arXiv:2601.09650v1 [math.GT] 14 Jan 2026

ξ-填充的 3-流形的几何障碍

DANIEL GALVIN、PETER TEICHNER 和 SIMONA VESELA

我们研究具有给定边界的 4-流形的正规 1-型实现问题。更确切地说，给定一个正规 1-型 ξ 和闭的三维 ξ-流形 Y，是否存在一个边界为 Y 的紧致四维 ξ-流形？我们描述了此类 4-流形存在性的三阶段障碍理论，其中我们的主要贡献是一个“三级”障碍，我们通过 Wall二次自交形式对其进行了几何描述。

1. 引言

Kreck 的修正手术理论 [Kre99] 的一项应用，将紧致光滑 4-流形按（$S^2 \times S^2$）-稳定微分同胚进行分类的问题，归结为计算某些 ξ-配边群。在这里，$\xi : B \to BO$ 是相关流形 X 的正规 1-型，是稳定法丛 $\nu_X : X \to BO$ 的 Postnikov-Moore逼近。因此，ξ 在同伦群 π_i 上对 $i > 2$ 诱导同构（并且在 π_2上诱导单同态），且存在一个提升 $u_X : X \to B$，它在 π_i 上对 $i < 2$ 是同构（并且在 π_2上是满同态）。

我们称 u_X 在 X 上的一个正规*1*-光滑化，并且每当 u_M时：$M \to B$ 将一个流形 M 的稳定法丛提升到 ξ之上，我们称（M，u_M）为一个 ξ-流形，并称 u_M为一个 ξ-结构。若 Y是一个带有 ξ-结构 u_Y的闭3-流形，则可以提出以下存在性与唯一性问题：

(1)（Y，u_Y）是否具有一个 ξ-填充，即一个边界为（Y，u_Y）的4维 ξ-流形（X，u_X）？(2) 我们能否选择一个 ξ-填充（X，u_X），使其成为正规1-光滑化？(3) 这样的1-光滑化（X，u_X）在稳定微分同胚意义下有多少个？

通过在 X ξ-填充的内部进行手术，可以将其转化为正规1-光滑化（定理2.7），从而在问题（1）成立的前提下回答问题（2）。Kreck定理将问题（3）转化为关于5维 ξ-填充的问题，具体如下。若两个正规1-光滑化（X_i，u_i）的边界均为（Y，u_Y），则它们（带有边界微分同胚 $\varphi : Y \to Y$）稳定微分同胚，当且仅当 $X_1 \cup_\varphi -X_2$ 具有一个 5 维 ξ- 填充。因此，问题（1）是稳定分类问题（3）在低一维情形下的对应问题，所研究的是在给定边界条件下正规1-光滑化（X，u_X）的存在性问题。这正是本文的目的。

我们从上述的 ξ-流形 (Y, u_Y) 出发，并询问它在 ξ-流形的配边群 Ω_3^ξ 中是否代表零。一个情形非常简单，即当 $\pi_2(B) \neq 0$ （完全非自旋情形）时，因此 $\pi_2(\xi)$ 给出一个同构 $\pi_2(B) \cong \pi_2(BO) \cong \mathbb{Z}/2$。那么$B$与 $BSO \times B\pi$ 同伦等价，且 $\Omega_3^\xi \cong H_3(\pi; \mathbb{Z}^{w_1^\pi})$。这里 $\pi := \pi_1(B)$，而 $w_1^\pi \in H^1(\pi; \mathbb{Z}/2)$ 是 ξ 限制到 $B\pi$ 上的第一 Stiefel-Whitney 类。在这种情形下，(Y, u_Y) 存在一个 ξ-填充，当且仅当 $(p_2 \circ u_Y)_*[Y] = 0 \in H_3(\pi; \mathbb{Z}^{w_1^\pi})$，由此完整回答了问题 (1)。

从现在起，我们假设 $\pi_2(B) = 0$，因此正规 1-型 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$：$B \to BO$是普适 Stiefel-Whitney 类 (w_1, w_2) 的拉回：$BO \to B\mathbb{Z}/2 \times B^2\mathbb{Z}/2$ 以及 $_1$

$(w_1^\pi,\ w_2^\pi)$: $B\pi \to B\mathbb{Z}/2 \times B^2\mathbb{Z}/2$。特别地，存在一个纤维化 p: $B \to B\pi$，使得 ξ 到纤维 $BSpin$ 的限制是典范投影。

在这种情况下，第二位署名作者 [Tei92](参见定理 B.7) 构造了他称为"James 谱序列"的对象，用于 ξ。$B\pi$ 的骨架诱导出一个过滤

$$\{0\} = F_{0,3} \le F_{1,2} \le F_{2,1} \le F_{3,0} = \Omega_3^\xi,$$

我们将为其给出新的几何解释。

在 M 上的任意 ξ-结构给出 $p \circ u_M$: $M \to B\pi$ 在 w_1^π 上。如果 $(Y, p \circ u_Y)$ 是紧致四维流形 (X, u_X^π) 的边界，且具有 u_X^π: $X \to B\pi$ 是 $p \circ u_Y$ 的延拓，那么我们称其为 $(B\pi, w_1^\pi)$ 对 (Y, u_Y) 的填充。存在一个唯一的障碍 $\mathcal{O}(X, Y, u_X^\pi, u_Y) \in H^2(X, Y; \mathbb{Z}/2)$，阻碍将 ξ-结构 u_Y 相对于 u_X^π 延拓到 X 上。

定理 A. 设 $\xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$: $B \to BO$ 是一个具有 $\pi_2(B) = 0$ 的正规 *1*-型，并设 (Y, u_Y) 是一个三维 ξ-流形。对于上述 $\Omega\Omega_3^\xi$ 的过滤，相应的几何条件如下：

$(Y, u_Y) \in F_{2,\ 1} \iff$ 存在一个$(B\pi, w_1^\pi)$-填充(Y, u_Y)。

$(Y, u_Y) \in F_{1,\ 2} \iff$ 存在一个$(B\pi, w_1^\pi)$-填充$(X, u_X^\pi)_2 \iff$ 使得(Y, u_Y)上的 $\mathcal{O}(X, Y, u_X^\pi, u_Y)$ 具有一个球面代表元。

$(Y, u_Y) \in F_{0,\ 3} \iff$ 存在一个 ξ-填充(Y, u_Y)。此外，

$$(Y, u_Y) \in F_{2,1} \iff (p \circ u_Y)_*[Y] = 0 \in H_3(\pi; \mathbb{Z}^{w_1^\pi}).$$

若$(Y,\ u_Y) \in F_{2,\ 1}$，则$(Y,\ u_Y) \in F_{1,\ 2} \iff (u_X^\pi)_*$庞加莱对偶$(\mathcal{O}(X,\ Y,\ u_X^\pi,\ u_Y)) = 0 \in H_2(\pi;\ \mathbb{Z}/2)/(\delta_2)$。

若$(Y, u_Y) \in F_{1,\ 2}$，则$(Y, u_Y) \in F_{0,\ 3} \iff$ 对于 $\mathcal{O}(X, Y, u_X^\pi, u_Y)$的球面代表元 c，我们有 $[\mu_J(c)] = 0 \in H_1(\pi;\ \mathbb{Z}/2)/(\delta_2, \delta_3)$。

其中 μ_J 表示对 *Wall* 的球面自交数作某种修正，我们将在第*3*节中介绍；而 δ_2 和 δ_3 对应于某些"几何微分"，我们将在稍后定义。

Wall 的二次自交形式 μ: $\pi_2(X) \to \mathbb{Z}[\pi]/(\sim)$ 计数 4-流形 X 中浸入球面的自交点（附带基本群元素），其取值落在群环 $\mathbb{Z}[\pi]$ 的某个商中（我们将在第 3 节中给出精确定义）。我们对这个 μ: $\pi_2(X) \to I/(\sim)$ 作出修正，其中 $I := \ker(\mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Z})$ 表示增广理想。接着，我们通过后复合投影映射 $I/(\sim) \to H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)$ 来定义 μ_J，

我们将在第3节中对其作出说明。为了根据同调类 c 的自交来定义三级不变量（如定理 A的陈述所示），我们需要使其不依赖于其中涉及的各种选择。这个商涉及某些"几何微分"δ_*，下面我们将对其作简要介绍。它们将与 James 谱序列中的微分相对应，我们将其记为 d_*。我们将第一个定义为

$$\begin{aligned} \delta_2^{(4,0)}\colon H_4(\pi; \mathbb{Z}^{w_1^\pi}) &\to H_2(\pi; \mathbb{Z}/2) \\ (u_M^\pi)_*[M] &\mapsto (u_M^\pi)_* \operatorname{PD}(\mathcal{O}(M, \emptyset, u_M^\pi, \emptyset)) \end{aligned}$$

其中 (M, u_M^π) 是一个闭 4-流形，代表 a（隐含地，这意味着障碍的像不依赖于这一选择）。同样，设 (X, u_X^π) 是 (Y, u_Y) 的一个填充，使得

其 u_X^π 在基本群上诱导同构（这可以通过手术实现）。那么，存在与纤维化对应的以下正合序列 u_X^π （见第 A节）。

(1.1) $$H_3(X;Z/2) \xrightarrow{(u_X^\pi)_*} H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\mathfrak{f}} \pi_2(X)\otimes\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{h_2^\Lambda} H_2(X;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{(u_X^\pi)_*} H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$$

因此，对于 $z\in H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)$，为 $\mathfrak{f}(z)$ 选择一个提升，会产生一个零-$\mathbb{Z}/2$-同调的浸入球面（事实上，所有此类球面都以这种方式产生）。我们将第二几何微分定义为

$$\begin{aligned}\delta_2^{(3,1)}\colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) &\to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)\\ z &\mapsto \mu_J(c)+\lambda(c,w)\end{aligned}$$

其中 w 是 $\mathcal{O}(X',Y,u_{X'}^\pi,u_Y)$ 的浸入球面代表元，c 表示 $\mathfrak{f}(z)$ 的浸入球面代表元，而 λ 表示 X 上的等变交叉型的适当规范化（与 μ_J 的定义方式一致）。我们在第5.2节证明这一定义良定。

定理 B。设 $\xi(\pi,w_1^\pi,w_2^\pi)$ 为一个正规 *1*-型。那么 $\delta_2^{(4,0)}=d_2^{(4,0)}$，其中 $d_2^{(4,0)}$ 是 *James* 谱序列中相应的微分；以及 $\delta_2^{(3,1)}=d_2^{(3,1)}$，其中 $d_2^{(3,1)}$ 是 *James* 谱序列中相应的微分。

几何微分 $\delta_3^{(4,0)}$ 定义为

$$\begin{aligned}\delta_3^{(4,0)}\colon \ker(\delta_2^{(4,0)}) &\to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/(\delta_2^{(3,1)})\\ (u_M^\pi)_*[M] &\mapsto \mu_J(c_M)\end{aligned}$$

其中 (M,u_M^π) 是一个闭 4-流形，且 $\delta_3^{(4,0)}(u_M^\pi)_*[M])=0$ 且 $c_M\in\pi_2(M)$ 是 $\mathcal{O}(M,u_M^\pi)$ 的球面代表元。我们将在第 5.3 节证明这是良定义的。

注 1.1. 定理 A 的一个推论是，$\delta_3^{(4,0)}$ 的像与 $d_3^{(4,0)}$ 的像相同，但我们不知道它们作为映射是否相同。这一事实将在后文作为定理 6.11 陈述。

吴的一个著名定理（例如见 [MS74，定理 11.14]）应用于 4-流形后给出公式

$$Q(\alpha,w)=Q(\alpha,\alpha)\mod 2,$$

其中 Q 表示闭 4-流形 X的同调上的交叉型，w 表示第二斯蒂费尔-惠特尼类 $w_2(X)$ 的庞加莱对偶，且 $\alpha\in H_2(X)$。定理 B 的一个推论是吴公式的以下次级版本，它或许本身也值得关注。

定理 C. [次级吴公式] 设 X 是一个边界为 Y的紧致四维流形。对于 Y上的任意正规自旋结构 s，令 $w_2^s\in H^2(X,Y;\ \mathbb{Z}/2)$ 表示相对第二斯蒂费尔-惠特尼类。设 c 是 w_2^s的一个浸入球面代表元，且 b 是 X中任意一个零-$\mathbb{Z}/2$-同调的浸入球面。固定任意映射 $u_X^\pi\colon\ X\to B\pi$。则在 I 中有

$$\lambda_J(b,c)=\mu_J(b)\mod IJ$$

其中 I 和 J 分别表示 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/2$ 的增广理想，$\mathbb{Z}[\pi_1(X)],$，而 λ、μ的定义见第 3节。

有趣的是，定理 C 适用范围超出了本文其余部分所讨论的相对情形。

注 1.2。陈述次级吴公式所需的所有数据，都可以从自旋4-流形 X 的二次2型 ($\pi_1(X)$ $\pi_2(X)$ $k(X)$ $\lambda(X)$) 中获得，其中$k(X)$ 表示对应于 X第二 Postnikov 阶段的 k-不变量。这是因为，在可定向情形下， μ_J 由 λ_J决定；根据正合序列 (1.1)，作为 X 中的 $\mathbb{Z}/2$-零同调浸入球面，恰好由其属于映射 $\mathfrak{f}$ 的像所决定；该映射来自正合序列 (1.1)，由 $k(X)$决定（见 A 节）；而 c 可以取为平凡结，因为 X 是自旋的。这意味着定理 C 或可用于证明某些二次2型无法由自旋四维流形实现。我们在此并未尝试探索这一途径。

注 1.3。 对计算 $\mu_J(c)$ 的例子感兴趣的读者（如定理 A中所述），可以参阅定理 6.8，我们在其中计算了这一障碍的典型非平凡例子。这里取 $\xi = \xi(\mathbb{Z}, w_1^\pi, 0)$，而该3-流形则根据 $Y = T^3$或 $S^1 \times K$的不同，分别为 K 克莱因瓶。 w_1^π。

