ 使得

$$\operatorname{diam}(\Omega) \le C\frac{P(\Omega)^{m-1}}{V(\Omega)^{m-2}}. \tag{2.2}$$

**命题 2.5.** *[11, 方程 (9)]* 设 Ω 是一个有界开凸集 $\mathbb{R}^n$。 $n$

$$\frac{w(\Omega)}{2} \ge R_\Omega \ge \begin{cases} w(\Omega)\dfrac{\sqrt{n+2}}{2n+2} & n \text{ even} \\ w(\Omega)\dfrac{1}{2\sqrt{n}} & n \text{ odd}. \end{cases} \tag{2.3}$$

## 2.2 形状导数与局部最优性

设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ 是一类集合，且 $A : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ 是一个形状泛函，也就是说，它为$\mathcal{A}$中的每个集合赋予一个实数值。下面我们回顾形状导数的一些经典性质，它们描述了 $A$ 关于集合无穷小变形的敏感性（例如参见 [27, 20]）。

**定理 2.6.** （一阶和二阶形状导数结构定理， *[27, 定理 5.9.2]*）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是一个开、有界且 $C^3$ 的集合。设

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{\, (I+\theta)\Omega : \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m),\ \|\theta\|_{W^{1,\infty}} \le 1 \,\},$$

并设 $A$ 是定义在 $\mathcal{V}(\Omega)$上的形状泛函。考虑函数

$$A_\Omega : \theta \in \{\vartheta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \|\vartheta\|_{W^{1,\infty}} \le 1\} \to A((I+\theta)(\Omega)) \in \mathbb{R},$$

并假设 $A_\Omega(\theta)$ 在0处二阶弗雷歇可微。那么

*i.* 存在一个连续线性泛函 $\ell_1[A](\Omega)$ 定义在 $C^1(\partial\Omega)$ 上，使得

$$A'_\Omega(0)\xi = \ell_1[A](\Omega)(\xi|_{\partial\Omega} \cdot n)$$

对所有 $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$，其中 $n$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

ii. 存在一个连续对称双线性型 $\ell_2[A]$ $C^2$ $\partial$ $^2$ $\xi$ $\zeta$ $\in(\Omega)$
定义在( Ω)上，使得对于所有$C^\infty$ $\mathbb{R}^m$ $\mathbb{R}^m$ $^2$(,) (,)

$$A''_\Omega(0)(\xi,\zeta) = \ell_2[A](\Omega)(\xi\cdot n,\zeta\cdot n) + \ell_1[A](\Omega)\big(\mathbf{B}(\zeta_\tau,\xi_\tau)\big) - \nabla_\tau(\zeta\cdot n)\cdot\xi_\tau - \nabla_\tau(\xi\cdot n)\cdot\zeta_\tau\big),$$

其中 $\nabla_\tau$ 是切向梯度， $\xi_\tau$ 和 $\zeta_\tau$ 是 $\xi$ 和 $\zeta$的切向分量，而$\mathbf{B} = D_\tau n$ 是 $\partial\Omega$的第二基本形式。

当Ω 是单位球时，我们省略对集合的依赖。

**注 2.7.** 设 Ω 和 $A$ 如定理 2.6 中所述，并设 $h \in C^\infty(\partial\Omega)$。令 $\Omega_t$ 为通过其边界定义的集合

$$\partial\Omega_t = \{x + th(x)n(x) : x \in \partial\Omega\}.$$

考虑 $a$： $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义的函数为

$$a(t) := A(\Omega_t),$$

then

$$a'(0) = \ell_1[A](\Omega)\cdot h, \quad \text{and} \quad a''(0) = \ell_2[A](\Omega)(h,h).$$

有关更多细节，请参阅 [27, 第 5.9.4]节。

根据 [20], ，我们回顾以下定义，其中用到了分数阶 Sobolev 空间$H^s(\partial\Omega)$，其含义见 [34, 第 7 节3]。

**定义 2.8。** 设 Ω 和 $A$满足定理 2.6。

1. Ω*： =Ω 是临界形状，当 $A$ 时

$$\forall h \in C^\infty(\partial\Omega^*), \quad \ell_1[A](\Omega^*)(h) = 0.$$

2. 临界形状 Ω* 是 $H^s(\partial\Omega^*)$ 中的严格稳定形状 （在体积约束下且忽略平移），条件是:

(a) $\ell_2[A](\Omega^*)$ 连续延拓至 $H^s(\partial\Omega^*)$; (b) 令 $h \in H^s(\partial$
Ω*) \{0} 满足

- $\int_{\partial\Omega^*} h\, d\mathcal{H}^{m-1} = 0$，这保证了扰动区域 $(I + hn)\Omega^*$的体积在一阶近似下保持不变;
- $\int_{\partial\Omega^*} h\, x\, d\mathcal{H}^{m-1} = 0$，这确保了 $(I + thn)\Omega^*$ 的重心在一阶近似下保持不变。

Then

$$\ell_2[A](\Omega^*)(h,h) > 0.$$

对于 为方便起见，我们将刚刚引入的 $H^s(\partial\Omega^*)$ 子空间记为 $\mathcal{T}^s(\partial\Omega^*)$ d:
n

$$\mathcal{T}^s(\partial\Omega^*) := \Big\{\varphi \in H^s(\partial\Omega^*) : \int_{\partial\Omega^*} \varphi\, d\mathcal{H}^{m-1} = \int_{\partial\Omega^*} \varphi\, x\, d\mathcal{H}^{m-1} = 0\Big\}. \tag{2.4}$$

沿用 [20],，我们还引入假设（$\mathbf{C}_{H^{s_2}}$）和（$\mathbf{IC}_{H^s,\ X}$），这些假设将用于给出局部最优性的充分条件。

**假设（$\mathbf{C}_{H^s}$）**：对于 $s \in (0,1]$，，我们称作用于 $\ell$ 上的双线性形式$\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$ 满足条件($\mathbf{C}_{H^s}$)（并称 $A$ 在Ω处满足该条件，当且仅当 $\ell_2[A](\Omega)$ 满足该条件）：

$$\text{there exist } s_1 \in [0,s) \text{ and } c_1 > 0 \text{ such that } \ell = \ell_m + \ell_r \text{ with}$$

$$\begin{cases} \ell_m \text{ is lower semi-continuous in } H^s(\partial\Omega), \\ \ell_m(\varphi,\varphi) \geq c_1 |\varphi|^2_{H^s(\partial\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega), \\ \ell_r \text{ continuous in } H^{s_1}(\partial\Omega), \end{cases}$$

其中 $|\cdot|_{H^s(\partial\Omega)}$ 表示 $H^s(\partial\Omega)$ 半范数。在这种情况下，通过稠密性，$\ell$ 自然延拓到空间 $H^s(\partial\Omega)$。

**假设（$\mathbf{IC}_{H^s,\ X}$）**：设 $X$为一个巴拿赫空间，且满足 $C^\infty \subset X \subset W^{1,\infty}$和 $s \in (0,1]$。若存在 $\eta > 0$ 和一个连续模 $\omega$，使得对每个满足 $\|h\|_X \leq \eta$的 $h \in X$ 以及所有 $t \in [0,1]$，均有：则称 $A$ 在 Ω 处满足假设 ($\mathbf{IC}_{H^s,\ X}$)

$$|a''(t) - a''(0)| \leq \omega(\|h\|_X)\, \|h\|^2_{H^s},$$

其中 $a:\ t \in [0,1] \mapsto a(\Omega_t) \in \mathbb{R}$ 且 $\Omega_t$ 满足

$$\partial\Omega_t = \{x + t h(x)\, n(x),\ x \in \partial\Omega\}.$$

利用上述假设和定义，可得以下定理。

**定理 2.9.** *[20, 定理 1.3]* 设 $\Omega^*$ 属于 $C^3$类，且 $A$ 具有平移不变性，并在 $W^{1,\infty}$中的 $\Omega^*$ 的某邻域内二次弗雷歇可微。假设：

***(a)*** 存在 $s \in (0,1]$ 和一个巴拿赫空间 $X$ 满足 $C^\infty \subset X \subset W^{1,\infty}$ 使得 $A$ 在 ($\mathbf{IC}_{H^s,X}$)和 ($\mathbf{C}_{H^s}$)处满足假设 $\Omega^*$;

***(b)*** $\Omega^*$ 是 $A$的临界形状;

*(c)* $\Omega^*$ 是严格稳定形状，位于 $H^s(\partial\Omega^*)$。

于是存在 $\eta > 0$ 和 $c > 0$，使得对于所有 $h \in T^s(\partial\Omega^*)$，满足 $\|h\|_X \leq \eta$,

$$A(\Omega_h) - A(\Omega^*) \geq c\|h\|^2_{H^s(\partial\Omega^*)}.$$

# 3 开集类中的优化

本节将在具有有限周长、由（1.5）定义的开子集 $\mathbb{R}^m$ 中，$\mathcal{O}$ 类内，为泛函 $G$ 建立精确上下界。所得结果总结于命题 1.1。

命题 *1.1*的证明。我们来证明下确界 $\inf_{\Omega\in\mathcal{O}} G(\Omega) = 0$。考虑$\{\Omega_n\}$一个集合序列，使得

$$\lim_n \frac{\mathrm{V}(\Omega_n)}{P(\Omega_n)^{\frac{m}{m-1}}} = 0.$$

利用（1.9），我们得到

$$0 \leq G(\Omega_n) = F(\Omega_n)\frac{\mathrm{V}(\Omega_n)}{P(\Omega_n)^{\frac{m}{m-1}}} \leq \frac{\mathrm{V}(\Omega_n)}{P(\Omega_n)^{\frac{m}{m-1}}}. \tag{3.1}$$

由于右侧在 $n$ 趋近于 $+\infty$时收敛到零，因此我们推得

$$\inf_{\mathcal{O}} G = 0.$$

关于 $G$ 在类 $\mathcal{O}$ 上的上确界，我们首先证明 $m^{\frac{m}{m-1}}\omega_m^{-\frac{1}{m-1}}$为 $G$提供了一个上界—这直接由（1.9）中的上界和等周不等式得出。事实上，回顾

$$F(\Omega) < 1, \qquad \mathrm{V}(\Omega)P(\Omega)^{-\frac{m}{m-1}} \le m^{\frac{m}{m-1}}\omega_m^{-\frac{1}{m-1}},$$

我们有

$$G(\Omega) = F(\Omega)\,\mathrm{V}(\Omega)P(\Omega)^{-\frac{m}{m-1}} < \mathrm{V}(\Omega)P(\Omega)^{-\frac{m}{m-1}} \le m^{\frac{m}{m-1}}\omega_m^{-\frac{1}{m-1}}. \tag{3.2}$$

现在我们证明，该界确实是 $G$ 的上确界。为此，我们将证明，对任意有界正则开集 $\Omega$，都存在一个集合序列$\{\Omega_n\}$，使得 $G(\Omega_n)$ 收敛到 $\Omega$ 的等周比，即

$$\frac{\mathrm{V}(\Omega)}{P(\Omega)^{\frac{m}{m-1}}}.$$

我们采用 [18] 中使用的均匀化构造（另见 [16]），考虑容量测度 $\mu$，即一种相对于容量测度绝对连续的非负博雷尔测度，其形式为

$$\mu = c\,\mathcal{L}^m,$$

其中 $\mathcal{L}^m$ 表示勒贝格测度， $c > 0$ 是一个固定常数。

我们固定 $n \in \mathbb{N}$，并用边长为 $1/n$的立方体$\{Q_i\}$ 铺满空间 $\mathbb{R}^m$。我们考虑 $B_i$ 以 $Q_i$ 为中心、半径为 $1/2n$ 的球，以及与 $B_i$ 同心的 $E_i$ 球，使得

$$\mathrm{cap}(E_i, B_i) = \mu(Q_i) = \frac{c}{n^m}.$$

我们考虑 $\Omega_n := \Omega \setminus \bigcup_i E_i$（如图 1 所示）。于是我们有（详见 [18] 和 [16]）），

$$\lim_n \Lambda(\Omega_n) = \Lambda(\Omega, \mu) \qquad \text{and} \qquad \lim_n T(\Omega_n) = T(\Omega, \mu),$$

