arXiv:2601.09645v1 [math.CV] 14 Jan 2026

带角的 Q-凸函数在复流形中的性质与线丛延拓

Youssef
*Alaoui*y.alaoui@iav.ac.ma

数学系，*Hassan II* 农学院与兽医科学系，MadinatAlIrfane，BP6202，拉巴特，10101，摩洛哥，

Abstract. 本文证明：如果 X 是维数为 $n \geq 4$ 的复流形，并且存在一个 q-凸带角函数 $f \in F_q(X)$，那么当 $1 \leq q \leq n-3$时，$\{f > c\}$ 上的每个全纯线丛都唯一延拓到 X 。当 $n \geq 3q$时，这推广了 [5] 中关于具有相应穷竭函数 $f \in F_q(X)$ 的 q-完备带角复流形的一个众所周知的结果。

1. Introduction

文献 [5]表明：如果 X 是一个维数为 $n \geq 3q$ 、具有相应穷竭函数 ϕ 的 q-完备带角复流形，并且如果 L 是定义在 $X \setminus K$上的全纯线丛，其中 $K = \{z \in X : \ \phi(z) \leq c\}$，那么当 $1 \leq q \leq n-2$时，存在唯一的定义在 X 上的全纯线丛 L ，使得 $L|_{X \setminus K} = L$ 。该延拓在同构意义下是唯一的。

Chen [4]针对任意维数 $n \geq 2$下形状一般的紧 $K \subset \Omega$，就伪凸域 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ 上的延拓问题给出了一个反例。

Ivashkovich [7] 此前已证明，在 $\mathbb{C}^2$中存在一个二维实解析全实流形 Ω、一个非紧子集 $K \subset \Omega$ 以及 $\Omega \setminus K$上的一个线丛 L，该线丛无法全纯延拓到 Ω；即使假设该线丛是拓扑平凡的，这一结论仍然成立。

本文的主要目的是将 [5]中得到的上述结果推广到维数 $n \geq 4$ 的复流形 X ，这些复流形不一定带角 q-完备，但其上存在一个带角 q-凸函数 $f \in F_q(X)$，满足 $1 \leq q \leq n-3$。更准确地说，我们证明：

定理。设 X 是一个维数为 $n \geq 4$ 且满足 $\xi_0 \in X$的复流形。假设存在一个带角 q-凸函数 $f \in C^0(X)$ ，满足 $1 \leq q \leq n-3$；令 $Y = \{z \in X : \ f(z) > f(\xi_0)\}$。则限制映射

$$H^p(X, \mathcal{O}^*) \to H^p(Y, \mathcal{O}^*)$$

当 $p = 0$、1 和 2 时为双射

并且当 $p = 3$ 时是单射。

应当注意，在上述定理中，函数 $f \in F_q(X)$ 不一定穷尽 X，而且本文所使用的第一个引理已由作者在发表於 arXiv 的预印本 [2] 中得到。

我们首先回顾一些关于 q-凸性的定义。

设 X 是一个复流形。众所周知，函数 $\phi \in C^\infty(X)$ 是 q-凸的，当且仅当对于每一点 $z \in X$，Levi 形式 $L_z(\phi; z)$ 在每个切空间 $T_z X$ 上至多有 $q-1$ 个负特征值或零特征值，$z \in X$。

如果存在一个 q-凸函数 $\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$，其在 X 上是穷尽的，即对于任意 $c \in \mathbb{R}$.，$\phi(x) < c\}$ 在 X 中是相对紧的：$\{x \in X$，则称 X 是 q-完备的。

如果对于 X 上的每个凝聚解析层 $\mathcal{F}$，上同调群 $H^r(X, \mathcal{F})$ 对所有 $r \geq q$ 均消失，则称空间 X 是上同调 q-完备的。

函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 称为带角的 q-凸函数，如果 f 连续，并且对于每个 $x \in X$，存在 U，它是 x 在 X 中的一个邻域，以及定义在 U 上的 q-凸函数$\phi_1, \cdots, \phi_r$，满足 $f|_U = max(\phi_1, \cdots, \phi_r)$。

我们用 $F_q(X)$ 表示定义在 X上的带角 q-凸函数的集合。

2. Proof of the theorem

在证明我们对 Hartogs 线丛延拓的推广时，需要以下结果（ [3], 命题 12）：

引理 1。设 D 是 $\mathbb{C}^n$中的一个区域，$\xi \in D$，且 $\phi \in C^\infty$（D）是一个 q-凸函数。那么，对于 D 上的任意凝聚解析层 $\mathcal{F}$，存在 ξ 的一个 *Stein* 邻域基本系 $U \subset D$，使得如果 $Y = \{z \in D : \phi(z) > \phi(\xi)\}$，则对于 $0 < p < n-q$ 有 $H^p(Y \cap U, \mathcal{F}) = 0$，且 $H^0(U, \mathcal{F}) \to H^0(U \cap Y, \mathcal{F})$ 是同构。

