arXiv:2601.09604v1 [math.AG] 14 Jan 2026

逆特征值问题、Floquet 等谱性与 Hilbert–Chow 态射

John Cobb、Matthew Faust 和 Andreas Kretschmer

Abstract. 何时可以改变矩阵的对角线而不改变其谱？我们完全解答了这一问题，适用的域为特征零或特征大于矩阵阶数的代数闭域：矩阵 $n \times n$ A 存在一个非零对角矩阵 D，使得 A 和 $A+D$ 具有相同的谱，当且仅当对于某个阶数 k，A 的 $k \times k$ 个主子式并非全都相等。这与数值分析中的经典加法逆特征值问题相关，并对固体物理中离散周期算子的 Floquet 等谱性理论中的存在性和刚性结果具有影响。证明采用了涉及点的希尔伯特概形以及 Hilbert–Chow 态射的无穷小结构的新方法。

1. 引言

逆特征值问题是矩阵理论和应用分析中研究最多的问题之一，几乎数学的每个领域都有相关成果；关于这方面的精彩综述，参见 [5]。设 A 为一个固定的 $n \times n$ 代数闭域 K 上的矩阵。其中最著名的问题之一是加法逆特征值问题（AIEP）：

> 给定一个多重集 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset K$，求一个对角矩阵 D，使得 $A+D$ 的谱为 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$。 $(*)$

在 $\mathbb{C}$ 上，Friedland 证明问题（$*$）总是可解的；对于一般的目标谱选择，恰有 $n!$ 个不同的解 [17]。关于（$*$）的其他证明见 [2, 18], ，而同一问题的其他变体则在 [33, 44] 中进行了研究。

Friedland 的结果可以改述为：态射的每个纤维

$$F_A : \mathrm{Diag}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n/\Sigma_n, \qquad D \mapsto \sigma(A+D),$$

将对角矩阵 D 映射到 $A+D$的谱，按重数计算有 $n!$ 个点。这里，Σ_n 是由 n 个元素组成的对称群。从代数几何的角度来看，F_A 是次数为 $n!$ 的有限平坦映射，因此也是满射。

在本文中，我们研究 F_A 的纤维，尤其是位于其自身谱之上的纤维；该纤维由满足 A 且与 $A+D$ 等谱的对角矩阵 D 组成。其他纤维可由这个纤维通过将 A 替换为对角平移得到。我们的主要定理对使中心纤维为单点集的“谱刚性”矩阵 A 给出了内在刻画；也就是说，不存在保持 A 的谱不变的对角平移 $D \neq 0$。

2020年数学主题分类。主要分类：15A29、14C05、81Q35。次要分类：15A83、47B36、14B10、35J10、81Q05。

定理 A. 设 $n \times n$ 矩阵 A 的元素属于特征为 0 或 $> n$ 的代数闭域。存在一个非零对角矩阵 D，使得 A 和 $A + D$ 具有相同的谱，当且仅当对于某个 k，A 的 $k \times k$ 个主子式并非全都相等。

定理 A 将谱刚性矩阵的集合与所谓的 对称化主子式簇 对应起来，该簇由 $n \times n$ 矩阵组成，这些矩阵中大小相同的主子式具有相同的值。Huang–Oeding [28] 在著名的主子式赋值问题的背景下 [1, 21, 27]研究并描述了这一簇。例如，三角矩阵具有对称化主子式，当且仅当其所有对角元都相等。在这种情况下，定理 A可通过直接计算得到验证。

当 A 是带权简单图 G的邻接矩阵时，定理 A 便成为谱图论中的一个新结果。

推论 B。设 A 是带权简单图 G的邻接矩阵。存在一个非零对角矩阵 D，使得 A和 $A+D$具有相同的谱，当且仅当 G 既不是无边图，也不是所有边权绝对值相等的完全图。

推论 B 的一个动机来自离散周期性薛定谔算子的谱理论。令 ¨表示 Δ 上的离散拉普拉斯算子，并令 $V\colon\ \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ 为一个 Λ-周期势，其中

$$\Lambda = q_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}, \qquad q_j \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

算子 $\Delta + V$作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$，是晶体固体及相关材料中电子动力学的标准紧束缚模型；参见综述 [38]。弗洛凯理论表明，$\Delta + V$的谱等于对 $z \in (\mathbb{T})^d$取并集所得的有限矩阵 $L_V(z)$ 的谱，其中这些矩阵的大小为 $q = \prod_{j=1}^{d} q_j$，通过施加弗洛凯边界条件获得，$\mathbb{T}$ 表示复单位圆。若两个算子 $\Delta + V$和$\Delta + V'$满足：对于所有 $z \in (\mathbb{T})^d$，均有 $\sigma(L_V(z)) = \sigma(L_{V'}(z))$，则称它们是 Floquet 等谱的；等价地说，它们具有相同的能带结构。

经典的刚性定理表明，不存在非零实势与零势 Floquet 等谱0，无论是在离散情形还是连续情形；例如参见 Borg[3] 和 Kuchment [35]。相比之下，对于复势，在连续情形中存在许多与0 等谱的[23]非平凡例子[13, 33, 44]。另一方面，对于离散周期算子，目前仅在特殊情形下构造出了此类例子 A 为离散拉普拉斯算子，且 D 为周期乘法算子时，定理A给出了离散情形下的以下分类结果。

定理 C. 设 $\Lambda = q_1\mathbb{Z} \oplus q_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$ 满足 $q_j \in \mathbb{Z}_{>0}$。如果至少有一个周期q_j 大于 3，则存在非零的 Λ–周期复势 V 与 0 Floquet 等谱。如果所有 $q_j \le 3$ 且至多有两个 q_j 等于 3，则唯一与 0 Floquet 等谱的Λ–周期势是 $V \equiv 0$。

这是离散情形中的一种新现象：与连续情形不同，当周期足够小时，复周期势仍然是刚性的；而对于最大周期超过 3 的复势，刚性则不再成立。

现在我们简要概述定理 A 的证明。要使 A和 $A+D$等谱，它们必须具有相同的特征多项式。等价地，多项式 $\det(A-\lambda I)-\det(A+D-\lambda I)$ 的所有系数 S_1，……， S_n，也就是我们称为 谱不变量的 A，都必须为零。理想

$$E_A := (S_1, \dots, S_n) \subset k[v_1, \dots, v_n],$$

称为谱不变量理想，它恰好是满足以下条件的对角矩阵集合： D 使得 $A+D$ 与 A等谱。将 S_i 用主子式展开后，定理A 的一个方向相对直接：若对每个 $k\times k$， A 的所有主子式都一致，则我们证明 $E_A=(e_1,\dots,e_n)$，其中 e_i 表示 i个变量的第 v_j个初等对称多项式。特别地，它的零点集为 $\mathcal{V}(E_A)=\{0\}$。

对于反向结论，我们考虑将 E_A 退化为其伴随分次理想，从而得到一个由 $\mathbb{A}^1$参数化的平坦族，并研究它在 Hilbert–Chow 态射下的像

$$\mathrm{HC}\colon \mathrm{Hilb}_{n!}(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \mathrm{Sym}_{n!}(\mathbb{A}^n),$$

该像刻画了多项式方程组 E_A 的解在退化过程中的变化。若不存在非平凡的对角平移 $D\neq 0$ 能够保持 A的谱不变，那么这个族的 Hilbert–Chow 像就必定保持不变。我们结合 Grothendieck–Deligne 范数映射对 HC 的描述、余不变量代数 $k[v_1,\dots,v_n]/(e_1,\dots,e_n)$ 的组合性质，以及关于我们所称的单项式的 Artin 约化的一些信息，证明当 A 不属于对称化主子式轨迹时，这种情况不可能发生。

本文组织如下。在第 2 节中，我们介绍对称群的余不变量代数、点的希尔伯特概形，以及通过 Grothendieck–Deligne 范数映射对 Hilbert–Chow 态射作函子性描述所需的背景知识。第 3 节阐述如何将后者作为一种实用工具，用于证明理想 E_A 存在非零解，从而证明定理 A 和推论 B。最后在第 4 节中，我们将其应用于离散周期薛定谔算子的 Floquet 等谱理论，尤其给出定理 C的证明。

2. Background and Notation

设 K是特征为 0 或 $>n$的域，并设 $P=K[v_1,\dots,v_n]$是具有 n个变量的多项式环。

2.1. 谱不变量。设 A是 K上的一个 $n\times n$矩阵，并定义 $D:=\mathrm{diag}(v_1,\dots,v_n)$。考虑 $A+D$的特征多项式，其系数属于 P:

$$\det(A+D-\lambda I)=\sum_{i=0}^{n} C_i(v)(-\lambda)^{n-i}, \tag{1}$$

其中每个 $C_i(v)\in P$都是 v_j中次数为 i 的齐次多项式。如果 A 和 $A+D$ 等谱，那么它们的特征多项式相同。这促成了以下定义。

定义 2.1。 A 的谱不变量是这些多项式

$$S_i := C_i(v) - C_i(0) \in P, \qquad i=1,\dots,n,$$

等价　　地，　S_i 是 $\det(A-\lambda I)\ -\det(A+D-\lambda I)$ 的第　i 个系数。这个想法　　l

$$(S_1,\dots,S_n)\subset P$$

称为　A 的谱不变量理想。

令　A_N　为　A　中由索引为　$N\subseteq[n]$ 的行和列构成的主子矩阵。关于谱不变量　S_i 的下述公式可由行列式的莱布尼茨展开直接推出。

引理 2.2. 对所有　$1\le i\le n$，有

$$S_i=\sum_{\substack{J\subseteq[n]\\1\le|J|\le i}}\left(\sum_{\substack{N\subseteq[n]\setminus J\\|N|=i-|J|}}\det(A_N)\right)v^J,$$

其中　$v^J:=\prod_{j\in J}v_j$。

2.2. 余不变量代数。设　$e_1,\dots,e_n\in P$ 为初等对称多项式，即　e_i 是　$v_1,\dots,v_n$ 中所有次数为　i 的无平方单项式之和。