注 1.4。 本文完全在光滑范畴中开展，因为在拓扑范畴中工作并不会带来更一般的结果。下面对此作进一步说明。

首先，每个拓扑3-流形都存在一个光滑结构，且该结构在同伦意义下唯一[Cai40, Moi52, Bin54], ，因此我们可以不失一般性地假设输入的3-流形是光滑的。其次，假设有一个光滑的 ξ-3-流形（Y, u_Y），它存在一个拓扑的 ξ-填充（X, u_X），其中 ξ是一个4-流形的潜在正规1-型。相对Kirby-Siebenmann不变量 $ks(X, Y) \in H_4(X, Y; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ 在必要时可通过与Freedman的 E_8 流形 [Fre82], 作连通和，将其调整为零；并且由于 E_8 是一个自旋、单连通4-流形，ξ 结构 u_X 可以延拓至连通和之后（注意，这里用到了 ξ 是一个正规1-型这一点）。于是，根据Freedman-Quinn稳定光滑化定理 [FQ90，定理8.6], ，在与 $S^2 \times S^2$作足够多次连通和后，我们的填充上存在一个光滑结构。同样，由于 $S^2 \times S^2$ 是一个自旋、单连通4-流形，延拓 ξ-结构并无问题，因此我们构造出了（Y, u_Y）的一个光滑 ξ-填充。

1.1. **背景**。 Milnor [Mil63] 和 Kirby [Kir89，VII，定理 3] 证明了自旋配边群 Ω_3^{Spin} 为零。在证明中，实际上可以构造出一个单连通填充。在 Kirby 的证明中，他首先证明存在一个定向填充，随后考虑第二相对斯蒂费尔-惠特尼类的一个代表元。然后，他使用一个明确的几何论证来完成自旋零配边。可以将定理 A理解为对所有正规 1-型的这一结果的推广，不过如果将我们的证明专门应用于单连通情形，就会得到 $\Omega_3^{\mathrm{Spin}} = 0$ 的一个略有不同的证明（感兴趣的读者可以仔细阅读定理 A的证明，将正规 1-型取为$\xi(\pi = \{1\}, 0, 0)$，并观察其与 Kirby 证明的差异）。

在 [KPT22 中，KPT25], 作者研究了一个与本文类似的问题，但对象是 Ω_4^ξ，且限于 $\xi = \xi(\pi, 0, 0)$ 这一特殊情形。这些研究关注的是唯一性问题，即具有正规 1-型 ξ 的两个光滑 4-流形是否稳定微分同胚，而非本文研究的存在性问题。在这种情形下，也存在初级、次级和三级不变量，作者在某些情况下将它们与代数不变量联系起来。文中讨论了一个尤为有趣的情形：在 [KPT25], 中，作者将四维三级不变量与 Kervaire-Milnor 不变量（一种次级交不变量，见第 3.4 节）联系起来。对我们而言，三维三级不变量是一种初级交不变量。我们没有

理论依据来解释这种转变为何发生，但若能了解其中是否存在某种普遍现象，将会非常有趣。

在 [KNV25], Kasprowski、Nicholson 和第三位作者讨论了由 JSS 给出的 Ω 的过滤各阶段的几何解释，ξ_4 这与我们陈述定理A的方式非常相似。不过，同样如 [KPT22] 中所述，重点在于所涉及的 4-流形之间的等价关系，而不是 5 维 ξ-配边本身。也可以尝试将 Ω 的过滤阶段ξ_3 视为极化 3-流形上的等价关系，但研究这些关系下的 3-流形可能是方向错误的，因为 3-流形更适合通过独立于高维理论发展起来的几何方法进行分类。

1.2. **约定与记号**。

(1) 我们所说的 JSS 是指*James* 谱序列，其引入见 [Tei92],参见第B节。（2）我们将使用流形法丛上的 $B\mathrm{Pin}^+$-结构。通常，如果流形的$^+$ （分别为 Pin$^-$）切丛的切向Stiefel-Whitney 类满足 $w_2^t = 0$ （分别为 $w_2^t = (w_1^t)^2$，则称其具有 Pin$^+$ （分别为 Pin$^-$）结构。我们处理的是法丛，因此，如果法丛的 Stiefel-Whitney 类满足 $w_2 = 0$ （分别为 $w_2 = w_1^2$），则称流形具有 Pin $w_1 = w_1^t$，并且 $w_2^t = w_1^2 + w_2$，以及吴公式对于法丛 Stiefel-Whitney 类为

$$x^2 = w_2(M) \smile x \in H^2(M; \mathbb{Z}/2),$$

对于 M 一个可能不可定向的 4-流形。

(3) 设 A 为一个有限表示阿贝尔群。我们用 $B^n A$ 表示第 n 次迭代 bar 构造。这给出了 Eilenberg-MacLane 空间 $K(A, n)$ 的一个模型。(4) 设 X 为一个紧空间，设 $\pi : \pi_1(X)$ 为一个群，并令 $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi]$。我们将使用 Hurewicz 同态 h_2， $h_2^{\mathbb{Z}}$， h_2^{Λ}，其定义域分别为 $\pi_2(X)$ $\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2$， $\pi_2(X)\otimes_{\Lambda}\mathbb{Z}/2$。

1.3. **组织结构**。 在第2 节中，我们回顾所需的 Kreck 修正手术理论中的各种概念。在第 3 节中，我们定义并讨论手术理论中使用的标准交数不变量的修正形式，并回顾 Kervaire-Milnor 不变量。在第 4节中，我们利用修正后的交数不变量来定义零配边障碍。在第 5节中，我们通过研究几何微分，证明这些障碍是良定义的。特别地，我们证明定理 B 及其推论定理 C。最后，在第 6 节中，我们证明这些障碍是零配边问题的完备障碍，即证明定理 A。在第A节中，我们证明关于某个 Serre 正合序列的一项技术性结论。在第B 节中，我们将 JSS 的定义推广到不可定向情形；这可能也具有独立的研究价值。

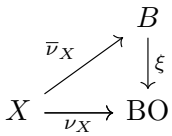
1.4. **致谢**。 我们感谢 Daniel Kasprowski 提供的宝贵讨论。作者谨此感谢位于波恩的马克斯·普朗克数学研究所 在本项工作的大部分期间给予的热情接待与支持。

Contents

1. 引言 1
1.1. 背景 4
1.2. 约定与记号 5
1.3. 组织结构 5
1.4. 致谢 5
2. 修正手术 6
2.1. 正规1–型 6
2.2. ξ- 结构的障碍理论 8
3. 交与自交 10
3.1. 预备知识 10
3.2. 形式 μ_J 12
3.3. 形式 μ_J 与 λ_J 在正规1-型中的关系 16
3.4. 次级交 18
4. 填充3-流形的障碍理论 19
4.1. 初级障碍 19
4.2. 次级障碍 20
4.3. 三级障碍 20
5. 障碍的微分与定义良好性 21
5.1. 几何微分 $\delta_2^{(4,0)}$ 21
5.2. 几何微分 $\delta_2^{(3,1)}$ 22
5.3. 几何微分 $\delta_3^{(4,0)}$ 34
5.4. 几何三级不变量的定义良好性 35
6. 几何三级障碍的消失 36
6.1. 比较 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}$ 与 $\mathfrak{ter}$。 40
附录 A. Serre 正合序列 43
附录 B. James谱序列 46
B.1. JSS 的第二微分 50
参考文献 53

2. Modified Surgery

2.1. **正规 1型。** 考虑空间 BO，它对稳定向量丛进行分类。Kreck 的修正手术理论 [Kre99] 通过引入某些近似空间，为流形提供了稳定分类 B；这些空间配备了一个到BO的高度余连通映射。空间 B 作为给定流形 M 的近似空间，并定义为稳定法丛 $X \xrightarrow{\nu_X} BO$的 Moore–Postnikov近似。现在我们简要概述 Kreck 的理论。给定一个映射 $\xi\colon\ B \to BO$ 一个 ξ-结构在光滑流形X 上是一个映射 $\nu_X\colon\ X \to B$，它将法丛 ν_X 提升到 ξ。



如果 ν_X是 X上的 ξ结构，我们称一对$(X,\bar{}\,\nu_X)$为 ξ-流形，不过有时会在记号中省略 ν_X 。两个 ξ-流形之间的 ξ-微分同胚，是指底层流形之间的微分同胚，并且它在 BO上与 ξ结构在同伦意义下相容。

定义2.1。 设 $\xi\colon\ B \to \mathrm{BO}$是从有限型CW复形 B 出发的映射。若 ξ 是一个泛纤维化，则称其为泛纤维化，当且仅当它是一个2-余连通纤维化。特别地，这意味着$\xi_*\colon\ \pi_k(B) \to \pi_k(\mathrm{BO})$对 $k = 2$ 是单射，对 $k \geq 3$是同构。

定义2.2。 设 $\xi\colon\ B \to \mathrm{BO}$是一个泛纤维化，且 $\nu_X\colon\ X \to \mathrm{BO}$是紧致光滑四维流形 X的稳定法丛。若存在一个 ξ结构$(X,\ \nu_X)$使得 $\nu_X\colon\ X \to B$是2-连通的，则称 ξ 是X的正规 *1*-型 。我们称这样一个选择ν_X 为正规*1*-光滑化。

以下定义与定理 2.4 对四维流形所有可能的正规 1-型进行了分类。

定义 2.3。 [Tei92] 设 π 为一个有限表示群，给定 $w_1^\pi \in H^1(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 以及 $w_2^\pi \in H^2(\pi;\mathbb{Z}/2)$, $\cup\{\infty\}$ 则定义 $\xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 如下：取以下对象的同伦拉回：

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B\pi \\ {\scriptstyle \xi(\pi,w_1^\pi,w_2^\pi)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle w_1^\pi\times w_2^\pi} \\ \mathrm{BO} & \xrightarrow[w_1\times w_2]{} & B\mathbb{Z}/2\times B^2\mathbb{Z}/2 \end{array}$$

若 $w_2^\pi \neq \infty$ 且

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B\pi \\ {\scriptstyle \xi(\pi,w_1^\pi,\infty)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle w_1^\pi} \\ \mathrm{BO} & \xrightarrow[w_1]{} & B\mathbb{Z}/2 \end{array}.$$

若 $w_2^\pi = \infty$。在这两种情况下，我们首先将映射 $w_1^\pi \times w_2^\pi$ 和 w_1^π 分别实现为纤维化，因此映射$\xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 和 $\xi(\pi, w_1^\pi, \infty)$ 分别是纤维化。

本文有时会将 $\xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 称为正规 1-型，而不指明任何特定的流形。这意味着由上面所述的 $B\pi$ 的上同调中的元素定义的正规结构 $\xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi): B \to BO$。当我们要考虑正规 1-型为 $\xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 的四维流形时，就会这样做。

对于给定的流形，我们使用以下定理来确定其正规结构。

定理2.4 (各种正规 1-型，Teichner [Tei92])。 设 X 是一个紧致光滑的 4-流形，且 $\pi := \pi_1(X)$ 并设 X 表示 X 的万有覆盖。

(1) 若 $w_2(\widetilde{X}) \neq 0$，则 X 的正规 *1*-型为 $\xi(\pi, w_1^\pi, \infty)$，其中 $w_1^\pi \in H^1(\pi; \mathbb{Z}/2)$ 是 $w_1(X)$ 的原像，*(2)* 若 $w_2(X) = 0$，则 X 的正规 *1*-型为 $\xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$，其中 w_1^π和 w_2^π分别是 $w_1(X)$ 和 $w_2(X)$ 的原像。

注 2.5. 设 π是一个有限表示群，且 $w_1^\pi \in H^1(\pi; \mathbb{Z}/2)$。那么，流形 X 上的一个 $\xi(\pi, w_1^\pi, 0)$-结构是 X 上的一个 Pin$^+$-结构，以及任意一个 π_1-同构 u_X^π: $X \to B\pi$，使得 $u_X^{\pi*}(w_1^\pi) = w_1(X)$。当 $w_1^\pi = 0$ 时，这等价于 X 上的一个 Spin 结构以及任意一个 π_1-同构 u_X^π: $X \to B\pi$。

定义 2.6. 设 i: $\xi \to \xi'$ 是一个正规结构映射，即一个覆盖BO的全空间映射，并设 (Y^n, u_Y) 是一个 ξ-流形。则称带有一个识别 $\partial N \xrightarrow[\sim]{\varphi} M$ 的 ξ'-流形 (X^{n+1}, u_X) 是 M 的 ξ'-填充，如果 $u_N|_{\partial N}$ 与 $i \circ u_M \circ \varphi^{-1}$ 在 BO上同伦。=

当 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 和 $\xi' = \xi(\pi, w_1^\pi, \infty)$，且它们之间的映射由投影 $B\mathbb{Z}/2 \times B^2\mathbb{Z}/2 \to B\mathbb{Z}/2$ 给出时，我们将特别使用上述定义，并利用同伦拉回的泛性质。在这种情况下，我们将 ξ'-填充 (N, u_N^π) 称为 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充（对于闭流形，我们将简单地称其为 $(B\pi, w_1^\pi)$-流形）。

在我们的相对情形中，有以下“中间维数以下的手术”引理。

引理 2.7。 设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 为一个正规 1-型，(Y^3, u_Y) 为一个 ξ-3-流形，且 X 是其 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充。那么存在 $(X', u_X^\pi: X' \to B\pi)$，它是 (Y, u_Y) 的一个 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充，并且 x_X^π 是一个 π_1-同构。

证明。 首先按如下方式使映射 u_X^π 在 π_1 上满射。设 $G := \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ 是 π 的一个生成集。取.....的连通和

$$\#_G S^1 \times S^3 \xrightarrow{\sqcup u_{g_i}} B\pi$$

其中有 X，u_{g_i} 是映射的同伦类，这些映射将 $\pi_1(S^1 \times S^3)$-因子的生成元映到 g_i 上。

现在按照通常的步骤对 $\pi_1(X) \to \pi$ 的核进行手术，参见例如 [Wal99、Kre99]。 □

2.2. **关于 ξ-结构的障碍理论。** 设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 连同 $w_2^\pi \neq \infty$ 为一个正规 1-型。我们希望定义一个障碍，以判断 $(B\pi, w_1^\pi)$-流形能否承载一个 ξ-结构，并使其延拓边界上给定的结构。

命题 2.8。 设 (Y, u_Y) 是一个可能为空的 ξ-3-流形，且 $(X, u_X^\pi\colon X \to B\pi)$ 是其 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充。那么存在唯一的障碍 $\mathcal{O}(X, Y, u_y, u_X^\pi) \in H^2(X, Y; \mathbb{Z}/2)$，当且仅当 u_Y 延拓为 X 上的 ξ-结构时，该障碍消失。