除了 Andreotti-Grauert 理论外， [3], 定理的证明还使用了 Grothendieck [6] 的谱序列以及上同调中的 Mittag-Leffler 定理。

引理 2. 设 X 是一个维数为 n的复流形，并设 $\phi : X \to \mathbb{R}$ 是 X上的光滑 q-凸函数 ϕ。设 $\xi_0 \in X$ 和 $X'_c = \{x \in X : \phi(x) > c\}$，其中 $c = \phi(\xi_0)$。那么，对于 X 上的任意凝聚解析层 $\mathcal{F}$，限制映射

$$H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X'_c, \mathcal{F})$$

当且仅当 $p \leq n-q-1$时是
双射；当 $p = n-q$.时是单射

证明。设 $V \subset\subset X$ 是 ξ_0 的一个开邻域，且双全纯于 $\mathbb{C}^n$中的一个区域。根据定理 1，存在 ξ_0 的一个连通 Stein 邻域基本系 $U \subset V$，使得 $H^r(U \cap X'_c, \mathcal{F}) = 0$ 对 $1 \leq r < n-q$ 成立，并且

$H^0(U, \mathcal{F}) \to H^0(U \cap X'_c, \mathcal{F})$是一个同构，或者等价地（见 [6] 或 [1]），$H^r_S(\mathcal{F}) = 0$ 对 $r \le n-q$，成立，其中 $H^r_S(\mathcal{F})$ 是支撑在 $S = \{x \in X$ 上的上同调层：$\phi(x) \le c\}$ 且系数在 $\mathcal{F}$. 中。此外，存在一个谱序列

$$H^p_S(X, \mathcal{F}) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(X, \underline{H^q_S}(\mathcal{F}))$$

由于 $H^p_S(\mathcal{F}) = 0$ 对于 $p \le n-q$，那么对于任意 $p \le n-q$，上同调群$H^p_S(X, \mathcal{F})$ 均消失，并且局部上同调正合列

$$\cdots \to H^p_S(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X'_c, \mathcal{F}) \to H^{p+1}_S(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

这意味着 $H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X'_c, \mathcal{F})$ 是双射，对于任意 $c \in \mathbb{R}$，若 $p \le n-q-1$，且当 $p = n-q$ 时为单射。□

引理 3. 设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开集，$f \in F_q(D)$，$1 \le q \le n-2$。那么，对于每个点 $\xi_0 \in D$，都存在一个由 V 构成的 *Stein* 邻域基本系，使得若 $Y = \{z \in D: f(z) > f(\xi_0)\}$，则对于其上的任意凝聚解析层 $\mathcal{F}$，我们有：

(i) $H^0(V, \mathcal{F}) \to H^0(V \cap Y, \mathcal{F})$ 是双射；*(ii)* $H^r(V \cap Y, \mathcal{F}) = 0$ 对 $0 < r < n-q$成立。

证明。设 U 是 D 中 ξ_0 的一个 Stein 邻域，使得存在有限个q-凸函数 $\phi_1, \cdots, \phi_s$: $U \to \mathbb{R}$，且 $f|_U = max(\phi_1, \cdots, \phi_s)$。

根据引理 1，我们可以选取 ξ_0 的一个 Stein 开邻域 $V \subset U$，使得当 $s = 1$ 时，断言 (i) 和 (ii) 成立。

显然，我们还可以假设限制 $f|_U: U \to \mathbb{R}$ 是两个 q-凸函数 $f|_U = max(\phi_1, \phi_2)$ 的最大值，这意味着 $Y \cap U = Y_1 \cup Y_2$，其中 $Y_i = \{z \in U: \phi_i(z) > f(\xi_0)\}$ 对 $i = 1, 2$ 成立。若 $q+1 < n$，则存在 D 中 ξ_0 的一个 Stein 开邻域 $V \subset U$，使得 $H^0(V, \mathcal{F}) \cong H^0(V \cap Y, \mathcal{F})$，$H^1(V, \mathcal{F}) \cong H^1(V \cap Y, \mathcal{F}) = 0$。事实上，根据引理 1，存在 D中 ξ_0的 Stein 开邻域 $U_i \subset U$、$i = 1, 2$，使得 $H^0(U_i, \mathcal{F}) \cong H^0(Y_i \cap U_i, \mathcal{F})$，$H^1(Y_i \cap U_i, \mathcal{F}) \cong H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$。令 $V = U_1 \cap U_2$。若对于 $j \ge 1$，开集$Z_j = \{z \in Y_1 \cap V: \phi_2(z) > f(\xi_0) - \frac{1}{j}\}$ 非空，则根据引理 2，限制映射

$$H^p(V, \mathcal{F}) \to H^p(Y_1 \cap V, \mathcal{F}) \text{ and } H^p(Y_1 \cap V, \mathcal{F}) \to H^p(Z_j, \mathcal{F})$$