定义 2.3. 完全齐次对称多项式　$H_i(v_1,\dots,v_j)$ 是变量　$v_1,\dots,v_j$ 中所有总次数为　i 的单项式之和。

初等对称多项式与完全齐次对称多项式之间满足以下多项式恒等式。

引理 2.4. 对每个　$1\le j\le n$，都有如下关系

$$\sum_{i=0}^{n-j+1}(-1)^iH_i(v_1,\dots,v_j)e_{n-j+1-i}(v_1,\dots,v_n)=0.$$

证明。变量 $v_1,\dots,v_j$ 的完全齐次对称多项式的生成函数为

$$\sum_{i\ge0}H_i(v_1,\dots,v_j)t^i=\frac{1}{(1-v_1t)\cdots(1-v_jt)},$$

因此

$$\sum_{i\ge0}(-1)^iH_i(v_1,\dots,v_j)t^i=\frac{1}{(1+v_1t)\cdots(1+v_jt)}.$$

另一方面，$v_1,\dots,v_n$ 中初等对称函数的生成函数为

$$\sum_{i=0}^{n}e_i(v_1,\dots,v_n)t^i=(1+v_1t)\cdots(1+v_nt).$$

后两个生成函数乘积中　t^{n-j+1} 的系数，等于引理陈述中的求和。另一方面，这两个级数的乘积为 $(1+v_{j+1}t)\cdots(1+v_nt)$（当　$j=n$时，应将其解释为 1）。展开该乘积，　t 的最高可能指数为　$n-j$，因此　t^{n-j+1} 的系数等于零。□

推论 2.5. $v_1^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} v_1^{n-i} e_i$。

证明。 应用引理 2.4 ， 其中 $j = 1$。 □

引理 2.4 的一个直接推论是理想的等式

$$(e_1, \ldots, e_n) = (H_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, H_{n-1}(v_1, v_2), H_n(v_1)) \subseteq P.$$

此外，很容易看出， $H_i(v_1, \ldots, v_{n-i+1})$ 是关于字典序项序的 Gr¨obner 基，其中 $v_1 < v_2 < \cdots < v_n$， 对应的初始理想为 $(v_1^n, v_2^{n-1}, \ldots, v_n)$。由此可知，所谓的 Artin 单项式 $v_1^{l_1} \cdots v_n^{l_n}$（其中 $0 \le l_i \le n - i$ 对所有 $i = 1, \ldots, n$ 均成立）构成余不变量代数$P/(e_1, \ldots, e_n)$ 的分次 K-基。

定义 2.6. 设 $p \in P$ 为任意多项式。 p 的 Artin 约化是满足 $\overline{p} = \overline{p'}$ 属于 $P/(e_1, \ldots, e_n)$ 的 Artin 单项式 $p' \in P$ 的唯一线性组合。

单项式$p \in P$ 的 Artin 约化各项中出现的指数大小通常难以预测。不过，关于 v_1 的指数，可以得出以下结论。

引理 2.7. 设 $p \in P$ 是一个单项式，并令 $p = v_1^r v$ 表示一个不能被 v_1 整除的单项式 v。那么，在 p 的 Artin 约化p' 中出现的每个 Artin 单项式里， v_1 的指数都是 $\ge r$。

证明. 可用归纳法证明。若 p 是 Artin 单项式，则结论显然成立。否则，取最大的 $i \ge 1$， 使得 v_i 在 p 中的指数 r_i 满足 $r_i \ge q - i + 1$， 并令 p' 为 p 的 Artin 约化。若 $i = 1$，则由推论 2.5 得 $p \in (e_1, \ldots, e_q)$，因此$p' = 0$，结论自然成立。若 $i \ge 2$，则 $p \equiv p - v^{r_i} {}_{(q-i+1)}$ $H_{q-i+1}(v_1, \ldots, v_i)$（模 $(e_1, \ldots, e_q)$）， 且 $p - v^{r_i} {}_{(q-i+1)}$ $H_{q-i+1}(v_1, \ldots, v_i)$ 中的所有单项式，其 v_1 指数均不小于 p， v_i 指数严格小于 p；对于 $j > i$ ， 所有 v_j 的指数则与 p 中的相同。我们可以对 $p - v^{r_i} {}_{(q-i+1)}$ $H_{q-i+1}(v_1, \ldots, v_i)$ 中出现的所有单项式重复同一过程，并像之前那样舍去 v_1 指数为 $\ge q$ 的单项式。每次迭代中，对于每个新单项式，要么使得 v_i 的指数为 $\ge q - i + 1$ 的最大下标 i 减小，要么 i 保持不变而 v_i 的指数减小，因此该过程会终止。□

2.3. 点的希尔伯特概形与 Hilbert–Chow 态射。关于代数几何和概形理论的一般背景，请参阅 [25]。我们简要介绍与本文相关的点的希尔伯特概形和 Hilbert–Chow 态射。更多内容可参见例如 [10, 第 5-7] 章。

与前文一样，设 $P = K[v_1, \ldots, v_n]$ 为多项式环。记 $\mathbb{A}^n := \mathrm{Spec}(P)$ 为代数闭域 K 上的仿射 n 空间。对于整数 $r \ge 1$， $\mathbb{A}^n$ 上 r 个点的希尔伯特概形 $\mathrm{Hilb}_r(\mathbb{A}^n)$ 参数化所有长度为 r 的 $\mathbb{A}^n$ 的零维子概形，或者等价地，参数化所有满足 $\dim_K(P/I) = r$ 的理想 $I \subseteq P$。更准确地说，函子

$\mathcal{H}ilb_r(\mathbb{A}^n) : \mathrm{Sch}_{/K}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Sets}, T \longmapsto \{ Z \subseteq \mathbb{A}^n \times_K T \text{ 秩为 } r \} \text{ 的 } | \ Z \to T \text{ 有限平坦}$
$| \ Z \to T \text{ 闭子概形}$

由一个拟射影概形 $\mathrm{Hilb}_r(\mathbb{A}^n)$ 表示，即存在双射$\mathcal{H}ilb_r(\mathbb{A}^n)(T) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{Sch}/\kappa}(T, \mathrm{Hilb}_r(\mathbb{A}^n))$，且这些双射关于 T 是自然的。

Hilb 的几何$_r(\mathbb{A}^n)$ 通常很微妙，目前仍在被广泛深入地研究 [4, 11,29–32]。关于正面结果，已知对于所有$_r(\mathbb{A}^n)$，Hilb 是连通的 n 且r [24]，并且当$_r(\mathbb{A}^n)$ 时，Hilb 是光滑的，因而是不可约的 $r \le 3$ [10, 第 7 节。2]或$n \le 2$ [16]。

在本节余下部分，我们假设 K 的特征为零，或不整除 r。我们将广泛使用 Hilbert–Chow 态射

$$\mathrm{HC} : \mathrm{Hilb}_r(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \mathrm{Sym}_r(\mathbb{A}^n).$$

这里，$\mathrm{Sym}_r(\mathbb{A}^n)$ 表示 r 次对称幂，其定义为

$$(\mathbb{A}^n)^r/\Sigma_r = \mathrm{Spec}\left((P^{\otimes r})^{\Sigma_r}\right),$$

其中，Σ_r 是置换 r 个因子的对称群，而 $(\mathbb{A}^n)^r$ 和 $(P^{\otimes r})^{\Sigma_r}$ 是 P的 r 次张量幂的不变子环。对称幂 $\mathrm{Sym}_r(\mathbb{A}^n)$ 也可以看作参数化了 $\mathbb{A}^n$上长度为 r 的有效 0-循环。作为集合映射，Hilbert–Chow 态射 HC 将一个理想 $I \subseteq P$ 映射到其消失零循环。因此，HC 的一种理解是：它接收一个零维多项式系统，并输出其解，同时计入重数。

HC 作为概形态射的正式定义较为复杂，而许多标准论述只在稍加限制的情形下定义它，例如，[10, 第 7 节1] 中的论述仅从 $\mathrm{Hilb}_r(\mathbb{A}^n)$ 的底层约化概形给出一个映射 $(\mathrm{Hilb}_r(\mathbb{A}^n))_{\mathrm{red}} \to \mathrm{Sym}_r(\mathbb{A}^n)$。本文所用的 Hilbert–Chow 态射 HC 则是指根据 Grothendieck–Deligne 范数映射构造的态射，见 [6, 第 4] 节。

根据我们对 K 的特征所作的假设，不变子环 $(P^{\otimes r})^{\Sigma_r}$ 自然同构于除幂代数 $\Gamma^r P$ [6, 第 3 节3]。后者的正式定义是多项式环 $K[\gamma^r(u) : (r, u) \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \times P]$ 的某个商，其关系以非正式地将生成元 $\gamma^r(u)$ 视为表达式 $\frac{1}{r}\,!\,u^r$ 为模型，但无需真的除以 $r!$ [6, 第 1 节1]。

我们简要介绍 [6,第 4 节2]中给出的 HC 的构造。我们只需要仿射情形，因此令 A 为一个 K-代数，并定义 $P_A := P \otimes_K A$。根据上述文献，HC(Spec(A)) 将理想 $I \subseteq P_A$ 映射为 P_A/I 是秩为 r的局部自由 A-模的条件下的 K-代数同态

$$h_I : \Gamma^r P \to A,$$

该同态由以下条件确定：对于任意多项式 $u \in P$，生成元 $\gamma^r(u) \in \Gamma^r P$经 h_I 映射为 A-线性自同态的行列式

$$\mathrm{mult}_u : P_A/I \to P_A/I,\ p \mapsto u \cdot p.$$

用公式表示，

$$h_I(\gamma^r(u)) = \det(\mathrm{mult}_u).$$

根据 [6, 命题 1.11], ，迹 $\mathrm{Tr}(\mathrm{mult}_u)$ 也属于 h_I 的像，即

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{mult}_u) = h_I(\gamma^1(u) * \gamma^{r-1}(1)). \tag{2}$$