此外，若 $Y = \emptyset$，则 $\mathcal{O}(X, \emptyset, \emptyset, u_X^\pi)$ 分解为和 $w_2(M) + u_M^{\pi *}(w_2^\pi)$。

证明。 考虑下面的图表。

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{u_Y} & B & & \longrightarrow & & B\pi \\ \downarrow & & \xi\downarrow & \lrcorner & & & \downarrow{\scriptstyle w_1^\pi \times w_2^\pi} \\ X & \xrightarrow[\nu_X]{u_X^\pi} & \mathrm{BO} & \xrightarrow[w_1\times w_2]{} & B\mathbb{Z}/2 \times B^2\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & B^2\mathbb{Z}/2. \end{array}$$

最外层的正方形在同伦意义下已经交换，因为 u_Y 是一个 ξ-结构。从 X 出发的三角形未必交换，但与投影 $B\mathbb{Z}/2 \times B^2\mathbb{Z}/2 \to B\mathbb{Z}/2$ 复合后便交换，因为 X 是一个 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充。因此，我们只需考虑投影到 $B^2\mathbb{Z}/2$-因子后的图表。

中间的正方形带有一个同伦 $B \times I \to B^2\mathbb{Z}/2$，使该正方形交换。利用前复合定义同伦 $\mathscr{H}\colon Y \times I \to B^2\mathbb{Z}/2$。利用 $B^2\mathbb{Z}/2$ 上的 H-空间结构，映射 $w_2(X)\colon X \to B^2\mathbb{Z}/2$ 与 $(u_X^\pi)^*(w_2^\pi)\colon X \to B^2\mathbb{Z}/2$ 之差定义了一个映射

$$w_2(X) - (u_X^\pi)^*(w_2^\pi)\colon X \to B^2\mathbb{Z}/2.$$

同伦 $\mathscr{H}$ 随后给出了 $w_2(X) - (u_X^\pi)^*(w_2^\pi)$ 的一个平凡化，该平凡化与包含映射 $Y \to X$ 复合，因此定义了一个相对上同调类 $\mathcal{O}(X, Y, u_y, u_X^\pi) \in H_2(X, Y; \mathbb{Z}/2)$。从构造可清楚看出，这个上同调类具有所需的性质。□

注 2.9。 特别是，对于 $w_1^\pi = 0 = w_2^\pi$，u_Y-结构在 Y 上包含一个自旋结构 Y，且障碍 $\mathcal{O}(X, Y, u_y, u_X^\pi)$ 与 Kervaire 定义的相对斯蒂费尔-惠特尼类 w_2^R 一致 [Ker57]。

定义2.10。 若(X, u_X^π)是一个闭的$(B\pi, w_1^\pi)$-流形，则令 $\mathcal{O}(X, u_X^\pi) := \mathcal{O}(X, \emptyset, \emptyset, u_X^\pi)$。若$(X_1, u_{X_1}^\pi)$, $(X_2, u_{X_2}^\pi)$是 Y的两个$(B\pi, w_1^\pi)$-填充，当我们使用相对Mayer-Vietoris序列来证明映射

$$H^2(X_1 \cup X_2, Y; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\cong} H^2(X_1, Y; \mathbb{Z}/2) \oplus H^2(X_2, Y; \mathbb{Z}/2)$$

是一个同构。我们将 $\mathcal{O}(X_1 \cup X_2, Y, u_Y, u_{X_1 \cup X_2}^\pi)$ 定义为和式 $\mathcal{O}(X_1, Y, u_Y, u_{X_1}^\pi) + \mathcal{O}(X_2, Y, u_Y, u_{X_2}^\pi)$ 的原像。

在定理 2.11 中，我们确定了 $\mathcal{O}$ 由两个流形沿公共边界粘合而成的流形的障碍。

引理 2.11. 设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$，其中 $w_2^\pi \neq \infty$ 是一个正规 1-型。设 (Y, u_Y) 是一个 ξ-3-流形。设 X_1, X_2 是 Y 的两个 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充。那么，包含映射 $X_1, X_2 \hookrightarrow X_1 \cup X_2$ 诱导出等式

$$PD(\mathcal{O}(X_1, Y, u_Y, u_{X_1}^\pi)) + PD(\mathcal{O}(\overline{X_2}, Y, u_Y, u_{X_2}^\pi)) = PD(\mathcal{O}(X_1 \cup \overline{X_2}, u_{X_1 \cup X_2}^\pi)).$$

证明. 记 $M := X_1 \cup X_2$。下图中，水平映射来自相应的 Mayer-Vietoris 序列，未标记的垂直映射来自该对的长正合列。此图可交换（利用帽积的自然性）。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^2(M, Y; \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\cong} & H^2(X_1, Y; \mathbb{Z}/2) \oplus H^2(X_2, Y; \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \Big\downarrow PD & & \\
 & & H^2(M; \mathbb{Z}/2) & & & & \\
 & & \downarrow PD & & & & \\
 & & H_2(M; \mathbb{Z}/2)) & \xleftarrow{+} & H_2(X_1; \mathbb{Z}/2) \oplus H_2(X_2; \mathbb{Z}/2) & &
\end{array}$$

现在，同调类 $(\mathcal{O}(X_1, Y, u_Y, u_{X_1}^\pi)\ \mathcal{O}(X_2, Y, u_Y, u_{X_2}^\pi))$ 经顶部的水平同构映射到障碍类 $\mathcal{O}(M, Y, u_Y, u_M^\pi)$，该障碍类表示 M 具有 ξ-结构的障碍，而此结构在 Y 上的限制为 u_Y。该同调类又映射到 $\mathcal{O}(M, u_M^\pi)$，即 M 自身具有 ξ-结构的障碍。由图表的可交换性即可得证，因为底部映射就是求和映射，这是因为我们的系数为 $\mathbb{Z}/2$。□

定义 2.12。 若对于（模 2）增广映射 $\varepsilon_2\colon \Lambda \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$，同调类 $c \in \pi_2(X)$ 满足

$$\varepsilon_2\lambda(c, \alpha) = \varepsilon_2\lambda(\alpha, \alpha),$$

对所有同调类 $\alpha \in \pi_2(X)$ 都成立，则称 $w \in \pi_2(X)$ 为*r*-特征（$\mathbb{RP}^2$-特征）。类似地，若 $Q(h_2(w)\ \alpha) = Q(\alpha, \alpha)$ 对所有由映射 $\alpha\colon \mathbb{RP}^2 \to X$ 表示的同调类 $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z}/2)$ 都成立，则称其为 r-特征（$\mathbb{RP}^2$-特征），其中 Q 表示 X 上取值于 $\mathbb{Z}/2$ 的交叉型。

注意，对于两个球面类 $\alpha, \beta \in \pi_2(X)$，我们有 $Q(h_2(\alpha)\ h_2(\beta)) = \varepsilon_2(\lambda(\alpha, \beta))$，这说明了上述 $s-$ 和 $r-$ 特征元定义之间的类比关系。

引理 2.13。设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 为一个正规 1-型。设 (Y, u_Y) 为一个 ξ-3-流形，且 (X, u_X^π) 为一个 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充，其中 u_X^π 为一个 π_1-同构（见定理 2.7）。设 $w \in H_2(X; \mathbb{Z}/2)$ 为上述定义的同调类 $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)$ 的庞加莱对偶。假设 w 是一个球面类。那么 w 的任意提升 $c \in \pi_2(X)$ 都是 s-特征的。

证明。我们先在 $Y = \emptyset$ 的情况下证明该引理。令 $\alpha \in \pi_2(X)$。令 Q 为 $H_2(M; \mathbb{Z}/2)$ 上的 $\mathbb{Z}/2$-交叉型。于是 $\varepsilon_2(\lambda(c, \alpha)) = Q(w, h_2(\alpha)) = \langle \mathcal{O}(X, u_X^\pi)\ h_2(\alpha)\rangle$。根据定理 2.8，$\mathcal{O}(X, u_X^\pi)$ 分解为和 $(u_X^\pi)^* w_2^\pi + w_2(X)$。项 $\langle u_X^{\pi *}(w_2^\pi)\ h_2(\alpha)\rangle = 0$ 消失，因为 $u_{M*}^\pi h_2 = 0$。现在

$$\langle u_X^{\pi *}(w_2^\pi) + w_2(X), h_2(\alpha)\rangle = \langle w_2(X), h_2(\alpha)\rangle = Q(h_2(\alpha), h_2(\alpha)) = \varepsilon_2\lambda(\alpha, \alpha)$$

因为 $w_2(X)$ 是特征的，这就证明了该断言。

对于一般情形 X，其边界为 Y，令 $\alpha \in \pi_2(X)$ 为任意一个元素，并考虑双倍流形 DX 及映射 $u_{DX}^\pi := u_X^\pi \cup u_X^\pi\colon DX \to B\pi$。固定其中一个包含映射

$X \to DX$ 并将切换映射 $DX \to DX$ 记为 D。障碍类$o(DX, u^{\tau}_{DX})$的对偶是 $w_D = w + Dw$，根据定理 2.11。由于 w 可提升到 c，我们可以将 w_D 的一个提升实现为环境连通和 $c\#Dc$。于是得到

$$\varepsilon_2(\lambda^X(\alpha, c)) = \varepsilon_2(\lambda^{DX}(\alpha, c)) = \varepsilon_2(\lambda^{DX}(\alpha, c + Dc)) = \varepsilon_2(\lambda^{DX}(\alpha, \alpha)) = \varepsilon_2(\lambda^X(\alpha, \alpha)).$$

其中，第一个和最后一个等式由映射 $X \to DX$ 的自然性得出；第二个等式成立是因为 α 和 Dc 不相交；第三个等式则由闭情形得出。□

3. Intersections and self intersections

在本节中，设 X 是一个紧致 4-流形，设 $\pi := \pi_1(X)$，设 $\Lambda := \mathbb{Z}[\pi]$，并令 $w_1 = w_1(X) : \pi \to \mathbb{Z}/2$ 为第一 Stiefel-Whitney 类。

3.1. 预备知识。 回想存在一个映射

$$\mu\colon \pi_2(X) \to \mathbb{Z}[\pi]/(g - w_1(g)g^{-1}, 1)$$

通过为 α 选取一个浸入代表元，然后计算自交点（对群元素计数），忽略对应平凡群元素的自交点（见 [Wal99，定理 5。2]），使其不依赖于代表元的选取[1]。不确定性 $g \sim w_1(g)g^{-1}$ 源于自交点处的片层没有优先次序。我们定义这一不变量的一个变体。

定义 3.1. 设 $\widetilde{\alpha}\colon S^2 \to X$ 是一个具有 n 个自交的浸入球面。设 $\mathfrak{o}(\widetilde{\alpha})$ 是由 n 个有序点对组成的集合 $a_i,\ b_i \in S^2$ 其中 $i = 1, \ldots, n$ 满足 $\widetilde{\alpha}(a_i) = \widetilde{\alpha}(b_i)$。假设$\mathfrak{o}$ 涵盖了所有双重点。则称一对 $(\widetilde{\alpha},\ \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}))$ 为一个具有有序双重点的浸入球面。

现在，对于任意具有有序双重点的浸入球面 $(\widetilde{\alpha},\ \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}))$，自交$\mu(\widetilde{\alpha},\ \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}))$ 在 $\mathbb{Z}[\pi]$ 中是良定义的。

定义 3.2. 设

$$\mu\colon \pi_2(X) \to I/(g - 1 - w_1(g)(g^{-1} - 1)).$$

定义如下。设 $\alpha \in \pi_2(X)$。将 α 表示为一个具有有序双重点的浸入球面 $(\widetilde{\alpha},\ \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}))$。现在定义 $\mu(\alpha) = [\mu(\widetilde{\alpha},\ \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha})) - \varepsilon(\mu(\widetilde{\alpha},\ \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha})))],$，其中括号表示取商。

我们注意到，当 X 可定向时，上述定义等价于 $\mu(\alpha) = \mu(\widetilde{\alpha}) - \varepsilon(\mu(\widetilde{\alpha}))$，因为 ε 能通过 $\mathbb{Z}[\pi]/(g - w_1(g)g^{-1})$ 分解，当且仅当 X 是 $w_1 = 0$。

命题 3.3. 定理的函数3.2

$$\mu\colon \pi_2(X) \to I/(g - 1 - w_1(g)(g^{-1} - 1)).$$

是良定义的。

[1]若给定了 $\alpha \in \pi_2(X)$ 的一个浸入代表元 $\widetilde{\alpha}$，我们将记作 $\mu(\widetilde{\alpha}) \in \mathbb{Z}[\pi]/(g - w_1(g)g^{-1})$，此时我们无需对这一不确定性取商。

证明。 首先，我们证明它与 $\mathfrak{o}(\widetilde{\alpha})$ 的选择无关。设 $\mathfrak{o}'(\widetilde{\alpha})$ 是 $\mathfrak{o}(\widetilde{\alpha})$，其中一个有序对 (a_i, b_i) 被交换，并假设由 $\mathfrak{o}(\widetilde{\alpha})$ 决定的 (a_i, b_i) 处的群元素是 $g \in \pi$。那么，(a_i, b_i) 处的元素由 $w_1(g)g^{-1}$ 决定，因此我们得到

$$\begin{aligned}&\mu(\widetilde{\alpha}, \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha})) - \varepsilon(\mu(\widetilde{\alpha}, \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}))) - \mu(\widetilde{\alpha}, \mathfrak{o}'(\widetilde{\alpha})) + \varepsilon(\mu(\widetilde{\alpha}, \mathfrak{o}'(\widetilde{\alpha}))) = \\ &= g - w_1(g)g^{-1} - \varepsilon(g) + \varepsilon(w_1(g)g^{-1}) = \\ &= g - w_1(g)g^{-1} - 1 + w_1(g) = g - 1 - w_1(g)(g^{-1} - 1),\end{aligned}$$

它在 $I/(g-1-w_1(g)(g^{-1}-1))$ 处消失。证明 μ 与浸入的选择无关，这与 [Wal99]中的证明相同。 □

与 μ 类似，我们考虑以下 $\mathbb{Z}$-交叉型

$$\lambda\!\!\!^{-} : \pi_2(X) \times \pi_2(X) \to I$$

定义为 $\lambda\!\!\!^{-}(\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta) - \varepsilon(\lambda(\alpha, \beta))$，其中 $\lambda : \pi_2(X) \times \pi_2(X) \to \Lambda$ 是通常的等变交叉型。该交叉型已在 [KT24]中讨论。