其中

$$\Lambda(\Omega, \mu) = \min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega u^2\,d\mu : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu), \int_\Omega u^2 = 1\right\},$$

and

$$T(\Omega, \mu) = \max\left\{\left(\int_\Omega u\,dx\right)^2 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + c\int_\Omega u^2\,dx\right)^{-1} : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu)\right\}.$$

根据 $\Lambda(\Omega, \mu)$的定义以及 $\mu = c\mathcal{L}^m$这一事实，我们有

$$\Lambda(\Omega, \mu) = c + \Lambda(\Omega).$$

此外，对于 $\delta > 0$，考虑函数 $u_\delta = \varphi(d(x, \partial\Omega))$，其中

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\delta}, & \text{if } t < \delta, \\ 1, & \text{if } t \ge \delta. \end{cases}$$

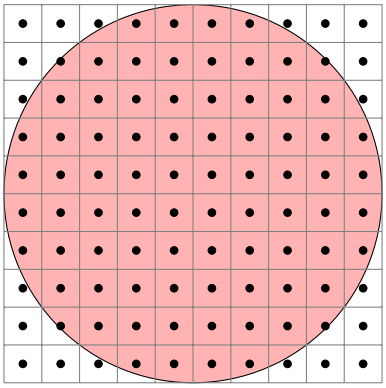


图1：红色的集合 $\Omega_n$

记 $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\}$，并在 $T(\Omega, \mu)$ 中取 $u_\delta$ 作为测试函数，可得

$$T(\Omega, \mu) \geq \frac{\mathrm{V}(\Omega_\delta)^2}{\mathrm{V}(\Omega)} \frac{1}{\delta^{-2} + c}.$$

此外，记 $E_i$ 的半径为 $r$，则有：

**情形** $m = 2$

$$\frac{c}{n^2} = \mu(Q_i) = cap(E_i, B_i) = \frac{2\pi}{\log\left(\frac{1}{2nr}\right)},$$

由此可得

$$r = \frac{1}{2n} e^{-\frac{2\pi n^2}{c}}.$$

**情形** $m \geq 3$

$$\frac{c}{n^m} = \mu(Q_i) = cap(E_i, B_i) = \frac{m\omega_m(m-2)}{r^{2-m} - \left(\frac{1}{2n}\right)^{2-m}},$$

由此可得

$$r = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{m}{m-2}} \left(\frac{c}{\omega_m(m-2) + 2^{m-2}n^{-2}}\right)^{\frac{1}{m-2}}.$$

此时，我们用原始区域的周长和移除的球的周长来估计穿孔集合 $\Omega_n$ 的周长。$\Omega_n$ 的周长可由 $\Omega$ 的周长与孔洞的周长之和控制。更确切地说，利用每个球 $E_i$ 至多贡献其自身周长这一事实，可得

$$P(\Omega_n) \leq P(\Omega) + \sum_{i:\, E_i \cap \Omega \neq \emptyset} P(E_i) \leq P(\Omega) + \sum_{i:\, Q_i \cap \Omega \neq \emptyset} P(E_i) = P(\Omega) + C_n(\Omega) n^m m\omega_m r^{m-1}$$

其中，$C_n(\Omega)n^m$ 表示与 $\Omega$ 相交的立方体 $Q_i$ 的数量。由于 $C_n(\Omega)$ 是与覆盖 $\{Q_i : Q_i \cap \Omega \neq \emptyset\}$相关联的 $\Omega$ 的示性函数的黎曼和，因此，当 $n \to +\infty$时，$C_n(\Omega)$ 收敛于 $\mathrm{V}(\Omega)$。

此外，在任意维数下，当 $n$ 趋近于 $+\infty$时， $n^m r^{m-1}$ 收敛于 0，因此我们得到

$$\liminf_{n\to\infty} G(\Omega_n) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\Lambda(\Omega_n)T(\Omega_n)}{P(\Omega_n)^{\frac{m}{m-1}}} \geq \frac{\Lambda(\Omega,\mu)T(\Omega,\mu)}{P(\Omega)^{\frac{m}{m-1}}} \geq (c+\Lambda(\Omega))\frac{\mathrm{V}(\Omega_\delta)^2}{\mathrm{V}(\Omega)}\frac{1}{\delta^{-2}+c}\frac{1}{P(\Omega)^{\frac{m}{m-1}}}. \quad (3.3)$$

利用 (3.2) 和 (1.8)，并令 $c\to\infty$ 和 $\delta\to 0$，我们得到

$$\frac{V(\Omega)}{P(\Omega)^{\frac{m}{m-1}}} \geq \limsup_{n\to\infty} G(\Omega_n) \geq \liminf_{n\to\infty} G(\Omega_n) \geq \frac{V(\Omega)}{P(\Omega)^{\frac{m}{m-1}}}.$$

取 $\Omega = B_1$ 即可得到结论。上确界无法取到，因为 (3.2) 中的不等式是严格的。

□

# 4 凸集类中的优化

本节中，我们研究将容许类限制为 $G$时，泛函$\mathcal{C}$ （定义于 (1.10) 中）的极大化子是否存在。

证明*Pro* 位置 *1.2*。在 命题 1.1中，我们证明了，若 $\{\Omega_n\} \subset\mathcal{O}$ 是一个满足条件的序列 t

$$\frac{\mathrm{V}(\Omega_n)}{P(\Omega_n)^{\frac{m}{m-1}}} \to 0,$$

则 $G(\Omega_n) \to 0$。

结合不等式（2.2）、（2.1）和（2.3），对于任意凸集，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(\Omega_n) &\leq C(m)\frac{P(\Omega_n)^{m-1}}{\mathrm{V}(\Omega_n)^{m-2}} = C(m)\frac{\mathrm{V}(\Omega_n)}{P(\Omega_n)}\frac{P(\Omega_n)^m}{\mathrm{V}(\Omega_n)^{m-1}} \\ &\leq C(m)R_{\Omega_n}\left(\frac{P(\Omega_n)^{\frac{m}{m-1}}}{\mathrm{V}(\Omega_n)}\right)^{m-1} \leq C'(m)w(\Omega_n)\left(\frac{P(\Omega_n)^{\frac{m}{m-1}}}{\mathrm{V}(\Omega_n)}\right)^{m-1}.\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\mathrm{V}(\Omega_n)}{P(\Omega_n)^{\frac{m}{m-1}}} \leq C'(m)\left(\frac{w(\Omega_n)}{\operatorname{diam}(\Omega_n)}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (4.1)$$

因此，若 $\{\Omega_n\} \subset\mathcal{C}$ 是一个变薄集序列（见定义 2.2），则

$$\lim_n G(\Omega_n) = 0.$$

下一步是证明该最大化问题的适定性。为此，令 $\{\Omega_n\}$ 为一个极大化序列，使得 $P(\Omega_n) = 1\ \forall n\in\mathbb{N}$。根据（3.1），$\mathrm{V}(\Omega_n)$ 必然收敛（至多相差一个子序列）到一个正的常数 $c$。

不等式（2.2）给出了$\Omega_n$的直径一致上界，即

$$\operatorname{diam}(\Omega_n) \leq C(m)\frac{P(\Omega_n)^{m-1}}{\mathrm{V}(\Omega_n)^{m-2}} \leq \frac{2^{m-1}C(m)}{c^{m-1}},$$

因此，经过平移后，$\Omega_n$包含在以 0 为中心、半径为 $2^{m-1}C(m)$ 的球内。$c^{m-1}$ 因此，序列 $\Omega_n$ 有一个豪斯多夫极限 $\Omega\in\mathcal{C}$，且

˜1. $\lim_n \Lambda(\Omega_n) = \Lambda(\Omega)$; ˜2. $\lim_n T(\Omega_n) = T(\Omega)$; ˜3. $\lim_n P(\Omega_n) = P(\Omega)$。

因此，由

$$\sup_{\Omega\in\mathcal{C}} G(\Omega) = \lim_n G(\Omega_n) = \lim_n \frac{\Lambda(\Omega_n)T(\Omega_n)}{P(\Omega_n)} = \frac{\Lambda(\tilde{\Omega})T(\tilde{\Omega})}{P(\tilde{\Omega})} \le \sup_{\Omega\in\mathcal{C}} G(\Omega),$$

我们得到该论题。 □

下面我们证明，在平面情形 $m = 2$下， $G$ 在集合 $\mathcal{C}$类中 $G$ 的每个极大化子都具有 $C^1$ 边界。

证明 命题 *1.3*。 设 $\Omega \in \mathcal{C}$ 满足

$$G(\Omega) = \max_{A\in\mathcal{C}} G(A).$$

反设 $\Omega$ 不属于 $C^1$类。由于 $\Omega$ 是 Lipschitz 的，这意味着 $\partial\Omega$ 至少有一个角点。不妨设该角点位于原点$O$，并记 $\alpha$ 为该角点的角，记 $\nu$ 为平行于其角平分线的单位向量。

我们考虑与 [26, 引理 3.32], 中所作类似的构造：对所有$\varepsilon > 0$，考虑集合 $C_\varepsilon = \{x \in \Omega: \ x\cdot\nu \le \varepsilon\}$ 及其在$\Omega$中的补集，记为$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus C_\varepsilon$。

我们的目标是证明 $G(\Omega_\varepsilon) > G(\Omega)$，从而得到矛盾。

我们首先从下方估计 $T(\Omega_\varepsilon)$ 。设 $w$ 是扭转问题（1.2）的解，则

$$T(\Omega) = \int_\Omega w\,dx.$$

设 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 是一个截断函数，使得 $\eta = 0$ 在 $C_\varepsilon$ 内， $\eta = 1$ 在 $C_{2\varepsilon}$ 外， $Im(\eta) \subseteq [0,1]$ 且 $|\nabla\eta| \le \dfrac{C}{\varepsilon}$，其中某个 $C > 0$。

考虑 $\tilde{w} := w\eta \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$。将 $\tilde{w}$ 作为测试函数代入扭转的变分刻画（1.1），可得

$$T(\Omega_\varepsilon) \ge \frac{\left(\int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{w}\,dx\right)^2}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\tilde{w}|^2\,dx}. \tag{4.2}$$

我们回顾一下 $|\nabla w(0,\ 0)| = 0$ （例如，参见 [21]）。因此，若 $\varepsilon$ 足够小

$$|w(x)| \le |x| \quad \text{in } C_{2\varepsilon}.$$

那么对于某个常数 $c_1 > 0$,

$$\int_{C_{2\varepsilon}} |w|\,dx \le c_1\varepsilon^3.$$

因此，

$$T(\Omega) = \int_\Omega w\,dx = \int_{\Omega\setminus C_{2\varepsilon}} w\,dx + \int_{C_{2\varepsilon}} w\,dx \le \int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{w}\,dx + c_1\varepsilon^3,$$

and

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \widetilde{w}\,dx \geq T(\Omega) - c_1\varepsilon^3.$$

利用（4.2），可得

$$T(\Omega_\varepsilon) \geq \frac{(T(\Omega) - c_1\varepsilon^3)^2}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\widetilde{w}|^2\,dx}.$$

我们估计分母：

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\widetilde{w}|^2\,dx \leq \int_{\Omega} |\nabla w|^2\,dx + \int_{C_{2\varepsilon}} (|\nabla\eta|^2 w^2 + 2|\nabla w||\nabla\eta|w)\,dx.$$

由于 $|\nabla\eta| \leq \dfrac{C}{\varepsilon}$ 和 $|\nabla w|$ 有界，因此我们有

$$\begin{aligned}\int_{C_{2\varepsilon}} (|\nabla\eta|^2 w^2 + 2|\nabla w||\nabla\eta|w)\,dx &\leq \frac{C}{\varepsilon^2}\int_{C_{2\varepsilon}} w^2\,dx + \frac{C}{\varepsilon}\int_{C_{2\varepsilon}} w\,dx \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2}\int_{C_{2\varepsilon}} |x|^2\,dx + \frac{C}{\varepsilon}\int_{C_{2\varepsilon}} |x||\nabla w|\,dx \leq c_2\varepsilon^2.\end{aligned}$$