对于 $p = 0,1$ 是双射。因此，根据 Mittag-Leffler 定理可得 $H^p(Y_1 \cap V, \mathcal{F}) = H^p\left(\varprojlim Z_j, \mathcal{F}\right) \cong \varprojlim H^p(Z_j, \mathcal{F}) \cong H^p(Y_1 \cap Y_2 \cap V, \mathcal{F})$ 对于 $p = 0,1$，我们推得 $H^0(Y_i \cap V, \mathcal{F}) \cong H^0(Y_1 \cap Y_2 \cap V, \mathcal{F})$ 且 $H^1(Y_i \cap V, \mathcal{F}) \cong H^1(Y_1 \cap Y_2 \cap V, \mathcal{F}) = 0$ 由上同调的 Mayer-Vietoris 序列可得

$$0 \to H^0(V \cap Y, \mathcal{F}) \to H^0(Y_1 \cap V, \mathcal{F}) \oplus H^0(Y_2 \cap V, \mathcal{F}) \to H^0(Y_1 \cap Y_2 \cap V, \mathcal{F}) \to H^1(V \cap Y, \mathcal{F}) \to 0$$

即 $H^1(V \cap Y, \mathcal{F}) = 0$ 且 $H^0(V, \mathcal{F}) \cong H^0(V \cap Y, \mathcal{F})$。

现在，如果 $2 \leq r < n - q$，那么，与此前所用证明类似，可以证明存在一个 Stein 邻域 $V \subset U$，使得 $H^{r-1}(Y_i \cap V, \mathcal{F}) \cong H^r(Y_i \cap V, \mathcal{F}) = 0$ 当 $i = 1, 2$ 且 $H^{r-1}(Y_1 \cap Y_2 \cap V, \mathcal{F}) \cong H^{r-1}(Y_1 \cap V, \mathcal{F}) = 0$时，关于上同调的 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots \to H^{r-1}(Y_1 \cap V, \mathcal{F}) \oplus H^{r-1}(Y_2 \cap V, \mathcal{F}) \to H^{r-1}(Y_1 \cap Y_2 \cap V, \mathcal{F}) \to H^r(V \cap Y, \mathcal{F}) \to H^r(Y_1 \cap V, \mathcal{F}) \oplus H^r(Y_2 \cap V, \mathcal{F}) \to \cdots$$

蕴含 $H^r(V \cap Y, \mathcal{F}) = 0$。 □

引理 4。设 X 是一个维数为 n 的复流形，并设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是 X 上的连续 q-凸带角函数。设 $\xi_0 \in X$ 和 $X'_c = \{x \in X: f(x) > c\}$，其中 $c = f(\xi_0)$。那么，对于 X 上的任意凝聚解析层 $\mathcal{F}$，限制映射

$$H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X'_c, \mathcal{F})$$

当 $p \leq n - q - 1$ 时为双射，

当 $p = n - q.$ 时为单射

证明。设 $V \subset\subset X$ 是 ξ_0 的一个开邻域，且双全纯于 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域。于是根据引理 2，存在 ξ_0 的一个连通 Stein 邻域基本系 $U \subset V$，使得 $H^r(U \cap X'_c, \mathcal{F}) = 0$ 对于 $1 \leq r < n - q$ 和 $H^0(U, \mathcal{F}) \to H^0(U \cap X'_c, \mathcal{F})$ 是同构。然后，类似于引理 2 的证明可知，支撑在 $S = \{x \in X$ 中的上同调层 $H^r_S(\mathcal{F})$: $f(x) \leq c\}$ 且系数在 $\mathcal{F}$ 中，当 $r \leq n - q$ 时消失。因此，利用谱序列

$$H^p_S(X, \mathcal{F}) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(X, \underline{H^q_S}(\mathcal{F}))$$

我们得到上同调群 $H^p_S(X, \mathcal{F}) = 0$，当 $p \leq n - q$ 时成立。并且，局部上同调正合列

$$\cdots \to H^p_S(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X'_c, \mathcal{F}) \to H^{p+1}_S(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

这意味着当 $p \leq n - q - 1$ 时， $H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X'_c, \mathcal{F})$是双射；当$p = n - q$时，是单射。□

Proof of the theorem.