这种交叉型的主要缺点是我们失去了 Λ-厄米结构，尤其是通常交叉型 λ 的 Λ-双线性。

引理 3.4. 交叉型 μ 是 $\mathbb{Z}$-二次型，而交叉型 $\lambda\!\!\!^{-}$ 是与（底层） $\mathbb{Z}$-二次型 μ相关联的 $\mathbb{Z}$-双线性型，即对所有 α、$\beta \in \pi_2(X)$

$$\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta) + [\lambda\!\!\!^{-}(\alpha, \beta)] \in I/(g - 1 - w_1(g)(g^{-1} - 1)).$$

证明。 留给读者证明 $\lambda\!\!\!^{-}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-双线性形式，并且对于 $n \in \mathbb{Z}$，有 $\mu(n\alpha) = n^2\mu(\alpha)$。设 $\alpha, \beta \in \pi_2(X)$，并设 $(\widetilde{\alpha}, \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}))$ 和 $(\widetilde{\beta}, \mathfrak{o}(\widetilde{\beta}))$ 分别是 α 和 β 的浸入球面代表，且带有有序双重点。我们可以自然地构造一个带有有序双重点的浸入球面 $\widetilde{}$，其有序双重点为 $(\widetilde{\alpha} + \beta, \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}) \cup \mathfrak{o}(\beta)^{\cup \mathfrak{o}_{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}})$，其中 $\mathfrak{o}_{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}$ 是 $\widetilde{\alpha}$ 与 β 之间新增 $\widetilde{}$ 个交点的排序，该排序由对 $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ 排序得到。我们计算

$$\begin{aligned}\mu(\alpha + \beta) &= [\mu(\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}, \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}) \cup \mathfrak{o}(\widetilde{\beta}) \cup \mathfrak{o}_{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}) - \varepsilon(\mu(\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}, \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}) \cup \mathfrak{o}(\widetilde{\beta}) \cup \mathfrak{o}_{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}))] \\ &= [\mu(\widetilde{\alpha}, \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha})) + \mu(\widetilde{\beta}, \mathfrak{o}(\widetilde{\beta})) + \lambda(\alpha, \beta) - \varepsilon(\mu(\widetilde{\alpha}, \mathfrak{o}(\widetilde{\alpha}))) - \varepsilon(\mu(\widetilde{\beta}, \mathfrak{o}(\widetilde{\beta}))) - \varepsilon(\lambda(\alpha, \beta))] \\ &= \mu(\alpha) + \mu(\beta) + [\lambda(\alpha, \beta) - \varepsilon(\lambda(\alpha, \beta))] \\ &= \mu(\alpha) + \mu(\beta) + \lambda\!\!\!^{-}(\alpha, \beta),\end{aligned}$$

其中方括号表示相应的商。 □

我们将在群环 $\cdot$ 上使用对合 $\mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Z}[\pi] : \bar{g} = w_1$通过线性延拓$g(g^{-1})$ $g \in \pi$，使其作用于整个群环。回顾一下，给定 $\alpha \in \pi_2(X)$，和式$\mu(\alpha) + \mu(\alpha)$ 属于 $\mathbb{Z}[\pi]/(1)$，因为由片选择造成的不确定性会相互抵消。由此可轻易得出，和式 $\mu(\alpha) + \mu(\alpha)$ 属于 I。利用这一事实，形式 μ 和 $\lambda\!\!\!^{-}$满足以下关系。

引理 3.5. 对于任意 $\alpha \in \pi_2(X)$，我们有

$$\lambda\!\!\!^{-}(\alpha, \alpha) = \mu(\alpha) + \overline{\mu(\alpha)} \in I.$$

证明。 选取一个浸入代表元 $\widetilde{\alpha}$ 对于 α。根据 Wall [Wal99，定理 5。2], 我们对原始的 μ 和 λ得到相应的版本，即

$$\lambda(\alpha, \alpha) = \mu(\widetilde{\alpha}) + \overline{\mu(\widetilde{\alpha})} + e(\widetilde{\alpha}), \tag{3.1}$$

其中 $e(\widetilde{\alpha})$是浸入 $\widetilde{\alpha}$ 的欧拉数。这给出

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha,\alpha) &= \lambda(\alpha,\alpha) - \varepsilon(\lambda(\alpha,\alpha)) \\ &= \mu(\widetilde{\alpha}) + \overline{\mu(\widetilde{\alpha})} + e(\widetilde{\alpha}) - \varepsilon(\lambda(\alpha,\alpha)) \\ &= \mu(\alpha) + \varepsilon(\mu(\widetilde{\alpha})) + \overline{\mu(\alpha)} + \varepsilon(\overline{\mu(\widetilde{\alpha})}) + e(\widetilde{\alpha}) - \varepsilon(\lambda(\alpha,\alpha)) \\ &= \mu(\alpha) + \overline{\mu(\alpha)},\end{aligned}$$

其中，第一个等式根据 λ的定义成立，第二个等式根据公式（3.1）成立，第三个等式根据 μ的定义成立，第四个等式则由对公式（3.1）应用 ε得到。□

3.2. **形式** μ_J。我们希望使自交形式 μ 取值于$H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)$。为此，我们需要一个映射 $I \to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)$，它在理想 $(g-1-w_1(g)(g^{-1}-1)) \subset I$上消失。为此，我们证明如下结果。

引理 3.6. 设 π 是一个群，I 分别是 $\mathbb{Z}$ 增广理想，J 分别是 $\mathbb{Z}/2$ 增广理想。则有：

(1) $IJ = JI$。(2) 对于任意右 Λ-模 M，存在同构

- $M \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \cong M/MJ$由 $m\otimes 1 \mapsto m$给出，
- 和 $M \otimes_\Lambda \mathbb{Z} \cong M/MI$ 由 $m\otimes 1 \mapsto m$给出。(3) 对于所有 $i \in I$，我们有 i^2, $2i \in IJ$。(4) 存在一个 $\mathbb{Z}/2$-向量空间 $H_1(\pi;\mathbb{Z}/2) \cong I/IJ$ 的同构，该同构由将 $g \in \pi$ 映射到 $g-1 \in I$的映射诱导。此映射的逆映射如下给出。理想 I作为阿贝尔群由元素 $\{g-1 \mid g \in \pi\}$生成。我们定义该映射，将 $\sum_i(g_i-1) + \sum_j(1-g_j) \in I$ 映射到 $\prod_i g_i \prod_j g_j^{-1}$。

证明。对于（1），设 $i \in I$ 和 $j \in J$。于是

$$ij = i(j-\varepsilon(j)) + i\varepsilon(j) = i(j-\varepsilon(j)) + \varepsilon(j)i$$

由于 $j-\varepsilon(j) \in I \subset J$，我们得到 $ij \in JI$。我们进行类似的计算来证明 $ji \in IJ$。

(2) 的第一个同构中，Λ-双线性映射 $M \times \mathbb{Z}/2 \to M/MJ$由 $(m,k) \mapsto mk$给出，它是良定义的，因为 $2 \in J$，因此 $m2 \in MJ$。此映射诱导出一个映射 $M \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \to M/MJ$。显然它是满射。若 $m\otimes 1$映射为零，则 $m \in MJ$，因此 $m = m'j$。现在 $m'j \otimes 1 = m' \otimes \varepsilon_2(j) = 0$。

第二个同构的证明类似。

对于 (3)，我们有 $I \subset J$，因此 $i^2 \in IJ$。此外，我们有 $2 \in J$，这就证明了该断言。对于 (4)，考虑短正合列：

$$0 \to I \to \Lambda \to \mathbb{Z}.$$

将该序列与 $\mathbb{Z}/2$ 作张量积，得到长正合列

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda,\mathbb{Z}/2) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2) \to I \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \to \Lambda \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z} \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \to 0$$

其中第二项同构于 $H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)$。在序列的右端，我们有同构 $\mathbb{Z}/2 \cong \Lambda \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2$，因此得到一个正合序列

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda,\mathbb{Z}/2) \to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2) \to I \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \to 0.$$

由于 Tor 函子$_1^\Lambda(\Lambda,\ \mathbb{Z}/2)$ 消失，映射 $H_1(\pi;\ \mathbb{Z}/2) \to I \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2$ 是一个同构。后复合以 (2) 给出的同构，我们得到一个同构 $\psi\colon H_1(\pi;\ \mathbb{Z}/2) \to$

I/IJ，我们现在来描述它。设 B 是一个 CW 复形，它只有一个 0 胞腔，并且对某个固定的 π 生成集 G 中的每个生成元，都有一个 1胞腔。设 $E\pi$ 为万有覆盖，它是一个压缩空间，我们可以将其链复形 $C_3(E\pi) \to C_2(E\pi) \to C_1(E\pi) \to C_0(E\pi)$ 作为 $\mathbb{Z}$ 的自由分解。注意， $C_0(E\pi) \cong \Lambda$ ，并且 $C_1(E\pi) \cong \prod_{g\in G} \Lambda$。

我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
C_2(E\pi) & \longrightarrow & C_1(E\pi) & \longrightarrow & C_0(E\pi) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\
\| & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\
C_2(E\pi) & \longrightarrow & \prod_{g\in G}\Lambda & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e_1^g\to g-1} & & \| & & \| \\
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{Z}.
\end{array}$$

将各行与 $\mathbb{Z}/2$ 作张量积并取同调后，我们发现映射

$$H_1(\pi;\mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2) \to \ker(I\otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \to \Lambda\otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2) \cong I\otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2$$

由 $g\to(g-1)\otimes 1$ 给出，因此 $\psi\colon H_1(\pi;\mathbb{Z}/2) \to I/IJ$ 由 $g\mapsto g-1$ 给出。映射 ψ 是 $\mathbb{Z}/2$-向量空间之间的映射，因为

$$\begin{aligned} g_1+g_2 = g_1g_2 \mapsto g_1g_2-1 &= (g_1-1)(g_2+1)+g_1-g_2 \\ &\equiv g_1+g_2 \equiv (g_1-1)+(g_2-1) \pmod{IJ}. \end{aligned}$$ □

这就得到一个映射 $I\to H_1(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$，它是通过对 IJ取商得到的。我们证明关于此商映射的核的以下事实，这将在第6节中派上用场。读者目前可以略过此处，直接阅读 μ_J 的定义。

引理3.7. 设 π 是一个有限表示群。那么映射的核

$$I/(g-1-w_1(g)(g^{-1}-1)) \to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)$$

在定理 3.6(4) 中定义，其作为一个 Λ-模由以下元素生成

$$\{g_ig_j-g_i-g_j+1, 2g_i-2 \mid g_i,g_j\in\pi\},$$

其中模结构由共轭作用给出。

证明。 由定理 3.6(4) 我们知道，映射 $I\to H_1(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$ 的核为 IJ。现在我们作因子分解

$$I \xrightarrow{q} I/(g-1-w_1(g)(g^{-1}-1)) \xrightarrow{f} H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)$$

利用 q的满射性，我们证明 $q(IJ)=\ker(f)$。模 I由集合 $\{g-1\mid g\in\pi\}$ 生成（作为阿贝尔群），而模 J由 $\{g-1\mid g\in\pi\}\cup\{2\}$生成（作为阿贝尔群）。因此，模 IJ和 $p(IJ)$由上述生成元两两相乘所得的集合 $\{g_ig_j-g_i-g_j+2\mid g_i,g_j\in\pi\}\cup\{2g-2\mid g\in\pi\}$生成。□

现在我们使用 μ_J定理3.6。注意，由于 $g-g^{-1}=(g+1)(g^{-1}-1)\in IJ$且 $g+g^{-1}-2=(g+1)(1-g^{-1})\in I^2\subset IJ$，我们有$(g-1-w_1(g)(g^{-1}-1))\subset IJ$。因此，我们可以定义 $\mu_J\colon \pi_2(X)\to I/IJ$，只需将 μ 后复合商映射。

定义 3.8。设

$$\mu_J\colon \pi_2(X)\to I/IJ$$

定义为 μ 与商映射 $I/((g-1-w_1(g)(g^{-1}-1))\to I/IJ$后复合。类似地，定义

$$\lambda_J:\pi_2(X)\times\pi_2(X)\to I/IJ$$

为 λ 与商映射 $I\to I/IJ$复合所得。

我们对这些形式作如下细化。

命题 3.9。定理 μ_J 和 λ_J 3.8 中的形式诱导出良定义的 $\mathbb{Z}/2$-二次形式以及（其底层的）$\mathbb{Z}/2$-双线性形式，分别定义在 $\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2$ 和 $(\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2)\times(\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2$上。

证明。设 $\alpha\in\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2$。利用 $\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong\pi_2(X)$，以及通过对序列 $\mathbb{Z}\xrightarrow{2}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/2$ 使用 $\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}-$ 进行张量积所得的长正合列可知，α 的不同提升$\alpha\in\pi_2(X)$之差为 $2\pi_2(X)$。设 $\overline{2}\beta\in 2\pi_2(X)$。由下面的计算可得

$$[\mu(\overline{\alpha}+2\beta)]=[\mu(\overline{\alpha})]+[\mu(2\beta)]+[\lambda(\overline{\alpha},2\beta)]=[\mu(\overline{\alpha})]$$

我们看到，μ_J 与提升的选取无关。这里 $[-]$ 表示投影 $I/g\sim g^{-1}\to I/IJ$，最后一个等式成立是因为 I/IJ 是一个 $\mathbb{Z}/2$-向量空间，这由定理3.6(4) 得出。对于 α，$\alpha'\in\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2$, 同理，其提升为$\alpha$，$\alpha'\in\pi_2(X)$ 的提升，选取 $2\overline{\beta}$, $\overline{2}\beta'\in 2\pi_2(X)$，于是我们有

$$[\lambda(\overline{\alpha}+2\beta,\overline{\alpha'}+2\beta')]=\lambda(\overline{\alpha},\overline{\alpha'})$$

再次利用 I/IJ 是一个 $\mathbb{Z}/2$-向量空间。其余结论由定理3.4得出。 □

定理3.9 给出的诱导形式仍记作 μ_J 和 λ_J。以下代数事实在证明 μ_J 和 λ_J的性质时会很有用。

引理 3.10。设 $u\in J^2$和 $u\in I$。则 $u\in IJ$。

证明。我们可以写成 $u=j_1j_2$对于 j_1，$j_2\in J$。由于 $u\in I$我们有 $\varepsilon(j_1j_2)=0$因此，要么 $\varepsilon(j_1)=0$，要么 $\varepsilon(j_2)=0$ 因此，要么 $j_1\in I$，要么 $j_2\in I$。现在利用 $IJ=JI$(定理 3.6(1))。□

现在我们陈述并证明 μ_J 和 λ_J 满足的各种性质。

引理 3.11。设 $g\in\pi$, a，$b\in\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2$, $j\in J$和 $i\in I$。那么以下方程在 I/IJ中成立。

(1) $\mu_J(ga)=\mu_J(a)$。(2) $\lambda_J(a,a)=0$。(3) $\lambda_J(ga,a)=(g-1)\varepsilon_2(\lambda(a,a))$。(4) $\lambda_J(ja,b)=(j-\varepsilon(j))\varepsilon_2(\lambda(a,b))$。
(5) $\mu_J(ja+b)=(j-\varepsilon(j))\varepsilon_2(\lambda(a,a)+\lambda(a,b))+\mu_J(b)$。

证明。对于（1），注意到 $g^{-1}-g=(g^{-1}-1)(g+1)\in IJ$因此 $g\equiv g^{-1}$(模 IJ）。我们有

$$\mu_J(ga)=g\,\mu_J(a)g^{-1}=(g-1)\,\mu_J(a)g+\mu_J(a)g\equiv\mu_J(a)(g-1)+\mu_J(a)\equiv\mu_J(a)\text{（模 }IJ\text{），}$$

by 利用定理 3.9 以及 $(g-1) \in J$, $\mu_J(a) \in I$。这就完成了对（1 ）.

