arXiv:2601.09622v1 [math.GR] 14 Jan 2026

有限群的特征值一性质，II

GERHARD HISS 和 RAFAŁ LUTOWSKI

摘要。我们证明了 Dekimpe、De Rock 和 Penninckx 关于某些有限群元素存在特征值一的猜想，这些有限群在奇数维实向量空间上不可约作用。由此得到闭平坦流形为 R_∞-流形的一个充分条件。

1. 引言

本文旨在完成对 [14, 定理 1.1.5] 的证明，从而证实 Dekimpe、De Rock 和 Penninckx [6, 猜想 4.7]。更确切地说，我们证明以下结果。

定理。设 G 是一个偶特征的李型有限群。那么 G 不是 [14,定理 1.1.5] 的极小反例。

该定理的证明由下文的命题 3.5、5.6、6.17、6.27 和 7.13 推出，是我们工作中迄今为止最困难的部分。设 G 是一个偶特征李型有限单群。我们任务复杂的一个原因是，G 的几乎每个不可约特征标的次数都是奇数。例如，若 $G = E_6(q)$ 且 q 为偶数，则 G 有 $q^6 + q^5 + x$ 个不可约特征标，其中 $x < q^5$ 个具有奇数次数。当然，这些特征标并非全都是实特征标，但我们的任务是从中找出实特征标。正是在这里，我们必须充分运用 Deligne-Lusztig理论，尤其是 Lusztig 特征标的广义 Jordan 分解。在这方面，Geck 和 Malle 所著的书 [11] 对我们帮助极大。[13] 给出了证明的粗略概要。

日期：2026年1月15日。2000 数学主题分类号。主要分类：20C15, 20C33；次要分类：55M20, 20F34。关键词和短语。平坦流形、Reidemeister数、有限群的奇数次数不可约表示、有限单群、自同构群。

总体策略与我们工作的第一部分相同。大度数方法（见 [14, 小节 3.1]）排除了大多数需要考虑的情形。对于次数较小的特征标，我们采用限制方法（见 [14, 小节 4.3]）。对于许多特殊情形，这种一般方法并不奏效，无论是次数非常小的特征标，还是 q 的值或 G 的李秩非常小的情形。这些额外情形需要进行冗长而繁琐的计算。Frank Lübeck 编制的表 [20,21]，以及使用 GAP [9] 和 Chevie [10, 26] 进行的大量计算，为我们的证明提供了重要贡献。

下面我们简要介绍各节的内容。第 2 节汇集了一些一般性的预备知识。第 3 节介绍所考察的群，并证明对于 Schur 乘子平凡且没有 3 阶图自同构的群，我们的结论成立。剩下的情形是 G 等于以下群之一：最大公约数为 >1 的 $\mathrm{SL}_d(q)$，最大公约数为 >1 的 $\mathrm{SU}_d(q)$，$E_6(q)$（其中 $3 \mid q-1$），${}^2E_6(q)$（其中 $3 \mid q+1$），或 $\mathrm{P}\Omega_8^+(q)$。第 4 节介绍这些群相关的理论背景，包括特定的 σ- 构造、对偶性、自同构和半单特征。在第 5 节中，我们为应用大度数方法，给出特定自同构和元素的中心化子的阶的界。这些结果足以排除 $\mathrm{P}\Omega_8^+(q)$ 是极小反例的可能。第 6 节讨论特殊线性群和酉群。经过冗长的准备工作，并对次数为 3 的群作专门处理后，我们终于证明这些群不会构成极小反例。第 7 节则证明了对于扭曲和非扭曲的李型单群 E_6，类似的结论也成立。

在这两篇论文系列的第二部分中，我们将使用第一部分中的记号和预备结果。特别回顾一下 [14, 记号 4.1.1]：符号 G 表示一个非阿贝尔有限单群，在此处是一个偶特征李型群。接下来，V 表示一个奇数维的非平凡不可约 $\mathbb{R}G$-模，而 ρ 是由 V 赋予的 G 的表示。此外，$n \in \mathrm{GL}(V)$ 是一个正规化 $\rho(G)$ 的有限阶元素。最后，ν 表示由 n 诱导的 G 的自同构。

2. 一般预备知识

我们首先给出估计，用以界定线性群和酉群的特征标次数及中心化子阶。

引理 2.1。设 $a \in \mathbb{R}$ 和 $m \in \mathbb{Z}$ 满足 $a, m \geq 2$。则以下不等式成立。

（a）我们有

$$a^{m(m+1)/2}(1-a^{-1}-a^{-2}) \leq \prod_{i=1}^{m}(a^i-1) \leq a^{m(m+1)/2}.$$

(b)我们有

$$a^{m(m+1)/2}(1-a^{-1}-a^{-2}) \leq \prod_{i=1}^{m}(a^i-(-1)^i) \leq a^{m(m+1)/2}(1-a^{-1}-a^{-2})^{-1}.$$

证明。 (a) 第二个估计显然。根据 [18, 引理 4.1]的证明，我们有

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-a^{-i}) \geq 1-a^{-1}-a^{-2}.$$

因此 $\prod_{i=1}^{m}(1-a^{-i}) \geq 1-a^{-1}-a^{-2}$。将此不等式与$a^{m(m+1)/2}$相乘，得到 $\prod_{i=1}^{m}(a^i-1) \geq a^{m(m+1)/2}(1-a^{-1}-a^{-2})$。

(b) 为证明第一个估计，注意到 $\prod_{i=1}^{m}(a^i-(-1)^i) \geq \prod_{i=1}^{m}(a^i-1)$, 并使用(a)中的第一个估计。为证明第二个估计，注意到

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{m}(a^i-(-1)^i) &= \frac{\prod_{i=1}^{\lceil m/2\rceil}(a^{2i-1}-1)(a^{2i-1}+1)\prod_{i=1}^{\lfloor m/2\rfloor}(a^{2i}-1)^2}{\prod_{i=1}^{m}(a^i-1)} \\ &\leq \frac{\prod_{i=1}^{m}a^{2i}}{\prod_{i=1}^{m}(a^i-1)},\end{aligned}$$

并使用(a)中的第一个估计。 □

我们还需要以下关于代数群中共轭的引理。

引理 2.2. 设 H 是一个代数群（也可以是有限群），且 $M \leq H$是一个闭子群。设 $t, t' \in Z(M)$满足 $C_H(t) = M$。假设 t和 t' 在 H中共轭。

那么， t和 t'在 $N_H(M)$中共轭。若 $N_H(M)$是$N_H(M) = MS$的乘积，其中 $S \leq N_H(M)$，则 t和 t'在 S中共轭。此外，若 $M \cap S = \{1\}$，则 S 在 $Z(M)$ 中所有与 t在 H下共轭的元素组成的集合上正则作用。

证明。 设 $h \in H$ 满足 ${}^ht = t'$。于是

$$M \leq C_H(t') = {}^hC_H(t) = {}^hM.$$

这意味着 $M = {}^hM$，因为 M 和 ${}^hM$ 都是 H的同维数闭子群。因此 $h \in N_H(M)$。第二个结论显然，

因为 $t \in Z(M)$。若 $M \cap S = \{1\}$，则 S 中 t 的中心化子是平凡的。这就推出了最后一个结论。□

我们再引入一个记号。设 H 是一个群，$\beta \in \mathrm{Aut}(H)$，且 l 是一个正整数。于是记作

$$N_{\beta,l}(h) := \prod_{i=0}^{l-1} \beta^i(h)$$

对于 $h \in H$。采用这一记号，我们有

$$(\mathrm{ad}_h \circ \beta)^l = \mathrm{ad}_{N_{\beta,l}(h)} \circ \beta^l \tag{1}$$

对于每个 $\beta \in \mathrm{Aut}(H)$、每个 $h \in H$ 以及每个正整数 l，均成立。

3. 初等情形

本节将介绍要研究的群，并通过初等论证证明，对于其中一个很大的子类，我们的结论成立。

3.1. 这些群。 若 $G = \mathrm{P}\Omega_{2d+1}(2)$（$d \geq 3$）或 $G = {}^2F_4(2)'$，则由 [14, 引理 4.4.1]可知，G具有 $E1$-性质。若 $G = F_4(2)$，则由 [14, 引理 4.4.2]可知，G 具有 $E1$-性质。因此，为证明偶特征李型单群具有 $E1$- 性质，我们可以假设 G 是下述假设 (a) 部分所列的某个群。(b) 部分列出这些群中的一个子集，对其需要进行更深入的分析。

假设 3.2。 (a) 令 G 为 [14, 表 1], 中第 1–3、5–14 或 16 行所列的某个群，其中 q 为偶数。若 G 如该表第 3 行或第 8 行所示，则假设 $q > 2$。为方便读者，我们在表 1 中重列这个受限列表。

(b) 设 G属于表 1 中群的以下某个子集。(i) $G =$ 射影特殊线性群$_d(q)$，其中 $d \geq 3$ 且最大公约数$(d,\ q-1) > 1$；(ii) $G =$ 射影特殊酉群$_d(q)$，其中 $d \geq 3$ 且最大公约数$(d,\ q+1) > 1$；(iii) $G = E_6(q)$ 且 $3 \mid q-1$；(iv) $G = {}^2E_6(q)$ 且 $3 \mid q+1$；(v) $G = \mathrm{P}\Omega_8^+(q)$。

□

3.3. 限制到极大幺幂子群。对于假设 3.2 中的 G，令 $B = UT$ 表示 G的标准 Borel 子群，其标准幺幂子群为 U，标准环面为 T；参见 [14, 第 5.3]小节。在此，我们将 V 的特征限制到 U，以处理假设 3.2 中列出的许多情形。在下文的

表 1：偶特征李型相关单群

Row	名称	Rank	条件
1	$A_{d-1}(q)$，射影特殊线性群$_d(q)$	$d \geq 2$	q偶，$(d,q) \neq (2,2),(2,4),(3,2)$
2	${}^2A_{d-1}(q)$，射影特殊酉群$_d(q)$	$d \geq 3$	q偶，$(d,q) \neq (3,2),(4,2)$
3	$B_d(q)$，$\mathrm{P}\Omega_{2d+1}(q)$	$d \geq 2$	$q > 2$ 偶
5	$D_d(q)$，$\mathrm{P}\Omega^+_{2d}(q)$	$d \geq 4$	q 偶
6	${}^2D_d(q)$，$\mathrm{P}\Omega^-_{2d}(q)$	$d \geq 4$	q 偶
7	$G_2(q)$		$q > 2$ 偶
8	$F_4(q)$		$q > 2$ 偶数
9	$E_6(q)$		q 偶数
10	$E_7(q)$		q 偶数
11	$E_8(q)$		q 偶
12	${}^3D_4(q)$		q 偶
13	${}^2E_6(q)$		q 偶
14	${}^2B_2(q)$		$q = 2^{2m+1} > 2$
16	${}^2F_4(q)$		$q = 2^{2m+1} > 2$

命题中，我们使用 [14, 记号 4.1.1]；参见引言的最后一段。

命题 3.4。设 G 如假设 3.2(a)所述。假设 U和 T 在 ν下稳定。令 χ 表示 V的特征标。那么(G, V, n) 具有 $E1$-性质，只要满足以下两个条件之一即可。

(a) 存在 T-轨道 $\mathcal{O}$，它是由 U 的线性特征标组成且在 ν 下不变，并且对每个 $\lambda \in \mathcal{O}$，$\langle$限制$_U^G(\chi)$ $\lambda\rangle$ 均为奇数。

(b) U 的每个由线性特征标组成的 T-轨道都在 ν^2下不变。

证明。(a) 设 $\lambda \in \mathcal{O}$。若 λ是平凡特征标，则 $\langle \mathrm{Res}_U^G(\chi)\ \lambda\rangle$ 等于 ${}^*R_T^G(\chi)$的次数，因此必为奇数。令 $V_1 \leq V$表示 V中被 U固定的点所构成的子空间。这是一个特征标为
${}^*R_T^G(\chi)$。因此，V_1存在一个奇数维的不可约 $\mathbb{R}T$-子模 S。由于 $|T|$为奇数，S是平凡的 $\mathbb{R}T$-模。由此可知，$\mathrm{Res}_B^G(V)$包含一个平凡组成成分。因此，χ 是主系列特征标，特别是单特征标。G 的唯一奇数次数单特征标是平凡特征标；参见 [24, 定理 6.8]，并考虑到我们对${}^*R_T^G$的限制

。这与假设矛盾。因此， λ 不是平凡特征标。

由于 U 由对合生成， U/U' 是一个初等阿贝尔 2-群，因此 λ 可在 $\mathbb{R}$上实现。令 V_1 表示 $\mathrm{Res}_U^G(V)$ 中特征为 $\langle \mathrm{Res}_U^G(\chi)\ \lambda\rangle \lambda$ 的 $\mathbb{R}U$-子模，也就是说， V_1 是 $\mathrm{Res}_U^G(V)$ 的 λ-齐次分量。由于 ν正规化 U，因而也正规化 U'，所以 $\mathrm{Res}_U^G(V)$ 的子模 nV_1 是 $\mathrm{Res}_U^G(V)$ 的 ${}^\nu\lambda$-齐次分量。由于 ${}^\nu\lambda \in \mathcal{O}$，存在 $t \in T$ 使得 $\rho(t)nV_1 = V_1$。用 $\rho(t)n$ 替换 n 后，我们可以假定 n 稳定 V_1。由于 U 是一个 2-群，根据 [14, 推论 3.2.4]，它具有$E1$性质。特别地，根据 [14, 引理 3.1.2]，(U, V_1) 具有 E_1 性质。进而，根据 [14, 引理 3.1.3]，(G, V, n) 具有 $E1$ 性质。

(b) 设 $\mathcal{O}$ 是 U 的线性特征标的一个 T-轨道，并设 $\lambda \in \mathcal{O}$。显然，对于其他每个 $\lambda' \in \mathcal{O}$，都有 $\langle \mathrm{Res}_U^G(\chi)\ \lambda\rangle = \langle \mathrm{Res}_U^G(\chi)\ \lambda'\rangle$，因此 $\mathcal{O}$ 对 χ 的次数贡献了 $|\mathcal{O}|\langle \mathrm{Res}_U^G(\chi)\ \lambda\rangle$。若 ${}^\nu\mathcal{O} \neq \mathcal{O}$，则对 χ 的次数贡献为偶数，因为 $\langle \mathrm{Res}_U^G(\chi)\ {}^\nu\lambda\rangle = \langle \mathrm{Res}_U^G({}^\nu\chi)\ {}^\nu\lambda\rangle = \langle {}^\nu\mathrm{Res}_U^G(\chi)\ {}^\nu\lambda\rangle = \langle \mathrm{Res}_U^G(\chi)\ \lambda\rangle$，且 ${}^{\nu^2}\mathcal{O} = \mathcal{O}$。因此，存在一个 ν-不变轨道 $\mathcal{O}$，使得对所有 $\lambda \in \mathcal{O}$, $|\mathcal{O}|\langle \mathrm{Res}_U^G(\chi)\ \lambda\rangle$ 为奇数。于是满足 (a) 的假设。□

现在我们可以证明偶特征下李型单群的一个大子类具有 $E1$性质。我们的论证涉及 U的正则特征这一概念，相关处理遵循 [1, 14B]。注意，正则特征在 [4, p. 253]中称为非退化特征。回顾 [14, Subsection 5.2]中引入的 G的 σ设定。特别回顾，G 是单伴随代数群，因此 $\overline{Z}(G)$是平凡的。在以下命题的假设下，我们有 $\overline{G} = G^\sigma$。我们还将使用 [14, Subsection 5.3] 中引入的、与 G的 BN对相关的记号。

命题 3.5。 设 G 是假设 3.2(a) 中未列于假设 3.2(b)(i)–(iv)的群之一。若 $G = \mathrm{P}\Omega_8^+(q)$，则假设 ν^2 是 G 的一个内自同构与一个域自同构的乘积。于是(G, V, n) 具有 $E1$性质。

证明。 我们有 $\nu = \mathrm{ad}_g \circ \mu$，其中取某个$g \in G^\sigma$ 和某个 $\mu \in \Gamma_G \times \Phi_G$; 参见 [14, 第 5.5]小节。由于 $G = G^\sigma$，我们可以假设 $\nu \in \Gamma_G \times \Phi_G$。特别地， ν固定 U和 T。除 $G = \mathrm{P}\Omega_8^+(q)$ 的情形外， Γ_G的每个元素的阶都至多为 2。在后一种情形下，借助我们的假设，我们有 $\nu^2 \in \Phi_G$，因此 ν^2 稳定 G的每个标准 Levi 子群以及 G的每个标准抛物子群的幺幂根。

令 λ 表示 U的一个线性特征。由 [1, 14.B], ，存在一个标准抛物子群 $P_I = L_I U_I$，使得 U_I 属于 λ的核。取具有此性质的极大 U_I。于是，视 λ为 U/U_I的一个特征标时，它是正则的。事实上，根据 [4, 定理 2.8.7]， L_I 的抛物子群的幺幂根具有 U_J/U_I 的形式，其中$J \subseteq I$为子集。现在，对于 G的标准 Levi 子群 L_I，有 $L_I = L_I^\sigma$。由于 L_I具有连通中心（见 [4, 命题 8.1.4]），证明 [4, 定理 8。1。2(ii)] 中给出的论证表明，此时 L_I 具有一个唯一的正则特征标 T-轨道。由于 ν^2 稳定 U 和 U_I，并将 λ映射为 U/U_I的一个正则特征标，因此 ν^2稳定包含 λ的 T- 轨道。由命题 3.4 得到所述断言。□

若 $G = \mathrm{P}\Omega_8^+(q)$，且 ν 不满足命题 3.5 的假设，则对于某个 $h \in G$、某个 3 阶 $\iota \in \Gamma_G$ 以及某个 $\mu \in \Phi_G$，有 $\nu = \mathrm{ad}_h \circ \iota \circ \mu$。此情形将在下文的命题 5.6 中处理。

4. 其余群的预备知识

这里，我们汇集了与所考虑的其余群相关的证明所需性质。

4.1. The σ-其余群的设定。令 G为假设 3.2(b)中列出的一个群。现在我们指定 σ-设定下 G 中G 的选取，并回顾一些有关自同构的记号。在当前语境下，$\mathbb{F}$ 是含有两个元素的域的代数闭包。对于 G 的情形 (i) 和 (ii)，我们取 $G = \mathrm{PGL}_d(\mathbb{F})$；对于情形 (iii) 和 (iv)，我们取 $G = E_6(\mathbb{F})_{\mathrm{ad}}$；对于情形 (v)，我们令 $G = \mathrm{PCSO}_8(\mathbb{F})$，它是 $\mathbb{F}$ 上的伴随型单代数群。包含在标准 Borel 子群 B 中的标准环面T 给出 G 的根系，其类型分别为 A_{d-1}、E_6 或 D_4。我们用 Π 表示由 T 和 B 确定的单根集。相应的 Dynkin 图见 [14,图 1]。

回顾在 [14, 小节 5.5] 中引入的记号。特别地，$\varphi = \varphi_2$ 是在 [12,定理 1.15.4(a)]，和 $\Phi_G = \langle \varphi \rangle$ 中定义的 G 的标准 Frobenius 态射。如果 ι 表示 G 的 Dynkin 图的一个对称性，那么 ι 也表示 G 的相应标准图自同构。令 f 为一个正整数，并令 $q = 2^f$。取 $\sigma := \varphi^f$，我们分别得到非扭曲群 $G^\sigma = \mathrm{PGL}_d(q)$、$E_6(q)_{\mathrm{ad}}$ 以及 $\mathrm{P}\Omega_8^+(q)$。相应的单群分别为 $G = \mathrm{PSL}_d(q)$、$E_6(q)$ 以及 $\mathrm{P}\Omega_8^+(q)$。如果 $G = \mathrm{PGL}_d(\mathbb{F})$ 或 $G = E_6(\mathbb{F})_{\mathrm{ad}}$，则 G 的 Dynkin 图的对称群的阶为 2，因此对于这种非平凡对称性 $\Gamma_G = \langle \iota \rangle$ ι。取 $\sigma := \iota \circ \varphi^f$，我们得到扭曲群 $G^\sigma =$

$\mathrm{PGU}_d(q)$、 ${}^2E_6(q)_{\mathrm{ad}}$。相应的单群分别为 $G = \mathrm{PSU}_d(q)$ 和 ${}^2E_6(q)$。回顾 $G^\sigma = GT^\sigma$；见 [12,定理 2。2。6(g)]。

为统一处理，我们将采用常见的 ε 约定，以区分情形 (i)–(iv) 中的扭曲群和非扭曲群。固定 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$。若 $\varepsilon = 1$，令 $\sigma = \varphi^f$；若 $\varepsilon = -1$，令 $\sigma = \iota \circ \varphi^f$，其中如上所述，$\iota$ 是 G 的 Dynkin 图的非平凡对称性。因此，我们将 $\mathrm{PSL}^\varepsilon(q)$ 理解为：若 $\varepsilon = 1$，则它是 $\mathrm{PSL}_d(q)$；若 $\varepsilon = -1$，则它是 $\mathrm{PSU}_d(q)$。同样，$E_6^\varepsilon(q)$ 表示单群 $E_6(q)$（若 $\varepsilon = 1$），以及 ${}^2E_6(q)$（若 $\varepsilon = -1$）。ε 约定也用于群 G^σ。

显然，对于 G 的每个对称性 ι，G^σ 因而 G 也在 φ 和 ι 下保持不变。φ 及任意此类 ι 在 G^σ 或 G 上的限制仍用相同字母表示。特别地，$\Phi_G = \langle\varphi\rangle$。若 $G = \mathrm{PGL}_d(\mathbb{F})$ 或 $G = E_6(\mathbb{F})_{\mathrm{ad}}$，则对于 G 的非平凡对称性 ι，有 $\Gamma_G = \langle\iota\rangle$。若相应的 G 是非扭曲的，即 $G = \mathrm{PSL}_d(q)$ 或 $G = E_6(q)$，则 $\Gamma_G = \langle\iota\rangle$ 的阶为 2。若 G 是扭曲的，则 $\iota = \varphi^f$，视为 $\mathrm{Aut}(G)$ 的元素，因此 $\iota \in \Phi_G$。因此，按照 [12, 定义 2.2.4 中的约定，2.5.10]，我们有 $\Gamma_G = \{1\}$，尽管 Γ_G 是非平凡的。若 G 如情形 (v)，则 $\Gamma_G \cong \Gamma_G$ 同构于一个三字母对称群。在此情形下，Γ_G 含有阶为 2 和 3 的元素；后者称为 G 的三歧自同构。

4.2. 对偶群。在某个阶段，我们还需要考虑与 G 对偶的群。具体而言，为了描述 G 的不可约特征标，将 G 实现为群 $G^{*\sigma^*}$ 的中心商会更加方便，其中 G^* 是与 G 对偶的群，而 σ^* 是与 σ 对偶的 G^* 的 Steinberg 态射；参见 [11, 定义 1.5.17]。出于将在下文第 4.3 小节中显而易见的原因，此后我们通常会省略 σ^* 符号中的星号，而仅写作 σ。只有在某些证明中，为了表述清晰，我们才沿用更精确的记法。

我们分别取 G^* 为类型 A_{d-1}、E_6 和 D_4 的单连通单代数群的单连通版本。具体来说，若 $G =$ 为 $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{F})$、$E_6(\mathbb{F})_{\mathrm{ad}}$ 或 $\mathrm{PCSO}_8(\mathbb{F})$，则我们分别取 $G^* = \mathrm{SL}_d(\mathbb{F})$、$E_6(\mathbb{F})_{\mathrm{sc}}$ 和 $\mathrm{Spin}_8(\mathbb{F})$。存在一个同源，即具有有限核的代数群满同态，

$$\overline{G}^* \to \overline{G}. \tag{2}$$

如果 $G^* = \mathrm{SL}_d(\mathbb{F})$，我们分别有 $G^{*\sigma} = \mathrm{SL}_d(q)$ 和 $\mathrm{SU}_d(q)$。如果 $G^* = E_6(\mathbb{F})_{\mathrm{sc}}$，则群 $G^{*\sigma}$ 是 $G = E_6(q)$ 的泛覆盖群，