因此，有

$$T(\Omega_\varepsilon) \geq \frac{(T(\Omega) - c_1\varepsilon^3)^2}{T(\Omega) + c_2\varepsilon^2}. \tag{4.3}$$

现在我们想从上方估计 $\Omega_\varepsilon$ 的周长。首先，我们注意到 $\partial C_\varepsilon$ 在原点以及另外两个点 $A$ 和 $B$处与 $\Omega$ 相交。

然后我们构造三角形 $T_\varepsilon = \triangle OAB \subset \Omega$ 以及点 $M$，该点是边 $AB$ 与 $\alpha$的角平分线的交点，见 图 2。设

$$\beta = \angle AOB, \qquad \beta_1 = \angle AOM, \qquad \beta_2 = \angle MOB,$$

从而

$$\beta \leq \alpha, \qquad \beta_1 \leq \frac{\alpha}{2}, \qquad \beta_2 \leq \frac{\alpha}{2}.$$

此外，边长和线段的长度为

$$\overline{OA} = a = \frac{\varepsilon}{\cos\beta_1}, \qquad \overline{OB} = b = \frac{\varepsilon}{\cos\beta_2}, \qquad \overline{AB} = c = \varepsilon(\tan\beta_1 + \tan\beta_2), \qquad \overline{OM} = \varepsilon.$$

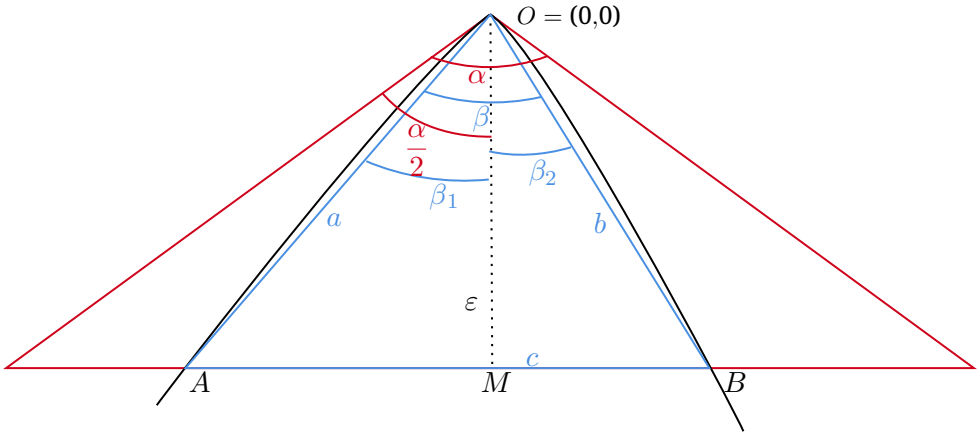



图 2: $T_\varepsilon$ 蓝色

因此

$$P(\Omega) - P(\Omega_\varepsilon) \geq a + b - c = \varepsilon \left[ \frac{1}{\cos(\beta_1)}(1 - \sin(\beta_1) + \frac{1}{\cos(\beta_2)}(1 - \sin(\beta_2)) \right]$$

$$\geq \varepsilon(2 - \sin(\beta_1) - \sin(\beta_2)) = 2\varepsilon \left[ 1 - \sin\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right) \right] \geq 2\varepsilon \left[ 1 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right].$$

因此，我们有

$$P(\Omega_\varepsilon) \leq P(\Omega) \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{P(\Omega)} \left( 1 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \right). \tag{4.4}$$

然后，利用 $\Lambda$的单调性，(4.3)和(4.4)，可推出

$$G(\Omega_\varepsilon) \geq \Lambda(\Omega) \frac{T(\Omega_\varepsilon)}{P(\Omega_\varepsilon)^2} \geq \Lambda(\Omega) \frac{T(\Omega)}{P(\Omega)^2} \frac{\left(1 - \frac{c_1}{T(\Omega)}\varepsilon^3\right)^2}{\left(1 + \frac{c_2\varepsilon^2}{T(\Omega)}\right) \left(1 - \frac{2\varepsilon}{P(\Omega)} \left(1 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\right)^2}.$$

利用伯努利不等式，可得

$$G(\Omega_\varepsilon) \geq G(\Omega) \left(1 - \frac{c_1}{T(\Omega)}\varepsilon^3\right)^2 \left(1 - \frac{c_2\varepsilon^2}{T(\Omega)}\right) \left(1 + \frac{4\varepsilon}{P(\Omega)} \left(1 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\right),$$

因此，我们有

$$G(\Omega_\varepsilon) \geq G(\Omega) \left(1 + \frac{4\varepsilon}{P(\Omega)} \left(1 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) + o(\varepsilon)\right).$$

因此，当 $\varepsilon$ 足够小时，$G(\Omega_\varepsilon) > G(\Omega)$，这与 $\Omega$ 的极大性矛盾。这个矛盾说明，$\partial\Omega$ 不可能有角点，因此 $\Omega$ 属于 $C^1$ 类。

□

# 5 近球形区域中球的最优性

本节中，我们证明定理 1.5和定理 1.6。为此，我们证明，在球上取值时， $F_q$ 和$G$ 满足定理 2.9的假设。证明这一点后，所需结果便可直接得出。

使用 定理 2.6 中引入的记号，并令 $X = C^{2,\gamma}$ 其中 $\gamma > 0$，众所周知（例如参见 [27, 第 5] 章），$T_{B_1}$、 $\Lambda_{B_1}$、 $P_{B_1}$ 以及 $\mathrm{V}_{B_1}$ 在 0 处二阶可微。因此， $F_{qB_1}$ 和 $G_{B_1}$也具有相同的可微性。

## 5.1 关于改进的连续性条件

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是一个固定的 $C^3$ 类区域。本节旨在证明这些泛函$F_q$满足假设 $(\mathbf{IC}_{H^s,\,X})$ 其中 $s = \frac{1}{2}$且 $X = C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$，其中 $\gamma > 0$；而 $G$满足$(\mathbf{IC}_{H^s,\,X})$其中 $s = 1$，并采用相同的 $X$。

由于 $F_q$ 和 $G$ 是根据满足假设 $(\mathbf{IC}_{H^s,X})$的泛函定义的，其中$s$ 和 $X$适当，因此只需证明，在适当条件下，以这种方式构造的泛函也具有相同的性质。

我们强调，为了在最后应用 定理 2.9，我们只需考虑以下情形：$\Omega = B_1$。因此，假设 $\Omega \in C^3$ 并不构成限制。

**引理 5.1。** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是一个开有界集。设

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{\, (I+\theta)\Omega \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \|\theta\|_{W^{1,\infty}} < 1 \,\},$$

并设 $A$是定义在 $\mathcal{V}(\Omega)$上的一个形状泛函。

此外，设 $X \subset Y \subset W^{1,\infty}(\partial\Omega)$ 是两个赋范空间，并假设嵌入

$$X \hookrightarrow Y$$

是连续的。

假设存在 $\eta > 0$，使得对于所有满足 $\|h\|_X \le \eta$ 的 $h \in X$，以及所有 $t \in [0,1]$，扰动区域

$$\partial\Omega_t = \{\, x + t\,h(x)\,n(x) \;:\; x \in \partial\Omega \,\}$$

是良定义的。于是我们令

$$a(t) = A(\Omega_t).$$

此外，我们假设以下性质成立。

1. $a$ 在 $[0,1]$ 上二阶可微；
2. 存在常数 $c > 0$，使得

$$|a'(0)| \le c\,\|h\|_Y;$$

3. 存在常数 $c > 0$，使得

$$|a''(0)| \le c\,\|h\|_Y^2;$$

4. 存在一个连续模 $\omega$，使得

$$|a''(t) - a''(0)| \le \omega(\|h\|_X)\,\|h\|_Y^2, \qquad \forall t \in [0,1].$$

那么，存在一个连续模 $\omega$ 和一个常数 $k>0$，使得对于每个 $t\in[0,1]$,

$$|a'(t)-a'(0)|\le\omega(\|h\|_X)\,\|h\|_Y,\qquad |a'(t)|\le k\,\|h\|_Y,\qquad |a(t)-a(0)|\le k\,\|h\|_Y.$$

证明。 固定 $t\in[0,1]$，则存在 $\xi_t\in(0,t)$ 使得

$$|a'(t)-a'(0)|\le|a''(\xi_t)|\le|a''(\xi_t)-a''(0)|+|a''(0)|\le\omega(\|h\|_X)\,\|h\|_Y^2+c\,\|h\|_Y^2=\omega_1(\|h\|_X)\,\|h\|_Y\,.$$

此外，我们有

$$|a'(t)|\le|a'(t)-a'(0)|+|a'(0)|\le k\,\|h\|_Y\,.$$

最后，对于所有 $t\in[0,1]$，存在 $\zeta_t\in(0,t)$ 使得

$$|a(t)-a(0)|\le|a'(\zeta_t)|\le k\,\|h\|_Y\,.$$

□

**引理 5.2**。 设 $\Omega$，$\mathcal{V}(\Omega)$，$X$，$Y$ 与 $\Omega_t$ 满足 引理 *5.1* 中的假设，并设 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 是定义在 $\mathcal{V}(\Omega)$上的一族形状泛函。

我们设

$$a_i(t)=A_i(\Omega_t),\qquad i=1,\dots,n.$$

此外，我们假设对每个 $i=1,\dots,n$，以下性质均成立：

1. $a_i$ 在 $[0,1]$上二阶可微；
2. 存在一个常数 $c>0$，使得

$$|a_i'(0)|\le c\,\|h\|_Y;$$

3. 存在一个常数 $c>0$，使得

$$|a_i''(0)|\le c\,\|h\|_Y^2;$$

4. 存在一个连续模 $\omega$，使得

$$|a_i''(t)-a_i''(0)|\le\omega(\|h\|_X)\,\|h\|_Y^2,\qquad\forall t\in[0,1].$$

令 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为一个开集，使得

$$(A_1(O),\dots,A_n(O))\in U\quad \textit{for all } O\in\mathcal{V}(\Omega),$$

并令 $f\in C^{2,\,\alpha}(U)$ 且 $\alpha>0$。定义泛函

$$A:\mathcal{V}(\Omega)\to\mathbb{R},\qquad A(O)=f\big(A_1(O),\dots,A_n(O)\big).$$

那么函数

$$a:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad a(t)=A(\Omega_t),$$

满足上述性质 *(1)–(4)*。

证明。 由于 $a(t) = f(a_1(t)\ldots, a_n(t))$，性质 (1) 可由 $f$ 的正则性假设推出。通过计算导数，我们得到

$$a'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1(t), \ldots, a_n(t))\, a_i'(t),$$

$$a''(t) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a_1(t), \ldots, a_n(t))\, a_i'(t) a_k'(t) \; + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1(t), \ldots, a_n(t))\, a_i''(t).$$

由于对于每个 $i \in \{1,\ldots, n\}$，函数 $a_i$ 满足性质 (2) 和 (3)，因此相同的估计也适用于 $a$。

现在我们要证明 $a$ 满足性质 (4)。通过直接计算可得

$$\begin{aligned} |a''(t) - a''(0)| \le & \sum_{i,k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a_1(t), \ldots, a_n(t))\, a_i'(t) a_k'(t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a_1(0), \ldots, a_n(0))\, a_i'(0) a_k'(0) \right| \\ & + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1(t), \ldots, a_n(t))\, a_i''(t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1(0), \ldots, a_n(0))\, a_i''(0) \right| \\ =: & \sum_{i,k=1}^{n} R_{i,k} + \sum_{i=1}^{n} S_i. \end{aligned} \tag{5.1}$$

对于所有 $i = 1, \ldots .n$，我们有

$$S_i \le |a_i''(t) - a_i''(0)| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1(t), \ldots, a_n(t)) \right| + |a_i''(0)| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1(t), \ldots, a_n(t)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1(0), \ldots, a_n(0)) \right|.$$