这里， $*$表示除幂代数中的外乘法 $\Gamma^i P \times \Gamma^j P \to \Gamma^{i+j} P$，在我们的设置下，它与张量代数中的 洗牌积 一致 $P^{\otimes i} \times P^{\otimes j} \to P^{\otimes (i+j)}$ 当限制在对称张量子环上时，见 [6, 第 3 节。3]事实上，[6, 命题 1.11]表明，mult 的特征多项式的每个系数u都属于 h_I的像。

3. Proof of Main Result

3.1. 初等对称多项式的扰动。 定义 2.1 中的谱不变量是初等对称多项式的“扰动”，即在这些多项式上加上次数较低的多项式。经过一些初步尝试后，人们可能会猜想，除非由这些扰动的初等对称多项式生成的理想恰好等于 $(e_1, \dots, e_n)$ 本身，否则该理想必有非零解。下面的例子表明，即使对于 $n = 3$，这也不成立。

例 3.1. 理想 $I_1 = (e_1, e_2 - v_1 - v_2, e_3 + v_1 v_2 - v_1 - v_2)$、 $I_2 = (e_1, e_2 + v_1, e_3 + v_1^2)$ 和 $I_3 = (e_1, e_2 - v_2, e_3 + v_1^2 + v_1 v_2 + v_2)$ 的零点集都仅由原点组成，而且它们都不等于 (e_1, e_2, e_3)。事实上，利用基于第 2.3 节并在以下小节中展开的 Hilbert–Chow 技巧，可以证明，除 (e_1, e_2, e_3) 本身之外， $\mathbb{G}_m$ 对 I_1、 I_2 和 I_3 在 $\mathbb{G}_m$ 对 $\mathbb{A}^3$ 的标准标量乘法作用下的轨道，构成了所有零点集仅为原点且由初等对称多项式的扰动生成的理想的完整集合。$\diamond$

引理2.2 的一个直接推论是，谱不变量以初等对称多项式为首项，且只涉及无平方因子单项式 v_i。这促使我们引入以下更狭义的扰动概念。

定义 3.2. e_i 的扰动是一个次数为 $< i$ 、其单项式全为无平方因子的多项式 $g_i \in P$。我们称 $e_i + g_i$ 为扰动的初等对称多项式，而理想

$$E := (e_1 + g_1, \dots, e_n + g_n) \subset P$$

是一个广义谱不变量理想。

最终，我们将把 g_i 专门取为 A的谱不变量，但目前先将它们的系数视为独立参数。我们旨在分类满足 $\mathcal{V}(E) = \{0\}$ 的广义谱不变量理想 E。

对于一个子 集 $J \subseteq [n]$，其中 $|J| \le i - 1$，记 $a_J^{(i)}$ 为单项式的系数 1

$$v^J = \prod_{j \in J} v_j$$

在 g_i 中。对于固定的 i 和 $0 \le k \le i - 1$，我们将满足 $|J| = k$ 的系数集合 $a_J^{(i)}$ 记为 $a_k^{(i)}$。将 $a_J^{(i)}$ 视为变量时，我们赋予它们（辅助）次数

$$\deg(a_J^{(i)}) := i - |J| > 0.$$

将理想的数据表示为 E 三角数组（表1）很方便，其中第 i 列对应于 $e_i + g_i$，从底部起第 k行汇集所有次数为 k 的项

在变量 v_1、……、v_n 中，而反对角线对应于辅助次数 $i-|J|$ 的常数值。

				e_n
			$\iddots$	$\vdots$
		e_3	$\cdots$	$a_3^{(n)}$
	e_2	$a_2^{(3)}$	$\cdots$	$a_2^{(n)}$
e_1	$a_1^{(2)}$	$a_1^{(3)}$	$\cdots$	$a_1^{(n)}$
$a_0^{(1)}$	$a_0^{(2)}$	$a_0^{(3)}$	$\cdots$	$a_0^{(n)}$

TABLE 1. 广义谱不变量的理想

接下来，我们将这些理想置于一个性质良好的单参数族中。设 T 是一个新变量，并设 $E^H \subset P[T]$ 是相对于标准分次对 E 进行齐次化所得的结果，其中 $\deg T = 1$ 和 v_i 保持次数 1。具体而言，若 $g_i = \sum a_J^{(i)} v^J$，则次数为 i 的齐次化生成元为

$$e_i + g_i^H, \qquad g_i^H = \sum_{|J| \le i-1} a_J^{(i)} v^J T^{i-|J|}.$$

引理 3.3. 理想 E^H 定义了一个由 $\mathbb{A}^n$ 的子概形构成的有限平坦族，其长度为 $n!$ 或者，等价地，一个态射

$$c : \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} K[T] \longrightarrow \operatorname{Hilb}_{n!}(\mathbb{A}^n).$$

如果 E 仅在原点处消失，那么复合映射 $\mathrm{HC} \circ c$ 与 Hilbert–Chow 态射为常值。

证明。自然映射 $K[T] \to P[T]/E^H$ 使 $P[T]/E^H$ 成为有限生成的自由 $K[T]$-模。由于 E 的生成元的最高次部分为 e_1、……、e_n，它们构成正则序列，因此 E 本身的生成元也构成正则序列，于是我们有

$$\dim_K(P/E) = \dim_K(P/(e_1, \dots, e_n)) = n!.$$

由此可知，$P[T]/E^H$ 是秩为 $n!$ 的自由 $K[T]$-模，因此 E^H 定义了一个由 $\mathbb{A}^n$ 中的零维子概形构成的平坦族，其长度为 $n!$。这给出一个态射

$$c : \mathbb{A}^1 \to \operatorname{Hilb}_{n!}(\mathbb{A}^n), \qquad t \mapsto [E^H|_{T=t}].$$

在 $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$上，族 $E^H|_{T=t}$ 由 E 经由 $\mathbb{G}_m$ 在 $\mathbb{A}^n$ 上的缩放作用得到，因此 c 的像包含于某个 $\mathbb{G}_m$- 轨道的闭包中。Hilbert–Chow 态射

$$\mathrm{HC} : \operatorname{Hilb}_{n!}(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \operatorname{Sym}_{n!}(\mathbb{A}^n) \coloneqq (\mathbb{A}^n)^{n!}/\Sigma_{n!}$$

关于诱导缩放作用是 $\mathbb{G}_m$-等变的。如果 E 仅在原点处消失，那么对于每个 $t \neq 0$，$E^H|_{T=t}$ 也仅在原点处消失，因此相应的 0-循环总是 $n! \cdot [0]$。因此 $\mathrm{HC} \circ c$ 是常数。□

如果 HC $\circ c$ 是常数，那么特别是其微分（更一般地说，HC 的泰勒展开中所有正次幂项的系数）在 $T=0$ 处 [6], 都为零。根据通过 Grothendieck–Deligne 范数映射 $a_J^{(i)}$ 对 HC 的描述，这得出了扰动 g_i系数之间的显式关系 $u \in P$：例如，对于任意多项式 T，Tr(mult$_u$) 中所有正次幂项的系数都必须为零。

现在我们将其精确表述，并提取 $a^{(i}$ 中某些首项关系 $_J^{)}$.

3.2. 多项式性与首项。设 E^H 如上，并考虑以下 $K[T]$-线性自同态

$$\mathrm{mult}_u : P[T]/E^H \longrightarrow P[T]/E^H, \qquad p \longmapsto u \cdot p$$

其中某个齐次 $u \in P$ 的次数为 d。

引理 3.4。设 $u \in P$ 是次数为 d 的齐次元素，且设 $r \geq 1$。那么，mult$_u$ 的特征多项式的第 r 个系数具有如下形式

$$T^{rd} R^{u,r},$$

其中， $R^{u,\,r}$ 是变量 $a_J^{(i)}$ 的 rd 次齐次多项式。特别地，对于 $r=1$，我们有

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{mult}_u) = T^d R^{u,1},$$

并将 $R^u := R^{u,\,1}$ 简写为。

证明。令 $E_0 := E^H|_{T=0} \subseteq P$，并选取 P/E_0 的一个齐次 K-基 (b_k)。根据分次 Nakayama 引理，同一个 (b_k) 是自由模 $P[T]/E^H$ 的 $K[T]$-基。设 $M = (M_{kl})$ 是乘以 u 在此基下的矩阵。那么，第 r 个特征系数在符号意义下等于 M 的所有主 $r \times r$ 阶子式之和，因此只需证明每个元素 M_{kl} 都是 $a_J^{(i)}$ 中次数为 $\deg(b_l) - \deg(b_k) + d$ 的齐次多项式，再乘以 $T^{\deg(b_l)-\deg(b_k)+d}$。

由于 e_1、……、e_n 构成正则序列，我们有 $E^H = (e_1 + g_1^H$、……、$e_n + g_n^H)$，即 E^H 由 E 的生成元的齐次化生成；换言之， E 的生成元构成关于由总次数给出的权序的 Gröbner 基。齐次化扰动 g_i^H 具有如下性质：在它们的每一项中， T 的指数恰好等于相应 $a_J^{(i)}$ 的辅助次数。

现在令 $p \in P$为任意齐次多项式。将 $\overline{p} \in P[T]/E^H$写成 b_k的线性组合，我们断言，每个 b_k 的系数都是关于 $a_J^{(i)}$的齐次多项式，其次数为 $\deg(p) - \deg(b_k)$，再乘以 $T^{\deg(p)-\deg(b_k)}$。将此应用于 $p := ub_l$，即可完成证明。为证明这一断言，我们对 $\deg(p)$ 使用归纳法。$\deg(p) = 0$ 的情形显然。接下来，由于 (b_k) 也是 P/E_0的一组基，我们可以将 p 唯一地写成

$$p = \sum_{j:\ \deg(b_j)=\deg(p)} \alpha_j b_j + b,$$

其中 $\alpha_j \in K$和 $b \in (E_0)^{\deg(p)} = (e_1, \ldots, e_n)^{\deg(p)}$ 尤其不依赖于$a_J^{(i)}$。令 $b = \sum_{i=1}^n p_i e_i$ 为某个次数为 $\deg(p) - i$的齐次 $p_i \in P$。模去 E^H后，