证明。令 $V \subset\subset X$ 为 ξ_0 的一个开邻域，它可以与 $\mathbb{C}^n$中的一个区域等同。于是，根据引理 1，存在一个连通

Stein 邻域 $U \subset V$的基本系，使得对于每个 $\mathcal{F} \in coh(X)$， $H^p(U \cap Y, \mathcal{F}) = 0$对 $p = 1,2$ 而言，且 $H^0(U, \mathcal{F}) \to H^0(U \cap Y, \mathcal{F})$ 是一个同构。

我们可以选取开集 U，使其为以 ξ 为中心、半径为 $r \to 0$ 的开球。于是 U 是可缩的。因此，对于 $p \geq 1$， $H^p(U, \mathbb{Z}) = 0$ ；这由与层正合列相关的上同调长正合列可得

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2i\pi} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0,$$

由此可知，对于 $p \geq 1$， $H^p(U, \mathcal{O}^*) = 0$。

首先应当指出，若 L 是 $U \cap Y$ 上的平凡全纯线丛，则显然 L 是解析平凡的。事实上，由于限制映射

$$H^p(U, \mathcal{O}) \to H^p(U \cap Y, \mathcal{O})$$

对于 $p = 0$，1，2 是双射，且 U 是连通的，因此对于 $p = 1$，2， $H^p(U \cap Y, \mathcal{O}) = 0$，并且限制映射

$$H^0(U, \mathcal{M}^*) \longrightarrow H^0(U \cap Y, \mathcal{M}^*)$$

也是双射。

令 $\mathcal{D}_{U\cap Y}$ 表示 $U\cap Y$ 上的卡蒂埃除子层，即 $\mathcal{D}_{U\cap Y} = \mathcal{M}^\star_{U\cap Y}/\mathcal{O}^\star_{U\cap Y}$。那么在 $U \cap Y$ 上存在一个层正合列:

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^\star_{U\cap Y} \longrightarrow \mathcal{M}^\star_{U\cap Y} \longrightarrow \mathcal{D}_{U\cap Y} \longrightarrow 0$$

以及相应的上同调正合列

$$\cdots \to H^0(U \cap Y, \mathcal{D}_{U\cap Y}) \to H^1(U \cap Y, \mathcal{O}^*_{U\cap Y}) \to H^1(U \cap Y, \mathcal{M}^*) \to \cdots$$

由于 $H^1(U \cap Y, \mathcal{O}) = 0$，那么由上同调正合列

$$H^1(U \cap Y, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(U \cap Y, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(U \cap Y, \mathbb{Z}).$$

可知，拓扑平凡全纯线丛的集合

$$\mathrm{Pic}^0(U \cap Y) = Ker(H^1(U \cap Y, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(U \cap Y, \mathbb{Z}))$$

包含于 $Im(\mathcal{D}(U \cap Y) \xrightarrow{\delta_{U\cap Y}} Pic(U \cap Y) \cong H^1(U \cap Y, \mathcal{O}^*))$。

因此，如果 L 是 $Y\cap U$上的平凡全纯线丛，由于 $H^1(U\cap Y, \mathcal{O}) =0$，那么 L 与 $U \cap Y$上的某个卡蒂埃除子 D 相关联。众所周知，连通复流形 M 上的全纯线丛 L 与卡蒂埃除子相关联，当且仅当 L 存在一个非平凡的亚纯截面。于是存在 $\sigma \in H^0(U \cap Y, \mathcal{M}^*)$，使得 $L = O(div(\sigma))$。由于 $H^0(U, \mathcal{O}) \cong H^0(U \cap Y, \mathcal{O})$，且 U是连通的，因此限制映射

$$H^0(U, \mathcal{M}^*) \longrightarrow (U \cap Y, \mathcal{M}^*)$$

是双射，因此存在唯一的 $\tilde{\sigma} \in H^0(U, \mathcal{M}^*)$，使得 $\tilde{\sigma}|_{U\cap Y} = \sigma$.˜由于根据假设 $L = O(div(\tilde{\sigma}))$ 是解析平凡的，因此显然该类