分别为 ${}^2E_6(q)$。在所有情形下，$G^{*\sigma}$ 的中心都是奇数阶循环群。群 G^σ 是几乎单群，而群 $G^{*\sigma}$ 是拟单群。

4.3. 自同构，I. 假设 G 是满足假设 3.2(b)(i)–(iv) 的群之一，因此 $G = \mathbf{PGL}_d(\mathbb{F})$ 或 $G = E_6(\mathbb{F})_{\mathrm{ad}}$。这里，我们简要讨论 G、G^σ、G的自同构群及其对偶群之间的联系。回顾一下[12, 定义 1.15.1]中引入的记号。因此，$\mathrm{Aut}_1(G)$ 是 G （作为抽象群）的所有自同构 α构成的集合，其中 α 或 α^{-1} 是 G 作为代数群的自同态。注意，$\sigma \in \mathrm{Aut}_1(G)$。此外，$\mathrm{Aut}_1(G)$ 是一个群；参见 [12, 定理 1.15.7(a)]。对G^*也将使用类似的记号。

同源 (2) 导出一个自然映射

$$\mathrm{Aut}_1(\overline{G}^*) \to \mathrm{Aut}_1(\overline{G}), \tag{3}$$

事实上，这是一个同构；见 [12, 定理 1.15.6(c)]。根据 [12,定理 1.15.6(b)], ，同构 (3) 保持同源。

引理 4.4。设 $t \in T$，且设 $\mu \in \Gamma_G \times \Phi_G$是一个同源。那么$\alpha := $ 自同构群$_t \circ \mu$ 是G的一个同源。设 $\alpha^* \in$自同构群$_1(G^*)$ 为 α 在 *(3)* 下的原像。那么 α^* 是 G^*的一个同源，它在 [7,命题 11.1.11]的意义下与 α对偶。

证明。显然，α 是一个同源。由于 (3) 保持同源，α^* 也为同源。为证明第二个断言，不妨设 $t = 1$。也不妨设 $\alpha = \iota$，或者设 $\alpha = \varphi$，即第4.1小节中引入的 Γ_G 和 Φ_G的生成元。此时断言显然。□

现在通过 (3) 将 $\mathrm{Aut}_1(G^*)$ 与 $\mathrm{Aut}_1(\overline{G})$ 等同起来。由于 $\sigma \in \mathrm{Aut}_1(G)$ 是一个 Steinberg 态射，它在 $\mathrm{Aut}_1(G^*)$ 中的原像是一个与 σ对偶的 G^* Steinberg 态射。这为我们在第 4.1 小节中引入的简化记号提供了依据。

令 $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$。则 α 是某个与 σ交换的 $\mathrm{Aut}_1(G)$ 元素在 G上的限制；参见 [12, 定理 2.5.4]。事实上，给出 α 的这个元素可以选为同源。确实，由于 α 具有有限阶，对于某个非负整数 l，有 $\alpha^{-1} = \alpha^l$。由此可得该断言，因为对于每个$\beta \in \mathrm{Aut}_1(G)$，$\beta$ 或 β^{-1} 是同源。此外，α 可唯一延拓为 G^σ 的一个自同构，该自同构由与 σ 交换且限制为 α 的 $\mathrm{Aut}_1(G)$ 元素产生；我们也将以此方式不加说明地把 α 视为 $\mathrm{Aut}(G^\sigma)$ 的一个元素。

4.5.半单特征。 如第4.2小节中已经提到的，我们将通过满同态 $G^{*\sigma} \to G$ 并经由膨胀来描述 G 的不可约特征。这不会引入需要研究的新特征，因为 $Z(G^{*\sigma})$（该满同态的核）是奇数阶的循环的群，因此 $G^{*\sigma}$的每个实不可约特征都以 $Z(G^{*\sigma})$ 为核的一部分。（与更常见的方法相反，这里我们交换群及其对偶的角色，因为我们关注的是群 $G^{*\sigma}$的不可约特征。）

将其视为 $\mathrm{Irr}(G^{*\sigma})$ 的元素时，V 的特征称为半单特征。关于这一概念，我们遵循 [11, Definition 2.6.9]。根据 [11, Corollary 2。6。18(a)] 以及 [1, Section 15], 中的结果，特别是 [1, Théorème 15。10、Corollaire 15。11、Proposition 15。13 和 Corollaire 15.14], 这与 [1, Définition 15.A]相符。

集合 $\mathrm{Irr}(\overline{G}^{*\sigma})$ 被划分为 Lusztig 级数 $\mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$，其中 s遍历 G^{σ}-共轭类中的半单元素，这些元素属于 G^{σ}；参见 [11, Definition 2.6.1]。下面的引理汇集了与我们进一步研究相关的半单特征的性质。

引理4.6。 令 $\chi \in$不可约特征集合$(G^{*\sigma})$，并令 $s \in G^{\sigma}$ 为半单的，使得$\chi \in \mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$。令 $\alpha^* \in$自同构群$_1(G^*)$ 为一个与 σ交换的同源。令 $\alpha \in$自同构群$_1(G)$ 为一个与 σ交换、且与 α^*对偶的同源。（此类同源确实存在；参见例如 [11, 1.7.11]。）则以下陈述成立。

(a) χ 的次数为奇数，当且仅当 χ 按照 [11,定义 2.6.9]的意义是半单的。若 $\chi(1)$ 为奇数，则

$$\chi(1) = [\overline{G}^{\sigma} : C_{\overline{G}^{\sigma}}(s)]_{2'}.$$

(b) 假设 χ 的次数为奇数。则以下断言成立。

(i) $\mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$中的半单特征具有相同的次数，并且通过*Lusztig*特征的*Jordan*分解，它们与$(C_G(s)/C_G^\circ(s))^\sigma$的不可约特征标相对应。特别地，若 $C_G(s)$是连通的，则 χ 是 $\mathcal{E}(G^{*\sigma}, \overline{s})$中唯一的半单特征。*(ii)* 若 χ 是实的，则 s 在 G^{σ}中是实的。若 s 在 G^{σ} 中是实的，且 $C_G(s)$是连通的，则 $\overline{\chi}$ 是实的。*(iii)* 若 $\overline{\chi}$ 是 α^*-不变的，则 s 的G^{σ}-共轭类在 α作用下不变。若 s 的 G^{σ}-共轭类是 α-不变的，且$C_{G^*}(s)$是连通的，则 χ是 α^*-不变的。

(iv) 设 $L \leq G$ 是 G 的一个标准 *Levi* 子群，且满足 $s \in L$。令 L^*表示与 L对偶的 G^* 的标准 *Levi* 子群。假设 s 在 L^{σ} 中是实的，且 $C_{L^*}(s)$是连通的。

那么，$\mathcal{E}(L^{*\sigma}, s)$ 含有一个奇数次数的实半单特征 ψ，使得 $\langle R_{L^{*\sigma}}^{G^{*\sigma}}(\psi), \chi\rangle = 1$。

证明。 (a) 和 (b)(i)。采用 $C_G(s)^{\sigma}$ 的幺正特征标概念，该概念由 [22, 12]引入。于是，通过 Lusztig 的字符广义 Jordan 分解，χ 对应于 λ 的一个幺正特征标 $C_G(s)^{\sigma}$，使得 $\chi(1) = \lambda(1)[G^{\sigma} : C_{G^{\sigma}}(s)]_{2'}$；参见 [22, 命题 5.1]。

假设 $\chi(1)$ 为奇数。因此 $\lambda(1)$ 为奇数，从而 λ 位于 $C^{\circ}_{G^{\sigma}}(s)$ 的一个奇数次数幺正特征标 λ' 之上。于是 [24, 定理 6.8] 蕴含 λ' 是平凡特征标。由 [11, 定理 2。6。11(c) 和推论 2。6。18(a)] ，以及通过 G^* 的正则嵌入从通常的 Jordan 分解得到广义 Jordan 分解的定义可知，χ 是半单的。这也意味着，$\mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$ 中的半单特征恰好是那些通过字符的广义 Jordan 分解对应于 $C_{G^{\sigma}}(s)$ 中 λ' 的扩张的特征。由于 $C_{G^{\sigma}}(s)/C^{\circ}_{G^{\sigma}}(s) \equiv (C_G(s)/C^{\circ}_G(s))^{\sigma}$ 根据 [1, 引理 8.3] 是阿贝尔群，这便推出了 (b)(i)、(a) 的一个方向以及次数公式。

现在假设 χ 是半单的。由 [11, 定理 2。6。11(b) 和推论 2。6。18(a)], 可知 $\chi(1)$是奇数。这就证明了 (a) 的另一方向。

(b)(ii) 若S 是 G 的一个包含 s的 σ-稳定极大环面，则根据特征标公式，$R_S^G(s)$与$R_S^G(s^{-1})$互为复共轭；参见 [11,定理 2.2.16]。集合 $\mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$的定义（见 [11, 定义 2.6.1]）表明，与 χ互为复共轭的特征标属于$\mathcal{E}(G^{*\sigma}, s^{-1})$。这证明了第一个断言。若 $C_G(s)$是连通的，则由 (i)，χ 是 $\mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$ 中唯一的半单特征。由于 s 是实的，与 χ 互为复共轭的特征标属于 $\mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$，并且由 (a) 可知它是半单的。因此 χ 是实的。

(b)(iii) 由于 α 和 α^* 是对偶同源，我们有

$$^{\alpha^*}\mathcal{E}(\overline{G}^{*\sigma}, s) = \mathcal{E}(\overline{G}^{*\sigma}, \alpha^{-1}(s));$$

参见 [29, 命题 7.2]。证明过程与 (ii) 中相同。

(b)(iv) 第一项断言由 (i)、(ii) 和 (a) 应用于 L可得。此外，在任意一种字符的约当分解下，ψ 都对应于平凡特征标；见 [11, 定理 2。6。11(c)]。由 (a)，χ是半单的，因此根据 (i)，它对应于 $C_{G^{\sigma}}(s)$的一个不可约特征标 λ，其核包含 $C^{\circ}_{G^{\sigma}}(s)$。由于$C_L(s)$是连通的，我们有 $C_{L^{\sigma}}(s) \leq$

$C^\circ_{\overline{G}^\sigma}(s)$。由于$\overline{L}$是 1-分裂的，$-C_{L^\sigma}(s)$是 $C^\circ_G(s)$的一个 1-分裂 Levi 子群，因此从 $C_{L^\sigma}(s)$到 $C^\circ_{G^\sigma}(s)$的 Lusztig归纳就是通常的 Harish-Chandra 归纳。因此，按照 [11, 定义 4.8.8]的意义，将 $C_{L^\sigma}(s)$的平凡特征标通过 Harish-Chandra 归纳到$C_{G^\sigma}(s)$后，λ的重数为 1；见 [11, 命题 4.8.10]。第二项断言现由 [11, 定理 4.8.24]得出。□

下一个引理为我们的应用铺平道路。

引理 4.7. 设 G 如< *styling id='4'*>假设 *3.2(b)(i)–(iv)* 所述，并假设 G的每个真子群都具有 $E1$-性质。设 ι表示G 的阶为2的标准图自同构。设(V, n, ν) 如[14, 记号 4.1.1]所述，并设 χ 表示 V的特征。将 V 视为一个$\mathbb{R}G^{*\sigma}$-模，并通过膨胀将 χ 视为 $G^{*\sigma}$的一个特征。设 $s \in G^\sigma$满足 $\chi \in \mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$。那么，在下列假设下，$(G, V, n)$ 具有 $E1$-性质。

存在 G 的一个 ι-稳定真标准 *Levi* 子群 L 以及一个与 G^σ-共轭的$s' \in L^\sigma$，使得条件(i),(ii),(iii) 成立。

(i) 元素 s' 在 L^σ中是实的。(ii) 中心化子 $C_L(s')$是连通的。

(iii) 对于每个稳定 L^σ的 $\alpha \in$ 自同构群(G)，以下结论成立：若 $\alpha(s)$ 与 s在 G^σ中共轭，则 $\alpha(s')$与 s' 在 L^σ中共轭。

证明。采用引理4.6中的记号。由于 L 是 ι-稳定的，且是G的标准 Levi 子群，因此它是 σ-稳定的。由于 ι 与 σ对易，有限群 L^σ 也为 ι-稳定。我们可以假设 $s = s' \in L^\sigma$。令 L^* 表示与 L对偶的 G^* 的标准 Levi 子群。于是 L^*是 σ-稳定的。令 $\psi \in$Irr($L^{*\sigma}$)表示 $\mathcal{E}(L^{*\sigma}, s)$中唯一的半单特征；见引理4.6(b)(i)。那么 ψ是实的、次数为奇数，且 χ在 $R^{G^*}_{L^*}(\psi)$中的重数为1；见引理4.6(b)(iv)。由于 χ 不是平凡特征标，$s \neq 1$，因此 ψ 不是 $L^{*\sigma}$的平凡特征标。

将 $\nu = \mathrm{ad}_h \circ \mu$ 写成 $h \in G^\sigma$ 和 $\mu \in \Gamma_G \times \Phi_G$的形式；参见第 [14, 小节 5.5]。由于 L 是 ι-稳定的，μ 稳定了 L^σ 以及相应的标准抛物子群 P^σ。由于 $G^\sigma = GT^\sigma$（见第4.1小节），存在 $g \in G$使得 $\alpha := \mathrm{ad}_g \circ \nu = \mathrm{ad}_t \circ \mu$，其中 $t \in T^\sigma$。特别地，α 稳定了 L^σ 和 P^σ。此外，α 是同源 $\alpha \in \mathrm{Aut}_1(G)$ 在 G 上的限制，它与 σ交换并固定 T；参见第4.3小节倒数第二段。

令 $\alpha^* \in \mathrm{Aut}_1(\overline{G^*})^\sigma$ 表示 α 在第4.3小节中同构 (2) 下的原像。根据引理 4.4，α 和 α^* 是对偶同源

现在，α^* 限制为 $G^{*\sigma}$的一个自同构，它稳定 $L^{*\sigma}$ 以及 $G^{*\sigma}$的相应标准抛物子群。这个 α^* 在 $G \cong G^{*\sigma}/Z(G^{*\sigma})$ 上诱导的自同构，正是我们最初考虑的 α 。因此， α^* 固定 χ，由引理 4.6(b)(iii)可知， α^* 也稳定 G^σ的 s共轭类。根据假设 (iii)， L^σ的 s共轭类也为 α所稳定。再次由引理 4.6(b)(iii)可得， ψ 被 α^*固定。最后，将 [14, 引理 5.4.1]应用于群 $G^{*\sigma}$ 和三元组 (V, gn, α)，即可得到所述结论。□

5. 中心化子和元素的阶的界

本节将给出某些中心化子的阶以及某些元素的阶的界。这些结果足以排除 $G = \mathrm{P}\Omega_8^+(q)$ 成为极小反例。

5.1. 中心化子和元素的阶的界。 我们需要估计假设 3.2(b) 中列出的群 G 的某些自同构的中心化子的大小。我们将使用第 4.1 小节中引入并总结的记号。尤其要回顾 G 的 σ-设置、 $q = 2^f$ 的概念，以及符号 φ 和 ι 的含义；后者表示 Γ_G 的一个非平凡元素，以及它在 G 上的限制。还要回顾线性群、酉群以及 E_6 型群所采用的 ε-约定。我们还定义参数 $\delta \in \{1, 2\}$： 若 $\varepsilon = 1$，则为 $\delta := 1$；若 $\varepsilon = -1$，则为 $\delta := 2$。

我们先给出一个定义。

定义 5.2. 设 G 如假设 3.2(b) 中所述，定义正整数 M_G 如下：

(a) If $G = E_6^\varepsilon(q)$, then $M_G := q^{48}$.
(b) If $G = \mathrm{PSL}_d^\varepsilon(q)$ with $d \geq 5$, then $M_G := q^{d(d+1)/2}$.
(c) If $G = \mathrm{PSL}_3^\varepsilon(q)$, then $M_G := \begin{cases} q^4, & \text{if } \varepsilon = 1 \text{ and } q \neq 16, \\ 62\,401, & \text{if } \varepsilon = 1 \text{ and } q = 16, \\ q^4 + q^3, & \text{if } \varepsilon = -1. \end{cases}$
(d) If $G = \mathrm{P}\Omega_8^+(q)$, then $M_G := q^{14} + q^{12}$.

引理 *5.3.* 设 p 为素数，且 $\alpha \in Aut(G) \setminus Inndiag(G)$，其中 $|\alpha| = p$。若 $G = P\Omega_8^+(q)$，则假设 $q \neq 2$。那么，除非 $G = E_6^\varepsilon(q)$ 或 $G = P\Omega_8^+(q)$ 且 α 是 G 的阶为 *2* 的图自同构，否则 $|C_G(\alpha)| < M_G$。在前一种情形下， $|C_G(\alpha)| < q^{52}$；在后一种情形下，$|C_G(\alpha)| < q^{21}$。

证明。由于 $|\alpha| = p$ 和 $\alpha \notin$ 属于 Inndiag(G)， α 模 Inndiag(G) 的阶也等于 p。因此，对于某个 $g \in G^\sigma$，有 $\alpha = \mathsf{ad}_g \circ \mu$

以及某个阶为 p的 $\mu \in \Gamma_G \times \Phi_G$。回忆一下，当 G为扭曲时， $\Gamma_G = \{1\}$。设 $\mu = \iota' \circ \varphi'$，其中 $\iota' \in \Gamma_G$ 和 $\varphi' \in \Phi_G$。由于 $|\mu| = p$ 是一个素数，我们必有 $|\varphi'| = p$ 或 $|\iota'| = p$。在后一种情况下， G 是非扭曲的，并且 $p = 2$ 或 $p = 3$，其中 $p = 3$ 仅在 $G = \mathrm{P}\Omega_8^+(q)$ 时出现。

首先，假设 α 是 G的图自同构。若 G是未扭曲的，这意味着 $\varphi' = 1$，且要么 $p = 2$，要么 $p = 3$ 和$G = \mathrm{P}\Omega_8^+(q)$。若 G 是扭曲的，这意味着 $\iota' = 1$ 和 $p = 2$。若$p = 2 = r$，则在定义 5.2 的相应情形下，有 $C_G(\alpha) \cong F_4(q)$、$\mathrm{Sp}^{2\lfloor d/2 \rfloor}(q)$、$\mathrm{Sp}_2(q)$、$\mathrm{SO}_7(q)$；参见命题 [12, Proposition 4.2.9]。若 $p = 3$，由 [12, 表 4.7.3A]可得 $C_G(\alpha) \cong G_2(q)$。注意，后一处引文仅给出 $O^{2'}(C_G(\alpha))$，但根据 [2, 表 8.50]，包含一个与 $G_2(q)$同构子群的 G 的极大子群只有 $G_2(q)$本身或 $\mathrm{Sp}_6(q)$。然而，包含 $G_2(q)$的 $\mathrm{Sp}_6(q)$的极大子群只有 $G_2(q)$；参见 [2, 表 8.28、 8.29]。因此，$O^{2'}(C_G(\alpha)) = C_G(\alpha)$。无论如何，给出的$|C_G(\alpha)|$ 上界均成立。

现在假设 α 不是图自同构。那么 $\varphi' \neq 1$，因此 $|\varphi'| = p$。回想一下，若 G 未扭曲，则 Φ_G 是阶为 f 的循环群；若 G 扭曲，则其阶为 $2f$。由于在扭曲情形下 p 为奇数，因此无论哪种情形都有$p \mid f$。若 G 扭曲，则 ι 是 Φ_G中的一个对合。在未扭曲情形下， $\varphi^{f/p}$；在扭曲情形下， $\iota \circ \varphi^{f/p}$；它们都是 Φ_G中阶为 p 的元素。显然，对于所有与 p互素的整数 l， $C_G(\alpha) = C_G(\alpha^l)$。由公式 (1)，我们因而可以假设 $\varphi' = \varphi^{f/p}$，分别地$\varphi' = \iota \circ \varphi^{f/p}$。回想一下， φ 和 ι来自 $\mathrm{Aut}_1(G)$ 中相应元素的限制，并以相同字母表示。将它们视为这样的元素时，$\mu = \iota' \circ \varphi'$ 和 $\alpha = \mathrm{ad}_g \circ \mu$是 G的 Steinberg 态射。根据我们对 φ'的选择，有 $\sigma = \varphi'^p$。因此，由于 $|\iota'| \in \{1, p\}$， $\mu^p = \sigma$。于是$C_{G^\sigma}(\mu) = C_G(\mu)$。现在 $C_G(\alpha) \leq C_G(\alpha) \cong C_G(\mu) = C_{G^\sigma}(\mu)$；关于后一个链中的同构，见 [11, 引理 1.4.14]。特别地，$|C_G(\alpha)| \leq |C_G(\mu)| = |G^\mu|$。在 G^μ中，阶最大的群出现于 G 未扭曲且 $p = 2$的情形。相应地，它们分别为${}^2E_6(q_0)$、$\mathrm{PGU}_d(q_0)$、$\mathrm{PGU}_3(q_0)$和 $\mathrm{P}\Omega_8^-(q_0)$，其中 $q = q_0^2$。容易验证这些群的阶满足所述界限。注意， $|\mathrm{PGU}_3(4)| = 62\,400$。□

我们还需要以下关于自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 中某些元素阶的技术性结果。

引理 5.4。设 G 满足假设 3.2(b)(i)–(iv)。令 $\beta = \mathrm{ad}_t \circ \mu \in$ 自同构群(G)，其中 $t \in T^\sigma$ 且 $\mu \in \Gamma_G \times \overline{\Phi}_G$。设 $3 \mid q - \varepsilon$。则有以下结论。

(a) 如果 $t = 1$，那么 $|\beta|$ 整除 δf。

(b) 如果 t 是一个3元，那么 $|\beta|$ 整除 $3\delta f$。(c) 如果 $\varepsilon=-1$，$|\mu|$ 是偶数且 $t^{q+1}=1$，那么 $|\beta|$ 整除 $2f$。

证明。(a) 这是显然的，因为 $\Gamma_G\times\Phi_G$ 的指数为 δf。

(b) 令 $c:=\delta f/f_3$。若 $\delta=1$，则 f为偶数，因为此时 $3\mid 2^f-1$。因此 c为偶数。此外，$|\mu^c|$ 整除 f_3。于是，对某个偶整数 c'，有 $\mu^c=\varphi^{c'}$。由公式 (1)，我们有 $\beta^c=\mathsf{ad}_x\circ\mu^c$，其中有一个 3-元 $x\in T^\sigma$。为证明我们的断言，只需证明 $\beta^{3cf_3}=1$。

假设对某个非负整数 b，有 $f_3:=3^b$。那么，由引理 IX.8.1(e)，$(q-\varepsilon)_3=3^{b+1}$ by [16, 。注意到 φ 通过将元素平方而作用于 T；见定理 1.12.1] [12, 。令 $q':=2^{c'}$。再次由公式 (1)，我们得出 $\beta^{3c}=\mathsf{ad}_{x'}\circ\mu^{3c}$，其中 $x'=x^{1+q'+q'^2}$。由于 q' 是 2 的偶数次幂，我们有 $3\mid 1+q'+q'^2$。因此，除非 $|x|=1$，否则 $|x'|=|x|/3$；除非 $|\mu^c|_3=1$，否则 $|\mu^{3c}|=|\mu^c|/3$。重复这一论证，我们得到 $\beta^{cf_3}=\mathsf{ad}_y\circ\mathsf{id}$，其中 $y\in T^\sigma$ 的阶为 1 或 3。这就完成了 (a) 的证明。

(c) 由于 $\varepsilon=-1$，我们有 $\Gamma_G=\{\mathsf{id}\}$，且 Φ_G 是阶为 $2f$ 的循环的。moreover，f 是奇数，因为 $3\mid 2^f+1$。由于 $|\mu|$ 是偶数，公式 (1) 蕴含 $\beta^f=\mathsf{ad}_x\circ\varphi^f$，其中 $x\in T^\sigma$ 满足 $x^{q+1}=1$。由公式 (1) 得到 $\beta^{2f}=\mathsf{ad}_{x^{1+q}}\circ\mathsf{id}=\mathsf{id}$。这就得到了我们的断言。□