于是我们有

$$b \equiv -\sum_{i=1}^{n} p_i g_i^H = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{J_i \subseteq [n] \\ |J_i|<i}} T^{i-|J_i|} a_{J_i}^{(i)} (p_i v^{J_i}).$$

每个 $p_i v^{J_i} \in P$ 都是次数为 $< \deg(p)$ 的齐次项，因此我们可以使用归纳假设得出结论。□

接下来我们考虑提取 R^u 的某个“最高部分”的操作，即将所有 $a_J^{(i)}$ 的次数赋为 1（而非辅助次数）时呈线性的那一部分。

定义 3.5。设 $u \in P$ 是次数为 d 的齐次项，且 R^u 如引理 *3.4* 中所述。我们将 R^u_{top} 定义为仅由 R^u 中那些变量位于辅助次数总和为 d 的反对角线上的项之和，见表 *1*；也就是说，我们将每个满足 $a_J^{(i)}$ 的变量 $i-|J| < d$ 设为零。

等价地，R^u_{top} 可通过以下通用特化得到。

引理 3.6。设 u 和 d 如上。令

$$\phi : K[(a_J^{(i)})_{i,J}] \longrightarrow K[(a_J^{(i)})_{i,J}]$$

为 K-代数自同态，对于表*1* 中辅助次数为 $< d$的每个单元，将该单元中的所有变量映射为 K中的同一个标量，将 $a_\emptyset^{(i)}$ 映射为0 （对所有 $i < d$均如此），并保持其余所有变量不变。那么

$$\phi(R^u) = R^u_{\mathrm{top}}.$$

证明。由于 mult_u 的特征多项式仅取决于理想 E^H，因此若将生成元 $e_i + g_i^H$替换为通过给它们加上较早生成元 $e_j + g_j^H$的标量倍数而得到的任何其他一组生成元 $j < i$ （即表1中的“生成元的三角变换”），多项式 R^u 保持不变。特别地，应用 ϕ 后，我们可以利用此类变换消去 g_i^H中次数为 $> i - d$ 的 v_1，……，v_n 各项，而不影响次数恰为 $i - d$ 的项，其过程类似于高斯消元。对于所得生成元，迹 $\mathrm{Tr}(\mathrm{mult}_u)$ 恰为 $T^d R^u_{\mathrm{top}}$。由于理想未发生改变，故等式 $\phi(R^u) = R^u_{\mathrm{top}}$ 成立。□

最后两条注记记录了顶部部分 R^u_{top} 的特别简单形式，以及 $R^{u,\,r}$ 在置换和列运算下的自然对称性。

注 3.7. 在引理3.6的情形下，R^u_{top} 关于变量 $a_J^{(i)}$ 是齐次线性的，其中 $i - |J| = d$。特别地，对于每个 $0 \le k \le n - d$，考虑这样一种特化：将表1 中第 d条反对角线上除单元格 $a_k^{(k+d)}$ 中的变量之外的所有变量都设为零；将所得多项式记为$R^u_{\mathrm{top},\,k}$。那么

$$R^u_{\mathrm{top}} = \sum_{k=0}^{n-d} R^u_{\mathrm{top},k}.$$

此外，$R^u_{\mathrm{top},\,k}$ 是以下形式的广义谱不变量理想中 mult_u 的迹

$$(e_1, \ldots, e_{k+d-1},\ e_{k+d} + g_{k+d},\ e_{k+d+1}, \ldots, e_n),$$

其中 g_{k+d} 在 v_1、……、v_n 中是次数为 k 的齐次式。 ◇

注释 3.8。对于任意由 $\sigma \in \Sigma_n$ 作用的对象

$$\sigma(a_J^{(i)}) \coloneqq a^{(i)}_{\sigma^{-1}(J)}, \qquad \sigma(v_j) \coloneqq v_{\sigma(j)},$$

我们有

$$R^{\sigma(u),r} = \sigma^{-1}\big(R^{u,r}\big).$$

特别地，如果 $\sigma(u) = u$，那么 σ 固定 $R^{u,\,r}$。在特殊情形 $r = 1$ 下，映射 $u \mapsto R^u$ 是 K-线性的，因为 $u \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{mult}_u)$ 也是如此。◇

3.3. 显式的首项关系。现在我们固定一个 u 的选择，并显式计算 R^u_{top}。

命题 3.9. 令 $1 \le m \le n$ 并设 $u \coloneqq v_1 \cdots v_m \in P$。令 $R^u_{\mathrm{top}} = \sum_{k=0}^{n-m} R^u_{\mathrm{top},k}$ 如备注 3.7所述。那么，对所有 $0 \le k \le n-m$,

$$R^u_{\mathrm{top},k} = m \sum_{j=0}^{\min(k,m)} (-1)^{j+1}\,(m+k-j-1)!\,(n-m-k+j)! \sum_{\substack{J\subseteq[n]\\ |J|=k\\ |J\cap[m]|=j}} a_J^{(m+k)}.$$

证明。由备注 3.8 和3.7可知，由于 $\sigma(u) = u$ 对所有 $\sigma \in \Sigma_{\{1,\dots,m\}} \times \Sigma_{\{m+1,\dots,q\}} \subseteq \Sigma_q$均成立，存在标量 $\lambda_{k,j} \in K$ 使得

$$R^u_{\mathrm{top},k} = \sum_{j=0}^{\min(k,m)} \lambda_{k,j} \sum_{\substack{J\subseteq[n]\\ |J|=k\\ |J\cap[m]|=j}} a_J^{(m+k)}.$$

此外，对于 $k \ge 1$, $R^u_{\mathrm{top},k}$ 在将 e_k 的某个倍数加到 $e_{k+m} + g_{k+m}$上时保持不变，因此 e

$$\sum_{j=0}^{\min(k,m)} \lambda_{k,j} \binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j} = 0 \quad \text{for all } k \ge 1. \tag{3}$$

我们断言，递推关系也成立

$$\lambda_{k,j} = -\lambda_{k-1,j-1} \qquad \text{for all } k \ge j \ge 1. \tag{4}$$

Assu（4）中的值$\lambda_{0,0}$ 连同（3）一起唯一确定所有 $\lambda_{k,j}$.

为计算 $\lambda_{0,0}$，注意到

$$R^u_{\mathrm{top},0} = \lambda_{0,0}\, a_{\emptyset}^{(m)}.$$

令 $a_{\emptyset}^{(m)} = 1$, $\lambda_{0,0}$ 恰好是该理想的 mult_u 迹

$$(e_1, \dots, e_{m-1},\ e_m + 1,\ e_{m+1}, \dots, e_n),$$

它是 Σ_n-不变的。因此

$$\lambda_{0,0}=\operatorname{Tr}(\mathrm{mult}_u)=\frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{\overline{\sigma}\in\Sigma_n/(\Sigma_m\times\Sigma_{n-m})}\operatorname{Tr}\big(\mathrm{mult}_{\sigma(u)}\big)=\frac{\operatorname{Tr}(\mathrm{mult}_{e_m})}{\binom{n}{m}}$$
$$=\frac{\operatorname{Tr}(\mathrm{mult}_{-1})}{\binom{n}{m}}=\frac{-n!}{\binom{n}{m}}=-\,m!\,(n-m)!.$$

这与命题中关于 $k=0$ 的公式里的系数相符。

容易验证，命题陈述中的系数满足递推关系（4）。现在我们检查它们是否满足（3）。对于 $k\geq 1$，我们有

$$\sum_{j=0}^{\min(k,m)}\lambda_{k,j}\binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}$$
$$=m\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}(m+k-j-1)!\,(n-m-k+j)!\binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}$$
$$=-\frac{m}{k}m!\,(n-m)!\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{m+k-j-1}{m-j}.$$

最后一个求和是 t^m 在

$$\Big(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}t^j\Big)\Big(\sum_{j'\geq 0}\binom{j'+k-1}{j'}t^{j'}\Big)=(1-t)^k\cdot(1-t)^{-k}=1,$$

中的系数，因此为零。这就证明了（3）。

剩下要证明递推关系（4）。为此，令 M 为表示 Artin 单项式基中的 mult_u 的矩阵。我们的论证实际上将表明，递推关系（4）对各个单独的对角元 M_{xx}也成立。

设 $x=v_1^{l_1}\cdots v_{n-1}^{l_{n-1}}$为一个 Artin 单项式。由于 $u=v_1\cdots v_m$的次数为 m，根据引理 M_{xx}，该项是 m中的齐次多项式，其次数为 $a_J^{(m+k)}$，$|J|=k$，再乘以 T^m。特别地，我们可以将基域扩张到 Artinian K-代数$A:=K[T]/(T^{m+1})$，并将 E^H视为 $P_A=P\otimes_K A$中的一个理想。

我们简记 $v:=v_{m+1}^{l_{m+1}}\cdots v_{n-1}^{l_{n-1}}$。有 $ux=v_1^{l_1+1}yv$，其中 $y:=v_2^{l_2+1}\cdots v_m^{l_m+1}$。设 $y'=\sum_j\alpha_j b_j$为 y的 Artin 约化，其中 $\alpha_j\in K$，且 Artin 单项式为 b_j。若$\alpha_j\neq 0$，则根据引理 2.7，b_j不包含变量 v_{m+1}、……、v_n。令 $p:=y-y'\in(e_1,\ldots\ldots,e_n)$，并写作 $p=\sum_{i=1}^n p_ie_i$，其中 p_i为齐次多项式，次数为 $\deg(p)-i$。我们有

$$ux=v_1^{l_1+1}y'v+v_1^{l_1+1}pv. \tag{5}$$

对于 (5) 中的第二个加项，我们注意到，模 E^H 有

$$v_1^{l_1+1}pv=\sum_{i=1}^{n}v_1^{l_1+1}p_ie_iv\equiv -T^m v_1^{l_1+1}p_{m+k}g_{m+k}v.$$