因此，由 $f$ 的一阶导数的利普希茨连续性以及引理 5.1，我们推得 e

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1(t), \ldots, a_n(t)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1(0), \ldots, a_n(0)) \right| = \omega(\|h\|_X)$$

因此，由假设 (3) 和 (4)，我们得到

$$S_i \le \omega(\|h\|_X)\, \|h\|_Y^2, \tag{5.2}$$

我们可以重复类似的论证，以从上方界定 $R_{i,\ k}$，事实上

$$\begin{aligned} R_{i,k} \le & |a_i'(t) - a_i'(0)||a_k'(t)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a_1(t), \ldots, a_n(t)) \right| + |a_i'(0)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a_1(t), \ldots, a_n(t)) \right| |a_k'(t) - a_k'(0)| \\ & + |a_i'(0)||a_k'(0)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a_1(t), \ldots, a_n(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a_1(0), \ldots, a_n(0)) \right|. \end{aligned}$$

利用 引理 5.1 以及 $f$的霍尔德连续性和二阶导数的有界性，我们得到

$$R_{i,k} \le \omega(\|h\|_X)\, \|h\|_Y^2 . \tag{5.3}$$

利用（5.1）、（5.3）和（5.2）可得

$$|a''(t) - a''(0)| \le \omega(\|h\|_X)\, \|h\|_Y^2 .$$

□

**注 5.3**。在 $Y = H^s(\partial\Omega)$ 的情形下，性质（1）和（4）与假设 （$\mathbf{IC}_{H^s,\ X}$）相同。因此，根据 引理 5.2，若性质（2）、（3）和（$\mathbf{IC}_{H^s,\ X}$）对每个 $A_i$ 都成立，则它们对泛函 $A$ 也成立。特别地， $A$ 在 $\Omega$ 上满足假设（$\mathbf{IC}_{H^s,\ X}$）。

**引理 5.4.** 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个有界 $C^3$ 开集，且 $\gamma > 0$。以下性质成立 *d:*

*(i)* $\Lambda$ 和 $T$满足引理 *5.2* 关于 $Y = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 和 $X = C^{2}$的假设,$^{\gamma}(\partial\Omega$ ),

*(ii)* $P$满足引理 *5.2* 关于 $Y = H^1(\partial\Omega)$ 和 $X = C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$的假设；*(iii)* $V$满足引理 *5.2* 关于 $Y = L^2(\partial\Omega)$ 和 $X = C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$的假设。

引理 5.4 在 [19] 中得到了证明，随后在更一般的情形下于 [20]中得到了证明。

命题 *5.5.* 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为 $C^3$ 开有界集， $F_q$ 为式 *(1.13)* 中定义的泛函， $q > 0$ 和 $G$ 为式 *(1.6)* 中定义的泛函。 $F_q$ 在 $\Omega$ 处满足假设 *(IC$_{H^s,X}$)*，其中 $s = \frac{1}{2}$ 和 $X = C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$，且 $\gamma > 0$。此外，对于相同的 $X$ 和 $s = 1$ 选取， $G$ 在 $\Omega$ 处也满足假设 *(IC$_{H^s,X}$)*。

证明。 该结果可直接由 注 5.3和 引理 5.4得出。 □

## 5.2 球的临界性

本节中，我们计算 $F_q$ 和 $G$ 在球处的一阶导数（按定理 2.6的意义），并证明它们均为零。

**引理 5.6.** 设 $B_1 \subset \mathbb{R}^m$ 表示单位球。考虑泛函 $F_q$ ，其定义见 (1.13)，其中$q > 0$；以及泛函 $G$ ，其定义见 (1.6)。则 $B_1$ 是 $F_q$ 和 $G$ 的临界形状（按定义 *2.8*的意义）。

证明。 由于 $F_q$ 和 $G$是尺度不变的，只需证明：若 $\varphi$在 $\partial\Omega$上具有零均值，则$\ell_1[F_q](\varphi) = \ell_1[G](\varphi) = 0$。

根据莱布尼茨法则，我们有

$$\ell_1[F_q]\varphi = \frac{T(B_1)^{q-1}}{\mathrm{V}(B_1)}\left[\ell_1[\Lambda](\varphi)T(B_1) + qT(B_1)\Lambda(B_1)\ell_1[T](\varphi) - \alpha_q\frac{\Lambda(B_1)T(B_1)\ell_1[Vol](\varphi)}{\mathrm{V}(B_1)}\right],$$

and

$$\ell_1[G] = \frac{1}{P(B_1)^{\frac{m}{m-1}}}\left[\ell_1[\Lambda](\varphi)T(B_1) + \Lambda(B_1)\ell_1[T](\varphi) - \frac{\Lambda(B_1)T(B_1)\ell_1[P](\varphi)}{P(B_1)}\right].$$

由于 $T$、 $\Lambda$、 $P$和 $\mathrm{V}$ 在球上导数均为零，我们得到

$$\ell_1[F_q](\varphi) = 0 \quad \ell_1[G](\varphi) = 0.$$

□

## 5.3 关于强制性条件

本节研究与泛函的二阶导数相对应的双线性型的强制性 $F_q$ 和 $G$ （定义见 定理 2.6）。

为此，我们使用球谐函数。令 $\mathcal{H}_k$ 表示次数为 $k$的球谐函数空间，并令 $\{Y^{k,\ell}\}_{1\le\ell\le N_k}$ 为 $\mathcal{H}_k$ 关于 $L^2(\partial B_1)$ 内积的标准正交基

。则集合 $\{Y^{k,\ell}\}_{k\in\mathbb{N},\,1\le l\le N_k}$ 构成 $L^2(\partial B_1)$ 的希尔伯特基，且任意函数$\varphi \in L^2(\partial B_1)$均可展开为：

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k} \varphi_{k,l}\, Y^{k,l}(x), \quad \text{for } |x| = 1. \tag{5.4}$$

此外，序列 $(\varphi_{k,l})$ 刻画了 $\varphi$ 的索博列夫正则性：当且仅当级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+k^2)^s \sum_{\ell=1}^{N_k} |\varphi_{k,\ell}|^2$$

是收敛的。

**注记 5.7**。令 $\mathcal{T}^0(\partial B_1)$ 为式（2.4）中定义的函数空间。若 $\varphi \in L^2(\partial B_1)$，则 $\varphi \in \mathcal{T}^0(\partial B_1)$ 当且仅当 $\varphi_{k,l} = 0$ 对 $k = 0,1$ 成立。

**定义 5.8**。设 $\varphi \in C^{2,\gamma}(\partial B_1)$，其中$\|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_1)} < \frac{1}{2}$。令 $t \in [0,1]$，并考虑通过其边界定义的集合 $B_t\varphi$

$$\partial B_{t\varphi} = \{x + t\varphi(x)x : x \in \partial B_1\}.$$

我们定义以下函数

$$p : t \in [0,1] \to P(B_{t\varphi}) \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{v} : t \in [0,1] \to V(B_{t\varphi}) \in \mathbb{R},$$
$$\tau : t \in [0,1] \to T(B_{t\varphi}) \in \mathbb{R}, \qquad \lambda : t \in [0,1] \to \Lambda(B_{t\varphi}) \in \mathbb{R}.$$

众所周知（例如参见 [27,第 5] 或 [20]），若

$$\int_{\partial B_1} \varphi\, d\mathcal{H}^{m-1} = 0,$$

则 定义 5.8中定义的所有函数的一阶导数在0处均为零。此外，在下面的引理中，我们回顾它们的二阶导数表达式。

**引理 5.9**。设 $\varphi \in C^{2,\gamma}(\partial B_1)$，其中 $\gamma > 0$。采用定义 5.8 中引入的记号以及函数 $\varphi$ 在（5.4）中的展开式，可得

$$v''(0) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k}(m-1)\,\varphi_{k,l}^2,$$

$$\tau''(0) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k}\left(\frac{2}{m^2}k - \frac{m+1}{m^2}\right)\varphi_{k,l}^2,$$

$$p''(0) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k}\Big(k^2 + (m-2)k + (m-1)(m-2)\Big)\,\varphi_{k,l}^2,$$

$$\lambda''(0) = \beta_m^2\left(3\varphi_{0,1}^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k} 2\left[k + \frac{m-1}{2} - c_k\right]\varphi_{k,l}^2\right),$$

其中

$$\beta_m = \frac{2\Lambda(B_1)}{P(B_1)},$$

*and*

$$c_k = j_{\frac{m}{2}-1}\frac{J_{k+\frac{m}{2}}(j_{\frac{m}{2}-1})}{J_{k-1+\frac{m}{2}}(j_{\frac{m}{2}-1})}.$$

**注** **5.10.** 我们回顾贝塞尔函数的递推公式（参见 [1,第 9]）

$$\frac{2\nu}{z}J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z).$$

利用此公式以及 $z = j_{\frac{m}{2}-1}$ 和 $\nu = \frac{m}{2}$，我们得到

$$c_1 = m.$$

再次利用公式以及 $\nu = \frac{m}{2}+1$，我们得到

$$c_2 = m + 2 - \frac{j^2_{\frac{m}{2}-1}}{m}.$$

由于 $j_\nu^2 < 2(\nu+1)(\nu+3)$（参见 [28, 节 5]），我们得到

$$c_2 > \frac{m}{2}. \tag{5.5}$$

此外（参见 [33] 和 [37]）$\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是递减的，趋于零，并且函数 $k \in \mathbb{R} \to c_k \in \mathbb{R}$ 可以延拓为定义在 $(-1,\infty)$ 上的凸函数。

现在我们可以计算泛函 $G$ 和 $F_q$ 在 $B_1$处的二阶导数了。

**引理 5.11**。设 $\varphi \in C^{2,\gamma}(\partial B_1)$，且 $\gamma > 0$ 并考虑 $G$ 在 (1.6) 中定义的泛函 $F_q$以及在 (1.13)中定义的泛函 $q > 0$。使用 定理 *2.6*中引入的记号，可得

$$\ell_2[G](\varphi,\varphi) = -\frac{1}{P(B_1))^{\frac{m}{m-1}}}\frac{\Lambda(B_1)}{m^2(m+2)(m-1)}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k}\left[mk^2+(3m^2-4m)k-7m^2+7m+4c_k(m-1)\right]\varphi_{k,l}^2, \tag{5.6}$$

*and*

$$\ell_2[F_q](\varphi,\varphi) = 2\frac{T(B_1)^{q-1}\Lambda(0)}{m^2(m+2)\ V(B_1)^{\alpha_q}}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k}\left\{k\left[2-q(m+2)\right]+q(m+2)+2m-2-2c_k\right\}\varphi_{k,l}^2. \tag{5.7}$$

证明。由于 $G$ 和 $F_q$ 在平移和缩放下均保持不变，因此只需计算 $\varphi \in C^{2,\gamma}(\partial B_1)\cap T^0(\partial B_1)$的导数。因此，根据 注记 5.7，我们假设 $\varphi_{k,l} = 0$ 对 $k = 0$成立， 1。下文将使用 定义 5.8 中引入的记号，并考虑以下函数

$$g : t \in [0,1] \to G(B_{t\varphi}) \in \mathbb{R}, \qquad f_q : t \in [0,1] \to F_q(B_{t\varphi}) \in \mathbb{R}.$$

由注 2.7，我们得到

$$\ell_2[G](\varphi,\varphi) = g''(0), \qquad \ell_2[F_q](\varphi,\varphi) = f_q''(0).$$

我们先计算 $g''(0)$。注意到 $g(t) = \tau(t)\lambda(t)\, p(t)^{\frac{m}{m-1}}$。

求两次导数，并利用 $\tau'(0) = p'(0) = \lambda'(0) = 0$，可得

$$g''(0) = \frac{\lambda''(0)\tau(0)}{p(0)^{\frac{m}{m-1}}} + \frac{\lambda(0)\tau''(0)}{p(0)^{\frac{m}{m-1}}} - \frac{m}{m-1}\frac{\lambda(0)\tau(0)}{p(0)^{\frac{m}{m-1}}}\left(\frac{p''(0)}{p(0)}\right).$$