对于（2），我们计算得 $\mu_J(2a) = 2\mu_J(a) + \lambda_J(a,a)$. 由于 I/IJ是 2-扭元，立即可得 $\lambda_J(a,a) = 0$。这就完成了（2）的证明。

对于（3），我们计算得

$$\begin{aligned}\lambda(ga,a) &= g\lambda(a,a) - \varepsilon g\lambda(a,a)\\ &= g(\lambda(a,a) + \varepsilon(\lambda(a,a))) - \varepsilon\lambda(a,a)\\ &= g\lambda(a,a) + (g-1)(\varepsilon(\lambda(a,a)) - \varepsilon_2(\lambda(a,a))) + (g-1)\varepsilon_2(\lambda(a,a))\\ &= (g-1)\varepsilon_2(\lambda(a,a)),\end{aligned}$$

其中，第一个和第二个等式由 λ的定义得到，第三个等式利用 $(g-1)(\varepsilon(\lambda(a,a)) - \varepsilon_2(\lambda(a,a))) \in IJ$ 得到，最后一个等式由（2）得出。这就完成了（3）的证明。

对于（4），令 $j \in J$。我们可以将 j表示为 $i-y$，其中 $y = \varepsilon(j)$是一个偶整数，且 $i \in I$。于是，在 IJ 中，$\lambda(ja,b) = \lambda(ia,b) + 2\lambda(a,b) = \lambda(ia,b)$，因此只需假设 $j = i \in I$。将 i写成 n 个形如 $(g-1)$ 和 $(1-g)$ 的表达式之和，其中 $g \in \pi$。我们将对 n 使用归纳法。若 $n = 0$，则 $i = 0$，无需证明。

若 $n = 1$，则 $i = 1-g$ 或 $i = g-1$。所有情形的证明都相同，因此我们假设是前一种情形。我们得到

$$\begin{aligned}\lambda((g-1)a,b) &= \lambda(ga,b) - \lambda(a,b)\\ &= \lambda(ga,b) - \varepsilon\lambda(ga,b) - (\lambda(a,b) - \varepsilon(\lambda(a,b))\\ &= g\lambda(a,b) - \varepsilon\lambda(a,b) - \lambda(a,b) + \varepsilon\lambda(a,b)\\ &= (g-1)\lambda(a,b)\\ &= (g-1)(\lambda(a,b) - \varepsilon_2(\lambda(a,b))) + (g-1)\varepsilon_2\lambda(a,b)\\ &\equiv (g-1)\varepsilon_2\lambda(a,b) \pmod{IJ},\end{aligned}$$

其中在第六行，我们用到了 $\lambda(a, b) - \varepsilon(\lambda(a, b)) \in J$。

在归纳步骤中，我们取 $i = (g-1) + i'$ 或 $i = (1-g) + i''$，其中 $i', i'' \in I$ 的求和项数小于 i 中求和项的数目。在前一种情形下，归纳步骤成立，因为

$$\lambda(((g-1)+i')a,b) = \lambda((g-1)a,b) + \lambda(i'a,b) \equiv (g-1+i')\varepsilon_2\lambda(a,b),$$

利用 $\mathbb{Z}$-双线性性 λ。另一种情形类似。由此完成了对（4）的证明。

对于（5），我们可以如上所述进行，将问题化归到 $j \in I$ 的情形，因为

$$\mu_J(-\varepsilon(j)a + ja + b) = \varepsilon(j)^2\mu(a) + \mu_J(ja+b) + \varepsilon(j)\lambda(a, ja+b) = \mu_J(ja+b),$$

利用 $\varepsilon(j)$ 是偶数这一点。

我们将像（$j = i$）中那样，对中的求和项个数进行同样的归纳法。再次说明，当 $i = 0$时，该断言显然成立。

假设 $i = g-1$（如果 $i = 1-g$，证明是类似的）。我们计算

$$\begin{aligned}\mu_J((g-1)a+b) &= \mu_J((g-1)a) + \mu_J(b) + \lambda((g-1)a,b)\\ &= \mu_J(ga) + \mu_J(-a) + \lambda(ga,-a) + \mu_J(b) + (g-1)\varepsilon_2(\lambda(a,b))\\ &= \mu_J(a) + \mu_J(a) + \lambda(ga,a) + \mu_J(b) + (g-1)\varepsilon_2(\lambda(a,b))\\ &= (g-1)\varepsilon_2((\lambda(a,a) + \lambda(a,b)) + \mu_J(b),\end{aligned}$$

其中，第一个和第二个等式由定理 3.9 得出，第三个等式由（1）以及 I/IJ 是一个 $\mathbb{Z}/2$-向量空间得出，第四个等式则由（3）以及 I/IJ 是一个 $\mathbb{Z}/2$-向量空间得出。这证明了基础情形。

归纳步骤中，假设 $i=(g-1)+i'$ 对于一个非零元素 $i'\in I$ 成立，且其求和项少于 i。我们得到

$$\begin{aligned}\mu_J(ia+b) &= \mu_J(i'a+b)+\mu_J((g-1)a)+\lambda_J(j'a+b,(g-1)a)\\ &= \mu_J(i'a+b)+\mu_J(ga)+\mu_J(a)+\lambda(ga,a)+\lambda(j'a,(g-1)a)+\lambda(b,(g-1)a)\\ &= \mu_J(i'a+b)+2\mu_J(a)+\lambda(ga,a)+\lambda(i'a,(g-1)a)+\lambda(b,(g-1)a)\\ &= \mu_J(i'a+b)+(g-1)\varepsilon_2(\lambda(a,a))+\lambda(i'a,(g-1)a)+(g-1)\varepsilon_2(\lambda(a,b)),\end{aligned}$$

其中，第一个和第二个等号由定理3.9得出，第三个由 (1) 和 (2) 得出，最后一个由 (4) 得出。证明 $\lambda(i'a,\ (g-1)a)=0$ 即可完成该断言的证明，下面我们通过一系列方程来证明这一点。

$$\lambda(i'a,(g-1)a)=i'\varepsilon_2(\lambda(a,(g-1)a))=i'\varepsilon_2(g\lambda(a,a))-\lambda(a,a))=0.$$

这就完成了对 (5) 的证明。 □

3.3. 关于正规 1-型的形式 μ_J 和 λ_J。理想情况下，我们希望 和是群 ()上的形式。虽然这无法实现，但如果对输入作出一些假设，我们便可以使这些形式在 ()上良定义。

命题 3.12. 固定一个正规1-型 $\xi=\xi(\pi,w_1^\pi,w_2^\pi)$，设$(Y,u_Y)$ 是一个（可能为空的）ξ-3-流形，并设 (X,u_X^π) 是一个$(B\pi,w_1^\pi)$-填充。则以下结论成立。

(1) 设 $c\in\pi_2(X)$ 是 s-特征的。则 $\mu_J(c)$ 仅取决于像 $[c]\in\pi_2(X)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2$。*(2)* 设 $\omega\in\pi_2\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2$ 满足 $h_2^\Lambda(\omega)=0$。则 $\lambda_J(-,\omega)\colon \pi_2(X)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2\to I/IJ$是良定义的。

证明。 对于 (1，注意到元素的不同提升 $c\in\pi_2(X)$ 属于 $\pi_2(X)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2$ 相差 $J\pi_2(X)$ 中的元素。令 $\beta\in\pi_2(X)$ 和 $j\in J$。于是

$$\mu(c+j\beta)=\mu(c)+j-\varepsilon(j)\varepsilon_2((\lambda(\beta,\beta))+\lambda(\beta,c))=\mu(c)$$

其中第一个等式由（5）定理3.11 中的式子得出，第二个等式成立是因为 c 是 s-特征，这意味着 $\varepsilon_2((\lambda(\beta,\ \beta))+\lambda(\beta,\ c))=0$。

对于 (2)，选取 ω 的一个提升 $\omega\in\pi_2(X)$，以及一个元素 $\alpha\in\pi_2(X)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}$，并连同它的提升$\alpha\in\pi_2(X)$。我们需要证明值 $\lambda_J(\alpha,\omega)$ 不依赖于上述选择。 ω,α 的不同选择相差 $j\gamma$ 和 $j'\beta$，其中 $\beta\in\ker(h_2^\Lambda)$，$\gamma\in\pi_2(X)$ 和 $j,j'\in J$。由此得到

$$\lambda(\alpha+j\beta,\omega+j'\gamma)=\lambda(\alpha,\omega)+\lambda(i\beta,\omega)+\lambda(\alpha,i'\gamma)+\lambda(i\beta,i'\gamma),$$

并利用定理 3.11 的 (4)，得到 $\lambda(i\beta,\omega)=i\varepsilon_2(\lambda(\beta,\omega))$、$\lambda(\alpha,i'\gamma)=i'\varepsilon_2(\lambda(\alpha,\gamma))$ 和$\lambda(i\beta,i'\gamma)=i'\varepsilon_2(\lambda(\alpha,i'\gamma))$，它们在 I/IJ 中都为零。由于 ω 和 γ 在同调中为零，因此得到 $\varepsilon_2(\lambda(\beta,\omega))=0$。用类似的方法可以证明另外两个 λ 项也为零。□

(2) 定理3.12 的直接推论是，我们有一个良定义的形式

$$\lambda_J^X\colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\times H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\to I/IJ, \tag{3.2}$$

利用第 A 节中的正合序列。现在我们旨在证明这个形式实际上是零形式。

P命题 3.13. 映射 $\lambda_J^X\colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\times H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\to I/IJ$ 来自 *(3.2)* 为零 $o.$

注 3.14. 定理 3.13 的一个直接推论是

$$\lambda_J^X : H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\times \mathrm{im}(h_2^{\mathbb{Z}/2})\to I/IJ$$

是良定义的，也就是说，对于 $z\in H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 和 $c\in\pi_2(X)$，$\lambda_J(z)\ c)$ 仅取决于同调类 $[c]\in H_2(X;\mathbb{Z}/2)$。

我们将推迟证明此命题，直到确立以下引理；该引理或许具有独立的研究价值。

引理 3.15. 设 $V_{k,\ell}:=\ker(h_2^{\Lambda})\subset\pi_2(X\#k\mathbb{CP}^2\#\ell\mathbb{CP}^2)\otimes_\Lambda\overline{\mathbb{Z}/2}$ 其中k和 ℓ为非负整数。那么，通过压缩额外的连通和项所诱导的映射

$$f_{\mathrm{coll}}\colon V_{k,\ell}\to V_{0,0}$$

是一个同构。

证明。 我们对 $k=1,\ell=0$证明该结果；一般情形可通过直接归纳法得到。

首先注意到映射 f_{coll} 是满射。由于 $\pi_2(X\#\mathbb{CP}^2)\cong\pi_2(X)\oplus\Lambda$ 因此每个$a\in V_{1,0}$都可以写成和 $a=b+c, b\in V_{0,0}, c=\gamma[\mathbb{CP}^1]$ 其中 $\gamma\in\Lambda$满足 $\varepsilon_2(\gamma)=0$。元素 $a\otimes 1\in\pi_2(X\#\mathbb{CP}^2)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2$ 满足

$$a\otimes 1=b\otimes 1+\gamma[\mathbb{CP}^1]\otimes 1=b\otimes 1+[\mathbb{CP}^1]\otimes\varepsilon_2(\gamma)=b\otimes 1,$$

这证明了 f_{coll}的单射性。 □

引理 3.16。 存在整数 k,ℓ，使得存在两个 2-复形 K_1,K_2 不交地映射到 $X\#_k\mathbb{CP}^2\#_l\mathbb{CP}^2$ 中，并且在塌缩映射 $X\#_k\mathbb{CP}^2\#_\ell\overline{\mathbb{CP}^2}\to X$ 下，2-复形 K_1,K_2 映射到 X的 2-骨架。

证明。 设 $K_1\hookrightarrow X$ 是 X的任意一个 2-骨架。设 $K_2^{(1)}$ 是嵌入在 X中且与 K_1不相交的一个圆圈楔和。为了将 $K_2^{(1)}$ 变成 2-骨架，我们需要在$K_2^{(1)}$ 上附加若干个 2-胞腔。我们可以附加每个这样的 2-胞腔，使其与 K_1 在 K_1的 2-胞腔中相交于有限多个点。对于每个这样的交，我们附加 $\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2\cong S^2\times S^2\#\mathbb{CP}^2$，并将该交管化到 $S^2\times\overline{S^2}$中以消除它（即施行诺曼技巧 [诺69]）。对所有 2-胞腔重复这一过程，即完成证明。 □