5.5. 八维正交群的证明。作为引理 5.3 的一个例证，我们完成对群 $\mathrm{P}\Omega_8^+(q)$ 具有 $E1$-性质这一结论的证明。

命题 5.6。设 $G=\mathrm{P}\Omega_8^+(q)$。假设 $\nu=\mathrm{ad}_h\circ\iota\circ\mu$，其中 $h\in G$、$\iota\in\Gamma_G$ 的阶为 3 且 $\mu\in\Phi_G$。则 $(G、V、n)$ 具有 $E1$-性质。

证明。通过将 h^{-1} 左乘 n，我们可以假设 $\nu=\iota\circ\mu$。若 $|\nu|$ 为偶数，令 $g:=1$。若 $|\nu|$ 为奇数，令 $g\in\mathrm{P}\Omega_8^+(2)\le G$ 为一个 ι-稳定的对合，其在 $\mathrm{P}\Omega_8^+(2)$ 中的中心化子阶为 $2^{10}3$。利用 $\mathrm{P}\Omega_8^+(2)$ 中 ι 的中心化子同构于 $G_2(2)$ 这一事实，相应的类融合（用 GAP 计算）表明存在这样的 g。根据构造，ν 固定 g。Chevie [10] 中 G 的幺正特征标表，特别列出了 G 的幺正共轭类的中心化子阶。检查这些条目可知，$|C_G(g)|=q^{10}(q^2-1)$。令 $\alpha:=\mathsf{ad}_g\circ\nu$。假设 $q\neq 2$。那么，对每个整除 $|\alpha|$ 的素数 p，都有 $|C_G(\alpha_{(p)})|\le q^{14}+q^{12}$。对于奇数 p 或偶数 $|\nu|$，由引理 5.3 可得此结论，因为 α 不是阶2的图自同构。对于奇数 $|\nu|$，有 $C_G(\alpha_{(2)})=C_G(g)$。

根据 [14, 引理 4.3.3]，三元组 $(G,\ V,\ n)$ 具有 $E1$-性质，若

$$\chi(1)>(|\alpha|-1)(q^{14}+q^{12})^{1/2}. \tag{4}$$

首先假设 $\chi(1) > q^9/8$。若 $f \geq 5$，则 $|\alpha|-1 \leq 6f-1 \leq 2^f = q$。对于 $f = 4$，我们有 $|\alpha| \leq 12 \leq 2^4 = q$。这些界显然意味着 (4) 对 $f \geq 4$ 成立。对于 $f = 2$ 或 3，我们有 $|\alpha| = 6$。利用这一点以及 [21], 中给出的 $\chi(1)$ 的精确值，可知 (4) 对 $f = 2$、3 也成立。剩下的情形是 $q = 2$，即 $G = \mathrm{P}\Omega_8^+(2)$。此时，$\Phi_G$ 是平凡的，因此 $\alpha = \mathrm{ad}_g \circ \iota$，其中 g 是一个 ι-稳定的对合，其中心化子的阶为 $2^{10}3$。令 $G^\diamond := \langle \mathrm{Inn}(G)\ \alpha\rangle = \langle \mathrm{Inn}(G)\ \nu\rangle$，并令 $\chi^\diamond$ 表示由 V 所实现的 $G^\diamond$ 的特征；参见 [14, 注 4.2.5]。现在 $G^\diamond$ 是一个形如 $G.3$ 的群。$G.3$ 的特征表，因而也是 $G^\diamond$ 的特征表，载于 Atlas [5] 和 Gap [9] 中。很容易找到包含 $\langle\alpha\rangle$ 中元素的 $G^\diamond$ 的共轭类。假设 χ 不满足 (4)。利用 Gap 可知，此时要么 $\chi(1) = 175$，要么$\chi(1) = 525$。在这两种情况下，我们都可以验证，$\mathrm{Res}^{G^\diamond}_{\langle\alpha\rangle}(\chi^\diamond)$ 将 $\langle\alpha\rangle$ 的每个实不可约特征都作为成分包含其中。因此，根据 [14, 引理 4.3.1], (G, V, n) 具有 $E1$-性质。至此，$\chi(1) > q^9/8$ 情形的证明完成。

现在假设 $\chi(1) \leq q^9/8$。利用 [21], ，我们发现 χ属于 G 的两个不可约特征系列之一，其次数分别为$(q-1)^2(q^2+q+1)(q^2+1)$和$(q+1)^2(q^2+1)(q^2-q+1)$。我们断言 χ 在 ν下不变。这与 χ 可扩张到 $G^\diamond = \langle \mathrm{Inn}(G)\ \nu\rangle$这一事实矛盾；参见 [14, 备注 4.2.5]。利用 [20], ，容易看出 $\chi \in \mathcal{E}(G, s)$，其中 s 是 G^* 的一个半单元，且$C_{G^*}(s) \cong$ 一般酉群$_4(q)$或 $C_{G^*}(s) \cong$ 一般线性群$_4(q)$。事实上，我们可以假设$C_{G^*}(s)$是 G^* 中型为 A_3 的标准 Levi 子群。这样的 Levi 子群有三个，它们在 G^*中彼此不共轭。令$\nu^* = \iota^* \circ \mu^*$，其中 ι^* 和 μ^* 分别表示 G^* 的 3 阶标准图自同构（与 ι对偶）以及 G^*的标准域自同构（与 μ对偶）。于是 ν^* 是 G^* 的一个同源，与 ν对偶。注意，ι^* 循环地置换 G^* 中型为 A_3的三个标准 Levi 子群。另一方面，每个标准 Levi 子群都被 φ^*固定。因此，$C_{G^*}(\overline{\nu^*}(s))$在 G^* 中不与 $C_{G^*}(s)$共轭。由此可得，$\nu^*(s)$和 s 并非在 $\underline{G}^*$下共轭。由于根据 [29, 命题 7.2]有 ${}^\nu\chi \in \overline{\mathcal{E}}(G, \nu^{*-1}(s))$，所以 ${}^\nu\chi \neq \chi$，如所断言。□

6. 线性群与酉群

在本节中，令 G 为假设 3.2(b)(i),(ii) 中的群之一。因此，$G =$ 射影特殊线性群$^\varepsilon_d(q)$，其中 $d \geq 3$ 且 $q = 2^f$；当 $d = 3$ 时，$q \neq 2$ $\varepsilon = -1$。置 $e :=$ 最大公约数$(d,\ q-\varepsilon)$，并回顾一下，根据假设有 $e > 1$。同时回顾引言至第 5.1 小节中参数 δ 的定义。我们还将使用第 4.1–4.3 小节中引入的记号和结果。

6.1. 关于线性群和酉群的自然表示。我们以显然的方式将 ε-约定扩展到一般线性群和酉群。我们将需要一些关于作用在其自然向量空间上的 $\mathrm{GL}_d^{\varepsilon}(q)$ 的半单元素的结果。鉴于 Lusztig特征的Jordan分解, 实半单元素的描述对于实不可约特征的分类具有重要意义。

设 $E := \mathbb{F}_{q^\delta}{}^d$ 表示一般线性群 $\mathrm{GL}_d^{\varepsilon}(q)$ 的自然列向量空间。若 $\varepsilon = -1$, 群 $\mathrm{GU}_d(q) \leq \mathrm{GL}_d(q^2)$ 是 Hermitian 型的稳定子群

$$((x_1, \ldots, x_d)^t, (x_1, \ldots, x_d)^t) \mapsto \sum_{i=1}^{d} x_i y_{d-i+1}^q \tag{5}$$

在 E 上。若 Hermitian 型 (5) 在子空间 E_1 上恒为零, 则称 E_1 为全各向同性子空间。若 $E_1 \oplus E_1^\dagger$ 非退化（这意味着 $\dim(E_1) = \dim(E_1^\dagger)$）, 则称 E 中的两个全各向同性子空间组成的有序对 $(E_1, E_1^\dagger)$ 为互补对。

设 Δ 是 $\mathbb{F}_{q^\delta}$上的首一不可约多项式。记 Δ^* 为首一多项式, 其在 $\mathbb{F}$ 中的根是 Δ的根的倒数。于是 Δ^* 是 $\mathbb{F}_{q^\delta}$上的不可约多项式。若 $\delta = 2$, 则记 $\Delta^\dagger$ 为首一多项式, 其根是 Δ的根的 $-q$次幂。于是 $\Delta^\dagger$ 是$\mathbb{F}_{q^2}$上的不可约多项式。通过乘法性, 将 Δ^* 和 $\Delta^\dagger$ 的概念推广到 $\mathbb{F}_{q^\delta}$ 上的所有首一多项式。下面列出这些概念的一些形式性质。

引理 6.2。 设 Δ 是 $\mathbb{F}_{q^\delta}$ 上的一个首一不可约多项式, 其次数为 k。则有以下结论。

(a) 若 $\Delta = \Delta^*$, 则 k 为偶数, 除非 $k = 1$ 且 1 是 Δ 的根。(b) 若 $\delta = 2$ 且 $\Delta = \Delta^\dagger$, 则 k 为奇数。

证明。 (a) 设 $\zeta \in \mathbb{F}$ 是 Δ的一个根。由于 q 为偶数, 因此 $\zeta \neq \zeta^{-1}$, 除非$\zeta = 1$。

(b) 假设 $\Delta = \Delta^\dagger$, 并令 $\zeta \in \mathbb{F}$ 为 Δ的一个根。由于 Δ 在 $\mathbb{F}_{q^2}$上不可约, Δ 的根为 ζ、ζ^{q^2}、.....、$\zeta^{q^{2(k-1)}}$, 且 k 是满足$\zeta^{q^{2k}} = \zeta$的最小正整数。

由于 $\Delta = \Delta^\dagger$, 存在 $0 \leq i \leq k-1$ 使得$\zeta^{-q} = \zeta^{q^{2i}}$。因此 $\zeta^{q(q^{2i-1}+1)} = 1$。这意味着 $\zeta^{q^{2i-1}+1} = 1$, 从而 $\zeta^{q^{2(2i-1)}-1} = 1$。由此可得 $\zeta^{q^{2(2i-1)}} = \zeta$, 这意味着 k 为奇数。□

引理 6.3。 设$\hat{}s$、$\hat{}s' \in$ 一般线性群$_d$（q^δ）分别为半单元, 其特征多项式分别为 Ξ和 Ξ'。

(a) 元素$\hat{}s$和$\hat{}s'$ 在$\mathrm{GL}_d(q^\delta)$中共轭, 当且仅当$\Xi = \Xi'$。

(b) 元素$\hat{}s$ 是实的，当且仅当 $\Xi = \Xi^*$。(c) 设 $\delta = 2$ 且$\hat{}s \in \mathrm{GU}_d(q)$。则 $\Xi = \Xi^\dagger$。(d) 设 $\delta = 2$ 且$\hat{}s$、$\hat{}s' \in \mathrm{GU}_d(q)$。则$\hat{}s$ 和$\hat{}s'$ 在 $\mathrm{GU}_d(q)$中共轭，当且仅当它们在$\mathrm{GL}_d(q^2)$中共轭。

证明。 这些断言是众所周知的。 □

引理 6.4。 设$\hat{}s \in$一般线性群$_d(q^\delta)$ 是半单且实的，并令 d_1 表示$\hat{}s$ 对应特征值1的特征子空间的维数。则 $d \equiv d_1$ (模2)。

证明。 $\hat{}s$中不同于 1 的特征值两两成对互为逆元。□

定义 6.5。 设$\hat{}s \in$一般线性群$^\varepsilon_d(q)$是半单的，并令 Θ 为$\hat{}s$的最小多项式的一个首一因子。于是定义 $E_\Theta(\hat{}s) := \ker(\Theta(\hat{}s))$。

引理 6.6。 令 $G :=$一般线性群$^\varepsilon_d(q)$。设$\hat{}s \in G$ 是半单的，其特征多项式为 Ξ，并令 Δ 为 Ξ 的一个重数为 m 、次数为 k的首一不可约因子。

(a) 中心化子 $C_{\hat{G}}(\hat{}s)$ 对最小多项式 $\hat{}s$ 的每个首一因子 Θ 都稳定 $E_\Theta(\hat{}s)$ 。特别地， $C_{\hat{G}}(\hat{}s)$ 稳定 $E_\Delta(\hat{}s)$。若 $\delta = 1$，则 $C_{\hat{G}}(\hat{}s)$ 在 $E_\Delta(\hat{}s)$ 上诱导出 一般线性群$_m(q^k)$ 。

(b) 设 $\delta = 2$ ，令 Δ' 为 Ξ 的首一不可约因子，且满足 $\Delta' \neq \Delta^\dagger$。则 $E_{\Delta'}(\hat{}s)$ 与 $E_\Delta(\hat{}s)$ 正交。

(c) 设 $\delta = 2$且 $\Delta = \Delta^\dagger$。则 $E_\Delta(\hat{}s)$ 是非退化的，且 $C_{\mathrm{GU}_d(q)}(\hat{}s)$ 在 $E_\Delta(\hat{}s)$ 上诱导出 一般酉群$_m(q^k)$ 。

(d) 设 $\delta = 2$ 且 $\Delta \neq \Delta^\dagger$。则 $E_\Delta(\hat{}s)$ 是全各向同性的。在此情形下，$E_\Delta(\hat{}s) \oplus E_{\Delta^\dagger}(\hat{}s)$ 是非退化的，且 $C_{\mathrm{GU}_d(q)}(\hat{}s)$ 在 $E_\Delta(\hat{}s) \oplus E_{\Delta^\dagger}(\hat{}s)$ 上诱导出 一般线性群$_m(q^{2k})$ 。

证明。 这些断言广为人知，且易于证明；例如参见 [8,命题 (1A)]。 □

引理 6.7。 设 $G =$ 一般酉群$_d(q)$ ，其中 $d \geq 2$。设 $1 \neq \hat{}s \in G$ 为半单且实的，其特征多项式为 Ξ。令 Δ_1 表示根为1、次数为1的首一多项式，并令 d_1 表示 Δ_1 在 Ξ中的重数。令 $\Delta \neq \Delta_1$ 表示 Ξ的一个次数为 k 、重数为 m的首一不可约因子。则有以下结论。

(a) 如果 $\Delta = \Delta^\dagger$，那么 $\Delta \neq \Delta^*$，且 Δ^* 在 Ξ中出现的重数为 m。(b) 如果 $\Delta \neq \Delta^\dagger$，那么 $\Delta^\dagger$ 在 Ξ中出现的重数为 m 。(c) 我们有 $d \geq d_1 + 2mk$。(d) 我们有 $|C_{\mathrm{GU}_d(q)}(\hat{}s)|_{2'} \leq |$一般酉群$_m(q^k)|^2_{2'}|$ 一般酉群$_{d-2mk}(q)|_{2'}$。

(e) 令 d' 表示 Ξ的不可约因子的最大重数。如果 $d'=1$，那么 $|C_{\mathrm{GU}_d(q)}(\hat{}s)|_{2'} \le (q+1)^d$。如果 $d'=2$，那么 $|C_{\mathrm{GU}_d(q)}(\hat{}s)|_{2'} \le$一般酉群$_2(q)|_{2'}^{\lfloor d/2 \rfloor}(q+1)^d$，其中 $d=d-2\lfloor d/2\rfloor$。

证明。(c)中的断言由(a)和(b)中的断言推出。为证明(a)，注意到当 $\Delta=\Delta^{\dagger}$时，k 为奇数；见引理 6.2(b)。由引理 6.2(a)可得 $\Delta \ne \Delta^*$。其余断言由引理 6.3(b)推出。(b)的证明类似。

现在证明(d)和(e)。若 $\Delta=\Delta^{\dagger}$，则由(b)可得 $\Delta \ne \Delta^*$，并令 $\Delta^\circ := \Delta^*$。若 $\Delta \ne \Delta^{\dagger}$，则令 $\Delta^\circ := \Delta^{\dagger}$。由引理 6.6(c)(d)，$E_1 := E_\Delta(\hat{}s) \oplus E_{\Delta^\circ}(\hat{}s)$是非退化的，而$C_{\mathrm{GU}_d(q)}(\hat{}s)$分别在 E_1上诱导出 $\mathrm{GU}_m(q^k)\times\mathrm{GU}_m(q^k)$和 $\mathrm{GL}_m(q^{2k})$。令 E_2表示 E_1的正交补。由引理 6.6(a)(b)，$C_{\mathrm{GU}_d(q)}(\hat{}s)$固定 E_2。写作$\hat{}s = \hat{}s_1 + \hat{}s_2$，其中$\hat{}s_j$ 是$\hat{}s$ 在 E_j上的投影，$j=1,2$。于是，稍微滥用一下记号，我们有$C_{\mathrm{GU}_d(q)}(\hat{}s) = C_{\mathrm{GU}_{2mk}(q)}(\hat{}s_1) \times C_{\mathrm{GU}_{d-2mk}(q)}(\hat{}s_2)$。(d)中的断言由 $|\mathrm{GL}_m(q^{2k})|_{2'} < |\mathrm{GU}_m(q^k)|_{2'}^2$推出，这可通过对 m归纳法轻易证明。为证明(e)，先假设 $d'=1$。显然，$|\mathrm{GU}_1(q^k)|_{2'} = q^k+1 \le (q+1)^k$，故该断言由对 d的归纳法得出。若 $d'=2$，先设 $d'=d_1$，且 Ξ 中不同于 Δ_1 的所有不可约因子的重数均为1。对 $E_{\Delta_1}(\hat{}s)$的正交补应用陈述的第一部分，可得$|C_{\mathrm{GU}_d(q)}(\hat{}s)|_{2'} \le |\mathrm{GU}_2(q)|_{2'}(q+1)^{d-2}$，因此，由于$(q+1)^2 \le |\mathrm{GU}_2(q)|_{2'}$，我们的断言成立。若 Ξ 中某个不同于 Δ_1 的不可约因子的重数为2，我们可选取 Δ使得 $m=2$。现在$|\mathrm{GU}_2(q^k)|_{2'} = (q^k+1)(q^{2k}-1) \le (q+1)^k(q^2-1)^k = |\mathrm{GU}_2(q)|_{2'}^k$，其中中间的不等式由对 k的归纳法得出。最后再对 d归纳即可。□

设 $g \in \mathrm{PGL}_d^{\varepsilon}(q)$。在典范满同态 $\mathrm{GL}_d^{\varepsilon}(q) \to \mathrm{PGL}_d^{\varepsilon}(q)$ 下的原像 $\hat{}g \in \mathrm{GL}_d^{\varepsilon}(q)$ 称为 g 的一个提升。

引理 6.8. 设 $s \in \mathrm{PGL}_d^{\varepsilon}(q)$ 是半单且实的。那么存在一个实提升$\hat{}s \in \mathrm{GL}_d^{\varepsilon}(q)$，它是 s 的提升。

证明。设 $y \in \mathrm{PGL}_d^{\varepsilon}(q)$，其中 $ysy^{-1}=s^{-1}$，并令 $\hat{}s, \hat{}y \in \mathrm{GL}_d^{\varepsilon}(q)$ 分别表示 s 和 y 的提升。于是存在 $\zeta \in \mathbb{F}_{q^\delta}^*$，使得 $\hat{}y\hat{}s\hat{}y^{-1} = \zeta\hat{}s^{-1}$。此外，$\zeta^{q+1}=1$ 若 $\delta=2$。令 $\xi \in \mathbb{F}_{q^\delta}^*$，其中 $\xi^{-2}=\zeta$。（回忆一下，q 是偶数。）因此，$\xi\hat{}s \in \mathrm{GL}_d^{\varepsilon}(q)$ 是 s 的一个提升，且 $\hat{}y(\xi\hat{}s)\hat{}y^{-1} = (\xi\hat{}s)^{-1}$。□

6.9. **自同构，II**。这里，我们将第 4.3 小节中引入的记号扩展到 $G=\mathrm{PGL}_d(\mathbb{F})$ 的情形。记 $G := \mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$，则

得到 $\overline{G} = G/Z(G)$。这使得我们可以利用 G 的自然矩阵表示，便捷地描述 $\mathrm{Aut}_1(G)$。令 $\hat{\varphi}$ 表示 G 的 Steinberg 态射，它将每个矩阵元素平方；令 $\hat{\iota}$ 表示 G 的自同构，定义为先取逆转置自同构，再与反对角线上为 1、其余位置为 0 的矩阵作共轭。于是 $\hat{\iota}$ 是一个与 $\hat{\varphi}$ 交换的对合。令 $\Gamma_{\hat{G}} := \langle \hat{\iota} \rangle \leq \mathrm{Aut}(G)$ 且 $\Phi_{\hat{G}} := \langle \hat{\varphi} \rangle \leq \mathrm{Aut}(G)$，其中 $\mathrm{Aut}(G)$ 表示 G 作为抽象群的自同构群。则 $\Phi_{\hat{G}} \times \Gamma_{\hat{G}} \leq \mathrm{Aut}(G)$，且 $(\Gamma_{\hat{G}} \times \Phi_{\hat{G}}) \cap \mathrm{Inn}(G)$ 是平凡的。我们记

$$\mathrm{Aut}'(\overline{\hat{G}}) := \mathrm{Inn}(\overline{\hat{G}}) \rtimes (\Gamma_{\overline{\hat{G}}} \Phi_{\overline{\hat{G}}}).$$

将 ι 和 φ 记作分别由 $\hat{\iota}$ 和 $\hat{\varphi}$ 诱导的 G 的自同构。那么，按照第4.1小节中的记号，ι 和 φ 分别是 G 的标准自同构和标准 Frobenius 态射。

自然同态

$$\mathrm{Aut}'(\overline{\hat{G}}) \to \mathrm{Aut}_1(\overline{G}) \tag{6}$$

事实上是一个同构。对于 $\mu \in \mathrm{Aut}_1(G)$，我们将其在 (6) 下于 $\mathrm{Aut}'(\hat{G})$ 中的原像记作 $\hat{\mu}$。

6.10. 更多预备结果。 我们汇集更多预备结果。

引理 6.11。 (a) 某个奇素数整除 d；若 $\varepsilon = -1$，则某个不同于 7 的奇素数整除 d。

(b) 如果 $q \geq 8$，那么 $q^3 \geq 2f(q+1)^2$ 且 $1 - q^{-1} - q^{-2} \geq q^{-1/4}$。*(c)* 如果 $q = 4$，则有 $q^4 > 2f(q+1)^2$ 且 $1 - q^{-1} - q^{-2} \geq q^{-1/2}$。*(d)* 如果 $q = 2$，则有 $q^5 > 2f(q+1)^2$ 且 $1 - q^{-1} - q^{-2} \geq q^{-2}$。*(e)* 有 $|\text{一般线性群}_d(q)| \leq q^{d^2}$ 且 $|\text{一般酉群}_d(q)| \leq (1 - q^{-1} - q^{-2})^{-1} q^{d^2}$。如果 $q \geq 4$，那么 $|\text{一般酉群}_d(q)| \leq q^{d^2+1/2}$；如果 $q = 2$，那么 $|\text{一般酉群}_d(q)| \leq q^{d^2+2}$。

证明。 (a) 第一个断言显然成立，因为最大公约数 $(d,\ q - \varepsilon) > 1$ 且 $q - \varepsilon$ 为奇数。此外，$7 \nmid q + 1$，因为 2^f 模 $7 \in \{1, 2, 4\}$。这就得到了第二个断言。

(c)–(d) 这些断言显然成立。

(e) 由 $\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)$ 的已知阶公式，结合引理 2.1 以及 (b)–(d) 中的估计即可得出。□

引理 6.12. 设 $t \in G^\sigma = \text{射影广义线性群}_d^\varepsilon(q)$ 为半单群，并设 $\hat{t} \in \text{一般线性群}_d^\varepsilon(q)$ 表示 t 的一个提升。那么 $|C_{G^\sigma}(t)| \leq |C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(\hat{t})|$。