利用 引理 5.9，以及单位球的扭转和周长的明确表达式

$$T(B_1) = \frac{\omega_m}{m(m+2)}, \tag{5.8}$$

，我们得到如下结果

$$g''(0) = \frac{1}{p(0)^{\frac{m}{m-1}}}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k}\left\{\frac{\omega_m}{m(m+2)}\frac{\lambda(0)}{m\omega_m}\left[4k+2(m-1)-4c_k\right] - \frac{\lambda(0)}{m^2}\left[2k-(m+1)\right]\right.$$
$$\left. -\frac{m}{m-1}\lambda(0)\frac{\omega_m}{m(m+2)}\frac{1}{m\omega_m}\left[k^2+(m-2)k+(m-1)(m-2)\right]\right\}\varphi_{k,l}^2.$$

直接计算可得

$$g''(0) = -\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k} G_k\varphi_{k,l}^2.$$

其中

$$G_k = \frac{1}{p(0)^{\frac{m}{m-1}}}\frac{\lambda(0)}{m^2(m+2)(m-1)}[mk^2+(3m^2-4m)k-7m^2+7m+4c_k(m-1)],$$

因此，我们得到（5.6）。

现在我们希望计算 $f_q''(0)$。我们有

$$f_q(t) = \frac{\lambda(t)\tau(t)^q}{\mathrm{v}^{\alpha_q}(t)}.$$

求两次导数，并利用 $\tau'(0) = \lambda'(0) = \mathrm{v}'(0) = 0$，我们得到

$$f_q''(0) = \frac{\lambda''(0)\tau(0)^q}{\mathrm{v}^{\alpha_q}(0)} + \frac{q\lambda(0)\tau(0)^{q-1}}{\mathrm{v}^{\alpha_q}(0)}\tau''(0) - \alpha_q\frac{\lambda(0)\tau(0)^q}{\mathrm{v}^{\alpha_q}\,\mathrm{v}(0)}\frac{\mathrm{v}''(0)}{\mathrm{v}(0)}.$$

利用引理 5.9 和方程（5.8），我们得到

$$f_q''(0) = \frac{\tau^{q-1}(0)}{\mathrm{v}^{\alpha_q}(0)}\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k}\left\{\frac{\omega_m}{m(m+2)}\frac{\lambda(0)}{m\omega_m}\left[4k+2(m-1)-4c_k\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. -q\frac{\lambda(0)}{m^2}\left[2k-(m+1)\right] - \alpha_q\lambda(0)\frac{\omega_m}{m(m+2)}\frac{(m-1)}{\omega_m}\right\}\varphi_{k,l}^2.\right.$$

通过直接计算，我们得到

$$f_q''(0)=\frac{\tau(0)^{q-1}}{\mathrm{v}^{\alpha_q}(0)}\frac{\lambda(0)}{m^2(m+2)}\sum_{k\geq 2}\sum_{l=1}^{N_k}\Big\{2k[2-q(m+2)]+2(m-1)\\ -4c_k+q(m+1)(m+2)-m\alpha_q(m-1)\Big\}\varphi_{k,l}^2 \tag{5.9}$$

利用 $m\alpha_q=q(m+2)-2$，我们推得

$$f_q''(0)=\sum_{k=2}^{\infty}F_k^q\varphi_{k,l}^2.$$

其中

$$F_k^q=\frac{\tau(0)^{q-1}}{\mathrm{v}^{\alpha_q}(0)}\frac{\lambda(0)}{m^2(m+2)}\{2k[2-q(m+2)]+2q(m+2)+4m-4-4c_k\},$$

因此，我们有（5.7）。

□

**注记 5.12**。注意，存在一个常数 $r$ 使得

$$|\ell_2(G)(\varphi,\varphi)|\leq r\left\|\varphi\right\|_{H^1(\partial B_1)}^2.$$

此外，对所有 $q>0$，都存在一个常数 $r_q>0$ 使得

$$\text{if } q\neq\frac{2}{m+2}\quad |\ell_2(F_q)(\varphi,\varphi)|\leq r_q\left\|\varphi\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)}^2,\qquad \text{if } q=\frac{m}{m+2}\quad |\ell_2(F_q)(\varphi,\varphi)|\leq r_q\left\|\varphi\right\|_{L^2(\partial B_1)}^2.$$

因此，$\ell_2(G)$可连续延拓至 $H^1(\partial B_1)$，而当 $q\neq\frac{2}{m+2}$时，$\ell_2(F_q)$可连续延拓至$H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$；当 $q=\frac{2}{m+2}$时，可连续延拓至~~$L^2$~~$(\partial B_1)$。

**推论 5.13**。设 $G$ 为定义于 (1.6)中的泛函，则 $B_1$ 是 $H^1(\partial\Omega)$中的严格稳定形状，$-G$ 按照定义 定义 2.8 的意义，并且 $-G$ 在 ($\mathbf{C}_{H^s}$)处满足假设 $B_1$，其中 $s=1$。

证明。我们首先证明 $G$的情形。根据 引理 5.11 $\forall\varphi\in H^1(\partial B_1)$

$$\ell_2(-G)(\varphi,\varphi)=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k}G_k\varphi_{k,l}^2$$

其中

$$G_k=\frac{1}{P(B_1)^{\frac{m}{m-1}}}\frac{\Lambda(B_1)}{m^2(m+2)(m-1)}[mk^2+(3m^2-4m)k-7m^2+7m+4c_k(m-1)].$$

现在我们旨在证明，对于所有 $k\geq 3$

$$G_k\geq G_2. \tag{5.10}$$

事实上，这个不等式等价于

$$4(m-1)(c_k-c_2)\geq -m(k-2)(k+2+3m-4).$$

改写后，得到

$$c_k \geq c_2 - \frac{1}{4}\frac{m}{m-1}(k+3m-2)(k-2). \tag{5.11}$$

为了从下方估计 $c_k$，我们采用序列 $k \mapsto c_k$ 的凸延拓，如注5.10所述。特别地，由凸性可得

$$c_k \geq c_2 + (c_2 - m)(k-2).$$

因此，式（5.11）成立的一个充分条件是不等式

$$c_2 + (c_2 - m)(k-2) \;\geq\; c_2 - \frac{m}{4(m-1)}(k+3m-2)(k-2),$$

这可简化为

$$m - c_2 \leq \frac{m}{4(m-1)}(k+3m-2).$$

对于 $k \geq 3$，最后这个不等式总是成立的，因为 $k+3m-2>0$，并且由（5.5）可得 $m-c_2 < \frac{m}{2}$。因此，所需的不等式（5.10）得证。

现在我们注意到，对于所有 $k \geq 2$

$$\begin{aligned} G_k \geq G_2 &= \frac{1}{P(B_1)^{\frac{m}{m-1}}}\frac{\Lambda(B_1)}{m^2(m+2)(m-1)}[4m+(3m^2-4m)2-7m^2+7m+4c_2(m-1)] \\ &> \frac{1}{P(B_1)^{\frac{m}{m-1}}}\frac{\Lambda(B_1)}{m^2(m+2)(m-1)}[3m-m^2+4\frac{m}{2}(m-1)] \\ &= \frac{1}{P(B_1)^{\frac{m}{m-1}}}\frac{\Lambda(B_1)}{m^2(m+2)(m-1)}[m^2+m] > 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

若 $\varphi \in \mathcal{T}^1(\partial B_1)\setminus\{0\}$，则存在 $k \geq 2$ 和 $l \in \{1,\dots N_k\}$ 使得 $\varphi_{k,l} \neq 0$，因此我们得到

$$\ell_2(-G)(\varphi,\varphi) > 0.$$

因此，应用 注记 5.12，我们得出 $B_1$ 是一个严格稳定形状，适用于 $-G$ 在 $H^1(\partial B_1)$中。此外，由于 $G_k$ 当 $(1+k^2)$ 趋近于 $k$ 时，具有与 $+\infty$相同的渐近行为，因此泛函 $G$ 满足假设 $(\mathbf{C}_{H^s})$，其中 $s=1$。

□

**推论5.14.** 设 $F_q$ 为在 (1.13)中定义的泛函，且 $q>0$，则以下性质成立。

*(i)* 若 $q < \dfrac{2}{m+2}$，$F_q$在 $B_1$上对 $s=\frac{1}{2}$验证假设 $(\mathbf{C}_{H^s})$。此外，且 $B_1$是 $H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$ 中一个严格稳定形状，适用于 $-F_q$（按 定义 2.8的意义）。

*(ii)* 若 $q = \dfrac{2}{m+2}$，$F_q$ 在 $(\mathbf{C}_{H^s})$上满足假设 $B_1$，其中 $s=0$。此外，且 $B_1$ 是 $H^0(\partial B_1)$ 中的严格稳定形状，对于 $F_q$。

*(iii)* 若 $\dfrac{2}{m+2} < q < q^* := \dfrac{2}{m+2}\left(\dfrac{j_{\frac{m}{2}}^2}{m}-1\right)$，$B_1$存在 $\varphi_1$和 $\varphi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$，使得

$$\ell_2(F_q)(\varphi_1,\varphi_1) > 0 \quad \textit{and} \quad \ell_2(F_q)(\varphi_2,\varphi_2) < 0.$$

*(iv) If* $q = q^* := \dfrac{2}{m+2}\left(\dfrac{j_{\frac{m}{2}-1}}{m} - 1\right)$, *for all* $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

$$\ell_2(F_q)(\varphi,\varphi) \le 0.$$

此外，存在 $\varphi_1 \in T^{\frac{1}{2}}(\partial B_1) \setminus \{0\}$，使得

$$\ell_2(F_q)(\varphi_1,\varphi_1) = 0.$$

(v) 若 $q > q^*$， $-F_q$ 满足假设($\mathbf{C}_{H^s}$)在 $B_1$ 上，对$s = \frac{1}{2}$ 成立。此外，且 $B_1$ 是 $H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$中的严格稳定形状，对 $-F_q$成立。

证明。根据引理 5.11，我们有

$$\ell_2(F_q)(B_1)(\varphi,\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k} F_k^q \varphi_{k,l}^2.$$

其中

$$F_k^q = \alpha\{k[2-q(m+2)] + q(m+2) + 2m - 2 - 2c_k\}, \quad \text{and} \quad \alpha = 2\frac{T(B_1)^{q-1}}{\mathrm{V}^{\alpha_q}(B_1)}\frac{\Lambda(B_1)}{m^2(m+2)}.$$

首先，我们注意到，若 $q_1 < q_2$，则对所有 $k \ge 2$

$$F_k^{q_1} > F_k^{q_2}. \tag{5.13}$$

我们分析不同的情形。

(i) 令 $q \le \dfrac{2}{m+2}$。由于$\{c_k\}$是递减的，我们有：若 $k_1 \le k_2$，则

$$F_{k_1}^q \le F_{k_2}^q.$$

因此，由于 $F_k^q$关于 $k$递增，且关于 $q$递减， $F_k^q > 0$对所有 $k \ge 2$以及对所有$q \le \dfrac{2}{m+2}$当且仅当 $F_2^{\frac{2}{m+2}} > 0$。该不等式成立，因为根据注5.10，

$$F_2^{\frac{2}{m+2}} = \alpha(4 + 4m - 4 - 4c_2) > 0. \tag{5.14}$$

由 (5.14) 和注记 5.12，若 $q < \dfrac{2}{m+2}$，则球 $B_1$ 是 $H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$ 中关于 $F_q$的严格稳定形状。此外，由于 $2-q(m+2) > 0$，当 $k$趋近于 $+\infty$时， $F_k^q$与 $(1+k^2)^{\frac{1}{2}}$具有相同的渐近行为，因此泛函 $F_q$ 满足假设 ($\mathbf{C}_{H^s}$)，其中 $s = \frac{1}{2}$。