定理的证明 *3.13.* 令 k,ℓ为整数，并令 K_1,K_2为定理 3.16中的两个复形。令 $X_{k,\ell}:=X\#k\mathbb{CP}^2\#\ell\mathbb{CP}^2$，并令 $a,b\in H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)$。由纤维化的映射图

$$\begin{array}{ccccc}\widetilde{K_i} & \longrightarrow & K_i & \longrightarrow & B\pi\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ \widetilde{X_{k,\ell}} & \longrightarrow & X_{k,\ell} & \longrightarrow & B\pi\end{array}$$

可得到一个图表，其中包含第 A节中引入的映射

$$\begin{array}{ccc} H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^{K_1}} & \pi_2(K_1)\otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \\ \| & & \downarrow \\ H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^{X_{k,\ell}}} & \pi_2(X_{k,\ell})\otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \\ \| & & \uparrow \\ H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^{K_2}} & \pi_2(K_2)\otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

上面的图表与定理 3.16 表明，在 $\pi_2(X_{k,\ell})$ 中，我们可以使 $\mathfrak{f}^{X_{k,\ell}}(a)$ 和 $\mathfrak{f}^{X_{k,\ell}}(b)$ 互不相交，因此

$$\lambda_J^{X\#k\mathbb{CP}^2\#\ell\overline{\mathbb{CP}^2}}(a,b)=0.$$

现在，塌缩映射 $X\#k\mathbb{CP}^2\#\ell\mathbb{CP}^2 \to \overline{X}$ 在 Hurewicz 同态 h_2^Λ 的核上诱导出一个同构（定理 3.15），因而在 $\mathfrak{f}^{X\#k\mathbb{CP}^2\#\ell\mathbb{CP}^2}$ 和 $\mathfrak{f}^X$ 的像上也诱导出同构。这表明 $\mathfrak{f}^{X\#k\mathbb{CP}^2\#\ell\mathbb{CP}^2}(\overline{a})$ 和 $\mathfrak{f}^{X\#k\mathbb{CP}^2\#\ell\mathbb{CP}^2}(b)$ 都可以由 X 中的球面表示，因此 $\lambda_J^X(\overline{a,b}) = \lambda^{X\#k\mathbb{CP}^2\#\ell\mathbb{CP}^2}{}_J(a,b) = 0$。 □

3.4. **次级交**。 由于定理 6.3中会用到这一内容，我们简要回顾 Kervaire-Milnor 不变量。Kervaire-Milnor 不变量最初由 [FQ90，定义 10.8A],提出，它推广了最早由 [KM61] 研究的嵌入障碍（另见 [Tri69]）。关于这一二级交不变量的历史，请参阅[KPRT24，第 3] 节，该文对此作了全面论述。

定义 3.17。 [KPRT24，定义 1。4] 设 $b\subset X$ 是光滑 4-流形 X 中的一个浸入球面，并假设 $\mu(b)=0\in I$是其增广理想 Λ。则 *Kervaire-Milnor* 不变量 $\mathrm{km}(b)\in\mathbb{Z}/2$ 为零，当且仅当存在一族 Whitney 圆盘D_i 配对 b 的双重点，且这些 D_i 的内部均与 b不相交；其中 b可先经过正则同伦进行改变。

关于以下定理的表述，读者应回顾2.12 中关于 s-特征类和 r-特征类的内容。

定理 3.18。 [Sto94][KPRT24，定理 1。6] 设 b 是光滑 *4*-流形 s中的一个-特征浸入球面，并假设 X $\mu(b)=0$，因此将配对 b 的双重点的 *Whitney* 圆盘集合记为 D_i。进一步假设 b具有一个（可能未赋予框架的）代数对偶球面。若 b 是 r-特征的，则

$$\mathrm{km}(b)\equiv\sum_i |\operatorname{int} D_i\cap b| \pmod 2,$$

否则 $\mathrm{km}(b)=0$。

现在我们证明，Kervaire-Milnor 不变量是通过正则同伦将浸入球面 b 变为嵌入的稳定障碍。

引理 3.19。 设 b 是 *4*-流形 X 中的一个浸入球面，满足 $\mu(b)=0$ 且 $\mathrm{km}(b)=0$。那么， b 正则同伦于 $X\#k(S^2\times S^2)$ 中的一个嵌入，其中 $k\geq 0$；也就是说， b 稳定正则同伦于一个嵌入。

证明。根据定理 3.17，我们可以为 b 选取一组带框架的惠特尼圆盘 D_i，其内部与 b 不相交。我们希望对所有 D_i 执行惠特尼移动，使 b 成为嵌入；但要做到这一点，我们需要消除各个惠特尼圆盘之间的所有交点。设 $p \in D_i \cap D_j$。构造连通和 $X\#(S^2 \times S^2)$，并将 D_i 管状连接到 $S^2 \times \{\text{pt}\} \subset S^2 \times S^2$（标准诺曼技巧 [Nor69]）。注意，这一操作会保持圆盘的带框架性质。现在，D_i 有一个几何对偶球面 $\{\text{pt}\} \times S^2$，因此我们可以将 D_j 管状连接到几何对偶球面，从而消除交点 p（同样，这会保持框架）。对所有交点重复此过程，即可使所有惠特尼圆盘彼此不交地嵌入且带有框架；因此，执行相应的惠特尼移动便可将 b 变为一个嵌入。□

我们给出一个例子，该例将在定理6.3中用到。这个例子是一个具有非平凡 Kervaire-Milnor 不变量的浸入球面，由 [KM61] 提出。

引理 3.20。设 $w \in H_2(\mathbb{CP}^2)$ 是一个生成元。那么，同调类 $3w$ 可由一个浸入球面 b 表示，且满足 $\mu(b) = 0$ 以及 $\mathrm{km}(b) = 1$。

证明。通过添加平凡尖点，显然可以使浸入 b 满足$\mu(b) = 0$，并表示 $3w$。可以验证，[KM61中的论证，例 2]，即使允许稳定化（稳定化不会改变符号数）也仍然成立，因此$3w$ 即使在稳定意义下也不能由嵌入表示。因此，$\mathrm{km}(b) = 1$。□

4. Obstruction theory for filling 3-manifolds

4.1. 初级障碍。设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 是一个正规 1-型，且 (Y, u_Y) 是一个 ξ-3-流形。回顾一下（定理 2.6），我们有自然映射 $\xi \to \xi' := \xi(\pi, w_1^\pi, \infty)$；所谓 Y 的 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充 (X, u_X^π)，是指 Y 在 Ω_3^ξ 中的一个零配边。换言之，X 是一个带边界 Y 的 ξ'-流形，其 ξ'-结构与边界上的 ξ 结构一致。

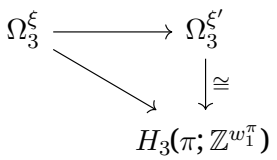
回顾一下，对于一个 ξ-3-流形 (Y, u_Y)，存在一个良定义的初级障碍 $\mathfrak{pri}(Y, u_Y) \in H_3(\pi; \mathbb{Z}^{w_1^\pi})$。以下是一个众所周知的结果。

引理 *4.1.* *设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 为一个正规 1-型，其中允许完全非自旋情形，即 $w_2^\pi \in H^2(\pi; \mathbb{Z}/2) \cup \{\infty\}$。设 (Y, u_Y) 为一个 ξ-3- 流形。那么，初级障碍 $\mathfrak{pri}(Y, u_Y)$ 等于 $(u_Y)_*[Y] \in \ker d_2 \subset H_3(\pi; \mathbb{Z}^{w_1^\pi})$，其中 $[Y] \in H_3(Y; \mathbb{Z}^{w_1(Y)})$ 是扭曲基本类，而 d_2 表示 James 谱序列中相应的第二微分。*

证明见例如 [Tei92，命题 3.2。1]该结果可很容易地推广到非定向情形。

命题 4.2. 设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 是一个正规1型。设(Y, u_Y) 是一个 ξ-3-流形。那么，$\mathfrak{pri}(Y, u_Y) = 0$ 当且仅当存在一个$(B\pi, w_1^\pi)$-填充$(X, u_X^\pi\colon X \to B\pi)$，使得$(Y, u_Y)$上的 u_X^π 在基本群上诱导一个同构。

证明。 证明通过比较 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi) \to \xi' = \xi(\pi, w_1^\pi, \infty)$。James 谱序列的自然性给出了一个边缘同态图表：



其中，垂直映射是一个同构，因为群 $\Omega_*^{\xi'}$ 可以利用 James 谱序列计算

$$H_p(\pi;(\Omega_3^{SO})^{w_1^\pi}) \Rightarrow \Omega_{p+q}^{\xi'},$$

并且配边群 Ω_*^{SO}在维数 1、2 和 3 上消失。

这表明 $\mathfrak{pri}(Y,\ u_Y)=0$ 当且仅当 Y在 $\Omega_3^{\xi'}$ 中消失，并且我们通过应用定理 2.7完成证明。□

4.2. 次级障碍。设 (Y,u_Y) 是一个 3 维 ξ-流形。假设 $\mathfrak{pri}(Y)$ 消失，并选取一个 $(B\pi,w_1^\pi)$-填充 (X,u_X^π)。回顾一下，$\mathcal{O}(X,Y,u_Y,u_X^\pi)\in H^2(X,Y;\mathbb{Z}/2)$ 是将 ξ-结构延拓到 X 相对于 Y 上的障碍（见定理 2.8）。我们用 $w\in H_2(X;\mathbb{Z}/2)$ 表示 $\mathcal{O}(X,Y,u_Y,u_X^\pi)$ 的 Poincar´e 对偶。利用 $\xi(\pi,w_1^\pi,w_2^\pi)$ 的 James 谱序列，回顾一下，现在存在一个良定义的次级不变量$\mathfrak{sec}(Y,u_Y)\in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2)$（没有出射微分，见定理 B.9 ）。现在我们利用 (X,u_X^π) 从几何上定义这个次级不变量。稍后在第 5 节中，我们将对这个填充的选择取商，从而得到一个良定义的不变量，它将等于$\mathfrak{sec}(Y,u_Y)$。

定义 4.3. 设 $\xi=\xi(\pi,\ w_1^\pi,\ w_2^\pi)$ 是一个正规 1-型，设 $(X,\ u_X^\pi)$ 是一个 ξ-3-流形 $(Y,\ u_Y)$ 的 $(B\pi,\ w_1^\pi)$-填充，并设 $w\in H_2(X;\mathbb{Z}/2)$ 是上述障碍类。于是我们将几何二重阻碍 定义为

$$\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X,Y,u_Y,u_X^\pi):=(u_X^\pi)_*(w)\in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2).$$

在上述定义中，若 Y 为空，则记 $\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X,\ \emptyset,\ \emptyset,\ u_X^\pi)=\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X,\ u_X^\pi)$。

引理 4.4. 设 $\xi=\xi(\pi,w_1^\pi,w_2^\pi)$ 是一个正规 *1*-型，设(Y,u_Y) 是一个 ξ*-3*-流形，且(X,u_X^π) 是一个$(B\pi,w_1^\pi)$-填充，u_X^π 在基本群上诱导一个同构。那么 $\mathcal{O}(X,Y,u_X^\pi,u_Y)$ 的庞加莱对偶是球面的，当且仅当 $\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X,Y,u_X^\pi,u_Y)=0$。

证明。 该结论可由考察 Serre 正合序列以及映射 $\pi_2(X)\to\pi_2(X)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2$ 的满射性得出。□

4.3. 三**级障碍**。现在我们使用自交不变量 μ_J：$\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\to I/IJ\cong H_1(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$，其定义见第 3 节，以定义几何三次障碍 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}$。

定义4.5. 设 $\xi=\xi(\pi,w_1^\pi,w_2^\pi)$ 是一个正规 1-型，设 (X,u_X^π) 是 ξ-3-流形 (Y,u_Y) 的一个 $(B\pi,w_1^\pi)$-填充，并满足 $\mathcal{O}(X,Y,u_Y,u_X^\pi)\in H_2(X;\mathbb{Z}/2)$ 是一个球面同调类，即 $\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X,Y,u_Y,u_X^\pi)=0$。设 $c\in\pi_2(X)$ 满足 $h_2(c)=\mathcal{O}(X,Y,u_Y,u_X^\pi)$，其中 h_2表示 Hurewicz映射。则我们将几何三次障碍定义为

$$\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(X,Y,u_Y,u_X^\pi,c):=\mu_J(c)\in H_1(\pi;\mathbb{Z}/2).$$

此值取决于有界流形 X 以及表示$\mathcal{O}(X,\ Y,\ u_Y,\ u_X^\pi)$ 的选择。为了消除这些依赖，我们必须取一个适当的商。下一节将说明如何做到这一点。

5. Differentials and well-definedness of the obstructions

5.1. 几何微分 $\delta_2^{(4,0)}$。现在我们定义几何微分

$$\delta_2^{(4,0)}\colon H_4(\pi;\mathbb{Z}^{w_1^\pi}) \to H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$$

关于第1节中简要介绍的次级不变量。接着我们证明，它等于 James 谱序列中相应的 d_2 微分。我们从定义开始。

定义 5.1。令 $x \in H_4(\pi;\mathbb{Z}^{w_1^\pi})$ 为任意一个元素。将 x 表示为一个闭的 $(B\pi, w_1^\pi)$-流形 (M, u_M^π)，其中 u_M^π 是一个 π_1-同构（其存在性由定理 4.2 的证明可知）。令 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 为一个正规 1- 型，并令 $w \in H_2(M;\mathbb{Z}/2)$ 为与 $\mathcal{O}(M, u_M^\pi)$ Poincaré 对偶的元素。我们定义

$$\delta_2^{(4,0)}(x) := \mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(M, u_M^\pi).$$

目前尚不清楚上述定义是否良定义，即是否依赖于代表流形的选择。我们现在通过证明 $\delta_2^{(4,0)}$ 等于 JSS 中的 $d_2^{(4,0)}$ 来处理这一问题。由于后者已经是良定义的，因此 $\delta_2^{(4,0)}$ 也如此。

引理 5.2. 设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 为一个正规 1-型，设 (M, u_M^π) 为一个闭的 $(B\pi, w_1^\pi)$-流形，并设 $x = (u_M^\pi)_*[M]$ 为扭曲基本类 $[M] \in H_4(\pi;\mathbb{Z}^{w_1(M)})$ 的像。那么 $\delta_2^{(4,0)}(x) = d_2^{(4,0)}(x)$。