由于 $T^{m+1}=0$ 属于 P_A，因此 x-系数作为商 P_A/E^H中的元素 $v_1^{l_1+1}pv$ 与多项式 $-v_1^{l_1+1}p_{m+k}g_{m+k}v\in P$的 Artin 约化 ξ 相差一个乘数 T^m。但是根据引理 2.7，在 ξ 中出现的每个 Artin 单项式的 v_1-指数$\geq l_1+1$均为 x，特别是 x 本身不会出现。因此，(5) 的第二个加项不会对对角元 M_{xx}产生贡献。接下来考察 (5) 的第一个加项，写作 $b_j=v_1^{s_j}\tilde{b}_j$ 使得 $\tilde{b}_j$ 不能被 v_1整除。于是

$$v_1^{l_1+1}y'v=\sum_j \alpha_j v_1^{l_1+1+s_j}\tilde{b}_j v.$$

我们注意到，满足 $l_1+1+s_j\leq n-1$ 的那些项是次数为 $\deg(x)+m>\deg(x)$ 的 Artin 单项式，因此它们不可能对 M_{xx}作出贡献。对于其余满足 $l_1+1+s_j\geq n$的项，我们利用推论 2.5 将其写为

$$\begin{aligned}\sum_{j:\,l_1+1+s_j\geq n}\alpha_j v_1^{l_1+1+s_j}\tilde{b}_j v &= \sum_{j:\,l_1+1+s_j\geq n}\alpha_j\tilde{b}_j v\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}v_1^{l_1+1+s_j-i}e_i\\ &\equiv T^m\cdot(-1)^{m+k}\sum_{j:\,l_1+1+s_j\geq n}\alpha_j\tilde{b}_j v v_1^{l_1+1+s_j-m-k}g_{m+k},\end{aligned}$$

模 E^H。我们将最后一个表达式中 T^m 的系数记为 $W_k(g_{m+k})$，并将其视为关于 P 的多项式，其中扰动 g_{m+k} 可任意取值（等价地，$a_J^{(m+k)}\in K$、$|J|=k$ 可任意取值）。由于 P_A 中的 $T^{m+1}=0$，我们再次得到，式 (5) 第一项中 x 的系数，与 $W_k(g_{m+k})$ 的 Artin 约化中 x 的系数一致。最后需要注意的是，若 h 是 v_2、……、v_n 中次数为 $k-1$ 的无平方单项式，则作为关于 P 的多项式，有 $W_k(v_1h)=-W_{k-1}(h)$。由于取 Artin 约化是 K-线性的，$W_k(v_1h)$ 的 Artin 约化中 x 的系数，是 $W_{k-1}(h)$ 的 Artin 约化中 x 的系数的负值。但是现在令 g_{m+k} 等于 v_1h，则 mult_u 的迹恰好为 $\lambda_{k,j}$，其中 j 是 v_1h 中指标属于 $\{1,2,\dots,m\}$ 的变量数目。同样地，对 $k-1$ 而非 k，令 g_{m+k-1} 等于 h，则 mult_u 的迹恰好为 $\lambda_{k-1,j-1}$。这就完成了递推关系 (4) 的证明。□

根据命题 3.9，正如我们将看到的，我们已经建立了足够的关系来证明第一个主要定理。

3.4. 定理 ***A*** 的证明。一个方向显而易见。若对每个 $1\leq k\leq n$，所有主 $k\times k$ 子式 A 都相等，那么根据引理 2.2，每个谱不变量 S_i 都是次数为 $\leq i$ 的初等对称多项式的线性组合，其最高次数部分等于 e_i，且不含常数项。特别地，

$$(S_1,\dots,S_n)=(e_1,\dots,e_n),$$

因此，唯一的公共零点是原点。因此，不存在与 A 等谱的非零对角矩阵 D with$A+D$。

反过来，令 $E:=(S_1,\dots,S_n)$ 为 A 的谱不变量理想。假设 E 仅在原点处消失。我们必须证明，对于每个 $1\leq m\leq n$，A 的所有主 $m\times m$ 子式都相等。

我们对 m 使用归纳法。对于 $m=1$，该命题等价于 A 的所有对角元相等，这由 R^{v_1} 的消失立即得出（见下文）。现在假设对于某个 $0 \le d \le n-1$，对每个 $i \le d$，A 的所有主 $i \times i$ 子式都相等。我们证明所有主 $(d+1) \times (d+1)$ 子式都相等。

根据引理 2.2，$i \le d$ 的假设意味着，在 E（表 1）的表格描述中，辅助次数为 $\le d$ 的每个单元格内所有变量都相等。根据引理 3.6，对于任意次数为 $d+1$ 的齐次 u，R^u 在 E 处的取值与 R^u_{top} 在 E处的取值相同。特别地，这对 $u = v_1 \cdots v_{d+1}$也成立。

另一方面，根据引理 3.3，在 E 仅在原点处消失的假设下，复合映射 $\mathbf{HC} \circ c$ 是常值的，因此对于任意正次数的齐次 u，必有 $R^u(E) = 0$。对于 $u = v_1 \cdots v_{d+1}$，这给出

$$R^{v_1 \cdots v_{d+1}}_{\mathrm{top}}(E) = R^{v_1 \cdots v_{d+1}}(E) = 0.$$

我们断言，这迫使 A 的所有主 $(d+1) \times (d+1)$ 子式相等，从而完成归纳证明。

令 $m := d+1$。利用命题 3.9 和备注 3.7，可写成

$$R^{v_1 \cdots v_m}_{\mathrm{top}} = \sum_{k=0}^{n-m} R^{v_1 \cdots v_m}_{\mathrm{top},k}.$$

代入 E，并利用引理 2.2 代入

$$a_J^{(m+k)} = \sum_{\substack{N \subseteq [n] \setminus J \\ |N|=m}} \det(A_N),$$

可得

$$\begin{aligned} R^{v_1 \cdots v_m}_{\mathrm{top}}(E) &= \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{j=0}^{\min(k,m)} \lambda_{k,j} \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J|=k \\ |J \cap [m]|=j}} \sum_{\substack{N \subseteq [n] \setminus J \\ |N|=m}} \det(A_N) \\ &= \sum_{\substack{N \subseteq [n] \\ |N|=m}} \det(A_N) \sum_{\emptyset \neq J \subseteq [n] \setminus N} \lambda_{|J|,|J \cap [m]|}, \end{aligned}$$

其中 $\lambda_{k,\,j}$ 如命题 3.9的证明中所示。（$k=0$ 项之所以消失，是因为 S_i 没有常数项。）我们可以改写为

$$\sum_{\emptyset \neq J \subseteq [n] \setminus N} \lambda_{|J|,|J \cap [m]|} = m!\,(n-m)! + \sum_{J \subseteq [n] \setminus N} \lambda_{|J|,|J \cap [m]|}.$$

令 $r := |[m] \setminus N|$，并将 J 分解为 $J = J_1 \sqcup J_2$，使得 $J_1 \subseteq [m] \setminus N$ 且 $J_2 \subseteq [n] \setminus ([m] \cup N)$，其中 $|J_1| = j$ 和 $|J_2| = j'$。由此得到

$$\sum_{J \subseteq [n] \setminus N} \lambda_{|J|,|J \cap [m]|} = -m \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \sum_{j'=0}^{n-m-r} \binom{n-m-r}{j'} (m-1+j')!(n-m-j')!.$$

关于 j 和 j' 的求和相互独立，并且当 $r \geq 1$ 时，$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j} = 0$，因此我们只剩下 $r = 0$ 对应的项，即 $N = [m]$。在这种情况下，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{J\subseteq[n]\setminus[m]} \lambda_{|J|,|J\cap[m]|} &= -m\sum_{j'=0}^{n-m}\binom{n-m}{j'}(m-1+j')!(n-m-j')!\\ &= -m\sum_{j'=0}^{n-m}\binom{m-1+j'}{m-1}(m-1)!(n-m)!\\ &= -m!(n-m)!\sum_{j'=0}^{n-m}\binom{m-1+j'}{m-1}\\ &= -m!(n-m)!\binom{n}{m} = -n!.\end{aligned}$$

综上，我们得到

$$R_{\mathrm{top}}^{v_1\cdots v_m}(E) = m!(n-m)!\sum_{\substack{N\subseteq[n]\\|N|=m}}\det(A_N) \;-\; n!\,\det\big(A_{[m]}\big).$$

由于 $\operatorname{char} K = 0$ 或 $> n$，整数 $n!$ 在 K 中可逆，因此此表达式为零当且仅当

$$\det\big(A_{[m]}\big) = \binom{n}{m}^{-1}\sum_{\substack{N\subseteq[n]\\|N|=m}}\det(A_N), \tag{6}$$

即，指标为 $[m]$ 的主 $m\times m$ 子式等于所有主 $m\times m$ 子式的平均值。

最后，将 A 用对应于 $\sigma\in\Sigma_n$ 的任意置换矩阵进行共轭，不会改变（6）右侧的值，而左侧则变为 $\det\big(A_{\sigma([m])}\big)$。由于每个主 $m\times m$ 子式都可以这样得到，我们得出结论：所有此类子式都相等。□

C 的证明　推论 *B*。由于所有 2×2 主子式都必须相等，因此立即得出。　□

4. Floquet Isospectrality

周期算子充当“紧束缚”模型，其谱描述了晶体固体中的电子动力学，例如许多纳米材料和拓扑绝缘体中的电子动力学 [36, 38]。对这类算子的 Floquet 等谱性的研究历史悠久，始于约四十年前[13, 26, 33–35, 41, 42, 44, 45]。持续至今的一条研究脉络，是寻找与零势等谱的势0 [7–9, 19, 22, 43, 47]。

离散周期算子的谱可以实现为称为 Bloch簇的代数簇的投影；近年来，已有许多论文致力于通过代数方法分析谱问题，参见 [39, 40, 46] 及其中的参考文献。

4.1. $\mathbb{Z}^d$上的算子。令 Δ 表示作用于平方可和函数 $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上的离散拉普拉斯算子，其定义为

$$(\Delta u)(n) = \sum_{|n'-n|_1=1} u(n'),$$

其中，按惯例，对于 $n, n' \in \mathbb{Z}^d$，我们记作 $|n'-n|_1 := \sum_{i=1}^d |n'_i - n_i|$。只要 $Q = (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Z}^d_{>0}$是由周期组成的元组，我们就采用简写 $Q\mathbb{Z} := q_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$。势 $V\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ 称为 $Q\mathbb{Z}$-周期的，当且仅当

$$V(n+m) = V(n), \text{ for all } n \in \mathbb{Z}^d \text{ and } m \in Q\mathbb{Z}.$$