(ii) 设 $q = \dfrac{2}{2+m}$。则 $2-q(m+2) = 0$，且对于所有 $\varphi \in T^0(\partial B_1)$

$$\ell_2(F_q)(\varphi,\varphi) \ge r\,\|\varphi\|^2_{L^2(\partial B_1)},$$

其中

$$r = \alpha\{2m - 2c_2\}.$$

因此，利用 注 5。12 $F_q$ 满足假设 ($\mathbf{C}_{H^s}$) 其中 $s = 0$ 且球 $B_1$ 是 $F_q$ 在 $H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$ 下的严格稳定形状。

(iii) 令 $\frac{2}{2+m} < q < q^*$，则有 $[2-q(m+2)] < 0$，因此存在 $k^*$，使得对于$k > k^*$， $F_k^q < 0$。

此外，注意到 $q*$ 满足

$$F_2^{q*} = 0.$$

因此，由（5.13），我们推得对所有 $\frac{2}{m+2} \leq q < q*$

$$F_2^q > F_2^{q*} = 0.$$

由于 $F_2^q > 0$，并且当 $k$ 充分大时， $F_k^q < 0$，因此 $B_1$ 是 $F_q$ 的鞍点。

(iv) 令 $q \geq q^*$。我们要证明，对所有 $k > 2$

$$F_k^q < F_2^q \tag{5.15}$$

当且仅当以下条件成立时，这个不等式成立

$$c_k > \frac{k-2}{2}[2-q(m+2)] + c_2.$$

这个不等式成立，事实上，由注5.10

$$\frac{k-2}{2}[2-q(m+2)] + c_2 \leq (k-2)(c_2-m) + c_2 = (k-1)(c_2-m) + c_1 < c_k.$$

最后一个不等式由存在函数 $k \in \mathbb{N} \to c_k \in \mathbb{R}$的凸延拓得出。因此，我们有（5.15）。

此外，若 $q = q^*, F_2^q = 0$，且对所有 $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

$$\ell_2(F_q)(\varphi, \varphi) \leq 0.$$

此外，若 $\psi \in \mathcal{T}^{\frac{1}{2}}(\partial B_1) \setminus \{0\}$，使得对所有 $k \geq 3$ $\psi_{k,\ l} = 0$，我们有

$$\ell_2(F_q)(\psi, \psi) = 0.$$

（v）因此，若 $q > q^*$，对所有 $\varphi \in \mathcal{T}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，我们有

$$\ell_2(F_q)(\varphi, \varphi) > 0.$$

因此，利用 注记 5.12，球 $B_1$ 是 $-F_q$ 在 $H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$下的严格稳定形状。此外，$-F_k^q$具有与 $(1+k^2)^{\frac{1}{2}}$相同的渐近行为，当 $k$趋近于 $+\infty$时。这保证泛函 $-F_q$ 满足假设 $(\mathbf{C}_{H^s})$，其中 $s = \frac{1}{2}$。

□

### 5.4 定理 1.5 和定理 1.6 的证明

定理 *1.5* 的证明。 结论可通过将 定理 2.9 应用于 $-G$得出，这由 推论 5.13 和 命题 5.5保证。

□

定理 *1.6* 的证明。 定理 *1.6*。 由推论5.14 和 命题 5.5可知，泛函 $F_q$ 在 $B_1$ 上满足 定理 2.9的所有假设。

命题 (ii) 直接由 推论5.14 得证。
最后，(iii) 中的结论同样源于 定理 2.9的假设对 $-F_q$成立，这由推论5.14 和命题 5.5保证。

□

**注 5.15**。 对于 Kohler–Jobin 情形 $q = \frac{2}{m+2}$，我们只能得到 $L^2(\partial B_1)$-强制性，同时二阶导数在 $H^{1/2}(\partial B_1)$ 中的连续性有所改善，但这不足以推出稳定性。若 $q = q^*$，强制性不成立，因此无法对 $B_1$ 的局部最优性作出结论。

## 6 可能的推广

由于泛函 $F_q(\Omega)$（定义于（1.13））可视为 Pólya 泛函（定义于（1.7））的一种推广，因此自然可以引入以下关于 $G(\Omega)$ 的缩放不变推广：

$$G_q(\Omega) := \frac{T(\Omega)^q \Lambda(\Omega)}{P(\Omega)^{\beta_q}}, \text{ where } \beta_q = \frac{1}{m-1}[q(m+2)-2], \tag{6.1}$$

对每个 $\Omega \in \mathcal{O}$ 类 以及所有 $q > 0$。

特别地，当 $q = \frac{2}{m+2}$ 时，泛函 $G_q$ 与 Kohler–Jobin 泛函及 $F_q$ 相同；而当 $q = 1$ 时，它简化为 $G$。

我们的目标是研究 $G_q$ 在以下各类上的优化： $\mathcal{O}$ 类、$\mathcal{C}$ 和 $S_{\delta,\ \gamma}$，它们分别定义于（1.5）、（1.10）以及 定义 1.4。

### 6.1 开集类中的优化

本节中，我们研究泛函 $G_q$ 在$\mathcal{O}$类上的优化。

**命题 6.1**。 设 $G_q$ 为式 (6.1)中定义的泛函，且 $\mathcal{O}$ 为式(1.1)中定义的区域类。则以下结论成立：

1. *If* $q \le \dfrac{2}{m+2}$, *then*
$$\min_{\mathcal{O}} G_q = G_q(B_1).$$

2. *If* $q > \dfrac{2}{m+2}$, *then*
$$\inf_{\mathcal{O}} G_q = 0.$$

3. *If* $q < 1$, *then*
$$\sup_{\mathcal{O}} G_q = +\infty.$$

4. *If* $q \ge 1$, *then*
$$\sup_{\mathcal{O}} G_q < +\infty.$$

证明。 (1) 设 $q \le \dfrac{2}{m+2}$ 且 $\Omega \in \mathcal{O}$ 类。则

$$G_q(\Omega) = \left(T(\Omega)^{\frac{2}{m+2}}\Lambda(\Omega)\right)\left(\frac{1}{P(\Omega)^{-\frac{m+2}{m-1}}T(\Omega)}\right)^{\frac{2}{m+2}-q}.$$

根据 Kohler-Jobin不等式（1.14）和方程（1.3），可得

$$G_q(B_1) \le G_q(\Omega),$$

因此 $\min_{\mathcal{O}} G_q = G_q(B_1)$.

(2) 令 $q > \dfrac{2}{m+2}$。考虑将 $\Omega$ 表示为 $N$ 个半径固定为 $\varepsilon > 0$ 的球与 $B_1$的不交并。那么，对于 $\varepsilon < 1$,

$$G_q(\Omega) = \frac{\Lambda(B_1)(T(B_1)+N\varepsilon^{m+2}T(B_1))^q}{(P(B_1)+N\varepsilon^{m-1}P(B_1))} = G_q(B_1)\frac{(1+N\varepsilon^{m+2})^q}{(1+N\varepsilon^{m-1})^{\beta_q}}.$$

选取 $N$ 使得 $\varepsilon^{-(m+2)} \le N < 2\varepsilon^{-(m+2)}$，我们得到

$$G_q(\Omega) \le G_q(B_1)\frac{3^q}{(1+\varepsilon^{-3})^{\beta_q}}.$$

由于 $\beta_q > 0$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，该量趋于 0，因此

$$\inf_{\mathcal{O}} G_q = 0.$$

(3) 令 $q < 1$。考虑序列 $\{\Omega_n\}$，该序列是通过均匀化论证在命题 1.1的证明中引入的开集序列。于是，利用与命题 1.1中相同的估计，我们得到

$$\lim_{h\to\infty} G_q(\Omega_n) = \lim_{h\to\infty}\frac{\Lambda(\Omega_n)T(\Omega_n)^q}{P(\Omega_n)^{\beta_q}} \ge \frac{\Lambda(\Omega,\mu)T(\Omega,\mu)^q}{P(\Omega)^{\beta_q}} \ge (c+\Lambda(\Omega))\left(\frac{\mathrm{V}(\Omega_\delta)^2}{\mathrm{V}(\Omega)}\frac{1}{\delta^{-2}+c}\right)^q\frac{1}{P(\Omega)^{\beta_q}}.$$

令 $\delta \to 0$ 和 $c \to \infty$，我们得出 $\sup_{\mathcal{O}} G_q = +\infty$。

(4) 最后，若 $q \ge 1$，则由 命题 1.1 和方程 (1.3)，对每个 开集 $\Omega \in \mathcal{O}$ ，

$$G_q(\Omega) = G(\Omega)\left(P(\Omega)^{-\frac{m+2}{m-1}}T(\Omega)\right)^{q-1} < \frac{\mathrm{V}(B_1)}{P(B_1)^{\frac{m}{m-1}}}\left(P(B_1)^{-\frac{m+2}{m-1}}T(B_1)\right)^{q-1},$$

这表明 $\sup_{\mathcal{O}} G_q < +\infty$。 □

我们总结迄今已证明的性质，见表 2。

| $q \le \frac{2}{m+2}$ | $\frac{2}{m+2} < q < 1$ | $q = 1$ | $q > 1$ |
|---|---|---|---|
| $\min_{\mathcal{O}} G_q = G_q(B_1)$ | $\inf_{\mathcal{O}} G_q = 0$ | 下确界$_{\mathcal{O}}\, G_q = 0$ | 下确界$_{\mathcal{O}}\, G_q = 0$ |
| 上确界$_{\mathcal{O}}\, G_q = +\infty$ | 上确界$_{\mathcal{O}}\, G_q = +\infty$ | 上确界$_{\mathcal{O}}\, G_q = \dfrac{\mathrm{V}(B_1)}{P(B_1)^{\frac{m}{m-1}}}$ | 上确界$_{\mathcal{O}}\, G_q < +\infty$ |

表 2：不同 $q$ 取值范围下，泛函 $G_q$ 在类别$\mathcal{O}$ 上的下确界和上确界值汇总。

## 6.2 凸集合类中的优化

现在，我们旨在对凸集类 $G_q$ 中的泛函进行优化 $\mathcal{C}$。为此，我们研究 $G_q$ 沿着变薄集序列（定义见 定义 2.2）的变化。

首先，我们注意到，对于每个 $\Omega \in \mathcal{C}$，泛函 $G_q$ 可以改写为三个项的乘积：

$$G_q(\Omega) = \left(\frac{\Lambda(\Omega)T(\Omega)}{\mathrm{V}(\Omega)}\right)^q \left(\frac{\Lambda(\Omega)\ \mathrm{V}(\Omega)^2}{P(\Omega)^2}\right)^{1-q} \left(\frac{P(\Omega)^{\frac{m}{m-1}}}{\mathrm{V}(\Omega)}\right)^{2-3q}. \tag{6.2}$$

已知，对于所有 $\Omega \in \mathcal{C}$，有

$$\frac{\pi^2}{4m^2} < \frac{\Lambda(\Omega)\,\mathrm{V}(\Omega)^2}{P(\Omega)^2} < \frac{\pi^2}{4}. \tag{6.3}$$

下界在 [36] 中针对平面情形得到了证明，且由一列变薄三角形达到。该结果在 [22] 中推广到了高维。上界在[40] 中针对平面情形得到了证明，并且对于一列变薄矩形是尖锐的。其在高维的推广由 [23], 给出，并在 [2, 3]中作了定量改进。

因此，利用（1.11）、（6.3）和（6.2），可得对所有$\Omega \in \mathcal{C}$:

$$\left(\frac{\pi^2}{4m(m+2)}\right)^q \left(\frac{\pi^2}{4m^2}\right)^{1-q} \left(\frac{P(\Omega)^{\frac{m}{m-1}}}{\mathrm{V}(\Omega)}\right)^{2-3q} < G_q(\Omega) < (1-\varepsilon)^q \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^{1-q} \left(\frac{P(\Omega)^{\frac{m}{m-1}}}{\mathrm{V}(\Omega)}\right)^{2-3q}. \tag{6.4}$$

接下来，考虑一列变薄集 $\{\Omega_n\}$，并结合（4.1），可得

$$\lim_n \frac{P(\Omega_n)^{\frac{m}{m-1}}}{\mathrm{V}(\Omega_n)} = 0.$$

因此，由（6.4）可得:

(a) 若 $q < \frac{2}{3}$，则

$$\lim_{n\to\infty} G_q(\Omega_n) = +\infty \quad \text{and} \quad \sup_{\mathcal{C}} G_q = +\infty.$$

(b) 若 $q > \frac{2}{3}$，则

$$\lim_{n\to\infty} G_q(\Omega_n) = 0 \quad \text{and} \quad \inf_{\mathcal{C}} G_q = 0.$$

因此，我们得到以下命题。

**命题 6.2**。 设 $G_q$ 为（(6.1）中定义的$\mathcal{C}$，并令其为（(1.10）中定义的类。以下性质成立。

*(i)* 若 $q < \frac{2}{3}$，则存在 $\Omega \in \mathcal{C}$，使得

$$G_q(\Omega) = \min_{\mathcal{C}} G_q.$$

*(ii)* 若 $q = \frac{2}{3}$，则

$$0 < \inf_{\mathcal{C}} G_q < \sup_{\mathcal{C}} G_q < +\infty$$

*(iii)* 如果 $q > \frac{2}{3}$，则存在 $\Omega \in \mathcal{C}$，使得

$$G_q(\Omega) = \max_{\mathcal{C}} G_q.$$

证明。 如果 $q \neq \frac{2}{3}$，则 $G_q$ 在变薄集序列下的行为显而易见：当 $q > \frac{2}{3}$ 时，它趋于 $+\infty$；当 $q < \frac{2}{3}$ 时，它发散至 $+\infty$。因此，通过与 命题 1.2 中所用论证类似的论证，我们立即得到 $(i)$ 和 $(iii)$，即 命题 6.2中的结论。

情形（$ii$），即 $q = \frac{2}{3}$，对应于该泛函的优化

$$\tilde{G}(\Omega) = \frac{T(\Omega)^2 \Lambda(\Omega)^3}{P(\Omega)^2} = G_{\frac{2}{3}}(\Omega)^3.$$

由（6.2），可得

$$\tilde{G}(\Omega) = F(\Omega)^2 \left( \frac{\Lambda(\Omega)\, \mathrm{V}(\Omega)^2}{P(\Omega)^2} \right).$$

因此，由（1.11）和（6.3），对于所有 $\Omega \in \mathcal{C}$，均有

$$\left( \frac{\pi^2}{4m(m+2)} \right)^2 \left( \frac{\pi^2}{4m^2} \right) < \tilde{G}(\Omega) < (1-\varepsilon)^2 \left( \frac{\pi^2}{4} \right),$$

因此，命题得证。 □

我们将迄今为止证明的性质总结于表 3。

| $q \leq \frac{2}{m+2}$ | $\frac{2}{m+2} < q < \frac{2}{3}$ | $q = \frac{2}{3}$ | $q > \frac{2}{3}$ |
|---|---|---|---|
| $\min_{\mathcal{C}} G_q = G_q(B_1)$ | $\min_{\mathcal{C}} G_q > 0$ | $\inf_{\mathcal{C}} G_q > 0$ | $\inf_{\mathcal{C}} G_q = 0$ |
| $\sup_{\mathcal{C}} G_q = +\infty$ | $\sup_{\mathcal{C}} G_q = +\infty$ | $\sup_{\mathcal{C}} G_q < +\infty$ | $\max_{\mathcal{C}} G_q < +\infty$ |

表 3：泛函 $G_q$ 在$\mathcal{C}$ 类中不同 $q$范围下的下确界和上确界值汇总。

## 6.3 近球集类中的优化

我们研究了球附近泛函 $G_q$ 的局部性质，得到了以下结果。

**定理 6.3**。 设 $G_q$ 是定义于 (6.1) 中且满足 $q > 0$的泛函，并设 $\gamma > 0$。则有以下性质：

*(i)* 若 $q < \dfrac{2}{m+2}$，则存在 $\delta > 0$和一个常数 $C = C(m,\ \delta)$使得对于每个 $B_h \in S_{\delta,\ \gamma}$（定义见 1.12）

$$G_q(B_h) - G_q(B_1) \geq C \left\| h \right\|^2_{H^1(\partial\Omega)}.$$

*(ii)* 若 $\dfrac{2}{m+2} < q < q' := \dfrac{2}{m+2} \left[ 1 + 2 \dfrac{m-1}{3m-1} \left( j_{\frac{m}{2}-1}^{\frac{m}{2}-1} - 2 \right) \right]$，$B_1$既不是局部极大值，也不是局部极小值，即对于所有 $\delta > 0$，都存在 $B_{h_1},\ B_{h_2} \in S_{\delta,\ \gamma}$，使得

$$G_q(B_{h_1}) < G_q(B_1) \quad and \quad G_q(B_{h_2}) > G_q(B_1).$$

*(iii)* 若 $q > q'$，则存在 $\delta > 0$ 和一个正常数 $C = C(m, \delta)$，使得对于每个$B_h \in S_{\delta,\ \gamma}$

$$G_q(B_1) - G_q(B_h) > C \left\| h \right\|^2_{H^1(\partial\Omega)}.$$

**注 6.4**。 可以观察到，泛函 $G_q$ 具有与我们在 注 1.7 中针对泛函 $F_q$所观察到的相同局部行为。事实上，在任意维数下，都可以找到一个 $q$ 的取值区间，使得 $B_1$ 是一个鞍点。此外，我们注意到行为发生了明显变化：当 $B_1$ 在 $q = \dfrac{2}{m+2}$处不再同时是局部极小值和全局极小值时， $B_1$ 则会先成为局部极大值，随后随着 $q$ 增大而成为全局极大值

为了证明 定理 6.3，我们采用与 第 5 节相同的技巧，因此证明以下引理。

**引理 6.5**。 设 $q > 0$。 $B_1$ 是 $G_q$ 的临界形状，即满足

$$\ell_1[G_q](B_1) \equiv 0.$$

**引理 6.6**。 设 $\varphi \in C^{2,\gamma}(\partial B_1)$，其中 $\gamma > 0$，并考虑 $G_q$ 在 (6.1)中定义的泛函，且$q > 0$。使用 定理 2.6中引入的记号，可得

$$\ell_2[G_q](B_1)(\varphi,\varphi) = -\frac{T^{q-1}(B_1)\Lambda(B_1)}{P^{\beta_q}(B_1)m^2(m+2)(m-1)}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k}[(q(m+2)-2)k^2+ \\ +(3m-4)(q(m+2-2))k-(m-1)(3q(m+2)+4m-6-4c_k)]\varphi_{k,l}^2.$$

证明。 由于 $G_q$ 在平移和缩放下不变，只需计算$\varphi \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega) \cap \mathcal{T}^0(\partial\Omega)$的导数

我们采用 定义 5.8中引入的记号，并考虑函数

$$g_q : t \to G_q(\Omega_{th}).$$

根据注 2.7，我们有 $\ell_2(G_q)(\varphi, \varphi) = g_q''(0)$。此外，我们注意到

$$g_q(t) = \frac{\lambda(t)\tau(t)^q}{p(t)^{\beta_q}}.$$

因此，两次求导并利用 $\tau'(0) = \lambda'(0) = \mathrm{v}'(0) = 0$，我们有

$$g_q''(0) = \frac{\lambda''(0)\tau(0)^q}{p^{\beta_q}(0)} + \frac{q\lambda(0)\tau(0)^{q-1}}{p^{\alpha_q}(0)}\tau''(0) - \beta_q\frac{\lambda(0)\tau(0)^q}{\mathrm{v}^{\alpha_q}(0)}\frac{p''(0)}{p(0)}.$$

化简并利用引理 5.9，我们得到

$$g_q''(0) = \frac{\tau^{q-1}(0)}{p^{\beta_q}(0)}\Bigg\{\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k}\Bigg\{\frac{\omega_m}{m(m+2)}\frac{\lambda(0)}{m\omega_m}[4k+2(m-1)-4c_k]$$

$$-q\frac{\lambda(0)}{m^2}[2k-(m+1)] - \beta_q\lambda(0)\frac{\omega_m}{m(m+2)}\frac{1}{m\omega_m}[k^2+(m-2)k+(m-1)(m-2)]\Bigg\}\varphi_{k,l}^2.$$

利用 $\beta_q(m-1) = q(m+2) - 1$，我们得到

$$g_q''(0) = \frac{\tau^{q-1}(0)\lambda(0)}{p^{\beta_q}(0)m^2(m+2)(m-1)}\Bigg\{\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k}\Bigg\{(m-1)[4k+2(m-1)-4c_k]$$

$$-q(m-1)(m+2)[2k-(m+1)] - (q(m+2)-2)[k^2+(m-2)k+(m-1)(m-2)]\Bigg\}\varphi_{k,l}^2.$$

通过直接计算，我们得到

$$g_q''(0) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{N_k} G_k^q \varphi_{k,l}^2.$$

其中

$$G_k^q = \frac{\tau^{q-1}(0)\lambda(0)}{p^{\beta_q}(0)m^2(m+2)(m-1)}[(2-q(m+2))k^2+(3m-4)(2-q(m+2))k+(m-1)(3q(m+2)+4m-6-4c_k)].$$

□

**推论 6.7**。 设 $G_q$ 为在 (6.1) 中定义的泛函，且 $q > 0$，则以下性质成立。

*(i)* 若 $q < \frac{2}{m+2}$，$G_q$ 在 ($\mathbf{C}_{H^s}$) 假设下，在 $B_1$ 上，对 $s = 1$ 成立。此外，且 $B_1$ 是 $H^1(\partial B_1)$ 中的严格稳定形状，其中 $G_q$。

*(ii)* 若 $q = \frac{2}{m+2}$，$G_q$ 在 ($\mathbf{C}_{H^s}$) 假设下，在 $B_1$ 上，对 $s = 0$ 成立。此外，且 $B_1$ 是 $H^0(\partial B_1)$ 中的严格稳定形状，其中 $G_q$。

*(iii)* 若 $\frac{2}{m+2} < q < q' := \frac{2}{m+2}\left[1 + 2\frac{m-1}{3m-1}\left(j_{\frac{m}{2}-1}^{m} - 2\right)\right]$，$B_1$ 是 $G_q$ 的鞍点，即存在 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2 \in H^1(\partial B_1)$，使得

$$\ell_2(G_q)(\varphi_1, \varphi_1) > 0 \quad and \quad \ell_2(G_q)(\varphi_2, \varphi_2) < 0.$$

*(iv)* 若 $q = q'$，则对所有 $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$

$$\ell_2(G_q)(\varphi, \varphi) \leq 0.$$

此外，存在 $\varphi_1 \in T^{1}(\partial B_1) \setminus \{0\}$，使得

$$\ell_2(G_q)(\varphi_1, \varphi_1) = 0.$$

*(v)* 若 $q > q'$，$-G_q$ 在 ($\mathbf{C}_{H^s}$)上满足假设 $B_1$ 对 $s = 1$成立。此外，且 $B_1$ 是 $H^1(\partial B_1)$ 中的严格稳定形状，适用于 $-G_q$。

证明。 根据引理 6.6

$$\ell_2(G_q)(\varphi, \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{N_k} G_k^q \varphi_{k,l}^2.$$

其中

$$G_k^q = \alpha[(2 - q(m+2))k^2 + (3m-4)(2-q(m+2))k + (m-1)(3q(m+2) + 4m - 6 - 4c_k)],$$

with

$$\alpha = \frac{T^{q-1}(B_1)\Lambda(B_1)}{P^{\beta_q}(B_1)m^2(m+2)(m-1)}.$$

注意，若 $q_1 < q_2$，则对所有 $k \geq 2$

$$G_k^{q_1} > G_k^{q_2}.$$

我们分析不同的情形。

(i) 设 $q \leq \frac{2}{m+2}$。由于 $\{c_k\}$ 是递减的，我们有，若 $k_1 \leq k_2$，则

$$G_{k_1}^q \leq G_{k_2}^q.$$

因此，由于 $G_k^q$ 关于 $k$ 递增且关于 $q$ 递减，$G_k^q > 0$ 对所有 $k \geq 2$ 以及 $q \leq \frac{2}{m+2}$ 当且仅当 $G_2^{m+2} > 0$。根据注5.10，该不等式成立，

$$G_2^{\frac{2}{m+2}} = \alpha(6 + 4m - 6 - 4c_2) > 0. \tag{6.5}$$

由于 $\ell_2(G_q)$ 可连续延拓至 $H^1(\partial B_1)$，如果 $q < \frac{2}{m+2}$，则球 $B_1$ 是 $G_q$ 在 $H^1(\partial B_1)$ 中的严格稳定形状。