证明。 我们将证明以下一串等式。

$$d_2^{(4,0)}(x) = (u_M^\pi)_*(PD(w_2(M)) + PD((u_M^\pi)^*(w_2^\pi)) = (u_M^\pi)_*(PD(\mathcal{O}(M, u_M^\pi))) = \delta_2^{(4,0)}(x).$$

第二个等式由定理2.8得出，第三个等式则由定理 5.1得出。现在我们来考察第一个等式。

万能系数定理给出一个同构 $H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{Hom}(H^2(\pi;\mathbb{Z}/2)\ \mathbb{Z}/2)$，因此，上述第一个等式成立当且仅当

$$\langle w_2^\pi \smile \alpha + w_1^\pi \smile \mathrm{Sq}^1(\alpha) + \mathrm{Sq}^2(\alpha), (u_M^\pi)_*[M]\rangle = \\ = \langle \alpha, (u_M^\pi)_*(w_2(M) \frown [M])\rangle + \langle \alpha, (u_M^\pi)_*((u_M^\pi)^* w_2^\pi \frown [M])\rangle$$

对所有 $\alpha \in H^2(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$（上文我们使用了定理 B.9 中对第二微分的描述。）

我们计算

$$\begin{aligned}
&\langle w_2^\pi \smile \alpha + w_1^\pi \smile \mathrm{Sq}^1(\alpha) + \mathrm{Sq}^2(\alpha), (u_M^\pi)_*[M]\rangle = \\
&= \langle w_2^\pi \smile \alpha, (u_M^\pi)_*[M]\rangle + \langle w_1^\pi \smile \mathrm{Sq}^1(\alpha)\rangle + \langle \alpha^2, (u_M^\pi)_*[M]\rangle \\
&= \langle (u_M^\pi)^*\alpha, (u_M^\pi)^* w_2^\pi \frown [M]\rangle + \langle (u_M^\pi)^*(w_1^\pi) \smile \mathrm{Sq}^1((u_M^\pi)^*(\alpha)), [M]\rangle + \langle (u_M^\pi)^*(\alpha)^2, [M]\rangle \\
&= \langle \alpha, (u_M^\pi)_*((u_M^\pi)^* w_2^\pi \frown [M])\rangle + \langle w_1(M) \smile \mathrm{Sq}^1((u_M^\pi)^*(\alpha))\rangle + \langle (u_M^\pi)^*(\alpha) \smile w_2(M), [M]\rangle \\
&= \langle \alpha, (u_M^\pi)_*((u_M^\pi)^* w_2^\pi \frown [M])\rangle + \langle \mathrm{Sq}^1(\mathrm{Sq}^1((u_M^\pi)^*(\alpha)))[M]\rangle + \langle (u_M^\pi)^*(\alpha), w_2(M) \frown [M]\rangle \\
&= \langle \alpha, (u_M^\pi)_*((u_M^\pi)^* w_2^\pi \frown [M])\rangle + \langle \alpha, (u_M^\pi)_*(w_2(M) \frown [M])\rangle.
\end{aligned}$$

这里，第一个等式由克罗内克配对的线性性得出，第二个等式由杯帽公式得出，第三个等式则用到了正规第二斯蒂费尔-惠特尼类

w_2 等于第二切向吴类 v_2^t，因此是一个特征元。[2] 第四个等式由 $w_1 = w_1^t = v_1^t$ 得出，最后一个等式用到了 Adem 关系 $\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^1 = 0$。□

命题 5.3。设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 是一个正规 *1*-型。设 (X, u_X^π) 是 $(B\pi, w_1^\pi)$ 的一个填充，其中 $\pi_1(u_X^\pi)$ 是一个同构。设 $w \in H_2(X; \mathbb{Z}/2)$ 是障碍类 $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)$ 的庞加莱-勒夫谢茨对偶。那么

$$H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)/\operatorname{im} d_2^{(4,0)} \ni \mathfrak{sec}(Y, u_Y) = [\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)] \in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)/\operatorname{im}\delta_2^{(4,0)}$$

因此 $[\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)] \in H_2(\pi; \mathbb{Z}/2)$ / 像 $\delta_2^{(4,0)}$ 不依赖于所选择的 $(B\pi, w_1^\pi)$ 填充。

证明。这归功于第二位署名作者 [Tei92，命题 3.2。3]。□

我们现在通过证明下面对定理 4.4 的改进来结束本小节。

引理 *5.4.* 设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 是一个正规 *1*-型。设 (Y, u_Y) 是一个带有$\mathfrak{pri}(Y, u_Y) = 0$ 的 ξ-*3*-流形。那么，存在 (X, u_X^π)，使其为 Y 的一个 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充，且 *Poincaŕe-Lefschetz* 对偶于 $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)$ 的球面，当且仅当 $\mathfrak{sec}(Y, u_Y) = 0$。

证明。“仅当”方向由定理4.4得出。

反过来，假设 $\mathfrak{sec}(Y, u_Y) = 0$。由定理 4.1 和定理 5.3，存在 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充 $(X', u_{X'}^\pi)$，它是 (Y, u_Y) 的填充，且 $\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X', Y, u_Y, u_{X'}^\pi)$ 属于 $\delta_2^{(4,0)}$ 的像。这意味着存在一个闭的 $(B\pi, w_1^\pi)$-流形 (M, u_M^π)，使得

$$\delta_2^{(4,0)}(u_{M*}^\pi([M])) = \mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X', Y, u_Y, u_{X'}^\pi).$$

作连通和 $X'' := M \# X'$ 和 $u_{X''}^\pi := (u_M^\pi \# u_{X'}^\pi) : M \# X' \to B\pi$。根据定理 2.11 庞加莱́对偶 $\mathcal{O}(X'', Y, u_Y, u_{X''}^\pi)$ 可以写成各求和项障碍的庞加莱 $w_{X''} = w_M + w_{X'}$对偶́之和。我们有

$$u_{M*}^\pi(w_M) + (u_{X'}^\pi)_*(w_{X'}) = 0 \in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2),$$

用某个曲面 Σ 在 X'' 中实现 $w_{X''}$。根据定理 2.7，我们可以对 X'' 做手术，将分类映射 $u_{X''}^\pi$ 变为一个 π_1-同构，同时保留 Σ 补集中的 ξ 结构。将所得的 $(B\pi, w_1^\pi)$ 流形称为 X。现在，Σ 是 X 中代表$\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(X, Y, u_Y, u_X^\pi) = 0$ 的曲面。由于 $u_X^\pi(\Sigma) = 0$，应用定理 4.4 可知，同调类[Σ]是球面的。□

5.2. **几何微分** $\delta_2^{(3,1)}$。现在我们开始定义$\delta_2^{(3,1)}$ 第1节中简要介绍的三级不变量的几何微分。随后我们证明，它等于 JSS 中相应的 d_2 微分。由于上标过多，本节将省略 (3,1) 上标，因此未作修改的微分将简写为 δ_2。

命题 5.5。设 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 是一个正规 1-型，设 (Y, u_Y) 是一个（可能为空的）ξ-3-流形，且 X 是其 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充。设 $c \in \pi_2(X)$ 是 s-特征的，且 $w := [c] \in H_2(X; \mathbb{Z}/2)$。那么我们有如下

[2] H^{n-i} W n W $v_i^t x = {}^i x$ $x \in$一般而言，对于维流形的切向 Wu 类，我们有 Sq ( )，其中 (; ℤ/2)。

(1) 映射

$$\delta_2^{X,c} := \mu_J(-) + \lambda_J(-,c) : \ker(h_2 \colon \pi_2(X) \to H_2(X;\mathbb{Z}/2)) \to I/IJ$$

仅取决于 $[c] \in H_2(X;\mathbb{Z}/2)$，我们将上述映射记作 $\delta^{X}{}_{,2}{}^{w}$。

(2) 映射 $\delta^{X}{}_{,2}{}^{w}$ 可分解为

$$\delta_2^{X,w} = \mu_J(-) + \lambda_J(-,w) \colon \ker(h_2^{\Lambda} \colon \pi_2(X) \otimes_{\Lambda} \mathbb{Z}/2 \to H_2(X;\mathbb{Z}/2)) \to I/IJ,$$

因此，以下映射是良定义的

$$\delta_2^{X,w} = \mu_J(-) + \lambda_J(-,w) \colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) \to I/IJ.$$

(3) 映射 $\delta^{X}{}_{,2}{}^{w} \colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) \to I/IJ$ 仅取决于流形 X 的 $\mathbb{CP}^2$-稳定等价类，即

$$\delta_2^{X\#\mathbb{CP}^2,w+[\mathbb{CP}^1]} = \delta_2^{X,w} = \delta_2^{X\#\overline{\mathbb{CP}^2},w+[\overline{\mathbb{CP}^1}]}.$$

证明。(1) 对于一个固定的同调类 $w \in H_2(X;\mathbb{Z}/2)$，不同的提升 $c \in \pi_2(X)$ 相差元素 $\beta \in \pi_2(X)$，满足 $h_2(\beta) = 0$。令 $\alpha \in \ker(h_2) \subset \pi_2(X)$。

$$\mu_J(\alpha) + \lambda_J(\alpha, c+\beta) = \mu_J(\alpha) + \lambda_J(\alpha,c) + \lambda_J(\alpha,\beta)$$

现在由定理 3.13 可得 $\lambda_J(\alpha,\beta) = 0$。

对于（2），令 $\alpha \in \ker(h_2^{\Lambda}) \subset \pi_2(X) \otimes_{\Lambda} \mathbb{Z}/2$，并令 $\overline{\alpha} \in \pi_2(X)$ 为任意一个提升。注意，根据定理 3.6(2)，不同的提升之差属于 $j\beta \in J\ker(h_2^{\Lambda}$。注意到

$$\begin{aligned}
\mu_J(\overline{\alpha} + j\beta) + \lambda_J(\overline{\alpha}+j\beta, c) = \\
&= \mu_J(\overline{\alpha}) + (j - \varepsilon(j))(\varepsilon_2(\lambda(\beta,\beta)) + \varepsilon_2(\lambda(\beta,\overline{\alpha}))) + \lambda(\overline{\alpha},c) + \lambda(j\beta,c) \\
&= \mu_J(\overline{\alpha}) + \lambda(\overline{\alpha},c) + \lambda(j\beta,c) \\
&= \mu_J(\overline{\alpha}) + \lambda(\overline{\alpha},c) + (j-\varepsilon(j))\varepsilon_2\lambda(\beta,c) \\
&= \mu_J(\overline{\alpha}) + \lambda_J(\overline{\alpha},c),
\end{aligned}$$

其中我们使用了定理 3.11(4) 和（5），以及以下事实：如果至少一个参数是零同调的，则 $\varepsilon_2(\lambda(-,-))$ 为零。

对于（3），我们给出 $\mathbb{CP}^2$ 的证明。$\mathbb{CP}^2$ 的证明类似。令 $z \in H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)$。我们使用交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^{X\#\mathbb{CP}^2}} & \pi_2(X\#\mathbb{CP}^2) \otimes_{\Lambda} \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{h_2^{\Lambda}} & H_2(X\#\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}/2) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^{X}} & \pi_2(X) \otimes_{\Lambda} \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{h_2^{\Lambda}} & H_2(X;\mathbb{Z}/2),
\end{array}$$

由塌缩映射 $X\#\mathbb{CP}^2 \to X$ 诱导。根据定理 3.15，我们得知中间的垂直映射在 $\mathfrak{f}^{X\#\mathbb{CP}^2}$ 和 $\mathfrak{f}^{X}$ 的像上诱导出一个同构。因此，$\mathfrak{f}^{X\#\mathbb{CP}^2}(z)$ 可以由 X 中的一个球面表示，这就证明了该断言。□

命题 5.6。设 $\xi = \xi(\pi,\ w_1^{\pi},\ w_2^{\pi})$ 为正规 1-型，设 $(Y,\ u_Y)$ 为一个（可能为空的）ξ-3-流形，设 X 为其 $(B\pi,\ w_1^{\pi})$-填充，并假定障碍类 $\mathcal{O}(X,\ Y,\ u_Y,\ u_X^{\pi})$

是球面的。那么存在一个闭的 $(B\pi,\ w_1^\pi)$-流形 $(M,\ u_M^\pi)$，其中 $\pi_1(u_M^\pi)$ 是一个同构，$u_{M*}^\pi[M]=0$ 对于扭曲基本类 $[M]\in H_4(M;\mathbb{Z}^{w_1^\pi})$，且 w_M:=PD$(\mathcal{O}(M,\ u_M^\pi))$ 是球面的，使得

$$\delta_2^{X,w_X}=\delta_2^{M,w_M}\colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2),$$

其中 w_X 是 $\mathcal{O}(X,\ Y,\ u_Y,\ u_X^\pi)$ 的庞加莱对偶。

证明。如果 X 已经是闭的，则改为对带穿孔的 X 进行处理。现在假设 X 是边界非空的紧致四维流形。考虑到双倍流形 i 中的包含映射：$X\hookrightarrow DX$，以及以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^X} & \pi_2(X)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2 \\ \| & & \downarrow \\ H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^{DX}} & \pi_2(DX)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2 \end{array}$$

令 $z\in H_3(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$。定理 2.11 表明，$DX$ 上的 ξ-结构的障碍由 $i_*w_X+Dw_X\in H_2(DX;\mathbb{Z}/2)$ 给出，其中 Dw_X 是 w_X 在DX另一半中的像。上方的交换图表明，a 在 $\pi_2(DX)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2$ 中的像可以由完全位于 X内的一个球面实现。由此立即可得

$$\begin{aligned}\delta_2^{DX,i_*w+Dw}(z)&=\mu_J^{DX}(\mathfrak{f}^X(z))+\lambda_J^{DX}(\mathfrak{f}^X(z),i_*w+Dw)\\&=\mu_J^X(\mathfrak{f}^X(z))+\lambda_J^X(\mathfrak{f}^X(z),i_*w)=\delta_2^{X,w}(z).\end{aligned}$$ □