证明. 令 $C := C_{\mathrm{GL}_d^{\varepsilon}(q)}(\hat{t})$，并令 $\tilde{C}$ 表示 $C_{G^\sigma}(t)$ 在 $\mathbf{GL}_d^{\varepsilon}(q)$ 中的原像。于是 $C \leq C$ 且 $[C\colon C] \leq q-\varepsilon$。事实上，映射 $C \to Z(\mathbf{GL}_d^{\varepsilon}(q))$，$g \mapsto [g,t]$ 是一个核为 C 的同态。由于 $|C_{G^\sigma}(t)| = |C|/(q-\varepsilon)$，我们的断言得证。□

设 $u \in$ 一般线性群$_d(q^\delta)$ 是一个对合。若 u 的若尔当标准形具有 l 个大小为 2 的若尔当块，以及 $d-2l$ 个大小为 (1×1) 的若尔当块和 l 个大小为 (2×2) 的若尔当块，则称 u 由 l 个大小为 2 的若尔当块组成。

引理 6.13。设 $u \in$ 一般线性群$_d^{\varepsilon}(q)$ 是一个由 l 个大小为 2 的若尔当块组成的对合，并且 $C := C_{\mathrm{GL}_d^{\varepsilon}(q)}(u)$。则 C 是一个半直积$C = UL$，其幺幂根 U 的阶为 q^{2ld-3l^2}，补子群为 $L \cong$ 一般线性群$_l^{\varepsilon}(q) \times$ 一般线性群$_{d-2l}^{\varepsilon}(q)$。

特别地，$|C| \leq q^{2l^2-2ld+d^2}$ 若 $\varepsilon = 1$，则 $|C| \leq q^{2l^2-2ld+d^2+4}/(q^2-q-1)^2$ 若 $\varepsilon = -1$。

证明。显然，u 在 $\mathbf{GL}_d(q^\delta)$ 中与该矩阵共轭

$$u' := \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_l & 0 & \mathrm{Id}_l \\ 0 & \mathrm{Id}_{d-2l} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_l \end{bmatrix}$$

注意，$u' \in \mathbf{GU}_d(q)$。因此，当$\varepsilon = -1$时，u在 $\mathbf{GU}_d(q)$ 中与 u' 共轭。于是我们可以用 u'替换 u。经过常规的矩阵计算，即可得到关于 C的结构的断言。

关于 $|C|$ 的估计可由引理 2.1 得出。□

6.14. 对 ν 的修改。现在我们证明一个关于 G的某些自同构的中心化子的关键结果。目的是通过内自同构修改自同构 ν，以使其各次幂的中心化子阶尽可能小。原则上，ν 可以是 $\mathrm{Aut}(G)$ 中的任意元素。关于量 M_G，请回顾定义 5.2。

命题 6.15。设 $\beta \in$自同构群(G)。则存在 $g \in G$ 使得$\alpha := \mathrm{ad}_g \circ \beta$ 具有偶数阶，并且以下结论成立。

(a) 对于每个整除 $|\alpha|$ 的素数 p 以及 $\langle\alpha\rangle$ 中每个阶为 p 的元素 $\alpha_{(p)}$，均有 $|C_G(\alpha_{(p)})| < M_G$。(b) 若 $G = \mathrm{PSL}_d^{\varepsilon}(q)$ 且，则 整除 $(q-\varepsilon)$。(c) 若 $G = \mathrm{PSL}_3^{\varepsilon}(q)$，则 $|\alpha|$ 整除 $3\delta f$。

(d)对于给定的 ε、 d 和 q， α 的阶以及 $G^\diamond := \langle \mathrm{Inn}(G)\ \beta\rangle$ 的结构如下表所示。

ε	d	q	$\lvert\alpha\rvert$	$G^\diamond$
1	3	4	6	$G.3 \cong$ 射影广义线性群$_3$(4)
1	3	4	6	$G.6$
-1	3	8	6	$G.3$
-1	3	8	6	$G.6$
-1	3	8	18	$G.3$
-1	3	32	30	射影一般酉群$_3$(32) $\cong \langle \mathrm{Inn}(G)\ \alpha^{10}\rangle$
-1	≥ 5	2	$2, 6$	
-1	≥ 5	4	$2, 4, 10$	
-1	6	2	6	$G.3 \cong$ 射影一般酉群$_6$ (2)
-1	6	8	$2, 6, 18$	

证明。根据引理 6.11(a)，我们有 $d \notin \{4, 8, 16\}$；若 $\varepsilon = -1$，则还有 $d \notin \{7, 14\}$。我们用 $\mathrm{GL}^\varepsilon_d(q)$ 中的元素表示 $G^\sigma = \overline{\mathrm{PGL}^\varepsilon_d(q)}$ 的元素，并采用第 6.9 小节中引入的记号。设 $\hat{}t \in \mathrm{GL}^\varepsilon_d(q)$ 为一个对角矩阵。则 $\hat{}\varphi(\hat{}t) = \hat{}t^2$，而 $\hat{\iota}(\hat{}t)$ 是由 $\hat{}t$ 将其对角元素的顺序反转并逐一取逆得到的。特别地，若 $\hat{}t$ 是回文的，即在反转其对角元素后保持不变，则 $\hat{\iota}(\hat{}t) = \hat{}t^{-1}$。

回顾一下， β 可分解为 $\beta = \mathrm{ad}_h \circ \mu$，其中 $h \in$ 射影广义线性群$^\varepsilon_d(q)$，且 $\mu \in \Gamma_G \times \Phi_G$；并且 h 和 μ 由 β 唯一确定。若$d = 3$，则可以用 $g'h$ 替换 h，从而假设 $|h|$ 是 3 的幂，其中 $g' \in G$ 取适当值。令 $h \in$一般线性群$^\varepsilon_d(q)$ 表示 h。若 $d = 3$，则假设 $|h|\hat{}$ 是 3 的幂。注意，无论哪种情况，$\det(h)$ 都属于 $\mathbb{F}^*_{q^\delta}$ 中阶为 $q - \varepsilon$ 的子群。现在我们选取一个特定的对角回文元 $\hat{}t \in$一般线性群$^\varepsilon_d(q)$，使得 $\det(\hat{}t) = \det(\hat{}h)$，如下所示。对于 $3 \leq d \leq 6$，取

$$\hat{t} := \begin{cases} \mathrm{diag}(\zeta, 1, \zeta), & \text{if } d = 3, \\ \mathrm{diag}(\zeta, 1, 1, 1, \zeta), & \text{if } d = 5, \\ \mathrm{diag}(\zeta, \zeta, 1, 1, \zeta, \zeta), & \text{if } d = 6, \\ \mathrm{diag}(\zeta, \zeta, 1, 1, 1, \zeta, \zeta), & \text{if } d = 7 \text{ (and } \varepsilon = 1), \end{cases}$$

其中 $\zeta \in \mathbb{F}^*_{q^\delta}$ 满足 $\det(\hat{}t) = \det(\hat{}h)$。这是可行的，因为 q 是偶数。注意， $\zeta^{q-\varepsilon} = 1$，因此 $\hat{}t$ 确实属于一般线性群$^\varepsilon_d(q)$。另请注意，当 $h \in G$ 时，$t = 1$。现在假设 $d \geq 9$。定义 $\bar{d} \in \mathbb{Z}$ 为 $\bar{d} := 1$；若 d 为奇数，则 $\bar{}$ $\bar{}$；而若 d 为偶数，则 $d := 2$。令 $d' := \lfloor (d - d)/4 \rfloor$，于是

$d-d=4d'$，如果 $d-d$ 能被 4 整除；否则为 $d-d=4d'+2$。选取一个阶为 $q-\varepsilon$ 的 $\zeta\in\mathbb{F}_{q^\delta}^*$。令

$$\hat{t}:=\begin{cases}\mathrm{diag}(\zeta\mathrm{Id}_{d'},\mathrm{Id}_{d'},\xi\mathrm{Id}_{\bar{d}},\mathrm{Id}_{d'},\zeta\mathrm{Id}_{d'}), & \text{if } d-\bar{d}=4d',\\ \mathrm{diag}(\zeta\mathrm{Id}_{d'},\mathrm{Id}_{d'},\zeta^{-1},\xi\mathrm{Id}_{\bar{d}},\zeta^{-1},\mathrm{Id}_{d'},\zeta\mathrm{Id}_{d'}), & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这里，ξ 被选为 ζ 的一个幂，使得 $\det(\hat{t})=\det(\hat{h})$。再一次，这是可能的，因为 q 是偶数。由于$\hat{t}$ 是回文的，按照上面的论述，$\hat{\mu}(\hat{t})$是$\hat{t}$ 的一个幂。反过来，对于所有整数 l，$N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})$是$\hat{t}$ 的一个幂。最后，$\hat{t}\in\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)$，因为 $\zeta^{q-\varepsilon}=1$。

由于 $\det(\hat{t})=\det(\hat{h})$，存在$\hat{y}\in\mathrm{SL}_d^\varepsilon(q)$，使得$\hat{y}\hat{h}=\hat{t}$。令 t和 y 分别表示$\hat{t}$和$\hat{y}$ 在$\mathrm{PGL}_d^\varepsilon(q)$中的像，并注意到$y\in G$。置 $\beta':=\mathrm{ad}_y\circ\beta=\mathrm{ad}_t\circ\mu$。由于 $\langle t\rangle$ 是 μ-不变的，公式 (1)表明 $|\beta'|$ 整除 $|t||\mu|$，并且 $|\mu|$ 整除 $|\beta'|$。由于 $|t|$ 是奇数，这意味着 $|\beta'|$ 为偶数当且仅当 $|\mu|$ 为偶数。现在我们区分两种情形。首先假设 $|\mu|$为偶数。那么 $|\beta'|$为偶数，并置 $\alpha:=\beta'$。现在假设 $|\mu|$ 为奇数，从而 $|\beta'|$ 为奇数。于是 μ 是域自同构 φ的一个幂。选取一个对合$\hat{z}\in\mathrm{SL}_d^\varepsilon(2)\le\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)$，使其与$\hat{t}$可交换，并且其大小为2的若尔当块数量尽可能多。由$C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(\hat{t})$的结构（见引理 6.6(c)），我们得出可以选择$\hat{z}$，使其具有 $\lfloor d/2\rfloor$ 个大小为2的若尔当块。令 $z\in G$ 表示$\hat{z}$的像，并置 $\alpha:=\mathrm{ad}_z\circ\beta'=\mathrm{ad}_{zt}\circ\mu$。现在 ad_z 与 β'可交换，因为 $\varphi(z)=z$，且 z 与 t可交换。特别地，对于所有整除 $|\alpha|$的奇素数 p，有 $|\alpha|=2|\beta'|$和$\alpha_{(p)}=\beta'_{(p)}$。显然，$\alpha_{(2)}=\mathrm{ad}_z$。

(a) 令 p 表示一个整除 $|\beta'|$ 的素数。我们断言 $|C_G(\beta'_{(p)})|\le M_G$。若 $\beta'_{(p)}$ 不是 G 的内对角自同构，则由引理 5.3 可得该断言。于是设 $\beta'_{(p)}$ 是一个内对角自同构。由于 $\beta'_{(p)}$ 是 β'的幂，公式 (1) 给出 $\beta'_{(p)}=\mathrm{ad}_{N_{\mu,l}(t)}$，其中 inter l 为正整数。特别地，p 是奇数，且$|N_{\mu,l}(t)|=p$。此外，$C_G(\beta'_{(p)})=C_G(N_{\mu,l}(t))$。由于 $N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})$ 是 $N_{\mu,l}(t))$ 的一个提升，我们得到

$$|C_G(N_{\mu,l}(t))|\le|C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(N_{\hat{\mu},l}(\hat{t}))|$$

由引理 6.12 得出。除非 $d=3$，否则这个界足以满足我们的目的。回想一下，对于某个整数 k，有 $N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})=\hat{t}^k$。由于 $N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})\ne1$，且 $\hat{t}$ 的特征值属于 $\langle\zeta\rangle$，我们有 $\zeta^k\ne1$。此外，由于 q 为偶数，$\zeta^k\ne\zeta^{-k}$。然而，我们可能有 $\xi^k=\zeta^k$ 或 $\xi^k=1$。这使我们能够估计 $N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})$ 的特征子空间维数。注意，$N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})$ 的特征值 ζ' 满足 $\zeta'^{q-\varepsilon}=1$。引理 6.6(c) 表明，$C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(N_{\hat{\mu},l}(\hat{t}))$ 是由群 $\mathrm{GL}_{d_i}^\varepsilon(q)$ 构成的直积，其中 d_i 是.....的维数

$N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})$ 的一个特征子空间。若 $d = 3$，则对于某个阶为 p 的 ζ'，有 $N_{\hat{\mu},l}(\hat{t}) = \mathrm{diag}(\zeta', 1, \zeta')$，从而 $C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})) \cong \mathrm{GL}_1^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_2^\varepsilon(q)$。显然，$\mathrm{GL}_3^\varepsilon(q)$ 中任何与 $\mathrm{diag}(\zeta', 1, \zeta')$ 相差一个标量而对易的元素，实际上都与 $\mathrm{diag}(\zeta', 1, \zeta')$ 对易。因此，$C_{G^\sigma}(N_{\mu,l}(t))$ 是 $C_{\mathrm{GL}_3^\varepsilon(q)}(N_{\hat{\mu},l}(\hat{t}))$ 在典范满同态下的像。由此可得 $|C_G(N_{\mu,l}(t))| \le |C_{G^\sigma}(N_{\mu,l}(t))| = |\mathrm{GL}_2^\varepsilon(q)| = q(q-\varepsilon)(q^2-1) < M_G$，这正是 (a) 中所述。现在设 $d > 3$。对于 $d = 5$, 6，我们得到 $C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})) \cong \mathrm{GL}_2^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_3^\varepsilon(q)$，以及 $\mathrm{GL}_2^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_4^\varepsilon(q)$。利用这些群的阶的精确值，即可得到 (a) 中的结论。对于 $d = 7$，有 $\varepsilon = 1$，且 $C_{\mathrm{GL}_d(q)}(N_{\hat{\mu},l}(\hat{t})) \cong \mathrm{GL}_3(q) \times \mathrm{GL}_4(q)$。此时，结论由引理 6.11(e) 得出。现在设 $d \ge 9$。若 $d - \bar{d} = 4d'$，则 $C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(N_{\mu,l}(\hat{t}))$ 同构于 $\mathrm{GL}_{2d'}^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_{2d'+\bar{d}}^\varepsilon(q)$ 或 $\mathrm{GL}_{2d'}^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_{2d'}^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_{\bar{d}}^\varepsilon(q)$ 之一。若 $d - \bar{d} = 4d' + 2$，则 $C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(N_{\hat{\mu},l}(\hat{t}))$ 同构于 $\mathrm{GL}_2^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_{2d'}^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_{2d'+\bar{d}}^\varepsilon(q)$ 或 $\mathrm{GL}_2^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_{2d'}^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_{2d'}^\varepsilon(q) \times \mathrm{GL}_{\bar{d}}^\varepsilon(q)$ 之一。在每种情况下，中心化子的两种可能中，先列出的阶较大。对于 $d > 10$，由引理 6.11(e) 得到的估计 $|\mathrm{GL}_l^\varepsilon(q)| \le q^{l^2+2}$ 给出了我们的界。对于 $d = 9$、10 和 $q \ge 4$，我们使用 $|\mathrm{GL}_l^\varepsilon(q)| \le q^{l^2+1/2}$；对于 $d = 9$、10 和 $q = 2$，我们使用 $|\mathrm{GL}_l^\varepsilon(q)|$ 的精确值来得到结论。这就证明了 $|\mu|$ 为偶数时的 (a)。

现在假设 $|\mu|$ 为奇数，因此 $\alpha = \mathrm{ad}_z \circ \beta'$。我们必须证明 $|C_G(\alpha_{(2)})| = |C_G(z)| \le M_G$。若 $d = 3$，则由引理 6.13 得 $|C_{\mathrm{GL}_3^\varepsilon(q)}(\hat{z})| = q^3(q-\varepsilon)^2$。同一引理表明，若 $\varepsilon = 1$，则 $|C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(\hat{z})| \le q^{(d^2+1)/2}$；若 $\varepsilon = -1$，则 $|C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(\hat{z})| \le q^{(d^2+9)/2}/(q^2-q-1)^2,$。这表明，除 $\varepsilon = -1$、$q = 2$ 和 $d \le 8$外，所有情况下均有 $|C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(\hat{z})| \le q^{d(d+1)/2}$。若 $q = 2$，则有 $3 \mid d$，因此根据引理 6.11(a)，只需考虑 $d = 6$（回想一下，假设排除了 $(d, q) = (3, 2)$，因为 $\mathrm{PSU}_3(2)$ 不是单群）。若 $d = 6$，则对合 $\hat{z}$ 有 3 个大小为 2 的若尔当块，因此根据引理 6.13，$|C_{\mathrm{GL}_6^\varepsilon(q)}(\hat{z})| = q^9|\mathrm{GU}_3(q)|$。代入 $q = 2$ 的精确值，我们还得到 $|C_{\mathrm{GL}_6^\varepsilon(q)}(\hat{z})| \le q^{d(d+1)/2}$，其中 $q = 2$。显然，$C_{G^\sigma}(z)$ 是 $C_{\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)}(\hat{z})$ 在 G^σ 中的像。因此，$|C_G(\alpha_{(2)})| = |C_G(z)| \le M_G$，从而完成了 (a) 的证明。

(b) 首先假设 $|\mu|$ 为偶数，因此 $|\alpha| = |\beta'|$。由于 $|t||\mu|$ 整除 $|\beta'|$，且 $q - \varepsilon$ 和 δf 分别被 $|t|$ 和 $|\mu|$ 整除，我们得到 (b)。现在假设 $|\mu|$ 为奇数，因此 $|\alpha| = 2|\beta'|$。由于当 $\varepsilon = 1$ 时 f 为偶数，这意味着 $\delta f/2$ 被 $|\mu|$ 整除，因此 δf 被 $|\beta'|$ 整除 $(q-\varepsilon)/2$，从而得到 (b)。

(c) 根据引理 5.4(b)，β'的阶整除 $3\delta f$，且当 $|\beta'|$为奇数时 $3\delta f/2$。这给出了关于 $|\alpha|$的断言。

(d) 若 $d=3$、 $\varepsilon=1$ 和 $q=4$，则 $\Gamma_G\times\Phi_G$ 是一个阶为 4 的初等阿贝尔群。此外，根据 (c)， $|\alpha|\in\{2,6\}$。假设 $|\alpha|=6$。如果 $|\beta'|$ 为奇数，则 $\beta'=\mathsf{ad}_t$ 且 $G^\diamond\cong\mathrm{PGL}_3$ (4)。如果 $|\beta'|$ 为偶数，则 $\alpha=\mathsf{ad}_t\circ\mu$，其中 $|t|=3$，并且 μ 是一个固定 t的对合。由于 ι 和 φ 将 t逆化，我们必有 $\mu=\iota\circ\varphi$。这给出了 $G^\diamond$的第二种可能性。

设 $G=$射影特殊酉群$_3$(8)。于是，由 (c) 得 $|\alpha|\in\{2,6,18\}$。我们有 $\beta'=\mathsf{ad}_t\circ\mu$，其中 $t\in\mathrm{PGU}_3(8)$ 的 3 次幂阶元素，以及某个 $\mu\in\Phi_G$。回忆一下， $t=1$ 当 $t\in G$ 时。因此，或者 $t=1$，或者 $|t|=9$。若 $|\beta'|=3$ 或$|\beta'|=9$，则 $|\mu|\in\{1,3\}$。在这两种情况下， $\alpha\notin\mathrm{Inn}(G)$，但 $\alpha^3\in\mathrm{Inn}(G)$。因此 $G^\diamond\cong G.3$。若 $|\alpha|=18$，则由引理 5.4(a)(c) 得 $|\beta'|=9$。剩下的情况是 $|\alpha|=|\beta'|=6$。于是 $|\mu|=6$，且 $\alpha=\beta'$。因此$G^\diamond\cong G.6$。

设 $G=$ 射影特殊酉群$_3$(32)且 $|\alpha|=30$。由引理 5.4(c)，有 $|\beta'|=15$。因此，对某个元素 $t'\in\mathrm{PGU}_3(32)\setminus G$，有 $\alpha^{10}=\beta'^5=\mathsf{ad}_{t'}$。这就证明了我们的断言。

设对某个 $d\geq5$，有 $G=$射影特殊酉群$_d$(4)。由引理 5.4(c)，有 $|\beta'|\in\{1,2,4,5\}$，从而得到关于 $|\alpha|$的结论。对某个 $d\geq5$，有 $G=$ 射影特殊酉群$_d$(2)，以及 $G=$ 射影特殊酉群$_6$(8)时，证明类似。若 $G=$射影特殊酉群$_6$(2)且 $|\alpha|=6$，则由引理 5.4(c)，有 $|\beta'|=3$，因此 $\beta'\in\mathrm{PGU}_6(2)$。□

6.16. **次数为 3的线性群**。现在我们可以证明，次数为3的线性群具有 $E1$-性质。

命题 6.17。设 $G=$射影特殊线性群$_3^\varepsilon(q)$，并设 (V,n,ν) 如 [14,记号 4.1.1] 中所述。则 (G,V,n) 具有 $E1$-性质。

证明。设 χ 表示 V 的特征标。 G 的特征表见 [28]。 G 的次数为 $q^2+\varepsilon q+1$ 的不可约特征标不是实的。因此， χ 是剩余奇数次数不可约特征标之一，故

$$\chi(1)>(q^3-2q^2)/3$$

由 [28]。对于这些特征标，我们将应用 [14,引理 4.3.3]，其中 α 是根据命题 6.15 由 $\beta:=\nu$ 构造的。因此， α的阶为偶数，并且对于所有整除 $|\alpha|$的素数 p， $|C_G(\alpha_{(p)})|\leq M_G$，其中 M_G 如定义 5.2(c) 中所述。此外，根据命题 6.15(c)， $|\alpha|$整除 $3\delta f$。我们还令 $G^\diamond:=\langle\mathrm{Inn}(G)\ \alpha\rangle=\langle\mathrm{Inn}(G)\ \nu\rangle$，并设 $\chi^\diamond$ 表示 χ 到 $G^\diamond$的延拓； [14, 备注 4.2.5]。

首先假设 $\varepsilon=1$。我们旨在证明

$$(q^3-2q^2)/3>(|\alpha|-1)M_G^{1/2}. \tag{7}$$

两边平方可知，(7) 可由下式推出

$$q^6 - 4q^5 + 4q^4 > 9(|\alpha| - 1)^2 M_G.$$

若 $q > 64$，我们有 $|\alpha| - 1 < 3f < q/4$ 和 $M_G = q^4$，只需证明

$$16(q^6 - 4q^5 + 4q^4) > 9q^6.$$

这等价于

$$q^5(7q - 64) + 64q^4 > 0,$$

显然，对于 $q > 64$，这成立。剩下要考虑的是情形$q \in \{4, 16, 64\}$。对于 $q = 64$，我们有 $M_G = q^4$和 $|\alpha| \leq 18$。由此，(7) 成立。若 $q = 16$，我们有 $|\alpha| \leq 6$ 和 $M_G = 62\,401$。利用 [28], 中 χ(1) 的精确值，可得 χ(1) $> 5 \cdot 62\,401^{1/2}$，从而得到所需结果。设 $q = 4$。由 Atlas [5], 和 $|\alpha| \in \{2, 6\}$，有 χ(1) $\in \{35, 63\}$ 。若 $|\alpha| = 2$，则 (7) 成立。于是设 $|\alpha| = 6$。根据命题 6.15(d)，要么 $G^\diamond \cong$ PGL$_3$(4)，要么$G^\diamond \cong G.6$。根据 Atlas [5], ，后一类结构的群没有次数为 35 或 63 的特征标。若 $G^\diamond \cong$ PGL$_3$(4)，则 χ(1) $= 63$ ，且 Res$^{G^\diamond}_{\langle\alpha\rangle}$ ($\chi^\diamond$) 含有 $\langle\alpha\rangle$ 的两个不可约实特征，各自重数均为正；参见 Atlas [5]。因此，根据 [14, 引理 4.3.1], (G, V, n) 具有$E1$-性质。