此外，由于 $2 - q(m+2) > 0$，$G_k^q$ 与 $(1+k^2)$ 具有相同的渐近行为，当 $k$ 趋近于 $+\infty$ 时，泛函 $G_q$ 满足假设 $(\mathbf{C}_{H^s})$，其中 $s = 1$。

(ii) 如果 $q = \frac{2}{m+2}$，则有 $G_q = F_q$。因此，结论由 *(ii)* 中的推论5.14得出。

(iii) 令 $\frac{2}{2+m} < q < q'$，则有 $[2 - q(m+2)] < 0$，因此存在 $k^*$，使得对于 $k > k^*$，$G_k^q < 0$。此外，注意到 $q'$ 满足

$$G_2^{q'} = 0.$$

因此，对于所有

$$\frac{2}{m+2} < q < q'$$

$$G_2^q > G_2^{q'} = 0$$

由于 $G_2^q > 0$，且当 $k$ 足够大时，$G_k^q < 0$，$B_1$ 是 $G_q$ 的鞍点。

(iv) 令 $q \geq q'$。我们要证明，对于所有 $k > 2$，

$$G_k^q < G_2^q. \tag{6.6}$$

当且仅当以下条件成立时，这个不等式成立：

$$4(m-1)(c_k - c_2) > (k-2)(2 - q(m+2))(k + 2 + 3m - 4). \tag{6.7}$$

对于所有 $q \geq q'$，

$$(2 - q(m+2)) \leq (2 - q'(m+2)) = -\frac{4(m-1)(m-c_2)}{3m-1},$$

因此（6.7）对所有 $q \geq q'$ 成立，当且仅当

$$c_k > c_2 - (k-2)\left(\frac{k+3m-2}{3m-1}\right)(m - c_2).$$

该不等式成立，因为根据注5.10

$$c_2 - (k-2)\left(\frac{k+3m-2}{3m-1}\right)(m-c_2) < c_2 - (k-2)(m-c_2) = c_2 - (k-2)(c_1 - c_2) < c_k.$$

最后一个不等式由函数存在一个凸延拓得出：$k \in \mathbb{N} \to c_k \in \mathbb{R}$。因此，我们得到（6.6）。

此外，若 $q = q', G_2^q = 0$ 且对所有 $\varphi \in H^1(\partial\Omega)$

$$\ell_2(G_q)(\varphi, \varphi) \leq 0.$$

此外，若 $\psi \in \mathcal{T}^{\frac{1}{2}}(\partial B_1) \setminus \{0\}$，使得对所有 $k \geq 3$ $\psi_{k,l} = 0$，我们有

$$\ell_2(G_q)(\psi, \psi) = 0.$$

(v) 因此，若 $q > q'$，对所有 $\varphi \in \mathcal{T}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，我们有

$$\ell_2(G_q)(\varphi, \varphi) > 0.$$

因此，由于 $\ell_2(G_q)$ 可连续延拓至 $H^1(\partial B_1)$，球 $B_1$ 是 $-G_q$ 在 $H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$中的严格稳定形状。此外，$-G_k^q$ 与$(1 + k^2)$ 具有相同的渐近行为，当$k$ 趋近于 $+\infty$时。这保证泛函 $-G_q$ 满足假设 ($\mathbf{C}_{H^s}$)，其中 $s = 1$。

□

本节的结果引出了以下证明：定理 6.3 其证明沿用定理 1.6的证明。

## 致谢

作者的研究工作部分得到了数学分析、概率及其应用国家小组（GNAMPA）和国家高等数学研究所（INdAM）的资助。
Vincenzo Amato 的研究工作部分得到了国家复苏与韧性计划（PNRR）—任务4“教育与研究”—组成部分2“从研究到企业”—投资项目1.2“资助青年研究人员提交的项目”的支持，CUP：F66E25000010006。

## 参考文献

[1] M. Abramowitz 和 I.A. Stegun。数学函数手册：公式、图表与数学表，第55卷。美国政府印刷局，1948年。[2] V. Amato、N. Gavitone 和 R. Sannipoli。关于 Pólya 型和 Makai 型不等式中的最优集合，2025年。[3] V. Amato、A. L. Masiello、G. Paoli 和 R. Sannipoli。凸集 p-扭转量的尖锐定量估计。非线性微分方程与应用 *NoDEA*，30(1):12，2023年。[4] M. van den Berg 和 G. Buttazzo。关于容量与扭转刚度。伦敦数学会通报，53(2):347–359，2021年。[5] M. van den Berg、G. Buttazzo 和 A. Pratelli。关于主特征值与扭转刚度之间的关系。当代数学通讯，23(08):2050093，2021年。[6] M. van den Berg、V. Ferone、C. Nitsch 和 C. Trombetti。关于扭转刚度和第一狄利克雷特征值的 Pólya 不等式。积分方程与算子理论，86(4):579–600，2016年。

[7] M. van den Berg、V. Ferone、C. Nitsch 和 C. Trombetti。关于菱形、等腰三角形和逐渐变薄的凸集上的 Pólya 泛函。*Revista matemática iberoamericana*，36(7):2091–2105，2020年。[8] M. van den Berg 和 N. Gavitone。关于涉及 p-容量和 q-扭转刚度的泛函。*Calculus of Variations and Partial Differential Equations*，64(8):245，2025年。[9] M. van den Berg 和 A. Malchiodi。关于涉及容量、扭转刚度、周长和测度的一些变分问题。*Advances in Calculus of Variations*，16(4):961–974，2023年。[10] M. van den Berg、G. Buttazzo 和 B. Velichkov。涉及第一狄利克雷特征值和扭转刚度的优化问题。载于形状优化的新趋势，第166卷，*Internat. Ser. Numer. Math.*，第19–41页。Birkhäuser/Springer，Cham，2015年。[11] T. Bonnesen 和 W. Fenchel。凸体理论。BCS Associates，爱达荷州莫斯科，1987年。L. Boron、C. Christenson 和 B. Smith 从德文译出并加以编辑。[12] L. Brasco。关于扭转刚度和主频率：Kohler-Jobin 重排技术导论。*ESAIM Control Optim. Calc. Var.*，20(2):315–338，2014年。[13] L. Brasco。关于凸集中的主频率和等周比。*Ann. Fac. Sci.Toulouse Math. (6)*，29(4):977–1005，2020年。[14] L. Brasco 和 D. Mazzoleni。关于凸集中的主频率、体积和内切半径。*NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*，27(2):第12篇论文，26页，2020年。[15] L. Briani、G. Buttazzo 和 S. Guarino Lo Bianco。关于反向 Kohler-Jobin 不等式。*Revistamatemática iberoamericana*，40(3):913–930，2024年。[16] L. Briani、G. Buttazzo 和 F. Prinari。 $p$-拉普拉斯算子的扭转刚度与主特征值之间的不等式。*Calc. Var. Partial Differential Equations*，61(2):第78篇论文，25页，2022年。[17] D. Bucur、J. Lamboley、M. Nahon 和 R. Prunier。球附近狄利克雷谱的尖锐定量稳定性。*arXiv* 预印本 *arXiv:2304.10916*，2023年。[18] G. Dal Maso 和 A. Malusa。通过穿孔区域上的边值问题逼近松弛狄利克雷问题。爱丁堡皇家学会会刊 *A* 辑：数学，125(1):99–114，1995年。[19] M. Dambrine。关于形状海森矩阵的变分及临界形状稳定性的充分条件。*Racsam*，96:95–121，2002年。[20] M. Dambrine 和 J. Lamboley。带二阶变分的形状优化稳定性。*Journalof Differential Equations*，267(5):3009–3045，2019年。[21] M. Dauge。角域上的椭圆边值问题：解的光滑性与渐近性，第1341卷。Springer，2006年。[22] F. Della Pietra、G. Di Blasio 和 N. Gavitone。利用最大值原理对非线性椭圆算子的第一狄利克雷特征值给出的尖锐估计。*Advances in Nonlinear Analysis*，9(1):278–291，2018年。[23] F. Della Pietra 和 N. Gavitone。与某些各向异性算子相关的第一特征值和扭转刚度的尖锐界。*Mathematische Nachrichten*，287(2-3):194–209，2014年。

[24] L. Esposito、N. Fusco 和 C. Trombetti。等周不等式的定量形式：各向异性情形。比萨高等师范学院科学部年刊，4(4):619–651，2005年。[25] G. Faber。证明：在所有面积相同、张力相同的均匀膜中，圆形膜具有最低基音。巴伐利亚科学院数学—物理学部会议报告，页码 169–172，1923年。[26] A. Henrot。椭圆算子特征值的极值问题。Springer，2006年。[27] A. Henrot 和 M. Pierre。形状变化与优化：几何分析。EMS数学论丛。欧洲数学会，2018年。[28] M. Ismail 和 M. Muldoon。贝塞尔函数及相关函数的小实零点和纯虚零点的界。应用分析方法，2(1):1–21，1995年。[29] M.T. Kohler-Jobin。数学物理中区域泛函的一种等周比较方法。I. 对等周猜想的一种证明 $P\lambda^2 \geq \pi j_0^4/2$Pólya 和 Szegö。应用数学与物理学杂志，29(5):757–766，1978年。[30]M.T. Kohler-Jobin。狄利克雷积分相等时的对称化。SIAM数学分析杂志，13(1):153–161，1982年。[31] E. Krahn。论 Rayleigh 所表述的圆的一个极小性质。数学年刊，94:97–100，1925年。[32] D. A. La Manna 和 S. Sannipoli。若干涉及边界动量的等周不等式，2025年。[33] L.J. Landau。贝塞尔函数之比与 $\alpha J_\nu(x)+xJ'_\nu(x) = 0$的根。数学分析与应用杂志，240(1):174–204，1999年。[34] J. L. Lions 和 E. Magenes。非齐次边值问题及其应用：第1卷。Springer Science & Business Media，1972年。[35] I. Lucardesi 和 D. Zucco。关于扭转刚度与第一狄利克雷特征值的布拉施克–桑塔洛图。纯粹与应用数学年刊（1923—），201(1):175–201，2022年。[36] E. Makai。膜的基频与梁的扭转刚度。数学分析及相关专题研究，页码 227–231，1962年。[37] C. Nitsch。通过区域导数得到的基频等周结果。Calculus of Variations and Partial Differential Equations，49(1):323–335，2014年。[38] G. Pólya。弹性——关于振动膜的基频以及杆件的抗扭弹性。科学院每周会议报告，225(7):346–348，1947年。[39] G. Pólya。扭转刚度、基频、静电容量与对称化。应用数学季刊，6:267–277，1948年。[40] G. Pólya。物理量与几何量之间的另外两个不等式。印度数学会杂志（新系列），24(1961):413–419，1960年。[41] J. W. S. Rayleigh。《声学理论》，第 I 卷。麦克米伦，1877年。

[42] J. B. de Saint-Venant。关于棱柱扭转的回忆录。提交给科学院的各类学者论文集，14:233–560，1856年。

电子邮件地址，C. Nitsch： c.nitsch@unina.it
电子邮件地址，C. Trombetti（通讯作者）： cristina@unina.it
数学与应用系“R. Caccioppoli”，那不勒斯费德里科二世大学，钦蒂亚街，圣安杰洛山大学校园，80126 那不勒斯，意大利。

电子邮件地址，V. Amato： v.amato@ssmeridionale.it
电子邮件地址，F. Villone： f.villone@ssmeridionale.it
先进材料与技术数学和物理科学系，南方高等学校，圣马尔切利诺广场10号，80138，那不勒斯，意大利。