在拉普拉斯算子中加入一个作为乘法算子作用的 $Q\mathbb{Z}$-周期势 V，即可得到离散周期薛定谔算子 $\Delta + V$。通常，我们关注该算子作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 时的谱：

$$(\Delta u)(n) + V(n)u(n) = \lambda u(n), \text{ for all } n \in \mathbb{Z}^d. \tag{7}$$

弗洛凯理论表明， $\Delta + V$的广义特征函数恰好是 Floquet 乘子属于 $\mathbb{T}^d$ 的 $Q\mathbb{Z}$-准周期函数；也就是说，这些函数 $u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$满足弗洛凯边界条件

$$u(n + q_j\delta_j) = z_j u(n), \text{ for all } n \in \mathbb{Z}^d, z_j \in \mathbb{T} \text{ and } j \in [d] = \{1, \dots, d\}, \tag{8}$$

其中， $\{\delta_j\}_{j=1}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准基， $\mathbb{T}$是复单位圆。

将 $q = \prod_{i=1}^d q_i$ 写成方程（7），并附加边界条件（8），可将其实现为 $q \times q$矩阵 L_V（z），其中 $z =$（z_1，……， z_d）。特别地，当$d = 1$， $\Delta + V$可通过以下有限矩阵的乘法来实现：

$$L_V = \begin{cases} \begin{pmatrix} V(1) & 1 & 0 & \dots & 0 & z_1^{-1} \\ 1 & V(2) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & V(q_1-1) & 1 \\ z_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & V(q_1) \end{pmatrix} & \text{for } q_1 > 2, \\ \begin{pmatrix} V(1) & 1+z_1^{-1} \\ 1+z_1 & V(2) \end{pmatrix} & \text{for } q_1 = 2, \\ V(1) + z_1 + z_1^{-1} & \text{for } q_1 = 1. \end{cases} \tag{9}$$

对于 $d>1$, $\Delta+V$ 具有如下递归矩阵结构:

$$L_V=\begin{cases}\begin{pmatrix} L_{\tilde{V}_1} & I_{\tilde{q}} & 0 & \dots & 0 & z_d^{-1}I_{\tilde{q}} \\ I_{\tilde{q}} & L_{\tilde{V}_2} & I_{\tilde{q}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{\tilde{q}} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I_{\tilde{q}} & L_{\tilde{V}_{q_d-1}} & I_{\tilde{q}} \\ z_d I_{\tilde{q}} & 0 & \dots & 0 & I_{\tilde{q}} & L_{\tilde{V}_{q_d}} \end{pmatrix} & \text{for } q_d>2, \\ \begin{pmatrix} L_{\tilde{V}_1} & I_{\tilde{q}}+z_d^{-1}I_{\tilde{q}} \\ I_{\tilde{q}}+I_{\tilde{q}}z_d & L_{\tilde{V}_2} \end{pmatrix} & \text{for } q_d=2, \\ L_{\tilde{V}_1}+z_1 I_{\tilde{q}}+z_1^{-1}I_{\tilde{q}} & \text{for } q_d=1, \end{cases} \tag{10}$$

其中 $\tilde{q}=\frac{q}{q_d}$, 且 V_i 是一个 $q_1\mathbb{Z}\times\cdots\times q_{d-1}\mathbb{Z}$-周期势, 由 $V_i(n_1,\dots,n_{d-1})=V(n_1,\dots,n_{d-1},i)$ 给出。

记 $\sigma_V(z):=\sigma(L_V(z))$ 为 $L_V(z)$ 的特征值（多重）集，包含代数重数。根据弗洛凯理论，众所周知,

$$\sigma(\Delta+V)=\bigcup_{z\in\mathbb{T}^d}\sigma_V(z).$$

定义 1. 假设 V和 V'是 $Q\mathbb{Z}$-周期势。若对所有 $z\in\mathbb{T}^d$, 算子 $\Delta+V$和 $\Delta+V'$满足 $\sigma_V(z)=\sigma_{V'}(z)$, 则称它们为 Floquet 等谱。在这种情况下，也常称 $Q\mathbb{Z}$-周期势 V和 V'为 Floquet 等谱。

将 z 视为不定元，我们可以把 $L_V(z)$ 看作一个以$\mathbb{C}[z_1^{\pm},\dots,z_d^{\pm}]$为变量、元素为 Laurent 多项式的矩阵。显然, $L_V(z)=L_V^T(z^{-1})$。记 $L_V(z)$ 的特征多项式为 $D_V(z,\lambda)$，我们称 $D_V(z,\lambda)$在 $z\in\mathbb{T}^d$上的零点集为色散关系，并称 $D_V(z,\lambda)$ 在 $(\mathbb{C}^*)^d\times\mathbb{C}$ 中的簇为 Bloch 簇。显然，当且仅当 $D_V(z,\lambda)$ 和 $D_{V'}(z,\lambda)$ 是同一个多项式时，两个势 V和 V' 是 Floquet 等谱的。

对于多项式$f=\sum_{(a,\,b)}c_{a,\,b}z^a\lambda^b\in\mathbb{C}[z_1^{\pm},\dots,z_d^{\pm},\lambda]$，我们定义 $[z^a\lambda^b]f:=c_{a,\,b}$表示单项式 $z^a\lambda^b$ 在 f中的系数。显然，当且仅当对所有 $(a,b)\in\mathbb{Z}^{d+1}$, $[z^a\lambda^b]f=[z^a\lambda^b]g$ 时，两个多项式 f 和 g 相等。

根据定义 1，两个势 V和 V' 是 Floquet 等谱的，当且仅当满足以下方程组:

$$[z^a\lambda^b](D_V(z,\lambda)-D_{V'}(z,\lambda))=0,\ \text{for all } (a,b). \tag{11}$$

将 V 和 V' 在 $\mathbb{Z}^d/Q\mathbb{Z}$ 上的取值视为不定元 v_i 和 v_i', 式（11）便成为一个多项式方程组。这些多项式称为谱不变量，它们共同生成谱不变量理想；参见定义3.2。

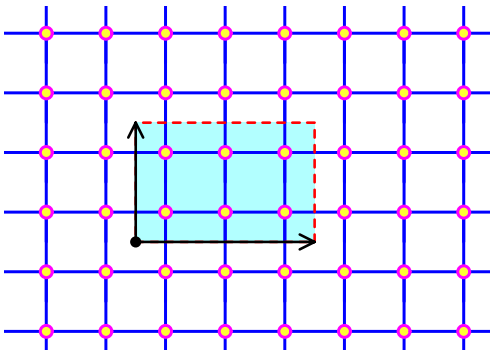


FIGURE 1. 带有高亮基本域的方格晶格，其周期性为 (3,2)$\mathbb{Z}$。

例 4.1. 考虑 $Q=(3,2)$ 的情形。该方格晶格的 Floquet 矩阵 L_V对于 $\Delta+V$其周期性如图1 所示，为

$$L_V=\begin{pmatrix} V(1,1) & 1 & z_1^{-1} & 1+z_2^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & V(2,1) & 1 & 0 & 1+z_2^{-1} & 0 \\ z_1 & 1 & V(3,1) & 0 & 0 & 1+z_2^{-1} \\ 1+z_2 & 0 & 0 & V(1,2) & 1 & z_1^{-1} \\ 0 & 1+z_2 & 0 & 1 & V(2,2) & 1 \\ 0 & 0 & 1+z_2 & z_1 & 1 & V(3,2) \end{pmatrix}.$$

计算 $V'=0$ 的谱不变量后可发现，极小生成元的数量多于变量的数量。也就是说，相应的谱不变量理想 $E_{\Delta+V'}=E_\Delta$ 不是完全交；然而，由于 0 是一个平凡解，我们知道 E_Δ 的簇非空。符号计算表明， E_Δ 的次数为 51，且其零点集仅包含 0。当 V' 改为取一般的值时， $E_{\Delta+V'}$ 的次数为 12，而 $E_{\Delta+V'}$ 的零点集中的点恰好来自图 1 [34] 所示图形的对称性。$\diamond$

4.2. 定理 C 的证明。令 $Q=(q_1,\dots,q_d)\in\mathbb{N}^d$，并考虑一个 $Q\mathbb{Z}$-周期势 V。如引言中所述，定理 C 可通过证明以下两种情形得出：

(1) 周期较小（$q_i\le 3$ 对所有 $1\le i\le d$均成立），以及 (2) 周期较大（$q_i>3$ 对某些 $1\le i\le d$成立）。

情形 (1) 在第 4.4 节讨论，情形 (2) 则在第 4.3节讨论。

当 $P\mathbb{Z}$ 是 $Q\mathbb{Z}$ 的矩形子群时，即存在 $P=(p_1,\dots,p_d)\in\mathbb{N}^d$，使得$q_i|p_i$对每个 i 均成立，我们将 V_P 记作 $P\mathbb{Z}$-周期势 $V_P(n)=V(n)$。令 $P/Q=(\frac{p_1}{q_1},\dots,\frac{p_d}{q_d})$。众所周知， $D_{V_P}(z,\lambda)$ 与 $D_V(z,\lambda)$ 之间满足如下关系

$$D_{V_P}(z^{P/Q},\lambda)=\prod_{\mu\in U_{P/Q}} D_V(\mu z,\lambda), \tag{12}$$

其中 $U_{P/Q}=U_{p_1/q_1}\times\cdots\times U_{p_d/q_d}$且$U_{p_i/q_i}$是（$p_i/q_i$）次单位根的集合。为方便读者，我们说明如何得到（12）。更多详情请参见 [37]。

（对 12）的证明。 固定 $z \in \mathbb{T}^d$，并考虑 ψ 上的准周期函数空间 $\mathbb{Z}^d$，满足

$$\psi(n + p_j\delta_j) = z_j^{\frac{p_j}{q_j}}\psi(n), \text{ for all } n \in \mathbb{Z}^d \text{ and } j \in [d]. \tag{13}$$