现在假设 $\varepsilon = -1$。那么 $M_G = q^4 + q^3$ 且 $|\alpha|$ 整除 $6f$。先假设 $f \geq 21$。那么 $(6f - 1)^3 < 2^f$，因此 $(|\alpha| - 1) < q^{1/3}$。根据 [14, 引理 4.3.3], 我们需要证明

$$(q^3 - 2q^2)/3 > q^{1/3}(q^4 + q^3)^{1/2}, \tag{8}$$

因为如此

$$\dim(V) \geq (q^3 - 2q^2)/3 > q^{1/3}(q^4 + q^3)^{1/2} > (|\alpha| - 1)(q^4 + q^3)^{1/2}.$$

将 (8) 平方后，只需证明

$$q^6 - 4q^5 + 4q^4 > 9q^{2/3}(q^4 + q^3).$$

注意到 $4q^4 > 0$ 并除以 $q^{2/3}q^3$后，只需证明

$$q^{4/3}(q - 4) > 9(q + 1).$$

这是成立的，因为 $q \geq 2^{21}$。对于满足 $7 \leq f \leq 19$的 $q = 2^f$ ，GAP 计算表明

$$(q^3 - 2q^2)^2 > 9(6f - 1)^2(q^4 + q^3)$$

这就证明了我们的断言，但 $q = 32$ 或 $q = 8$的情况除外。

首先，假设 $q = 32$。那么 $|\alpha| \leq 10$ 或 $|\alpha| = 30$。现在 $(q^3 - 2q^2)^2 > 9(10 - 1)^2(q^4 + q^3)$，因此 ($G$, V, n) 具有 $E1$ 性质，如果$|\alpha| \leq 10$。假设 $|\alpha| = 30$。那么 PGU$_3$(q) $\cong \langle G, \alpha^{10}\rangle \leq G^\diamond$

根据命题 6.15(d)。特别是， χ 可扩张到 $\mathrm{PGU}_3(q)$，因此$\chi(1) > q^3 - 2q^2$；参见 [28]中的特征标表。由于 $(q^3 - 2q^2)^2 > 2q^2(q^4 + q^3)$，这种情形也具有 $E1$ 性质。

最后，假设 $q = 8$。根据命题 6.15(c)， $|\alpha| \in \{2, 6, 18\}$。此外， $\chi(1) \in \{133, 399, 513\}$；参见 Alas [5]。我们有$\chi(1)^2 > (|\alpha| - 1)^2(q^4 + q^3)$，除非 $|\alpha| = 18$ 或 $|\alpha| = 6$ 且 $\chi(1) = 133$。若 $|\alpha| = 18$，则根据命题 6.15(d)， $G^\diamond \cong G.3$。群 $G.3$有三种同构类型；参见 [5]。其中只有两种含有 18 阶元素。我们使用 GAP 计算 $\mathrm{Res}^{G^\diamond}_{\langle\alpha\rangle}(\chi^\diamond)$，其中 $\chi^\diamond$是 $G^\diamond$ 在 V 上的特征；参见 [14, 备注 4.2.5]。结果表明，这个限制以正重数包含 $\langle\alpha\rangle$ 的每个不可约特征标。因此，根据 [14, 引理 4.3.1]，(G, V, n) 具有 $E1$-性质。现在假设 $|\alpha| = 6$ 且 $\chi(1) = 133$。根据命题 6.15(d)，要么 $G^\diamond \cong G.3$，要么 $G^\diamond \cong G.6$。如$|\alpha| = 18$ 的情形一样，GAP 计算表明 (G, V, n) 具有 $E1$-性质。□

6.18. 大次数特征标。 从现在起，我们可以假设 $d \geq 5$。在接下来的两个引理中，我们将确定 G 的不可约特征标；其次数足够大，满足引理 4.3.3] 的条件 [14,。

引理 6.19。 设 $G = GL^\varepsilon_d(q)$，其中 $d \geq 5$。设 $1 \neq s \in G$ 为半单实元素。记 Ξ 为s 的特征多项式。记 Δ_1 为根为1、次数为1的首一多项式，并设 d_1 为 Δ_1 在 Ξ 中的重数。设 $\Delta_2, \ldots, \Delta_l$ 为 Ξ 中不同于 Δ_1 的互不相同的不可约首一因子。设 d_j 和 k_j 分别表示 Δ_j 在 Ξ 中的重数以及 Δ_j，$j = 2, \ldots, l$ 的次数。则以下结论成立。

（a）我们有

$$d = \sum_{j=1}^{l} d_j k_j, \tag{9}$$

其中 $k_1 = 1$。

(b) *Let* $d' := \max\{d_j \mid 1 \leq j \leq l\}$. *Put* $\hat{C} := C_{\hat{G}}(\hat{s})$ *and*

$$D := [\hat{G} : \hat{C}]_{2'} \cdot q^{-d(d+1)/4}.$$

Then

$$D \geq (1 - q^{-1} - q^{-2})^{l'+1} q^{d(d-2d'-1)/4}, \tag{10}$$

其中 $l' = 0$，若 $\varepsilon = 1$； $l' = l$，若 $\varepsilon = -1$。

(c) 若 $d_1 < d/3$ 且 $d' \geq \lfloor d/2 \rfloor$，则 $d' = \lfloor d/2 \rfloor$ 且 $\Xi = \Delta_1^{d_1} \Delta^{\lfloor d/2 \rfloor}$，其中 Δ 是次数为2 且满足 $\Delta = \Delta^*$的首一多项式。

证明。 (a) 等式 (9) 显然成立。

(b) 假设 $\varepsilon = 1$。对于 $1 \le j \le l$, Ξ 的每个因子$\Delta_j^{d_j}$ 都对 $\hat{C}$贡献直接因子 一般线性群$_{d_j}(q^{k_j})$；见引理 6.6(a)。假设 $\varepsilon = -1$。对于 $1 \le j \le l$, Ξ 中满足 $\Delta_j = \Delta_j^\dagger$ 的因子 $\Delta_j^{d_j}$ 对 $\hat{C}$贡献直接因子 一般酉群$_{d_j}(q^{k_j})$，而每个满足 $\Delta_j \ne \Delta_j^\dagger$ 的因子 $(\Delta_j\Delta_j^\dagger)^{d_j}$都贡献直接因子 一般线性群$_{d_j}(q^{2k_j})$；见引理 6.6(c)、(d)。对于 ε的任一情形，引理 6.11(e)给出，

$$\begin{aligned}(1-q^{-1}-q^{-2})^{l'}|\hat{C}|_{2'} &\le \prod_{j=1}^{l} q^{k_j d_j(d_j+1)/2}\\ &\le \prod_{j=1}^{l} q^{k_j d_j(d'+1)/2}\\ &= q^{(d'+1)/2\sum_{j=1}^{l} k_j d_j}\\ &= q^{d(d'+1)/2}.\end{aligned}$$

此外，

$$|\hat{G}|_{2'} \ge q^{d(d+1)/2}(1-q^{-1}-q^{-2}),$$

根据引理 2.1，可得式 (10)。

(c) 令 k' 表示 Ξ中重数为 d'的不可约因子的最大次数。令 Δ'为 Δ_1, ..., Δ_l之一，使得这些值能够取到。根据假设，$d' \ge \lfloor d/2 \rfloor \ge d/3 > d_1$, 因此 $\Delta' \ne \Delta_1$。若 $d' > \lfloor d/2 \rfloor$，则方程 (9)意味着 $k' = 1$；由引理 6.2(a)，进而有 $\Delta' \ne \Delta'^*$。由于 Δ'^* 在 Ξ 中的重数为 k'（由引理 6.3(b)），这与方程 (9)矛盾。现在假设 $d' = \lfloor d/2 \rfloor$；则 $k' \le 2$，且 Ξ 正如所声称的那样。□

引理 6.20. 设 $G =$一般线性群$_d^\varepsilon(q)$，其中 $d \ge 5$ 满足 $e =$最大公约数$(d, q-\varepsilon) > 1$。设 $1 \ne s \in G$是半单且为实的，其特征多项式为 Ξ。令 Δ_1 表示次数为1 且以s为根的首一多项式，并令 d_1 为 Δ_1 在 Ξ 中的重数。设 $C := C_{\hat{G}}(s)$。则以下情况之一成立。

(a) 我们有 $d_1 \ge d/3$。*(b)* 我们有 $\Xi = \Delta_1^{d_1}\Delta^{\lfloor d/2 \rfloor}$，其中 Δ 是一个次数为 *2* 的首一多项式，且 $\Delta = \Delta^*$。*(c)* 我们有 $[\hat{G}: \hat{C}]_{2'} \ge \delta ef(q-\varepsilon) \cdot q^{d(d+1)/4}$。*(d)* 我们有 $\varepsilon = -1$、$q = 4$ 和 $[\hat{G}: \hat{C}]_{2'} \ge 45 \cdot q^{d(d+1)/4}$。*(e)* 我们有 $\varepsilon = -1$、$q = 2$ 和 $[\hat{G}: \hat{C}]_{2'} \ge 15 \cdot q^{d(d+1)/4}$。*(f)* 我们有 $\varepsilon = -1$, $(d, q) = (5, 4)$，以及 $[\hat{G}: \hat{C}]_{2'} > 12 \cdot q^{d(d+1)/4}$。*(g)* 我们有 $\varepsilon = -1$, $(d, q) = (6, 8)$，以及 $[\hat{G}: \hat{C}]_{2'} > 51 \cdot q^{d(d+1)/4}$。

(h) 我们有 $\varepsilon = -1$ 和 $(d、\ q) = (6、2)$。

证明。 采用引理 6.19 的记号。假设 (a) 和 (b) 均不成立。于是根据引理 6.19(c)， $d_1 < d/3$ 和 $d' \leq \lfloor d/2 \rfloor - 1$。

首先假设 $\varepsilon = 1$。引理 6.19(b)给出

$$D \geq (1 - q^{-1} - q^{-2}) q^{d(d-2d'-1)/4}. \tag{11}$$

由于 $d' \leq \lfloor d/2 \rfloor - 1$，当 d 为偶数时，我们有 $d - 2d' - 1 \geq 1$；当 d 为奇数时，我们有 $d - 2d' - 1 \geq 2$。由于 $\gcd(d, q-1) > 1$，我们有 $q \geq 4$。因此 $1 - q^{-1} - q^{-2} \geq 1 - 1/4 - 1/16 = 11/16$。

从现在起，我们区分 d 为偶数和 d 为奇数的情形。首先假设 d 为偶数，因此 $d - 2d' - 1 \geq 1$。如果 $d > 12$，则

$$D \geq 11/16 \cdot q^{d/4} > 1/2 \cdot q^{7/2} > q^3 \geq ef(q-1),$$

第一个估计由 (11) 得出。因此我们处于情形 (c)。剩下的情形是 $d = 6, 10, 12$。（由于引理 6.11(a)，情形 $d = 4, 8$ 不会出现。）

对于 $d = 10$，我们有 $e = 5$ 和 $q \geq 16$，从而得到

$$D \geq 11/16 \cdot q^{5/2} \geq 11/16 \cdot q^{3/2}(q-1) \geq 5f(q-1),$$

因此我们处于情形 (c)。对于 $d = 6$ 或 $d = 12$，我们有 $e = 3$。如果 $d = 12$，则得到

$$D \geq 11/16 \cdot q^3 \geq 3f(q-1)$$

对所有 $q \geq 4$，因此我们处于情形 (c)。最后，假设 $d = 6$。通过利用 $d' \leq 2$ 和 $d_1 = 0$检查 Ξ的所有可能性，我们发现 $\hat{} \ |C|_{2'}$ 可能取得的最大值为

$$|\hat{C}|_{2'} = (q^2 - 1)(q^2 - 1)(q^4 - 1).$$

$\hat{} \hat{}$ 将 $|G|_{2'}$ 和 $|C|_{2'}$的精确值代入，得到

$$D \geq q^{-21/2}(q-1)(q^3-1)(q^5-1)(q^4+q^2+1).$$

现在 $(q-1)(q^3-1)(q^5-1)(q^4+q^2+1) \geq q^{13}$，因此

$$D \geq q^{5/2}.$$

容易验证

$$q^{5/2} \geq 3f(q-1)$$

对于 $q \geq 4$，因此我们再次处于情形 (c)。

现在假设 d 为奇数，因此 $d - 2d' - 1 \geq 2$。若 $d \geq 7$，则得到

$$D \geq 11/16 q^{d/2} > 1/2 \cdot q^{7/2} > q^3 \geq ef(q-1),$$

其中第一个估计由 (11) 得出。因此我们处于情形 (c)。若$d = 5$，则有 $e = 5$ 和 $q \geq 16$。此外，$d' = 1$。于是 $|C|_{2'} \leq q^5-1$，因此 $[G: C]_{2'} \geq (q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)$。现在

$$(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1) > q^{15/2} \cdot 5f(q-1)$$

对所有 $q \geq 16$ 均成立，因此我们处于情形 (c)。这就完成了情形 $\varepsilon = 1$ 的证明。

现在假设 $\varepsilon = -1$。若 $d' = d_1$，且 Ξ 的每个不可约因子 $\Delta \neq \Delta_1$ 的重数都严格小于 d_1，则置$\Delta' := \Delta_1$。否则，选取 Ξ 的一个首一不可约因子 $\Delta' \neq \Delta_1$，其重数为 d'，并且 $\deg(\Delta')$ 在 Ξ 中重数为 d' 的不可约因子的次数中最大。由引理 6.19(b) 得

$$D \geq (1-q^{-1}-q^{-2})^{l+1} q^{d(d-2d'-1)/4}. \tag{12}$$

现在我们通过几个断言完成证明。每个断言证明的结尾都用符号 $\diamond$ 标出。

断言 1：若 $d \leq 6$，则我们处于情形 (c)–(h) 之一。

若 $d = 5$，由 $d' \leq \lfloor d/2 \rfloor - 1$ 可得 $d' = 1$。因此，根据引理 6.7(d)，$|C|_{2'} \leq (q+1)^5$，于是

$$D \geq q^{-15/2}(q-1)^2(q^2-q+1)(q^2+1)(q^4-q^3+q^2-q+1).$$

由于 $d = 5$，我们有 $e = 5$ 和 $q \geq 4$。容易验证 $q^{-15/2}(q-1)^2(q^2-q+1)(q^2+1)(q^4-q^3+q^2-q+1) \geq 10 \cdot f(q+1)$，对所有满足 $5 \mid q+1$ 的 $q > 4$ 都成立，因此对于 $q > 4$，我们处于情形 (c)。对于 $q = 4$，我们处于情形 (f)，直接检验即可。

现在假设 $d = 6$。那么 $e = 3$，从而 $3 \mid q+1$。此外，由于 $d' \leq \lfloor d/2 \rfloor - 1$，有 $d' \leq 2$。又由于 $d_1 < d/3$，有 $d_1 = 0$。我们还假设 $q > 2$，因为情形 $q = 2$ 已列在 (h) 中。先假设 $d' = 2$。根据引理 6.7(c)，有 $k' = 1$。由此可得 $\Xi = (\Delta_2\Delta_3)^2\Delta_4\Delta_5$，其中多项式 $\Delta_2, \ldots, \Delta_5$ 的次数为 1，且 $(\Delta_2\Delta_3)^* = \Delta_2\Delta_3 = (\Delta_2\Delta_3)^\dagger$。这样的可能性有四种，而引理 6.6 给出 $|C|_{2'} \leq |\text{一般酉群}_2(q)|_{2'}^2 (q+1)^2 = (q+1)^4(q^2-1)^2$。因此

$$D \geq q^{-21/2}(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)^2(q^2+1)(q^4-q^3+q^2-q+1).$$

容易验证，对于所有满足 $3 \mid q+1$ 的 $q > 8$，都有 $(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)^2(q^2+1)(q^4-q^3+q^2-q+1) \geq q^{21/2} \cdot 6f(q+1)$，因此对于 $q > 8$，我们处于情形 (c)。情形 $q = 8$ 给出了 (g) 中所述的界。若 $d' = 1$，由引理 6.7(c) 可得 $k' \leq 3$，并由引理 6.7(e) 可得 $|G|_{2'} \leq (q+1)^6$。特别地，

$$D \geq q^{-21/2}(q-1)^3(q^2+q+1)(q^2-q+1)^2(q^2+1)(q^4-q^3+q^2-q+1).$$

容易验证，对于所有满足 $3 \mid q+1$ 的 $q>2$，都有 $(q-1)^3(q^2+q+1)(q^2-q+1)^2(q^2+1)(q^4-q^3+q^2-q+1) \geq q^{21/2} \cdot 6f(q+1)$，因此我们处于情形 (c)。◇

以下假设 $d>6$。由引理 6.11(a)，可得 $d \geq 9$。定义正整数 m 如下：

$$d' = \lfloor d/2 \rfloor - m, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

断言 2：设 $d \geq 6m'$ 且 $d \neq 6m'+1$，其中 m'为某个正整数。若 $d' = d_1$，则 $m > m'$。特别地，若 $d' = d_1$，则$m > 1$，因为 $d \geq 9$。

这由 $\lfloor d/2 \rfloor - m = d' = d_1 < d/3$以及 $\lfloor d/2 \rfloor - d/3 \geq m'$.◇可得。

断言 3：若 $m=1$，则 $\Delta' \neq \Delta_1$ 且 $k'=1$。

由断言 2，我们有 $d' > d_1$，因而 $\Delta' \neq \Delta_1$。引理 6.7(c)给出$d \geq 2k'(\lfloor d/2 \rfloor - 1)$，由 $d \geq 9$可得 $k'=1$。◇

断言 4：设 $m=1$。则

$$D \geq (1-q^{-1}-q^{-2})^5 q^{(3d-12)/4}. \tag{13}$$

若 d 为偶数，则

$$D \geq (1-q^{-1}-q^{-2})^6 q^{(5d-27)/4}. \tag{14}$$

若 d 为奇数。

由断言 3，我们有 $\Delta' \neq \Delta_1$ 和 $k'=1$。此外，根据引理 6.2(a)，$\Delta' \neq \Delta'^*$。因此，$\Xi = \Delta_1^{d_1}(\Delta'\Delta'^*)^{\lfloor d/2 \rfloor - 1}$，或 $\Xi = \Delta_1^{d_1}(\Delta'\Delta'^*)^{\lfloor d/2 \rfloor - 1}\Delta$，其中 Δ 的次数为 2。在后一种情况下，Δ 是可约的，否则 $\Delta \neq \Delta^\dagger$，且 $\Delta^\dagger$ 将是 Ξ的一个因子；见引理 6.2(b)和 6.7(b)。由引理 6.6，我们可以确定每种情况下 C 的结构。然后由引理 2.1得到所述估计。◇

断言 5：如果 $\Delta' \neq \Delta_1$，那么 $l \leq d - 2d' + 3$。无论如何，$l \leq d - d' + 1$。

首先假设 $\Delta' \neq \Delta_1$。根据 (9)，由引理 6.7(c) 及其证明可得 $d \geq d_1 + 2d' + l - 3$。第一个断言由此得出。如果 $\Delta' = \Delta_1$，则结论可直接由 (9) 得出。◇

断言 6：我们有 $d - 2d' - 1 \geq 2m - 1$。

This follows from $d' = \lfloor d/2 \rfloor - m \leq d/2 - m$. ◇.

*Cl*目标7：我们有

$$l + 1 \leq (d+5)/2 + m,$$

and

$$l + 1 \leq 2m + 5, \qquad \text{if } \Delta' \neq \Delta_1.$$

这由断言 5 和 $d' \geq (d-1)/2 - m$ 得出。◇.

断言 8：若 $q \geq 8$，则我们处于情形 (c)。

假设 $q \geq 8$。由引理 6.11(b)，我们有 $1-q^{-1}-q^{-2} \geq q^{-1/4}$，只需证明 $D > q^3$。因此

$$D \geq q^{-(d+5)/8-m/4+d(2m-1)/4}$$

由断言 6 和 7 以及 (12)，当且仅当 $d(4m-3) - 2m \geq 29$ 时，有 $-(d+5)/8-m/4+d(2m-1)/4 \geq 3$。后者在 $m \geq 2$ 时成立。

于是设 $m = 1$，且 d 为偶数。则

$$D \geq q^{-5/4+(3d-12)/4}$$

由 (13) 得。因此，对所有 $d \geq 10$，都有 $D \geq q^3$。现在设 $m = 1$ 且 d 为奇数。则

$$D \geq q^{-6/4+(5d-27)/4}$$

由 (14) 得。因此，对所有 $d \geq 9$，都有 $D \geq q^3$。 ◇

断言 9：如果 $q = 4$，则我们处于情形 (d)。

假设 $q = 4$。那么 $q + 1 = e = 5$，因此 $5 \mid d$。由于 $4^{11/4} > 45$，只需证明 $D \geq q^{11/4}$。由引理 6.11(c)，我们有 $1 - q^{-1} - q^{-2} \geq q^{-1/2}$，于是

$$D \geq q^{-(d+5)/4-m/2+d(2m-1)/4}$$

由断言 6 和 7 以及 (12) 得。我们有 $-(d+5)/4-m/2+d(2m-1)/4 \geq 11/4$，当且仅当 $d(m-2) + m(d-2) \geq 16$。若 $m \geq 2$，则对所有 $d \geq 10$ 都成立。现在假设 $m = 1$，且 d 为偶数。那么

$$D \geq q^{-5/2+(3d-12)/4}$$

由 (13) 得。因此，对所有满足 $5 \mid d$ 的偶数 $d > 10$，都有 $D \geq q^{11/4}$。假设 $d = 10$。那么 $d' = 4$，由引理 6.7(c) 可得 $k' = 1$。引理 6.7(d) 给出 $|C|_{2'} \leq |\text{一般酉群}_4(q)|_{2'}^2 |\text{一般酉群}_2(q)|_{2'}$。利用 $|\text{一般酉群}_4(4)|_{2'}$ 和 $|\text{一般酉群}_{10}(4)|_{2'}$ 的精确值，可以验证 (d) 中关于 $|G: C|_{2'}$ 的界成立。若 $m = 1$ 且 d 为奇数，则有

$$D \geq q^{-6/2+(5d-27)/4}$$

由 (14) 得。因此，对于所有奇数的 $d > 5$，$D \geq q^{11/4}$，且 $5 \mid d$。 ◇

断言 10：如果 $q = 2$，则属于情形 (e)。

假设 $q = 2$。那么 $q + 1 = e = 3$，因此 $3 \mid d$。只需证明 $D \geq q^4$。由引理 6.11(c)，我们有 $1 - q^{-1} - q^{-2} \geq q^{-2}$。首先假设 $\Delta' = \Delta_1$。那么根据我们对 Δ' 的选择，$d_1 = d' > 1$，并且

$$D \geq q^{-d-5-2m+d(2m-1)/4}$$

根据断言 (6)、(7) 和 (12)，当且仅当我们有 $-d-5-2m+d(2m-1)/4 \geq 4$。

$$d(m-5) + m(d-8) \geq 36. \tag{15}$$

根据断言 2，我们有 $m \geq 5$当 $d \geq 24$。特别地，对于$d \geq 24$，(15) 成立。这就剩下 $9 \leq d \leq 21$ 的情形。利用 $1 < d' = d_1 < d/3$ 和$d \equiv d_1$ （模 2）枚举 d 和 $d' = \lfloor d/2 \rfloor - m$ 的其余可能性，我们发现，除非 $(d,\ d') \in \{(15,\ 3),\ (12,\ 2)\}$，否则 (15) 成立。将引理 6.7(e) 应用于$\hat{s}$ 的不动子空间的正交补，我们得到：若 $d = 15$，则 $|\hat{C}|_{2'} \leq |$一般酉群$_3(2)|_{2'}|$一般酉群$_2(2)|_{2'}^6$；若 $d = 12$，则 $|\hat{C}|_{2'} \leq |$一般酉群$_2(2)|_{2'}(2+1)^{10}$。计算得到

$$[\hat{G}:\hat{C}]_{2'} > 15 \cdot 2^{d(d+1)/4} \tag{16}$$

在这两种情况下。

现在假设 $\Delta' \neq \Delta_1$。那么

$$D \geq q^{-4m-10+d(2m-1)/4}$$

根据断言 (6)、(7) 和 (12)。我们有 $-4m - 10 + d(2m-1)/4 \geq 4$，当且仅当 $d(m-1) + m(d-16) \geq 56$。对于 $m \geq 2$，后者对$d \geq 30$成立；而如果 $m \geq 4$，该条件对 $d \geq 18$ 成立。