$[L]=[O(div(\tilde{\sigma}|_{U\cap Y})]=[L|_{U\cap Y}]=0$。

现在我们将证明 $H^1(U\cap Y,\ \mathcal{O}^*)=0$。由于限制映射$\Gamma(U,\ \mathcal{O})\to\Gamma(U\cap Y,\ \mathcal{O})$ 是双射，因此 $\Gamma(U,\ \mathcal{O}^*)\to\Gamma(U\cap Y,\ \mathcal{O}^*)$ 也是双射。根据局部上同调正合列，只需证明:

$$0=H^1(U,\mathcal{O}^*)\to H^1(U\cap Y,\mathcal{O}^*)\to H^2_S(U,\mathcal{O}^*)\to H^2(U,\mathcal{O}^*)=0,$$

其中 $S=U\setminus Y$，要证明 $H^2_S(U,\ \mathcal{O}^*)=0$。为此，我们考虑局部上同调正合列:

$$\cdots\to H^2_S(U,\mathcal{O})\to H^2_S(U,\mathcal{O}^*)\to H^3_S(U,\mathbb{Z})\to\cdots$$

由于 $H^2(U,\ \mathcal{O})=H^1(U\cap Y,\ \mathcal{O})=0$，因此 $H^2_S(U,\ \mathcal{O})=0$。剩下要证明 $H^3_S(U,\ \mathbb{Z})=0$。为此，我们考虑具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccc} H^1(U,\mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(U,\mathbb{Z}) & \to & H^2(U,\mathcal{O})=0 \\ \downarrow r_1 & & \downarrow r_2 & & \downarrow \\ H^1(U\cap Y,\mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\beta} & H^2(U\cap Y,\mathbb{Z}) & \to & H^2(U\cap Y,\mathcal{O})=0 \end{array}$$

由于 r_1 是同构且 β 是满射，因此 r_2 是满射。接着考察正合列

$$\cdots\to H^2(U,\mathbb{Z})\xrightarrow{r_2}H^2(U\cap Y,\mathbb{Z})\to H^3_S(U,\mathbb{Z})\to H^3(U,\mathbb{Z})$$

并注意到 r_2 是满射且 $H^3(U,\ \mathbb{Z})=0$，我们得到 $H^3_S(U,\ \mathbb{Z})=0$，因此 $H^1(U\cap Y,\ \mathcal{O}^*)=0$。

现在，由于 $H^0(U,\ \mathcal{O}^*)\to H^0(U\cap Y,\ \mathcal{O}^*)$ 是双射，且对 $p=1,\ 2,\ H^p(U,\ \mathcal{O}^*)=H^p(U\cap Y,\ \mathcal{O}^*)=0$，由 [6] 可知 $\underline{H^p_S}(\mathcal{O}^*)=0$，其中$\underline{H^p_S}(\mathcal{O}^*)$ 是支撑在 $S=\{z\in X$ 上的上同调层: $\phi(z)\leq c\}$，系数取自 $\mathcal{O}^*$。我们从谱序列

$$H^p_S(X,\mathcal{O}^*)\Longleftarrow E_2^{p,q}=H^p(X,\underline{H^q_S}(\mathcal{O}^*))$$

对于任意 $0\leq p\leq 3$，上同调群 $H^p_S(X,\ \mathcal{O}^*)$ 都为零，并且局部上同调正合列

$$\cdots\to H^p_S(X,\mathcal{O}^*)\to H^p(X,\mathcal{O}^*)\to H^p(Y,\mathcal{O}^*)\to H^{p+1}_S(X,\mathcal{O}^*)\to\cdots$$

意味着当 $0\leq p\leq 2$ 时，$H^p(X,\ \mathcal{O}^*)\to H^p(Y,\ \mathcal{O}^*)$ 是双射，
且当 $p=3$ 时为单射。 □

References

[1] Y. Alaoui，Stein 流形中局部 q-完备集的上同调。《复变函数与椭圆方程》第51卷，第2期，2006年2月， $137-141$

[2] Y. Alaoui，具有奇点的局部 Stein 性问题。arXiv：0911.1800v2

[3] A. Andreotti 和 H. Grauert，复空间上同调的有限性定理。《法国数学会通报》90（1962，） $193-259$

[4] Chen, Z.：全纯线丛的 Hartogs 型延拓反例。《几何分析杂志》（2018年）28：$2624-2643$

[5]Fornaess, J.E.、Sibony, N.、Wold, E.F.： $\mathbb{P}^n$ 中的带角的 Q-完备域及线丛延拓。《数学杂志》273(1-2)，589-604（2013年）

[6] Grothendieck, A.，1957年，关于同调代数的若干问题。《东北数学杂志》，IX，119-221

[7]Ivashkovich, S.：全纯线丛的根与对数的 Bochner-Hartogs 型延拓定理。《斯捷克洛夫数学研究所学报》279（复分析与几何问题），269-287（2012年）