因此，这类准周期函数由其在基本域上的取值决定 $\widehat{P} = \{(n_1, \ldots, n_d) \mid 0 \le n_i < p_i\} \subset \mathbb{Z}^d$，我们可以将每个准周期函数$\widehat{}$（13）表示为其在 P上的取值构成的向量，因此 $\Delta + V_P$在 ψ 上的作用等同于由 $L_{V_P}(z^{P/Q})$ 给出的有限矩阵乘法，其特征多项式为 $D_{V_P}(z^{P/Q}, \lambda)$。

令 $G := Q\mathbb{Z}/P\mathbb{Z} = \prod_i \mathbb{Z}/(p_i/q_i)\mathbb{Z}$，并将 G 在 $\mathbb{Z}^d$ 上的元素表示为 $a \in G \mapsto \widehat{a} = aQ = (a_1q_1, \ldots, a_dq_d) \in \mathbb{Z}^d$。给定任意满足（13）的准周期函数 ψ，定义

$$\psi_\rho(n) := \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\overline{\rho^a}\psi(n + \widehat{a}), \text{ for } \rho \in U_{P/Q},$$

其中 $\rho^a = \rho_1^{a_1} \cdots \rho_d^{a_d}$。有限傅里叶反演给出

$$\psi(n) = \sum_{\rho\in U_{P/Q}} \psi_\rho(n).$$

此外，通过直接计算可得

$$\psi_\rho(n + q_j\delta_j) = \rho_j z_j \psi_\rho(n), \text{ for all } n \in \mathbb{Z}^d \text{ and } j \in [d].$$

也就是说，每个 ψ_ρ 都是一个 $Q\mathbb{Z}$-准周期函数，其 Floquet 乘子为 ρz，因此由它在 $\widehat{Q} = \{(n_1, \ldots, n_d) \mid 0 \le n_i < q_i\} \subset \mathbb{Z}^d$上的取值所确定。现在来考察 $\Delta + V_P$对每个 ψ_ρ的作用，特别是，我们将证明 $(\Delta + V_P)\psi_\rho$ 仅依赖于 ψ_ρ。我们通过直接计算，分别考察 Δ 和 V_P 对 ψ_ρ 的作用来证明这一点。对于 Δ，有

$$\Delta\psi_\rho(n) = \sum_{|n-n'|_1=1} \psi_\rho(n').$$

注意到 V_P是 $Q\mathbb{Z}$-周期性的，对所有 $a \in G$ 均有 $V_P(n + \widehat{a}) = V_P(n)$，因此

$$V_P\psi_\rho(n) = V_P\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\overline{\rho^a}\psi(n + \widehat{a}) = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\overline{\rho^a}V_P(n + \widehat{a})\psi(n + \widehat{a})$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\overline{\rho^a}V_P(n)\psi(n + \widehat{a}) = V_P(n)\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\overline{\rho^a}\psi(n + \widehat{a}) = V_P(n)\psi_\rho(n).$$

$\widehat{}$由于每个 ψ_ρ 都由其在 Q上的取值确定，可知 $\Delta + V_P$对每个 ψ_ρ的作用方式与 $\Delta + V$相同，即为乘以 $L_V(\rho z$。由于离散傅里叶变换是酉变换，因此对每个 $z \in \mathbb{T}^d$，$\sigma(L_{V_P}(z^{P/Q})) = \bigcup_{\rho\in U_{P/Q}} \sigma(L_V(\rho z))$，由此得到 (12)。□

由于发送 $z \to z^{P/Q}$ 不会影响谱不变量，因此由式（12）可知，任意非零的 $Q\mathbb{Z}$-周期势，只要与 0 Floquet 等谱，就会自然地导出一个非零的$P\mathbb{Z}$-周期势，与 0Floquet 等谱。

下面的命题表明，我们可以将寻找与 0 Floquet 等谱的势，限制为满足对所有 i 均有 $q_i \ge 3$ 的 $Q\mathbb{Z}$-周期势。

命题 4.2. 假设 $Q=(q_1,\dots,q_{d-1},1)$ 或 $Q=(q_1,\dots,q_{d-1},2)$。那么，存在一个非零的 $Q\mathbb{Z}$-周期势与 0 Floquet 等谱，当且仅当存在一个非零的 $(q_1,\dots,q_{d-1})\mathbb{Z}$-周期势与 0 Floquet 等谱。

证明。注意，一个方向是平凡的；特别地，如果存在一个非零的（q_1，…，q_{d-1}）$\mathbb{Z}$-周期势与 0 Floquet 等谱，那么由方程（10）（情形 $q_d=1$）和（12）显然可知，存在一个非零的 $Q\mathbb{Z}$-周期势与 0 Floquet 等谱。

当 $q_d=1$ 时，将 $z_d+z_d^{-1}$ 吸收到特征矩阵中的 λ 后，剩下的方向即可推出。还需考虑 $q_d=2$ 的情形。

设存在一个非零的 $Q\mathbb{Z}$-周期势与 0 Floquet 等谱。由方程（10），

$$L_V=\begin{pmatrix} L_{\tilde V_1} & I_{\tilde Q}+z_d^{-1}I_{\tilde Q}\\ I_{\tilde Q}+z_dI_{\tilde Q} & L_{\tilde V_2}\end{pmatrix}.$$

因此，$D_V(z_1,\dots,z_{d-1},-1,\lambda)=\det\big(L_{\tilde V_1}-\lambda I\big)\det\big(L_{\tilde V_2}-\lambda I\big)$。

由于对于所有势 V，$\det\big(L_{\tilde V_1}-\lambda I\big)$ 均不可约 [12,14]，因此 $\det\big(L_{\tilde V_1}-\lambda I\big)=\det(L_{\tilde 0}-\lambda I)$ 和 $\det\big(L_{\tilde V_2}-\lambda I\big)=\det(L_{\tilde 0}-\lambda I)$ 均成立。也就是说，$\tilde V_1$ 和 $\tilde V_2$ 都必须是 $(q_1,\dots,q_{d-1})\mathbb{Z}$-周期势，且与 0 Floquet 等谱。由于我们假设 $\tilde{}\quad\tilde{}V$ 非零，V_1 或 V_2 至少有一个非零，因此必定存在一个非零的 $(q_1,\dots,q_{d-1})\mathbb{Z}$-周期势，与 0 等谱。□

命题 4.2 已得到证明，并假设第 4.3 节给出的结果成立，现在我们可以给出定理 C 的完整证明。

定理 C 的证明。令 $Q=(q_1,\dots,q_d)\in\mathbb{N}^d$。根据命题 4.2，我们可以将搜索范围限制为周期 $Q\mathbb{Z}$，使得对所有 $1\le i\le d$ 都有 $q_i\ge 3$。因此，当周期较短时（即情形 (1)），只需证明不存在与 0 等谱的非零 $(3\mathbb{Z})^d$-周期势。通过对 $d\le 2$ 进行符号计算，可以证明不存在与 0 等谱的非零 $(3\mathbb{Z})^d$-周期势，因此这一结论可推广到周期 Q，其中所有 $q_i\le 3$ 均成立，且 q_i 中至多有两个等于 3。当周期较长时（即情形 (2)），至少有一个 $1\le i\le d$ 满足 $q_i>3$。根据方程 (12)，只需证明存在一个非零的 $P\mathbb{Z}$-周期势，与 0 等谱，且其中 $P=(1,\dots,1,q_i)$。等价地，根据命题 4.2，我们可以证明存在一个与 0 等谱的非零 $q_i\mathbb{Z}$-周期势。也就是说，我们已将问题化约为一维情形，而这一情形将在定理 4.3 中得到证明。□

第4.3 节通过结合定理C （结合定理4.3 和注释4.5），给出了定理

4.3. 大周期的情形。现在考虑存在某个$q_i>3$的情形。正如第 C 节 4.2节定理的证明所示，这种情形可归结为检验是否存在一个 $q\mathbb{Z}$周期势与 0 等谱，其中 $q>3$。取方程（9）中矩阵的特征多项式，可知 $D_V(z,\lambda)$ 的支撑恰为 $(\pm1,0)$ 和 $(0,i)$，其中 $i\in[q]$。考虑方程（11）中的谱不变量系统，该系统决定何时 V 与 0具有 Floquet 等谱性：

$$[z^a\lambda^b]D_V(z,\lambda)-[z^a\lambda^b]D_{\mathbf{0}}(z,\lambda)=0,\ \text{for all }(a,b).$$

注意，$[z^a\lambda^b]D_V(z,\lambda) - [z^a\lambda^b]D_0(z,\lambda)$ 除了 $a=0$ 和 $b\in[q-1]$时以外均为 0。因此，令 $S_i := [\lambda^i]D_V(z,\lambda) - [\lambda^i]D_0(z,\lambda)$ 为我们的谱不变量，并令 $E_\Delta = (S_0,\dots,S_{n-1})$ 为我们的谱不变量理想。由于 z 不在谱不变量理想中，我们可以将 z 固定为 1。由此可知，E_Δ 是下列矩阵的谱不变量理想：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们立即得到：

定理 4.3. 对于所有 $q\geq 4$，E_Δ 的零点集包含非零解 .