那么假设 $m = 1$ 且 d 为偶数。那么

$$D \geq q^{-10+(3d-12)/4}$$

由 (13) 得。因此，对于所有满足 $3 \mid d$ 的偶数 $d \geq 18$，有 $D \geq q^4$。若 $m = 1$ 且 d 为奇数，则有

$$D \geq q^{-12+(5d-27)/4}$$

由 (14) 得。因此，对于所有满足 $3 \mid d$ 的奇数 $d \geq 21$，有 $D \geq q^4$。

最后，我们考察上述论证无法排除的情形。这些情形包括 $9 \leq d \leq 15$ 以及所有可能的、满足 $d_1 \leq d'$ 的 m，还有 $18 \leq d \leq 27$ 和 $1 \leq m \leq 3$。$\hat{}$ 若 $d' \leq 2$，则使用引理 6.7(e) 中关于 $|C|_{2'}$ 的界。若 $d' > 2$，则使用引理 6.7(d) 的估计 $|\hat{C}|_{2'} \leq |\mathrm{GU}_{d'}(2)|_{2'}^2 |\mathrm{GU}_{d-2d'}(2)|_{2'}$。将这些上界以及 $|\mathrm{GU}_d(2)|_{2'}$ 的正确取值代入 D 的定义，我们便在所有情形下得到 (16)，除非 $d = 9$ 且 $d' = 3$。设 $d = 9$ 且 $d' = 3$。由于 $d_1 < d/3 = 1$，我们得到$\Xi = \Delta_1(\Delta'\Delta'^*)^3\Delta$，其中 Δ 是一个二次可约多项式。因此 $|\hat{C}|_{2'} \leq |\mathrm{GU}_3(2)|_{2'}^2(2+1)^3$,，这足以推出 (16)。◇

证明至此完成。 □

6.21. 小次数特征标。在接下来的两个引理中，我们将证明，G 中次数过小而无法应用 [14, 引理 4.3.3]的不可约特征标满足引理 4.7 的假设。回顾第 6.9 小节中引入的 $\mathrm{Aut}'(\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}))$ 记号。

引理 6.22. 设$\hat{s} \in$一般线性群$_d(\mathbb{F})$ 为半单且实的，其特征多项式为 Ξ。令 Δ_1 表示次数为1且根为1的首一多项式，并令 d_1 表示 Δ_1 在 Ξ中的重数。

(a) 假设 $\Xi = \Delta_1^{d_1}\Delta^{d_2}$ 满足 $\Delta = \Delta_2\Delta_2^*$，其中 $\Delta_2 \neq \Delta_1$ 是次数为1的首一多项式。另假设 $d_1 \neq d_2$。若对某个$\kappa \in \mathbb{F}^*$， $\kappa\hat{}s$ 为实的，则 $\kappa = 1$。

(b) 设 $\hat{}\alpha \in$自同构群′(一般线性群$_d(\mathbb{F})$) 满足 $\hat{}\alpha(\hat{}s)$ 与 $\kappa\hat{}s$ 共轭，其中某个 $\kappa \in \mathbb{F}^*$。若 $d_1 \geq d/3$，则 $\hat{}\alpha(\hat{}s)$ 与 $\hat{}s$共轭。

证明。(a) 设 ζ 表示 Δ_2的根。则 $\kappa\hat{}s$ 的特征值为 κ、$\kappa\zeta$、 $\kappa\zeta^{-1}$，重数分别为 d_1、d_2、 d_2。假设 $\kappa\hat{}s$ 是实的。则$\kappa^{-1} = \kappa$，因为 $d_1 \neq d_2$。由此得到所要证明的结论。

(b) 注意，自同构群′(一般线性群$_d(\mathbb{F})$)中的元素保持特征值 1 的特征子空间维数。因此 $\hat{}\alpha(\hat{}s)$ 的特征值为 1 和 κ，二者重数均为 d_1。由于 $\hat{}\alpha(\hat{}s)$ 是实的，它还具有特征值 κ^{-1}，重数为 d_1。假设 $\kappa \neq 1$。由于 $d_1 \geq d/3$，这意味着$d_1 = d/3$，且 1、 κ、 κ^{-1} 是 $\hat{}\alpha(\hat{}s)$ 的特征值，因此也是$\kappa\hat{}s$的特征值，各自的重数均为 $d/3$。由此可知，$\hat{}s = \kappa^{-1}(\kappa\hat{}s)$ 的特征值为 κ^{-1}、1、 κ^{-2}，每个特征值的重数均为 $d/3$。由于 $\hat{}s$是实的，必有 $\kappa^{-2} = \kappa$。因此 $\hat{}\alpha(\hat{}s)$ 与 $\hat{}s$ 具有相同的特征值多重集，故二者共轭。□

$\hat{}$引理 6.23。 令 $G =$一般线性群$^{\varepsilon}_d(q)$ 其中 $d \geq 5$ 满足 $e =$最大公约数$(d, q-\hat{}\varepsilon) > 1$。若 $\varepsilon = -1$，则假设 $(d, q) \neq (6,2)$。令 $1 \neq \hat{}s \in G$为半单且实的，并令 Ξ 表示 $\hat{}s$的特征多项式。令 Δ_1 表示次数为1 且根1的首一多项式，并令 d_1 为 Δ_1 在 Ξ中的重数。

假设 Ξ 如(a) 或(b) 中引理 6.20所述。则以下结论成立。

(a) G存在且在标准$\hat{\iota}$-稳定 *Levi* 子群 $\hat{}\ \hat{L}$ *of* $\hat{}$ $\hat{}$一个 G-共轭的$\hat{}s' \in L$，使得$\hat{}s'$ 在 L中为实的。此外，若$\hat{}\alpha \in$自同构群(G) $\hat{}$ $\hat{}$稳定 L及其 G-共轭类$\hat{}s$，则$\hat{}\alpha(\hat{}s')$ 在 L中与$\hat{}s'\hat{}$共轭。

(b) L 在 $G^\sigma =$ 射影广义线性群$^{\varepsilon}_d(q)$ 中的像具有形式 $L^{\overline{\alpha}}$，其中 ι 是 G 的一个标准 ι-稳定 *Levi* 子群，而 $\overline{s}$ 在 G^σ 中的像 s 满足相对于 L^σ 的引理 4.7 的假设。

证明。 （a）由于 s 是实的，存在 $g \in G$ 使得 $s^{-2} = [g, s] \in \mathrm{SL}^{\varepsilon}_d(q)$。由于 q 是偶数，这意味着 $\det(s) = 1$。

首先，假设 Ξ 满足引理 6.20 的 (a)。注意，由于 $\hat{}s$ 非平凡且为实数，$d - d_1 \geq \hat{}\hat{}\hat{}2$。令 $d_1' := \lfloor d_1/2 \rfloor$，并令 $L := L_I$ 为 G 的 I，其中 I 对应于 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$ 的 Dynkin 图中节点 $d_1'+1$、 $d_1'+2$、.....、$d-d_1'-1$。因此 $L \cong S \times \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{d-2d_1'}(q)$，其中若 $\varepsilon = 1$， S 是 $\mathrm{GL}^{2d_1'}(q)$ 的标准环面；若 $\varepsilon = -1$，则是 $\mathrm{GL}^{d_1'}(q^2)$ 的标准环面。$\hat{}$ 由于 $1 \leq d_1' \leq d-2$ 且 I 是$\hat{\iota}$-不变的， L 是一个真且非平凡的

ˆˆ（即不同于 T）、标准的、$\hat{\iota}$-不变的 G 的 Levi 子群。根据假设，存在 ˆ$x \in \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{d-2d'_1}(q)$，使得 ˆ$s$ 在 G 中与

$$\hat{s}' = \mathrm{diag}(\mathrm{Id}_{d'_1}, \hat{x}, \mathrm{Id}_{d'_1}) \in \hat{L}.$$

ˆx 的特征多项式等于 $\Xi/\Delta_1^{2d'_1}$。由于 ˆs 是实的，我们有$\Xi^* = \Xi$，因而 $(\Xi/\Delta_1^{2d'_1})^* = \Xi/\Delta_1^{2d'_1}$。由此可知，ˆ$x$ 在 $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{d-2d'_1}(q)$ 中与 ˆx^{-1} 共轭，因此 ˆs在 ˆL中是实的。现在假设 ˆ$\alpha \in$ˆˆ $\mathrm{Aut}(G)$ 稳定 L 以及 ˆs的 G-共轭类。特别地，ˆα稳定

$$[\hat{L}, \hat{L}] = \{\mathrm{diag}(\mathrm{Id}_{d'_1}, \hat{z}, \mathrm{Id}_{d'_1}) \mid \hat{z} \in \mathrm{SL}^{\varepsilon}_{d-2d'_1}(q)\}.$$

ˆˆ 由于 $1 = \det(\hat{s}) = \det(\hat{s}') = \det(\hat{x})$，我们有 ˆ$s' \in [L, L]$，因此

$$\hat{\alpha}(\hat{s}') = \mathrm{diag}(\mathrm{Id}_{d'_1}, \hat{x}', \mathrm{Id}_{d'_1})$$

ˆ 对某个 ˆ$x' \in \mathrm{SL}^{\varepsilon}_{d-d_1}(q)$ 成立。由于 ˆα 稳定 ˆs'的 G-共轭类，ˆα(ˆs') 的特征多项式等于 Ξ。因此，ˆx' 的特征多项式等于 $\Xi/\Delta_1^{2d'_1}$，这正是 ˆx的特征多项式。于是 ˆx 在 $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{d-2d'_1}(q)$ 中与 ˆx' 共轭，因此 ˆs' 在 L 中与 ˆα(ˆs') 共轭。

现在设 ˆs满足引理 6.20 的条件 (b)。令 ˆˆ$d' := d - 4$。考虑标准 Levi 子群 $L := L_I$，其中 I对应于一般线性群 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$的 Dynkin 图中除去节点 2 和 ˆ $d-2$之外的所有节点。因此，当 $\varepsilon = 1$时，$L \cong \mathrm{GL}_2(q) \times \mathrm{GL}_{d'}(q) \times \mathrm{GL}_2(q)$；当 $\varepsilon = -1$时，ˆ$L \cong \mathrm{GL}_2(q^2) \times \mathrm{GU}_{d'}(q)$。若 $\varepsilon = 1$，令 ˆ$y \in \mathrm{GL}_2(q)$表示一个特征多项式为 Δ的元素。由于 Δ 的两个根互为倒数，故 $\det(\hat{y}) = 1$。若 $\varepsilon = -1$，则 Δ 是可约的；否则，根据引理 6.2(b)，$\Delta \neq \Delta^\dagger$，这与引理 6.7(b)矛盾。因此 $\Delta = \Delta_2\Delta_2^*$ 为一个次数为 1 的首一多项式 $\Delta_2 \neq \Delta_1$。令$\zeta \in \mathbb{F}_{q^2}$ 表示 Δ_2的根。在此情形下，令

$$\hat{y} := \mathrm{diag}(\zeta, \zeta^{-1}) \in \mathrm{GL}_2(q^2).$$

那么 ˆ$y = \hat{\iota}_2(\hat{y})$，其中 $\hat{\iota}_2$ 表示 $\mathrm{GL}_2(q^2)$ 的标准图自同构；参见第 6.9 小节。在 ε 的两种情况下，都存在 ˆ$x \in \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{d'}(q)$，ˆ，使得 ˆ$s$ 在 G 中共轭于

$$\hat{s}' = \mathrm{diag}(\hat{y}, \hat{x}, \hat{y}) \in \hat{L}.$$

注意，若 $\varepsilon = -1$，所显示的元素确实属于 $\mathrm{GU}_d(q)$，因为 ˆ$y = \hat{\iota}_2$(ˆy)。若 $d = 6$ 和 $\varepsilon = 1$，我们取 ˆ$x =$ ˆy。由此可知，ˆs'在 ˆL中是实的，因为 ˆy 在 $\mathrm{GL}_2(q^\delta)$中是实的，且 ˆx在 $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{d'}(q)$中是实的，因为其特征多项式等于 $\Delta_1^{d_1}\Delta^{\lfloor d/2 \rfloor - 2}$。

由于 $\det(\hat{y}) = \det(\hat{x}) = 1$，我们有 $\hat{s}' \in [L, L]$，其中 $[L, L] \cong \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_{d'}(q) \times \mathrm{SL}_2(q)$，分别为 $[\hat{L}、\hat{L}] \cong \mathrm{SL}_2(q^2) \times \mathrm{SU}_{d'}(q)$，直积因子显然嵌入 L中。若 $d = 5$，则 $\mathrm{SL}_{d'}(q)$是平凡群。若 $d = 6$，则 $\mathrm{SL}^{\varepsilon}_{d'}(q) \cong \mathrm{SL}_2(q)$是非阿贝尔单群，因为在这种情况下 $q > 2$（请回想，若 $\varepsilon = -1$，则 $(d, q) \neq (6, 2)$）。由于引理 6.11(a)，$d = 7$ 和 $\varepsilon = -1$的情况不会出现。因此，对于 $d > 6$，群 $\mathrm{SL}^{\varepsilon}_{d'}(q)$是非阿贝尔单群，且不同构于群 $\mathrm{SL}_2(q^\delta)$。

现在设 $\hat{\alpha} \in$ 自同构群(G)正规化 L，因而也正规化 $[L, L]$。根据上一段的说明，当 $d = 6$且 $\varepsilon = 1$时，$\hat{\alpha}$ 置换 $[L, L]$的直积因子 $\mathrm{SL}_2(q)$。在所有其他情况下，$\hat{\alpha}$ 正规化 [的直积因子 $\mathrm{SL}^{\varepsilon}_{d'}(q)\hat{L}$，$\hat{L}]$，并且当 $\varepsilon = -1$时也正规化因子 $\mathrm{SL}_2(q^2)$；而当 $\varepsilon = 1$时，它置换两个因子 $\mathrm{SL}_2(q)$。因此，$\hat{\alpha}(\hat{s}')$具有如下形式

$$\hat{\alpha}(\hat{s}') = \mathrm{diag}(\hat{\beta}(\hat{y}), \hat{\gamma}(\hat{x}), \hat{\beta}'(\hat{y})),$$

其中 $\hat{\beta}$、$\hat{\beta}'$ 是 $\mathrm{SL}_2(q^\delta)$的自同构，$\hat{\gamma}$ 是 $\mathrm{SL}^{\varepsilon}_{d'}(q)$的自同构。若 $\varepsilon = -1$，则有 $\beta' = \hat{\iota}_2 \circ \beta$，且 β和$\hat{\gamma}$分别是$\hat{\alpha}$在 $[L, L]$的相应子群上的限制。由于 $\det(\beta(\hat{y})) = 1 = \det(\beta'(\hat{y}))$，$\beta(\hat{y})$的两个特征值与 $\beta'(\hat{y})$的两个特征值分别互为倒数。由于$\hat{\alpha}$ 稳定 G-共轭类$\hat{s}'$，$\hat{\alpha}(\hat{s}')$的特征多项式等于 Ξ。这意味着 $\beta(\hat{y})$、$\hat{\gamma}(\hat{x})$和 $\beta'(\hat{y})$的特征多项式分别为 Δ、Ξ/Δ^2和 Δ。因此，$\hat{\beta}(\hat{y})$和$\hat{\beta}'(\hat{y})$在一般线性群 $\mathrm{GL}_2(q^\delta)$中分别与$\hat{y}$ 共轭，而$\hat{\gamma}(\hat{x})$在一般线性群 $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{d'}(q)$中与$\hat{x}$ 共轭，由此得出结论。

$\hat{}$ $\hat{}$ (b)令 L 表示 G 的标准 Levi 子群：在两种情形下，它对应于上述指定的子集 I，即 $\overline{L} = \mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$，并令 $\hat{L}$ 表示 L 在 G 中经典范满同态所得的像

$$\hat{\overline{G}} \to \overline{G}. \tag{17}$$

则 L 对 ι 稳定，并且 $\hat{L}$ 在 G^σ 中的像等于 L^σ。不妨设 $\hat{s} = \hat{s}' \in L$。于是，在两种情形下，引理 4.7 的条件 (i) 均得到满足。

为证明第二个条件，首先假设 $\hat{s}$ 如引理 6.20 的情形 (a) $\hat{}$ $\hat{}$ 所述。自然嵌入 $\mathrm{SL}^{d-2d'_1}(\mathbb{F}) \to [L, L]$ 给出代数群 $\mathrm{SL}^{d-2d'_1}(\mathbb{F}) \to [L, L]$ 的一个同构。特别地，$[L, L]$ 是单连通的，因此根据 Steinberg 的一个定理，$C_L(s)$ 是连通的；参见 [4, 定理 3.5.6]。现在假设 $\hat{s}$ 如引理 6.20 的情形 (b) $\hat{}$ 所述。在映射 (17) 下，L 中 $C_L(s)$ 的原像等于

映射 (17) 等于

$$\{\hat{g} \in \overline{\hat{L}} \mid \hat{g}\hat{s}\hat{g}^{-1} = \kappa\hat{s} \text{ for some } \kappa \in \mathbb{F}^*\}. \tag{18}$$

引理 6.22(a) 蕴含群 (18) 等于 $C_{\overline{\hat{L}}}(\hat{s})$。根据 Steinberg 的定理，上述半单元素在 L 中的中心化子是连通的，因此 (18) 的像 $C_L(s)$ 也是连通的。由此，条件 (ii) 在两种情况下都满足引理 4.7。

现在设 $\alpha \in$自同构群(G^σ) 稳定 L^σ 和 $\overline{G^\sigma}$-共轭类 s。根据第 6.9 小节中的讨论，存在一个自同构 $\hat{}\alpha \in$自同构群$'(\hat{}G)$，它稳定 $\hat{}L$，并且对于某个 $\kappa \in \mathbb{F}_q$，$\hat{}\alpha(\hat{}s)$ 与 $\kappa\hat{}s$ 是 $\hat{}G$-共轭的。引理 6.22(b) 蕴含 $\hat{}\alpha(\hat{}s)$ 在 G 中与 $\hat{}s\hat{}$ 共轭，因此条件 (iii) 可由 (a) 推出。□

注 6.24. 引理 6.23(b) 中的类似结论对 $d = 3$ 并不成立。例如，设 $G = \mathrm{PSL}_3(4)$。那么 $\overline{G^\sigma} = \mathrm{PGL}_3(4)$，且 $G^{*\sigma} = \mathrm{SL}_3(4)$。$G^\sigma$ 中有两个阶为 5 的元素共轭类，其中心化子是阶为 15 的循环极大环面。令 s 为其中一个共轭类中的元素。那么 $\mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$ 中恰有一个元素，其次数为 63，是实的，且 $Z(G^{*\sigma})$ 包含于其核中。因此，这些元素与我们的研究相关。

设 $\hat{}s$ 为 s的一个阶为 5 的实提升。那么 $\hat{}s$ 的特征多项式具有形式 $\Delta_1\Delta$，其中 Δ_1 如引理 6.23 中所述，而 Δ是一个次数为 2、根的阶为 5 的不可约多项式。因此，$\hat{}s$如引理 6.20(a)(b) 中所述。

唯一的 ι-稳定标准 Levi 子群是 $\overline{G^\sigma}$ 和 T^σ 本身。$\overline{s}$ 的共轭没有一个包含于 T^σ中。

当然，$\overline{G^\sigma}$ 的一个真标准 Levi 子群存在一个 ι-稳定的共轭与 s 的共轭类相交，但它不包含在任何 ι-稳定抛物子群中，因此无法应用由命题 3.5 得出的论证。□

6.25. **主要结果**。现在我们可以证明本节的主要结果了。

引理 6.26。设 $\chi \in$ 不可约特征集合$(\mathrm{SL}_d^\varepsilon(q))$，并设 $\hat{}\chi \in$ 不可约特征集合$(\text{一般线性群}_d^\varepsilon(q))$ 位于 χ之上。那么存在一个正整数 e'，使得 $e' \mid e$，且 $\chi(1) = \hat{}\chi(1)/e'$。

证明。显然，$Z(\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q))\mathrm{SL}_d^\varepsilon(q)$稳定 χ，并且

$$[\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q) : Z(\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q))\mathrm{SL}_d^\varepsilon(q)] = e.$$

由于 $\mathrm{GL}_d^\varepsilon(q)/\mathrm{SL}_d^\varepsilon(q)$ 是循环的，$\hat{}\chi$ 在 $\mathrm{SL}_d^\varepsilon(q)$ 上的限制是 e' 个不同的 χ 的共轭元之和，其中 $e' \mid e$。因此 $\chi(1) = \hat{}\chi(1)/e'$。□

命题 6.27。设 G = 射影特殊线性群$^{\varepsilon}_{d}(q)$，其中 q 为偶数，$d \geq 5$ 且 e =最大公约数$(d, q-\varepsilon) > 1$。则 G 不是 [14,定理 1.1.5] 的极小反例。

证明。假设 G 是 [14, 定理 1.1.5] 的一个极小反例。令 (V, n, ν) 如 [14, 记号 4.1.1] 所示。令 χ 为 V 的特征，将其视为 $\underline{\mathrm{SL}}^{\varepsilon}_{d}(q) = G^{*\sigma}$ 的特征。令 $s \in G^{\sigma}$ 为半单元，使得 $\chi \in \mathcal{E}(G^{*\sigma}, s)$。由于 χ 是实的，由引理 4.6(c)(iii) 可知 s 是实的。由引理 6.8(a)，存在 s 的一个实提升 $\hat{s} \in$ 一般线性群 $^{\varepsilon}_{d}(q)$。

假设 $\hat{s}$ 如引理 6.20 的情形 (a) 或 (b) 所示。引理 6.23 表明 s 满足引理 4.7 的假设。因此，(G, V, n) 具有 $E1$-性质，因为我们已假设 G 是一个极小反例。

现在假设 $\hat{s}$ 属于引理 6.20 中剩余情形之一。按照命题 6.15，由 $\beta := \nu$ 构造 α。那么，对于每个整除 $|\alpha|$ 的素数 p，以及 $\langle\alpha\rangle$ 中每个阶为 p 的元素 $\alpha^{(p)}$，都有 $|C_G(\alpha^{(p)})| < M_G$。这里，$M_G = q^{d(d+1)/2}$；见定义 5.2。由 [14,引理 4.3.3]，只需证明

$$\chi(1) \geq (|\alpha| - 1) M_G^{1/2} = (|\alpha| - 1) q^{d(d+1)/4}. \tag{19}$$

$|\alpha|$ 的界由命题 6.15(b)(d)给出。下文将使用这些界，不再另行引用。

若 $\hat{s}$ 属于引理 6.20 的 (c) 情形，则 (19) 成立。设我们处于引理 6.20 的情形 (d)。由引理 6.26，$\chi(1) \geq [G\colon C]_{2'}/5$，并且 $|\alpha| \leq 10$。由此可知 (19) 成立。情形 (e) 和 (g) 也可用类似方法证明。

现在假设我们处于引理 6.20 的情形 (f)。那么 $d = e = 5$and $q = 4$。此外，$\chi(1) \geq 12 \cdot 2^{15}/5 > 78\,634$。另一方面，(19) 对于 $\chi(1) > 9 \cdot 2^{15} = 294\,912$ 成立。GAP [9] 中有 $G = \mathrm{PSU}_5(4)$ 的特征表。上述两个不等式推出 $\chi(1) =$81 549。然而，χ 在 $\mathrm{PGU}_5(q)$ 中并非不变。由于 χ 是 α- 不变的，且 Φ_G 的阶为 4，这意味着 $\alpha \in \Phi_G$。如果 $|\alpha| =$2，那么根据 [14, 推论 4.3.2]，G 不是极小反例。因此 $|\alpha| = 4$。由于 d 为奇数，G 的图自同构 φ^2 的不动子群同构于 $\mathrm{Sp}_4(4)$；见 [12, 命题 9.4.2(b)(2)]。我们有 $|\mathrm{Sp}_4(4)| = 979\,200$，因此 $|\mathrm{Sp}_4(4)|^{1/2} < 1\,000$。于是 [14,引理 4.3.3] 表明 (G, V, n) 具有 $E1$-性质，因为 $\dim(V) =$81 549 $> 3 \cdot 1\,000$。

最后，假设我们处于引理 6.20 的情形 (g)。那么 $d = 6$和 $q = 2$。此外，$|\alpha| = 2$ 或 $|\alpha| = 6$。在前一种情形下，(G, V, n) 由 [14, 推论 4.3.2]具有 $E1$-性质。于是，假设 $|\alpha| = 6$。

根据命题 6.15(d)，有 $G^\diamond := \langle \mathrm{Inn}(G)\ \alpha\rangle \cong \mathrm{PGU}_6(q)$。此外，$\chi$可扩张为 $G^\diamond$ 的一个特征 $\chi^\diamond$；见 [14, 备注 4.2.5]。$\mathrm{PGU}_6(q)$ 的特征表也可在 Atlas 和 GAP 中查到。若 $\chi(1) > 5\cdot 2^{21/2}$，则 (19) 成立。利用这一点，我们只需考虑两种情形 $\chi(1) \in \{231, 385\}$。采用 [14, 引理 4.3.1]中的记号，只需证明 $\mathrm{Res}^{G^\diamond}_{\langle\alpha\rangle}(\chi^\diamond)$ 以正重数包含 $\langle\alpha\rangle$ 的两个不可约实特征标。这很容易验证。□

7. E_6型的群

本节完成证明：没有任何李型 E_6 的有限单群是 [14, 定理 1.1.5]的极小反例。

7.1. 魏尔群与图自同构。令 $G = E_6^\varepsilon(q)$。处理这些群的策略与第6小节中处理线性群和酉群的策略相同。设$G = E_6(\mathbb{F})$。对于下文所报告的魏尔群$W(G)$和根系 $\Sigma = \Sigma(G)$中的明确计算，我们使用带有 Jean Michel [26]扩展的 GAP3 软件包 Chevie [10] 。特别地，我们沿用 [10]中所使用的根的编号。因此，r_j表示 Σ 的正根列表中位置为 j，$1 \le j \le 36$的根，该列表由 [10]提供。单根为 r_1、……、r_6，其中根 r_j连接到 Σ 的 Dynkin 图中编号为 j，$j = 1$、……、6 的节点；该图见 [14, 图 1]。最后，$s_j \in W(G)$表示关于垂直于 r_j的超平面的反射。$n_j \in N_G(T)$中在 [3, 引理 6.4.2] 中引入的元素，是反射 s_j的提升；见 [3, 定理 7.2.2]。由于 $\mathbb{F}$ 具有特征2，标准环面 T在 $N_G(T)$中有一个补子群，即由元素 n_j、$j = 1$、……、6 生成的子群。这由 Steinberg 关系推出，详见 [3, 第192–193]页。虽然 Steinberg 关系定义了 E_6型的单连通群G^*，但伴随群 G 的相应结论也由此得到，因为 G 是 G^* 的商群，且其核包含于其标准环面中。在下文中，我们将$W(G)$与 $N_G(T)$的一个子群等同。

图自同构 $\iota \in \mathrm{Aut}(G)$ 源自 Dynkin 图的非平凡对称性，也记作 ι。Dynkin 图的对称性 ι诱导出 $W(G)$ 的一个自同构；事实上，它是 $\iota \in \mathrm{Aut}(G)$ 在 $W(G)$ 上的限制。再次，$W(G)$ 的这个自同构也记作 ι。如果 $\varepsilon \equiv -1$，那么 ι 等于由 σ 诱导的 $W(G)$ 的自同构；见 [14, 第 5.3] 小节和

第4.1小节。由于 φ 在 $W(G)$ 上作用平凡，元素 $\mu \in \Gamma_G \times \Phi_G$ 固定 $-w \in W(G)$ 当且仅当 ι 固定 w。

7.2. 一些 Levi 子群。 对于 $I \subseteq \Pi$，令 L_I 表示 G 的相应标准 Levi 子群；参见 [14, 第 5.3] 小节。注意，L_I 在 φ 下不变，并且 L_I 在 ι 下不变，当且仅当 I 在 Dynkin 图的对称性 ι 下不变。更一般地，若 $J \subseteq \Sigma$ 表示 G 的子系子群，它对应于由 J 生成的 Σ 的闭子系，则记作 L_J；其定义和构造见 [25, 第 13.1] 节。

对于 $I \subseteq \Pi$，标准 Levi 子群 L_I 的正规化子可通过 Howlett 的算法 [15] 计算。事实上，$N_G(L_I)/L_I \cong \mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$，且 $N_G(L_I)$ 由 L_I 及 $N_G(T)$ 中的元素生成，这些元素在 $W(G)$ 中的像生成 $\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$。根据我们将 $W(G)$ 与 $N_G(T)$ 的一个子群相识别的方式，有 $N_{\overline{G}}(L_I) = L_I \mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$。

我们记录一个关于 Levi 子群的扭曲的结果；有关这一概念，见 [11, 3.3.1]。

引理 7.1. 设 $I \subseteq \Pi$ 是 σ-稳定的，因此 L_I 和 $\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$ 都是 σ-稳定的。令 $y \in \mathrm{Stab}_{W(G)\sigma}(I)$，并选取 $g \in G$ 使得 $g^{-1}\sigma(g) = y$。令 $M := {}^gL_I$，且 $S := {}^g\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$。

(a) 群 M 和 S 是 σ-稳定的，且 $N_G(M)$ 是 $N_{\overline{G}}(\overline{M}) = MS$ 的半直积。此外，g^{-1} 将 S^σ 共轭到集合

$$C_{I,\sigma}(y) := \{u \in \mathrm{Stab}_{W(\overline{G})}(I) \mid uy\sigma(u)^{-1} = y\},$$

y 的 σ-中心化子。

(b) 设 $t \in Z(\overline{M}^\sigma)$ 满足 $C_G(t) = M$。那么 S^σ 在 $Z(M^\sigma)$ 中 t 的 G^σ-共轭元集合上正则作用。特别地，若 t 非平凡且在 G^σ 中为实，则 $|S^\sigma|$ 为偶数。

证明。(a) 这是众所周知的。通过直接计算即可证明。

(b) 由 (a)，我们有 $N_{\overline{G}}(\overline{M})^\sigma = \overline{M}^\sigma S^\sigma$，这是一个半直积。注意，根据命题 [4, Proposition 3.6.8]，$Z(M^\sigma) = Z(M)^\sigma$。若 $t' \in Z(\overline{M}^\sigma)$ 与 t 被某个元素 $g \in G^\sigma$ 共轭，则由引理 2.2，$g \in N_G(M)^\sigma$。由此可得，t 与 t' 被 S^σ 中的某个元素共轭。由于 t 在 S^σ 中的稳定子平凡，因此得证。若 t 是实的，则 t 在 S^σ 中与 t^{-1} 共轭。由于 t 非平凡且 q 为偶数，$t \neq t^{-1}$，因此共轭元素必须具有偶数阶。□

以下两种情形与我们的证明尤其相关。为简便起见，$I \subseteq \Sigma$ 中的元素用其 Chevie 数表示；

参见 [10]。下文出现的根 r_{36} 是高度最大的唯一正根。相应的反射 s_{36} 在 ι下稳定，因此也在 σ下稳定。

引理 7.2. (a) 设 $I = \{1,3,4,5,6\}$。则 $\mathrm{Stab}_{W(G)}(I) = \langle s_{36}\rangle$。此外，$s_{36}$ 与 s_4 共轭，且存在一个 ι-稳定元素 x，使得 $W(L_I) \cap {}^{x^{-1}}W(L_I) = W(L_{\{3,4,5\}})$。

(b) 设 $I = \{2,3,4,5\}$。则 $\mathrm{Stab}_{W(G)}(I) = \langle v, w\rangle$ 是一个阶为6的非阿贝尔群。这里，v 和 w 是不同的对合，而 v 是 $\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$ 中唯一的 ι-稳定对合。此外，v 在由节点2、3、4、5诱导的 E_6 的 *Dynkin* 图子图上作用如 ι，并循环地置换其叶节点。

此外，存在唯一的 $x \in W(G)$ 使得以下条件成立。

(i) 元素 x 是一个 ι-稳定对合。(ii) 我们有 ${}^{x}v = s_1 s_6$ 和 ${}^{x}w = s_1 s_3 s_1 s_5$。(iii) 我们有 $W(L_I) \cap {}^{x^{-1}}W(L_{\{1,3,4,5,6\}}) = W(L_{\{2,3,5\}})$。

证明。这可以通过一次 Chevie [10] 计算来证明。 □

我们需要了解 G^σ 中某些半单元素的一些性质。G^σ 的半单元素按类型分类。根据定义，两个半单元素 s，$s' \in G^\sigma$ 属于同一类型，当且仅当 $C_G(s)$ 和 $C_G(s')$ 在 G^σ 中共轭。Frank Lübeck 在 [20] 中给出了这些类型及相应中心化子的列表。实际上，对 ε的每个取值都有一个列表。在下面的引理 7.8 中，我们将依照 [20] 对这些类型进行标记。在此之前，我们需要探究 G的一个特定 Levi 子群的结构。

引理 7.3。 令 $L := L_{\{1,3,4,5,6\}}$ 表示 G 中类型为 A_5的标准 *Levi* 子群；参见 [14, 图 *fv12*>。则 $L = [L,L] \times Z(L)$，其中 $Z(L)$ 是秩为1的分裂环面。此外，$N_G(L) = \langle L, s_{36}\rangle$，其中 s_{36}中心化 $[L,L]$ 并反演 $Z(L)$ 的元素。

此外，L 是 σ-稳定的，并且 $L^\sigma = [L,L]^\sigma \times Z(L)^\sigma$，其中 $[L,L]^\sigma \cong PGL_6^\varepsilon(q)$，而 $Z(L)^\sigma = Z(L^\sigma)$ 是一个阶为 $q-1$的循环的群。此外，$N_{G^\sigma}(L) = \langle L^\sigma, s_{36}\rangle$，并且 $N_{G^\sigma}(L) = N_{G^\sigma}(L^\sigma)$，除非 $q = 2$；在此情况下，$N_{G^\sigma}(L^\sigma) = [L,L]^\sigma \times H_2$，其中 $H_2 \cong SL_2(2)$。

证明。用 Chevie [10], 很容易验证，G的根系 Σ 包含一个类型为 $A_5 + A_1$ 的闭子系，由正根 $r_1, r_3, r_4, r_5, r_6, r_{36}$生成。令 $H := L_{\{1,3,4,5,6,36\}}$ 表示 G 的相应子系子群；参见 [25, 第 13.1] 节。

令 $H_1 := [L,L]$，且 $H_2 := [L_{\{36\}}, L_{\{36\}}]$。则对于 $i = 1,2$，H_i 是半单的。因此，H_1 由对应于根的根子群生成

对应于根 $\pm r_1$、$\pm r_3$、$\pm r_4$、$\pm r_5$、$\pm r_6$ 的根子群生成，而 H_2 由对应于 $\pm r_{36}$ 的根子群生成；例如参见 [25, 定理 8.21(a)]。由于其根系的秩为 6，群 H 也是半单的，因此得到 $H = \langle H_1, H_2\rangle$。由于对所有 $j \in \{1,3,4,5,6\}$，$r_j \pm r_{36}$ 都不是根，交换子关系表明 H_1 和 H_2 彼此中心化。由于 q 是偶数，H_2 的中心是平凡的。因此 $H = H_1 \times H_2$。由于 $L \leq H$ 和 $H_1 \leq L$，有 $L = [L,L] \times (L \cap H_2)$，其中 $L \cap H_2 = T \cap H_2 = Z(L)$。由于 $s_{36} \in H_2$，可知 s_{36} 中心化 $[L,L]$。显然，s_{36} 反演 H_2 的标准环面 $T \cap H_2$ 中的元素。根据引理 7.2(a)，有 $\mathrm{Stab}_{W(G)}(\{1,3,4,5,6\}) = \langle s_{36}\rangle$。因此 $N_G(L) = \langle L, s_{36}\rangle$。

由于 L 和 H_2 是 ι-稳定的，它们也 σ-稳定。我们得到 $H^\sigma = [L,L]^\sigma \times H_2^\sigma$，其中 $H_2^\sigma \cong \mathrm{SL}_2(q)$。这给出 $L^\sigma = [L,L]^\sigma \times Z(L)^\sigma = [L,L]^\sigma \times Z(L^\sigma)$。显然，$Z(L^\sigma)$ 是阶为 $q-1$ 的循环群，因为 L 是 G 的标准 Levi 子群，半单秩为 5。若 $q = 2$，则 $\varepsilon = -1$，且 $L^\sigma = [L,L]^\sigma \cong \mathrm{PGU}_6(2)$；参见 Atlas [5, 第 191 页及第 115]页。现在假设 $q > 2$。那么，根据 [20], 中的表，群 L^σ 是类型为 $[8,1,1]$ 的半单元的中心化子。这些表表明，$[L,L]^\sigma$ 的中心是平凡的。因此，$[L^\sigma, L^\sigma]$ 是单群 $\mathrm{PSL}_6^\varepsilon(q)$，其在 $[L,L]^\sigma$ 中的指数为 3。此外，$[L,L]^\sigma$ 同构于 $\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}_6^\varepsilon(q))$ 的一个子群。由关于同源的一般原理可知，$[L,L]^\sigma$ 的标准环面的阶与 $\mathrm{PGL}_6^\varepsilon(q)$ 的标准环面的阶相同。这意味着 $[L,L]^\sigma = \langle [L^\sigma, L^\sigma], t\rangle$，其中 t 是 $[L,L]^\sigma$ 的标准环面中的一个元素。特别地，t 在 $[L^\sigma, L^\sigma]$ 上诱导一个内对角自同构，因此 $[L,L]^\sigma \cong \mathrm{PGL}_6^\varepsilon(q)$，如所声称的。

由于 s_{36} 是 σ-稳定的，我们得到 $N_G(L)^\sigma = \langle L^\sigma, s_{36}\rangle$。为证明最后一个结论，先假设 $q \neq 2$。注意到 $C_G(Z(L^\sigma))^\sigma = L$。事实上，$L \leq C_G(Z(L^\sigma))$，根据 [20] 中的表，我们必有等号成立。因此

$$N_{\overline{G}^\sigma}(\overline{L}^\sigma) \leq N_{\overline{G}^\sigma}(Z(\overline{L}^\sigma)) \leq N_{\overline{G}^\sigma}(C_{\overline{G}}(Z(\overline{L}^\sigma))) = N_{\overline{G}^\sigma}(\overline{L}) \leq N_{\overline{G}^\sigma}(\overline{L}^\sigma).$$

现在假设 $q = 2$。那么，$L^\sigma = [L,L]^\sigma$，因而 $[L,L]^\sigma \times H_2 \leq N_{G^\sigma}(L^\sigma)$。Atlas 中给出的 G^σ 的极大子群列表（见 [5, 第 191] 页及 [17, 附录 2]）即可证明我们的结论。□

引理7.4。采用引理 7.3 及其证明中的记号。设 $g \in H_2$ 满足 $g^{-1}\sigma(g) = s_{36}$，并令 $L' := {}^gL$。则 L' 是 σ-稳定的，且 $[L, L'] = [L, \overline{L}]$。此外，$L'^\sigma = [\overline{L}', \overline{L}']^\sigma \times Z(L')^\sigma$，$Z(L')^\sigma$ 是阶为 $q+1$ 的循环的。

证明。 这由引理 7.1 以及 g 与$[L, L]$交换这一事实推出。 □

7.5. 一些类型及其中心化子。关于下文所用的e-分裂 Levi 子群 G 的概念, 参见 [11, 3.5.1]。

注 7.6。引理 7.3 和 7.4 中描述的 Levi 子群 L 和 L' 分别是 G 中 A_5 类型的 1-分裂和 2-分裂 Levi 子群。相对于 G^σ-共轭而言，它们分别是 [20]记号下类型为 $[8,1,1]$ 和$[8,1,2]$ 的半单元素的中心化子的代表元。□

在证明过程中，我们将考虑其他各种类型。下面的引理给出了相应中心化子的构造。

引理 7.7。设 $s \in G^\sigma$ 是类型为 $[8,1,k]$ 或 $[14,1,k]$ 且满足 $k = 1$的半单元，2。

那么 $C_{\overline{G}}(s)$ 是连通的。事实上， $C_G(s)$ 在G 共轭下与 L_I 共轭，其中 I 是 $\{1,3,4,5,6\}$ 或 $\{2,3,4,5\}$ 之一，分别取决于 s 的类型是$[8,1,k]$ 还是 $[14,1,k]$, $k = 1$，2。

类型为 $[14,2,1]$ 的元素 s 的阶为 3，且位于类型为 $[14,1,1]$ 的某个元素的中心化子的中心。在此情形下， $C^\circ_G(s)$ 在 G 共轭下与 $L_{\{2,3,4,5\}}$ 共轭，且 $|C_G(\overline{s})/C^\circ_G(s)| = 3$。

证明。 这隐含于 [20]之中。 □

上述引理给出了分裂情形下各类型中心化子的代表元（在 G^σ 共轭意义下），即 $C^\circ_G(s)$ 在 G^σ 共轭下与 G 的一个标准 Levi 子群共轭。2-分裂情形的代表元将在下面的引理中构造。请回忆本小节引言段落中讨论的符号 ι 的含义。

引理 7.8。 设 $s \in G^\sigma$ 是类型为 $[8,1,k]$、$[14,1,k]$ 且满足 $k = 1$、2 或 $[14,2,1]$ 之一的半单元。对于后一种情形，假设 $q \neq 2$。设 s 在 G^σ 中为实元。则存在一个 σ-稳定的标准 *Levi* 子群 L，它是 G的子群，并且存在 $s' \in L^\sigma$，使得 s与 s' 共轭于 G^σ，且满足以下条件。

(i) 元素 s' 在 L^σ中是实的。(ii) 中心化子 $C_L(s')$是连通的。(iii) 若 $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ 稳定 L^σ 和 s的 G^σ-共轭类，则 $\alpha(s')$ 与 s' 在 L^σ中共轭。

表 2。某些类型的扭曲元素（解释见引理 7.8 的证明）

类型	I	$\mathrm{Stab}_{W(\overline{G})}(I)$	ε	y	z	$\lvert C_{I,\ \sigma}(y)\rvert$
$[8,1,1]$	$\{1,3,4,5,6\}$	$\langle s_{36}\rangle$	±1	1	1	2
$[8,1,2]$				s_{36}	s_4	2
$[14,1,1]$	$\{2,3,4,5\}$	$\langle v,\ \ w\rangle$	1	1	1	6
$[14,1,2]$				v	s_1s_6	2
$[14,1,2]$			-1	1	1	2
$[14,1,1]$				v	s_1s_6	6

证明。 由引理 7.7，群 $C^\circ_G(s)$与 L_I在 G下共轭，其中 I是 $\{1,3,4,5,6\}$ 或 $\{2,3,4,5\}$之一；注意， I是 ι-稳定的，因此也是 σ-稳定的。设 $K := L_{\{1,3,4,5,6\}}$。引理 7.2 已确定群 $\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$，表 2 第 3 列采用了该引理中的记号。设 x 是一个具有引理 7.2 所述性质的 ι-稳定元素。表 2 第 5 列给出的元素 $y \in \mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$是 σ-稳定的。记 $z := {}^x y$，于是 $z \in W(K)^\sigma \le K^\sigma$；第一个包含关系由引理 7.2 得出。元素 z 列于表 2 第 6 列。

固定 I, ε 和 $k \in \{1,2\}$。我们声称，用表 2（见 [11, 3.3.1]）中与这些数据相关联的元素 y 对 L_I 进行扭曲，分别得到相应类型 $[8,1,k]$ 和 $[14,1,k]$的中心化子的代表元。为此，首先注意，与不同的 k 相关联的两个 y-元素属于 $\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$ 的不同 σ-共轭类。对于 $I = \{1,3,4,5,6\}$，这显然成立，因为此时 $\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$ 的阶为 2。对于 $I = \{2,3,4,5\}$， y 的相应 σ-中心化子 $C_{I,\sigma}(y)$（见引理 7.1(b)）的阶不同。接下来，取满足 $h^{-1}\sigma(h) = z$ 的 $h \in K$；若 $z = 1$，则取 $h = 1$。令 $g := hx$，便得到 $g^{-1}\sigma(g) = y$。现在令 $M := {}^g L_I$。根据引理 7.1(b)， $Z(M)$ 中中心化子为 M 的 σ-稳定元素的数目等于 $\lvert({}^g\mathrm{Stab}_{W(G)}(I))^\sigma\rvert$。根据引理 7.1(a)，后一个数目等于$\lvert C_{I,\sigma}(y)\rvert$。另一方面，所求数目可从 [20] 中的表读出：它是给出某一类型中共轭类数目的多项式的首项系数的分母。这就证明了我们的断言。

现在证明我们的断言：若 s 的类型为 $[8,1,k]$ 或 $[14,1,k]$, $k = 1$, 2，其中 $L := K = L_{\{1,3,4,5,6\}}$。根据上一

段中的断言，$\overline{M} = {}^h({}^x\overline{L_I})$ 是 G 中某个类型为 s 的元素的中心化子，也就是说，$C_G(s)$ 与 M 共轭于 G^σ。特别地，s 与某个满足 $C_G(s') = M$ 的元素 $s' \in Z(M)$ 在 G^σ 下共轭。

(i) 由于 $Z({}^x\overline{L_I}) \leq {}^x\overline{T} = \overline{T} \leq \overline{K}$ 和 $h \in K$，我们有 $Z(M) = Z({}^g\overline{L_I}) \leq \overline{K}$，因此 $s' \in Z(M)^\sigma \leq K^\sigma$。根据假设，现在 s' 在 G^σ 中是实的。引理 7.1(b) 表明，s' 可由 ${}^g\mathrm{Stab}_{W(G)}(I) = {}^h({}^x\mathrm{Stab}_{W(G)}(I))$ 中一个由 σ-稳定的元素取逆。因此，s' 在 $\overline{K^\sigma}$ 中是实的，因为 ${}^x\mathrm{Stab}_{W(G)}(I) \leq K$ 和 $h \in K$。

(ii) 根据构造，中心化子 $C_K(s')$ 与 ${}^xL_I \cap K$ 在 K 下共轭。后者是 G 中子环面 ${}^xZ(L_I)Z(K)$ 在 T 中的中心化子；参见 [25, 命题 12.6 和 3.9]。因此，${}^xL_I \cap K$ 是 G 的 Levi 子群，故为连通的。具体而言，引理 7.2 表明，${}^xL_I \cap K$ 分别与标准 Levi 子群 $L_{\{3,4,5\}}$ 和 $L_{\{2,3,5\}}$ 在 G 下共轭。因此，$C_K(s')$ 是连通的。

(iii) 我们可以假设 $s = s'$。我们先考虑一个特殊情形。首先假设 $\alpha = \mu \in \Gamma_G \times \Phi_G$。那么 $\alpha = \mu$ 显然稳定 K^σ，因为根据引理 7.3，K 是 σ-稳定的，且 μ 与 σ 对易。由同样的论证，L_I 和 L_I^σ 是 μ-稳定的。

假设 s' 在 G^σ 中与 $\mu(s')$ 共轭。那么 $g^{-1}s'g$ 在 G 中与 $\mu(g)^{-1}\mu(s')\mu(g)$ 共轭。现在，$g^{-1}s'g$ 和 $\mu(g)^{-1}\mu(s')\mu(g)$ 都包含在 $Z(L_I)$ 中，因为 L_I，因此 $Z(L_I)$ 是 μ-稳定的。根据引理 2.2，存在 $u \in \mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$，使得 $ug^{-1}s'gu^{-1} = \mu(g)^{-1}\mu(s')\mu(g)$。由于 $g = hx$ 且 $\mu(x) = x$，我们得到

$$\mu(s') = [\mu(h)xux^{-1}h^{-1}]s'[\mu(h)xux^{-1}h^{-1}]^{-1}.$$

现在 $h \in \overline{K}$ 和 $\overline{K}$ 是 μ-稳定的。此外，根据引理 7.2，$xux^{-1} \in K$。因此 $\mu(h)xux^{-1}h^{-1} \in \overline{K}$，于是 s' 和 $\mu(s')$ 在 K 中共轭。由于 $C_K(s')$ 是连通的，s' 和 $\mu(s')$ 在 K^σ 中共轭；参见 [11, 例 1.4.10]。