证明。由于 $E_\Delta = E_M$，该断言由推论 B 得出。 □

注 4.4. 对任意固定的 $q\geq 4$，只要 $p>q$，谱不变量理想在任意特征为零的代数闭域上或 $p>0$ 上都有非平凡解。此外，在 $\mathbb{C}$ 上，非零解的数量始终为偶数（且为正），因为它在复共轭下保持不变，并且不存在非零实解，因为 $v_1^2+\ldots+v_q^2 = e_1^2 - 2e_2$ 位于谱不变量理想中。当 q 为偶数时，[13] 中给出了显式解。

注 4.5. 注意，当 $q=1$、$q=2$ 和 $q=3$ 时，谱不变量理想分别为 $(e_1(v_1))$、$(e_1(v_1,v_2)\ e_2(v_1,v_2))$ 或 $(e_1(v_1,v_2,v_3)\ e_2(v_1,v_2,v_3)\ e_3(v_1,v_2,v_3)\ -e_1(v_1,v_2,v_3))$，它们都只有原点处的平凡解。由此完成了定理 C 在一维情形下的证明。

4.4. 关于小周期情形的评论。正如人们所看到的，定理 C 并未完整分类何时存在与 0 等谱的非零 $Q\mathbb{Z}$-周期势。这一不足仅仅是由于我们尚未理解 $Q\mathbb{Z} = (3\mathbb{Z})^d$ 的情形，其中 $d\geq 3$。对于 $d=2$，可以通过符号计算证明：要么所有初等对称多项式都属于 E_Δ，要么 E_Δ 的次数与其切锥的理想的次数相同，因此 $V=0$ 是唯一解。我们使用 Macaulay 2 [20] 计算机代数系统验证了这两点。

处理这些剩余情形是值得的，其中 $(3\mathbb{Z})^3$ 是最小的未解决情形。遗憾的是，对于这一情形，我们无法像命题 4.2 中那样构造降维技巧。即使在这一情形下明确求出 E_Δ 的生成元，计算上似乎也不可行，至少使用我们尝试过的方法和可用的硬件是如此。有趣的是，这也是最小的一个情形，在此情形下，尚不清楚能带边缘是否能容许余维 1 费米簇 [15]。

Acknowledgments

Cobb 感谢美国国家科学基金会 DMS-2402199 号资助。Faust 的研究部分得到美国国家科学基金会 DMS–2052519 号资助。作者还感谢 Ilya Kachkovskiy、Wencai Liu、Luke Oeding 和 Frank Sottile 在本研究准备期间提供的各种有益交流。我们也感谢 Frank Sottile 提供图片。

References

[1] A. Al Ahmadieh 和 C. Vinzant，通过行列式多仿射多项式刻画对称矩阵的主子式，《代数杂志》638（2024），255–278。↑2[2] J. Alexander，加法逆特征值问题与拓扑度，《美国数学会会刊》70（1978），第1期，5–7。↑1[3] G. Borg，Sturm-Liouville特征值问题的逆问题：通过特征值确定微分方程，《数学学报》78（1946），1–96。MR15185 ↑2[4] D. A. Cartwright、D. Erman、M. Velasco 和 B. Viray，8 个点的希尔伯特概形，《代数与数论》 3 （ 2009 ），第 7 期，763–795。↑6[5]M. T. Chu，逆特征值问题，《SIAM评论》40（1998），第1期，1–39，网址：https://doi.org/10.1137/S0036144596303984。 ↑1[6] T. Ekedahl 和 R. Skjelnes，恢复希尔伯特概形的良分支，《数学年刊》（第2辑）179（2014），第3期，805–841。MR3171755 ↑6，7，9[7] G. Eskin，具有周期向量势的Schr ¨odinger方程的逆谱问题，《数学物理通讯》125（1989），第2期，263–300。MR1016872 ↑15[8] G. Eskin、J. Ralston 和 E. Trubowitz，关于 R^n^n 中的等谱周期势，《纯粹与应用数学通讯》37（1984），第5期，647–676。MR752594 ↑15[9] ———，关于 R^n^n 中的等谱周期势。II，《纯粹与应用数学通讯》37（1984），第6期，715–753。MR762871 ↑15[10] B. Fantechi、L. G¨ öttsche、L. Illusie、S. L. Kleiman、N. Nitsure 和 A. Vistoli，基础代数几何，《数学调查与专著》，第123卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年。格罗滕迪克的 FGA 释义。MR2222646 ↑5，6[11] G. Farkas、R. Pandharipande 和 A. Sammartano，点的希尔伯特概形的无理分支，arXiv:2504.03282（2024），网址：2405.11997。 ↑6[12]M. Faust 和 J. L. Garcia，周期图的色散多项式的不可约性，《SIAM应用代数与几何杂志》9（2025），第1期，83–107，网址：https://doi.org/10.1137/23M1600256。 ↑20[13] M. Faust、W. Liu、R. Matos、J. Robinson、J. Plute、Y. Tao、E. Tran 和 C. Zhuang，离散周期Schr ¨odinger算子的零势的 Floquet 等谱性，《数学物理杂志》65（2024），第7期，论文编号073501，9。 ↑2，15，21[14] J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos，有限程Schr ¨odinger算子的 Bloch 簇的不可约性，《泛函分析杂志》283（2022），第10期，论文编号109670，22。MR4474842 ↑20[15] N. Filonov 和 I. Kachkovskiy，关于离散周期算子的谱带，《数学物理通讯》405（2024），第2期，论文编号21，17。MR4698054 ↑21[16] J. Fogarty，代数曲面上的代数族，《美国数学杂志》90（1968），511–521。MR237496↑6[17] S. Friedland，具有指定非对角元的矩阵，《以色列数学杂志》11（1972），第2期，184–189。↑1[18] ———，逆特征值问题，《线性代数及其应用》17（1977），第1期，15–51。 ↑1[19] C. S. Gordon 和 T. Kappeler，关于环面上的等谱势，《杜克数学杂志》63（1991），第1期，217–233。MR1106944 ↑15

[20] D. R. Grayson 和 M. E. Stillman，Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。↑21[21] A. Grinshpan、D. S Kaliuzhnyi-Verbovetskyi 和 H. J Woerdeman，多变量多项式的范数约束行列式表示，《复分析与算子理论》7（2013），第3期，635–654。↑2[22] V. Guillemin，关于二维环面上的逆谱结果，《美国数学会杂志》3（1990），第2期，375–387。MR1035414 ↑15[23] V. Guillemin 和 A. Uribe，某类复势的谱性质，《美国数学会汇刊》279（1983），第2期，759–771。MR709582 ↑2[24] R. Hartshorne，希尔伯特概形的连通性，《高等科学研究院数学出版物》29（1966），5–48。MR213368 ↑6[25] ———，代数几何，《数学研究生教材》，第52卷，Springer-Verlag，1977年。↑5[26] B. Hatinoˇglu、J. Eakins、W. Frendreiss、L. Lamb、S. Manage 和 A. Puente，离散Schr¨odinger算子的 Ambarzumian 型问题，《复分析与算子理论》15（2021），第8期，论文编号118，13。MR4328479 ↑15[27]O. Holtz 和 B. Sturmfels，对称主子式之间的超行列式关系，《代数杂志》316（2007），第2期，634–648。↑2[28] H. Huang 和 L. Oeding，主子式与圈和的对称化，《线性、多重线性与代数杂志》65（2017），第6期，1194–1219。↑2[29] A. Iarrobino，簇上零维概形族的可约性，《数学发明》15（1972），72–77。↑6[30] J. Jelisiejew，四维簇上希尔伯特概形的一般非约化分支，《都灵理工大学数学研讨会论文集》82（2024），第1期，171–184。MR4856857 ↑6[31] J. Jelisiejew，点的希尔伯特概形上的病态现象，《数学发明》220（2020），第2期，581–610。MR4081138 ↑6[32] J. Jelisiejew 和 K. ˇSivic，Quot概形与可交换矩阵簇的分支和奇点，《纯粹与应用数学杂志》788（2022），129–187。MR4445543 ↑6[33] T. Kappeler，关于离散晶格上的等谱周期势。I，《杜克数学杂志》57（1988），第1期，135–150。MR952228 ↑1，2，15[34] ———，关于离散晶格上的等谱势。II，《应用数学进展》9（1988），第4期，428–438。MR968676 ↑15，18[35] ———，离散晶格上的等谱势。III，《美国数学会汇刊》314（1989），第2期，815–824。MR961624 ↑2，15[36] C. Kittel 和 P. McEuen，固体物理学导论，John Wiley & Sons，2018年。↑15[37] P. Kuchment，偏微分方程的弗洛凯理论，《算子理论：进展与应用》，第60卷，Birkhäuser Verlag，巴塞尔，1993年。↑18[38] ———，周期椭圆算子概述，《美国数学会通报》（新系列） 53 （ 2016 ），第 3 期，343–414。MR3501794 ↑2，15[39] ———,色散关系（Bloch簇）和费米面的解析与代数性质：已知与未知，《数学物理杂志》64（2023），第11期，论文编号113504，11。MR4667406↑15[40] W. Liu，离散周期Schr¨odinger算子的费米簇专题，《数学物理杂志》63（2022），第2期，论文编号023503，13。MR4376993 ↑15[41] ———，周期图算子的 Floquet 等谱性，《微分方程杂志》374（2023），642–653。MR4632070 ↑15[42] ———，离散周期Schr¨odinger算子的费米等谱性，《纯粹与应用数学通讯》77（2024），第2期，1126–1146。MR4673878 ↑15[43] H. P. McKean 和 E. Trubowitz，在存在无穷多个分支点时的 Hill算子与超椭圆函数理论，《纯粹与应用数学通讯》29（1976），第2期，143–226。MR427731 ↑15[44] V. G. Papanicolaou，具有复系数的周期Jacobi算子，《谱理论杂志》11（2021），第2期，781–819。MR4293492 ↑1，2，15

反问题、Floquet 等谱性与 Hilbert–Chow 态射 24[45]N. Saburova，《周期图上离散 Schrödinger 算子的谱不变量》，arXiv:2504.03282 (2025)。↑15[46] S. P Shipman 和 F. Sottile，《周期图算子的代数方面》，arXiv:2502.03659(2025)。↑15[47] A. Waters，《二维等谱周期环面》，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 32 (2015)，第 6 期，1173–1188。MR3425258 ↑15John Cobb, Department of Mathematics and Statistics, Auburn University, Auburn,AL电子邮箱：jdcobb3@gmail.com 网址：https://johndcobb.github.ioMatthew Faust, Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing,MI 48824, USA电子邮箱：mfaust@msu.edu 网址：https://mattfaust.github.ioAndreas Kretschmer, Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin

Germany电子邮箱地址：andreas.kretschmer@hu-berlin.de网址：https://sites.google.com/view/andreas-kretschmer/