现在设 $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ 稳定 K^σ 和 s' 的 G^σ-共轭类。那么 $\alpha = \mathrm{ad}_c \circ \mu$，其中 $c \in G^\sigma$ 和 $\mu \in \Gamma_G \times \Phi_G$。由于 μ 稳定 K^σ，必有 $c \in N_{G^\sigma}(K^\sigma)$。现在 $\alpha(s') = c\mu(s')c^{-1}$ 在 G^σ 中与 s' 共轭。因此，$\mu(s')$ 在 G^σ 中与 s' 共轭。根据我们已经证明的结论，存在 $c' \in K^\sigma$ 使得 $\mu(s') = c's'c'^{-1}$。因此 $\alpha(s') = c\mu(s')c^{-1} = (cc')s'(cc')^{-1}$，于是 $\alpha(s')$ 和 s' 在 $N_{G^\sigma}(K^\sigma)$ 中共轭。

由于根据引理 7.3，s' 在 $\overline{K}^\sigma$ 和 $\overline{K^\sigma} = \overline{[K,K]^\sigma \times Z(K)^\sigma}$ 中是实的，因此必有 $s' \in [K,K]^\sigma$。根据引理 7.3 给出的 $N_{G^\sigma}(K^\sigma)$ 的结构，元素 $\alpha(s')$ 和 s' 在 K^σ 中共轭。若 s 的类型为 $[8,1,k]$ 或 $[14,1,k]$, $k = 1,2$, 则我们的证明至此完成。

最后，我们证明类型为 $[14,2,1]$的元素满足我们的断言。设我们处于这样的情形： M 是类型为 $[14,1,1]$, 的元素的中心化子，即 $I=\{2,3,4,5\}$。于是存在 $t\in Z(M^\sigma)$，其阶为 3，且 $C_G^\circ(t)=M$ 和 $|(C_G(t)/C_G^\circ(t))^\sigma|=3$；见引理 7.7。现在，$C_G(t)\le N_G(C_G^\circ(t))=N_G(M)=M^g\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$。因此，$t$ 被 ${}^g\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$中阶为 3 的元素中心化。由于 t 是实的，它被 ${}^g\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$中的对合取逆。现在，${}^g\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$的每个元素都是 σ-稳定的，因此 t 在 K^σ中是实的。此外，$C_L(t)$不连通，因为 ${}^g\mathrm{Stab}_{W(G)}(I)$的 Sylow 3-子群中心化 t 并正规化 $M\cap K=C_K^\circ(t)$。根据上文 (ii) 的证明，群$M\cap K$ 与 $L_{\{2,3,5\}}$ G-共轭。Chevie 计算表明，后者与 $L_{\{1,4,6\}}\le K$ G^σ-共轭。

现在 $K^\sigma=[K,K]^\sigma\times Z(K)^\sigma$，其中 $Z(K)^\sigma$ 是一个 $q-1$ 阶循环群，且 $[K,K]^\sigma\cong\mathrm{PGL}_6^\varepsilon(q)$；见引理 7.3。由于 t 在 K^σ中为实数，我们必须有 $t\in[K,K]^\sigma$。令 $\hat{}G=\mathrm{GL}_6^\varepsilon(q)$，并考虑自然映射 $\hat{}\,G\to[L,L]^\sigma$。令 $\hat{}t$ 为 $\hat{}G$中 t 的一个实提升。由于 $\hat{}t^3$ 是 $\hat{}G$的实中心元，$\hat{}t$ 的阶为 3。上文所展示的 $C_K(t)\hat{}$ 的结构，连同引理 6.3 和引理 6.6，推出 t 的特征值为 $1,\zeta,\zeta^{-1}$，每个重数均为 2，其中 $\zeta\in\mathbb{F}_{q^\delta}$的阶为 3。特别地，$\hat{}t$ 的最小多项式如引理 6.20(a) 所示。

令 $L:=L_{\{3,4,5\}}\le K=L_{\{1,3,4,5,6\}}$。则 L 是 G 的一个 σ-稳定标准 Levi 子群。将引理 6.23 应用于 $\hat{}t$ 和 $[K,K]^\sigma$，可知存在一个元素 $t'\in L^\sigma$，它在 $[K,K]^\sigma$ 中与 t 共轭，且 t 满足 (i) 和 (iii)。此外，$C_L(t')$ 是连通的，因为与 L 对偶的标准 Levi 子群 $L^*\le G^*$ 具有连通中心；见 [20]。这就完成了对 s 具有类型 $[14,2,1]$ 的情形的证明。□

引理 7.9. 类型 $[3,2,3]$, $[4,1,1]$, $[5,1,1]$,$[9,1,2]$, $[9,1,1]$, $[14,2,2]$ 和 $[14,1,3]$ 中的元素都不是实的。

证明。若 s 的类型为 $[14,2,2]$ 或 $[3,2,3]$,，则 $C_{G^\sigma}(s)$ 的中心的阶为 3，且此类型有两个共轭类；因此 s 和 s^{-1} 属于不同的 G^σ-共轭类。对于类型$[4,1,1]$, $[5,1,1]$ 和 $[14,1,3]$,，结论由引理 7.1(b) 的最后一句推出。

设半单元 $s\in G^\sigma$ 的类型为 $[9,1,1]$或 $[9,1,2]$，且 s 在 G^σ 中为实元。那么 s 在 G中为实元。令 $J:=\{1,3,4,5\}$，并设 $M:=L_J$。由于 $C_G(s)$ 经 [20], 与 M 共轭， M 的中心包含一个实元 t，其中心化子为 M。由引理 2.2，$\mathrm{Stab}_{W(G)}(J)$ 中存在一个元素将 t 取逆。

现在 $\overline{M} = \overline{L_J} \leq \overline{L_I}$，其中 $I = \{1,3,4,5,6\}$。由表 2 可得，$\mathrm{Stab}_{W(G)}(J) = \mathrm{Stab}_{W(G)}(I) = \langle \overline{s_{36}} \rangle$。由引理 7.3，我们可以写成$t = t_1 t_2$，其中 $t_1 \in [L_I, L_I]$ 且 $t_2 \in \overline{Z(L_I)}$。此外，$t_1$ 被 $\overline{s_{36}}$ 中心化。现在 $t_1 \neq t_1^{-1}$，因为 $C_G(t) = L_J$ 且 q 为偶数。因此，t 不被 s_{36} 取逆，矛盾。□

7.10. 对 ν 的修改。 以下是命题 6.15 的类似结果。

命题7.11。 设 G 如假设3.2(b)(iii),(iv)所述，并设$\beta \in$ 自同构群(G)。记 $\beta = \mathrm{ad}_h \circ \mu$，其中 $h \in G^\sigma$ 且 $\mu \in \Gamma_G \times \Phi_G$。那么存在 $g \in G$，使得 $\alpha := \mathrm{ad}_g \circ \beta$ 具有偶数阶，且下列结论成立。

(a) 对于每个整除 $|\alpha|$ 的素数 p，以及 $\langle \alpha \rangle$ 中每个阶为 p 的元素 $\alpha_{(p)}$，都有 $|C_G(\alpha_{(p)})| < q^{48}$，除非 $p = 2$ 且 $\alpha_{(2)}$ 是 G 的图自同构。在后一种情况下，$|C_G(\alpha_{(p)})| < q^{52}$。

(b) α 的阶整除 $3\delta f$。(c) 若 $h \in G$，则 $|\alpha|$ 整除 δf。

(d) 若 $\varepsilon = -1$ 且 $|\mu|$ 为偶数，则 $|\alpha|$ 整除 $2f$。

证明。令 $\overline{L} := \overline{L_{\{2,3,4,5\}}}$。则 $[\overline{L}, \overline{L}]$ 是类型为 D_4 的单群，因此 $[L,L]^\sigma \cong P\Omega_8^\varepsilon(q)$，因为 q 是偶数。这是一个非阿贝尔单群，因此 $[L,L]^\sigma = [\overline{L}^\sigma, \overline{L}^\sigma]$。由此可得，$\overline{L}^\sigma = [\overline{L}^\sigma, \overline{L}^\sigma] \times Z$，其中 Z分别同构于 $[q-1]\times[q-1]$和 $[q^2-1]$；见 [20]。记 Z_3为 Z 的 Sylow 3-子群。则 Z_3 在 $\Gamma_G \times \Phi_G$ 下不变。回顾第4.1小节，$G^\sigma = GT^\sigma$，因此$\overline{G}^\sigma = \overline{G}\overline{L}^\sigma$。现在$[\overline{L}^\sigma, \overline{L}^\sigma] \leq [\overline{G}^\sigma, \overline{G}^\sigma] = G$。因此 $Z \not\leq G$，从而 $\overline{G}^\sigma = GZ_3$。

因此存在 $y \in G$，使得 $\beta' := \mathrm{ad}_y \circ \beta$ 具有如下形式

$$\beta' = \mathrm{ad}_t \circ \mu, \tag{20}$$

其中 $t \in Z_3$。若 $h \in G$，我们取 $t = 1$。公式 (1) 以及 Z_3 在 $\Gamma_G \times \Phi_G$ 中不变这一事实，推出

$$\beta'^l = \mathrm{ad}_{t'} \circ \mu^l \tag{21}$$

其中对于每个整数 l，都有 $t' \in Z_3$。

(a) 设 p 是整除 $|\beta'|$ 的素数。断言 $|C_G(\beta'_{(p)})| < q^{48}$，除非 $p = 2$ 且 $\beta'_{(2)}$ 是 G 的图自同构；在这种情况下，$|C_G(\beta'_{(p)})| < q^{52}$。除非 $\beta'_{(p)}$ 是内对角自同构，否则由引理 5.3 可得此断言。在后一种情况下，由方程（21），对某个 $t' \in Z_3$，有 $\beta'_{(p)} = \mathrm{ad}_{t'}$。由于 t' 是 L^σ 中中心里的一个 3 阶元素，[20] 中的表表明，$|C_{G^\sigma}(\beta'_{(3)})| = |C_{G^\sigma}(t')|$ 有上界 $(q-\varepsilon)|P\Omega_{10}^\varepsilon(q)|$。后一阶的一个粗略上界是 q^{48}，这就证明了我们的断言。

再次利用方程（21），可知 $|\beta'|$ 为偶数当且仅当 $|\mu|$ 为偶数。在这种情况下，令 $\alpha := \beta'$。于是 α 满足这些断言。现在假设 $|\mu|$ 为奇数，则 $\mu \in \Phi_G$。特别地，μ 是 φ 的幂。令 $g \in [L, L]$ 为一个由三个两两交换且 ι-稳定的根元素构成的 ι-稳定集合的乘积。那么，g 是 G 中一个 ι-稳定的对合。此外，按 [19] 的记号，g 属于幂幺元的类 $3A1$。令 $\alpha := \mathrm{ad}_g \circ \beta'$。由于 μ 是 φ 的幂，因而固定 g；又由于 g 与 t 交换，所以有 $\alpha = \beta' \circ \mathrm{ad}_g$。此外，若 p 为奇数，则 $C_G(\alpha_{(p)}) = C_G(\beta'_{(p)})$；并且 $|C_{G^\sigma}(\alpha_{(2)})| = |C_{G^\sigma}(g)| = q^{31}(q-\varepsilon)^3(q+\varepsilon)^2(q^2+\varepsilon q+1) \le q^{48}$。对于 $\varepsilon = 1$，$C_{G^\sigma}(g)$ 的阶由 Mizuno 计算得出（见 [27, 引理 4.2]）；对于 $\varepsilon = -1$，则由 Gunter Malle 计算得出（见 [23, 命题 3]）。(a) 的证明至此完成。

陈述 (b)–(d) 由引理 5.4 得出。 □

7.12. 主要结果。 现在我们已经准备好完成关于 $E_6^\varepsilon(q)$ 群的证明。

命题7.13。 设 $G = E_6^\varepsilon(q)$，其中 q 为偶数且 $3 \mid q - \varepsilon$。那么 G 不是 [14, 定理 1.1.5] 的极小反例。

证明。设 G 是 [14, 定理 1.1.5] 的一个极小反例，令 (V, n) 为一个不具有 $E1$-性质的对，并令 χ 表示 V 的特征。按照命题7.11，由 $\beta := \nu$ 构造 α。根据 [14, 引理 4.3.3] 和命题7.11，我们有

$$\chi(1) \le (|\alpha| - 1)q^{26}. \tag{22}$$

根据命题 7.11(b)，我们有 $|\alpha| \le 3\delta f$。因此，当 $f > 3$ 时，$|\alpha| \le q$。对于 $f = 1$，2,3，我们有 $3\delta f = 6$，6，18。

现在考虑 Frank Lübeck 在 [21] 提供的 $G^{*\sigma}$ 的特征次数及其重数列表。事实上，这样的列表有两个，每个 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ 对应一个；下面的所有讨论对其中每个列表都成立。事实证明，$G^{*\sigma}$ 的特征次数中恰有 116 个为奇数。令 (d_i, m_i)、$i = 1$、……、116 表示 Lübeck 列表中对应于奇数次数特征标的各项，其中 d_i 表示一个特征标的次数，m_i 表示其重数，$i = 1$、……、116。我们采用如下记号：当且仅当 (d_i, m_i) 在完整列表 [21] 中位于 (d_j, m_j) 之前时，$i < j$。量 d_i、m_i、$i = 1$、……、116 是 q 中具有有理系数的多项式。利用 GAP [9] 以及一些显然的估计，可以验证，对于 $q > 8$ 和 $i > 14$，有 $d_i > q^{27}$。此外，当 $q = 8$ 且 $i > 14$ 时，有 $d_i > 17 \cdot 8^{26}$；当 $q = 4$ 且 $i > 14$ 时，也有 $d_i > 5 \cdot 4^{26}$。最后，如果 $q = 2$，则对所有 $i > 20$ 都有 $d_i > 5 \cdot 2^{26}$。

然而，对于 $q = 2$ 和 $15 \leq i \leq 19$，$m_i = 0$。由 (22) 可知，我们不妨假设对于某个 $1 \leq i \leq 14$，$\chi(1) = d_i$。

G^σ 的半单元素及其中心化子列于 [20]的表中。这里同样有两张表，但下文所述对每张表都成立。如引理 7.8 前一段所述，半单共轭类合并为类型。利用引理 4.6(a)，我们发现，次数为 d_i、$i = 1$、.....、14的特征标，通过 Lusztig 特征标的广义 Jordan 分解，对应于以下类型：$[1,1,1]$, $[4,1,1,]$, $[8,1,2]$, $[8,1,1]$, $[14,2,2]$, $[14,2,1]$, $[14,1,3]$, $[14,1,2]$, $[14,1,1]$, $[5,1,1]$, $[9,1,2]$, $[9,1,1]$, $[3,2,3]$, $[3,2,1]$, 此列表中类型的顺序对应于 d_1、d_2、.....、d_{14} 的顺序，若 $\varepsilon = 1$。若 $\varepsilon = -1$，则必须根据置换 (5，6)(7，9)改变此顺序。次数为 $d_1 = 1$ 的平凡特征标对应于平凡元素，即类型$[1,1,1]$。根据引理 7.9，类型 $[4,1,1]$, $[14,2,2]$,[14,1,3], $[5,1,1]$, $[9,1,2]$, $[9,1,1]$ 和 $[3,2,3]$ 中的元素不是实元素。在所有这些情形下，根据引理 4.6(b)(ii)，χ 不是实的。

下文中，我们可以假设 s 属于剩下的 6 种类型之一。首先排除与类型 $[3,2,1]$（这种类型由唯一一个 3 阶元素共轭类组成）对应的三个特征标作为 χ的候选。假设 χ 对应于类 $[3,2,1]$中的 s。利用 $\chi(1)$的精确值，我们得到 $\chi(1) > q^{27}/3$。显然，对于 $f \geq 6$，$3\delta f < q/3$。由命题 7.11(b)和(22)，剩下的情况是 $f \leq 5$。注意，χ 在 G^σ中不是不变的。另一方面，χ 在 ν下不变，因此在 β'下也不变，其中 $\beta' = \mathrm{ad}_y \circ \nu = \mathrm{ad}_t \circ \mu$ 如(20)所示。这意味着，当 $3 \nmid f$时，$t \in G$。后一种情况下，由命题 7.11(c)，$|\alpha| \leq \delta f$。由于对于 $f = 2$、4、5，$\delta f - 1 < q/3$，剩下的情况是 $f = 1$ 和 $f = 3$。若 $f = 1$，则 α 是一个对合，因此由推论 4.3.2]可得 [14,。最后，假设$f = 3$。先假设 $|\mu|$ 是奇数。由命题 7.11(b)，$|\alpha|$ 整除18；由命题 7.11(a)，对于 $p = 2$、3，$|C_G(\alpha_{(p)})| < q^{48}$。由于 $q^{27}/3 > 17q^{24}$，由引理 4.3.3]可排除这种情况。最后假设 $|\mu|$ 是偶数。由命题 7.11(d)，$|\alpha| \in \{2,6\}$。再次由推论 4.3.2]，我们可以假设 $|\alpha| = 6$。令$G^\diamond = \langle \mathrm{Inn}(G)\ \nu \rangle$，如定义 4.2.3] 所示，并令 $\chi^\diamond$ 表示 χ 到 $G^\diamond$ 的扩张，如备注 4.2.5]所示。$\langle\alpha\rangle$ 中 6 阶元素的平方是 3 阶元素，而 $\langle\alpha\rangle$中唯一的 2 阶元素是 $\alpha_{(2)}$。因此，对于每个 3 阶或 6 阶元素 $\alpha' \in \langle\alpha\rangle$，$|C_G(\alpha')| < q^{48}$，且 $|C_G(\alpha_{(2)})| < q^{52}$；参见命题 7.11(a)。现在

$q^{27}/3 > q^{26} + 4q^{24}$。由引理 2.5.5] 可知，$\chi^\diamond$ 在 $\langle\alpha\rangle$ 上的限制包含 $\langle\alpha\rangle$的两个实不可约特征标，且重数为正。于是，引理 4.3.1]表明，这种情况不会构成反例。

因此，剩下的情况是：s属于类型 $[8,1,k]$ 或 $[14,1,k]$, $k = 1$, 2，或 $[14,2,1]$。鉴于我们假设 G 是一个极小反例，引理 7.8(b) 和 4.7 排除了这些情况。□

致谢

作者按字母顺序感谢 Thomas Breuer、Xenia Flamm、Meinolf Geck、Jonas Hetz、Frank Himstedt、Frank Lübeck、Jean Michel、Britta Späth、Andrzej Szczepański 和 Jay Taylor 提供了许多有益的提示，并进行了启发性的交流。

参考文献

[1] C. Bonnafé，《关于中心非连通的有限约化群的特征：在特殊线性群和酉群中的应用》，《*Astérisque*》**306**，2006年。[2] J. N. Bray、D. F. Holt 和 C. M. Roney-Dougal，《低维有限经典群的极大子群》，LMS 讲义系列 407，剑桥大学出版社，2013年。[3] R. W. Carter，《李型单群》，John Wiley & Sons，伦敦—纽约—悉尼，1972年。[4] R. W. Carter，《李型有限群：共轭类与复特征》，John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1985年。[5] J. H. Conway、R. T. Curtis、S. P. Norton、R. A. Parker 和 R. A. Wilson，《有限群图谱》，牛津大学出版社，Eynsham，1985年。[6] K. Dekimpe、B. De Rock 和 P. Penninckx，红 R_∞ 性质与 infra-幂零流形，《Topol. Methods Nonlinear Anal.》**34**（2009），353–373。[7] F. Digne 和 J. Michel，《李型有限群的表示》，第二版，伦敦数学学会学生教材 95，剑桥大学出版社，2020年。[8] P. Fong 和 B. Srinivasan，《有限一般线性群和酉群的块》，*Invent. Math.***69**（1982），109–153。[9] GAP Group，《GAP——群、算法与编程》，4.14.0版；2024年，http://www.gap-system.org。[10] M. Geck、G. Hiss、F. Lübeck、G. Malle 和 G. Pfeiffer，《 CHEVIE—— 用于计算和处理一般特征表的系统》，*AAECC* **7**（1996），175–210。[11] M. Geck 和 G. Malle，《李型有限群的特征理论：导览》，剑桥高等数学研究丛书 187，剑桥大学出版社，剑桥，2020年。

[12] D. Gorenstein、R. Lyons 和 R. Solomon，《有限单群分类》，第3卷，数学综述与专著，美国数学学会，普罗维登斯，1998年。[13] G. Hiss 和 R. Lutowski，平坦流形的红 R_∞性质：迈向有限群的特征值一性质，载于：Mariagrazia Bianchi、Andrea Caranti、Costantino Delizia、Patrizia Longobardi、Mercede Maj、Carmine Monetta、Marialaura Noce 和 Carlo Maria Scoppola（编），《群论：IGT 2024，纪念 Otto H. Kegel 九十寿辰》，意大利伊斯基亚，2024年4月7日至12日，Springer数学与统计学论文集，施普林格，2026年。arXiv:2412.10206。[14] G. Hiss 和 R. Lutowski，《有限群的特征值一性质，I》，《J. Algebra》692（2026），592–626；（2026年1月13日在线发表）；https: //doi.org/10.1016/j.jalgebra.2025.12.021[15] R. B. Howlett，《反射群的抛物子群的正规化子》，《伦敦数学学会杂志》21（1980），62–80。[16] B. Huppert 和 N. Blackburn，《有限群II》，施普林格出版社，柏林，1982年。[17] C. Jansen、K. Lux、R. Parker 和 R. Wilson，《Brauer特征标图谱》，克拉伦敦出版社，牛津，1995年。[18] M. Larsen、G. Malle 和 P. H. Tiep，《单群的最大不可约表示》，《Proc. Lond. Math. Soc.》106（2013），65–96。[19] R. Lawther，《例外代数群中幂幺元的Jordan块大小》，《Comm. Algebra》23（1995），4125–4156。[20] F. Lübeck，《例外李型群中半单类的中心化子与数量》，http://www.math.rwth-aachen.de/~Frank.Luebeck/ chev/CentSSClasses/。[21] F. Lübeck，《某些秩为 < 9的李型群的特征次数及其重数》，http://www.math.rwth-aachen.de/~Frank.Luebeck/ chev/DegMult/index.html。[22] G. Lusztig，《关于具有非连通中心的约化群的表示》，《Astérisque》168（1988），157–166。[23] G. Malle，《特征2下类型为 E_6 和 F_4 的群的Green函数》，《Comm. Algebra》21（1993），747–798。[24] G. Malle，《李型有限群的高度为0的特征标》，《Represent. Theory》11（2007），192–220。[25] G. Malle 和 D. Testerman，《线性代数群与李型有限群》，剑桥大学出版社，剑桥，2011年。[26] J. Michel，《GAP3 的 CHEVIE 软件包开发版本》，《J. Algebra》435（2015），308–336。[27] K. Mizuno，《类型为 E_6的 Chevalley 群的共轭类》，《J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.》24（1977），525–563。[28] W. A. Simpson 和 J. S. Frame，《SL(3, q)、SU(3, q^2)、PSL(3, q)、PSU(3, q^2) 的特征表》，《Canadian J. Math.》25（1973），486–494。[29] J. Taylor，《自同构在辛群不可约特征标上的作用》，《J. Algebra》505（2018），211–246。

Gerhard Hiss：代数与数论教席，亚琛工业大学，52056 亚琛，德国电子邮箱地址：gerhard.hiss@math.rwth-aachen.de

Rafał Lutowski：数学、物理与信息学研究所，格但斯克大学，维塔·斯沃什街57号，80-308 格但斯克，波兰电子邮箱地址：rafal.lutowski@ug.edu.pl