以下命题的证明将占据接下来的十页。

命题 5.7. 设 $\xi=\xi(\pi,w_1^\pi,w_2^\pi)$ 是一个正规 1-型，设 X 是一个可能具有非空边界的 $(B\pi,w_1^\pi)$-4-流形，ξ 是一个 3-流形（Y,u_Y）。设 $w\in H_2(X;\mathbb{Z}/2)$ 是障碍类 $\mathcal{O}(X,Y,u_Y,u_X^\pi)\in H^2(X,Y;\mathbb{Z}/2)$ 的庞加莱对偶。那么，定理 5.5(2) 中定义的 $\delta^X{}_{,2}{}^w\colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\to I/IJ$ 满足

$$\delta_2^{X,w}=d_2\colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2).$$

特别地，它不依赖于流形 X 的选择（只依赖于正规 1-型 ξ）。

我们首先解决自旋和 Pin$^+$ 情形的定理 5.7，然后利用它解决一般情形。回想一下，对于 $\xi=\xi(\pi,w_1^\pi,0)$ 微分 $d_2\colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 是 $\mathrm{Sq}^1(-)\smile w_1$ 的 Hom 对偶，因为在这种情况下第二个 Steenrod 平方消失（见第 B节）。

命题 5.8。令 $\xi=\xi(\pi,w_1^\pi,0)$ 为一个自旋或 Pin$^+$ 正规 1-型（取决于w_1^π是否为零）。令 (M,u_M^π) 为一个带有 $\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(M,u_M^\pi)=0$ 的 $(B\pi,w_1^\pi)$-流形。那么

$$\delta_2^{M,w}=(w_1^\pi\smile\mathrm{Sq}^1(-))^*=d_2\colon H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)\to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2).$$

定理的证明 5.8 首先需要在几个特殊情形下证明该定理，然后我们将与这些情形进行比较。

引理 5.9. 设

(i) $\pi=\mathbb{Z}/2$和 $\xi=\xi(\pi,\ 0,\ 0)$，或 (ii) $\pi=\mathbb{Z}/2$和 $\xi=\xi(\pi,\ x_1,\ 0)$，其中 $x_1\in H^1(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$ 是生成元，或

(iii) $\pi = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$和 $\xi = \xi(\pi,\ x_1 + x_2,\ 0)$，其中 $x_1,\ x_2$ 是 $H^1(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2;\ \mathbb{Z}/2)$ 的标准生成元。

那么，对于闭的（$B\pi,\ w_1^\pi$）流形 u_M^π：$M \to B\pi$，其中 $\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(M,\ u_M^\pi) = 0$，定理 5.8的结论成立。

We w在证明过程中，我们将多次使用以下构造，因此在此将其记下。 .

构造 5.10。对于具有 $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ 的流形 M，我们用 $(M)_*$ 表示对 $\pi_1(M)$ 的生成元的交换子进行手术所得的结果。如果 M 在某个特征曲面 w 之外具有正规 Pin^+ 结构，则可以在与 w 不相交的位置进行此手术，并使其在 w 之外保持 Pin^+ 结构。

定理 5.9 的证明。由定理 5.5(3)，我们只需考虑每个 $\mathbb{CP}^2$-稳定同调类（$B\pi, w_1^\pi$）。根据 [Kre99]，具有基本群 π 和定向类 w_1^π 的流形有 $|H_4(\pi;\ \mathbb{Z}^{w_1^\pi})/\operatorname{Aut}(\pi, w_1^\pi)|$ 个 $\mathbb{CP}^2$-稳定同调类[3]。次级不变量不依赖于稳定 $\mathbb{CP}^2$-同调类。

情形 (i)，$\xi = \xi(\mathbb{Z}/2,\ 0,\ 0)$：恰有 $|H_4(B\mathbb{Z}/2)/\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/2)| = 1$ 个这样的稳定同调类，由一个通常记作 F 的流形表示；这是一个闭自旋流形，具有 $\pi_1(F) \cong \mathbb{Z}/2$，且其万有覆盖为 $S^2 \times S^2$。我们将使用 F 的一些拓扑性质，例如见 [HK88，第 4] 节末尾。F 的万有覆盖上的甲板变换是

$$\begin{aligned} S^2 \times S^2 &\to S^2 \times S^2 \\ (x, y) &\mapsto (-x, r(y)), \end{aligned}$$

k-不变量 $k_F \in H^3(\mathbb{Z}/2;\ \pi_2(F))$ 在显然的同构 $\pi_2(S^2 \times S^2) \cong \pi_2(S^2) \times \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}\langle a, b\rangle$ 下为 (1, 0)。由定理 A.6，约化的 k-不变量$k^r \in H^3(\mathbb{Z}/2;\ \pi_2(F) \otimes_\Lambda \mathbb{Z})$ 的求值映射给出了 F 的 Serre 正合序列中的第一个映射（见 A 节）。

$$\begin{array}{ccccc} H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{ev(k_F)} & \pi_2(F) \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{h_2^\Lambda} & H_2(F;\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{(1,0)} & \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\mathrm{proj}_2} & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

由于 F是自旋的，我们需要验证对于任意 $\alpha \in \ker(h_2^\Lambda)$，$\delta^{F,0\,2}(\alpha) = \mu_J(\alpha) + \lambda_J(\alpha, 0)$ 为零。核 $\ker(h_2^\Lambda)$ 由同调类 $\alpha = [* \times S^2]$生成。由甲板变换可知，$\mu_J(\alpha) = 0$，因此 $\delta^{F}{}_{,2}{}^{0} = 0$。表达式 $(w_1^\pi \smile \mathrm{Sq}^1(-))^*$ 也消失。

情形 (ii)，$\xi = \xi(\mathbb{Z}/2, w_1^{\mathbb{Z}/2} = x_1, 0)$：由于 $H_4(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}^{w_1^{\mathbb{Z}/2}}) \cong \mathbb{Z}/2$，我们需要考虑两个稳定的 $\mathbb{CP}^2$-同调类。它们分别是 $\mathbb{RP}^4$ 和 $\mathbb{RP}^2 \times S^2$，对应非平凡类和零类，这可由它们的分类映射看出。

这些流形成为正规Pin^+ 的障碍，等同于它们成为切向 Pin^-的障碍。由于 $w_1^t(\mathbb{RP}^4)^2 + w_2^t(\mathbb{RP}^4) = x_1^2 \in H^2(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2)$，其庞加莱对偶代表 $H_2(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2)$ 中的非平凡同调类。由于分类映射 $u_{\mathbb{RP}^4}^\pi$：$\mathbb{RP}^4 \to B\mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{RP}^\infty$ 是包含映射，次级不变量 $\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(\mathbb{RP}^4, u_{\mathbb{RP}^4}^\pi)$ 非零。

另一方面，流形 $\mathbb{RP}^2 \times S^2$ 通常是 Pin^+，因此障碍类$o(\mathbb{RP}^2 \times S^2,\ u_{\mathbb{RP}^2 \times S^2}^\pi)$ 可以由一个零同调元素表示，因此 $\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(\mathbb{RP}^2 \times$

[3]允许同时与 $\mathbb{CP}^2$ 和 $\mathbb{CP}^2$作连通和。

S^2, $u^{\pi}_{\mathbb{RP}^2\times S^2}$) 消失。为了证明 $\delta^{\mathbb{RP}^2\times S^2}_{\ 2}{}^{0} = (x_1 \smile \mathrm{Sq}^1(-))^*$，我们先计算右边。由 $x_1 \smile \mathrm{Sq}^1(-)$ 给出的映射 $H^1(\mathbb{Z}/2;\,\mathbb{Z}/2) \to H^3(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$ 是一个同构，其对偶也是同构。为了计算左边，我们需要考察 Serre 正合序列中相关的部分，即

$$H_3(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\mathfrak{f}^{\mathbb{RP}^2\times S^2}} \pi_2(\mathbb{RP}^2\times S^2)\otimes\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{h^{\Lambda}_2} H_2(\mathbb{RP}^2\times S^2).$$

第二个映射的核由万有覆盖 a 生成：$S^2 \to \mathbb{RP}^2$ 与包含映射 $\iota_{\mathbb{RP}^2}\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2\times S^2$ 复合。我们如下证明 $\mu_J(\iota_{\mathbb{RP}^2}\circ a) \in H_1(\mathbb{Z}/2;\,\mathbb{Z}/2)$ 是非平凡元素。令 $f_{\mathrm{fold}}\colon S^2 \to D^2$ 表示折叠映射，它将 S^2 的赤道映入 D^2 的边界，并将北极与南极映至 $0\in D^2$。下述映射与 $\iota_{\mathbb{RP}^2}\circ a$ 同伦。

$$a'\colon S^2 \xrightarrow{\mathrm{id}_{S^2}\times f_{\mathrm{fold}}} S^2\times D^2 \xrightarrow{a\times \mathrm{id}_{D^2}} \mathbb{RP}^2\times D^2 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2\times S^2 \tag{5.1}$$

此映射的像只有一个双重点，即它将南极和北极映至同一个元素。由于连接北极与南极的线是 $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ 的生成元，我们得出，与此交相关联的双重点环是 $\pi_1(\mathbb{RP}^2\times S^2)$ 的生成元，因此 $\mu_J(a') = x_1 \neq 0$。

Case (iii), $\xi = \xi(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2, w_1^{\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2} = x_1+x_2, 0)$:

我们使用模型 $B\,\mathbb{Z}\!\not{2}\times\mathbb{Z}\!\not{2} \simeq B\mathbb{Z}\!\not{2}\times B\mathbb{Z}\!\not{2} \simeq \mathbb{RP}^\infty\times\mathbb{RP}^\infty$ 来计算 $H_4(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2;\,\mathbb{Z}^{x_1+x_2})$。$\mathbb{RP}^\infty$ 的万有覆盖是可缩空间 S^∞。S^∞ 的奇异链复形为 $C_i(S^\infty)\cong\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$，其微分 $d_i\colon C_i(S^\infty) \to C_{i-1}(S^\infty)$ 由 $t\mapsto(-1)^i$ 给出，由此可以计算出

$$H_4(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}^{x_1+x_2}) \cong (\mathbb{Z}/2)^3 \cong \mathbb{Z}/2\,\langle e_0\times e_4, e_2\times e_2, e_4\times e_0\rangle$$

and

$$H_4(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}^{x_1+x_2})/\operatorname{Aut}_{x_1+x_2}(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^2 \cong \mathbb{Z}/2\,\langle e_0\times e_4, e_2\times e_2\rangle\,,$$

我们取 S^∞ 的胞腔分解，使其在每个维度上都有两个胞腔，并取胞腔映射 $S^\infty\to\mathbb{RP}^2$ 为胞腔映射。现在我们要寻找流形来表示同调类 $\langle e_0\times e_4,\ e_2\times e_2\rangle$。同调类 $e_2\times e_2$ 由 $\mathbb{RP}^2\times\mathbb{RP}^2$给出。同调类 $e_0\times e_4$由 $(S^2\times\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^4)_*$给出，因为该同调类由 $S^2\times\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^4 \to B\mathbb{Z}/2\times B\mathbb{Z}/2$给出，且配边保持这一像。最后，零类由 $(S^2\times\mathbb{RP}^2\#S^2\times\mathbb{RP}^2)_*$给出。对于以上所有流形，我们都使用到 $\mathbb{RP}^\infty\times\mathbb{RP}^\infty$ 的显然映射。由于这些计算会很冗长，我们将其分成若干子情形。

情形 (iii.a)，$X = ((S^2\times\mathbb{RP}^2)\#(S^2\times\mathbb{RP}^2))_*$：$X$的柯比图见图1。$X$ 的次级不变量 X 消失了，因为$^+$ 是正规 Pin，因而障碍类 $\mathcal{O}(X, u_X^{\pi})$ 消失。

我们将定义一些稍后需要的元素 $\alpha_1,\ \alpha_2\in\pi_2(X)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2$。令 $C\cong D^2$为 $S^2\times D^2$ 的核，它是在手术过程中附着的，用以构成 X。我们定义环带 $A_t,\ A_s$：$S^1\times D^2\hookrightarrow X$使得每个环带的边界都映射到 ∂C，并定义$\alpha_1 = C\cup A_t\cup C$和 $\alpha_2 = C\cup A_s\cup C$。我们通过对 A_t 的推离进行惯性正则同伦，来描述环带 γ 的 C (见图2)。环带 A_s 的定义与此类似。

现在我们对 X 的性质作出以下断言，后文将需要用到这些性质。

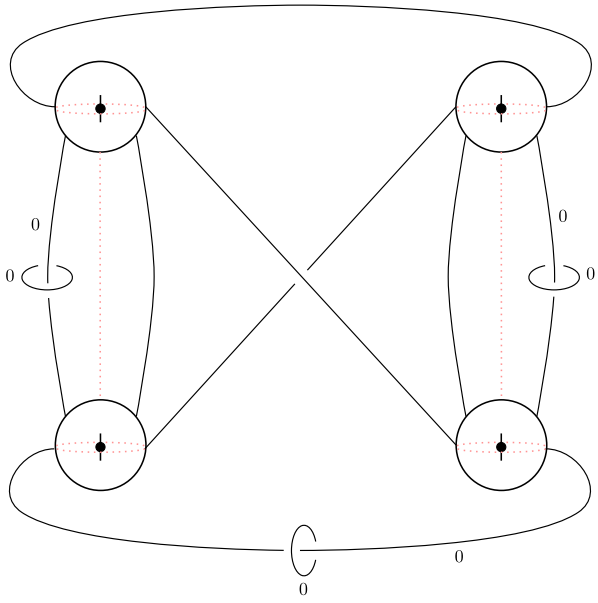


FIGURE 1. 流形 $X = ((\mathbb{RP}^2 \times S^2)\#(\mathbb{RP}^2 \times S^2))_*$。非定向1-柄的记号源自 Akbulut [Akb16，第 1.1、1 节。5]

断言 5.11。设 $X = ((\mathbb{RP}^2 \times S^2)\#(\mathbb{RP}^2 \times S^2))_*$，并设 $\pi := \pi_1(X)$。则与 $X \to B(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2)$ 相关联的 Serre 正合序列（附录 A）为

$$H_3(X;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{u^{\pi}_{X*}} H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\mathfrak{f}} \pi_2(X) \otimes \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{h^{\Lambda}_2} H_2(X;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{u^{\pi}_{X*}} H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) \tag{5.2}$$

于是有如下结论。所涉及的群为

(1)

$$H_k(X;\mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \text{ if } k = 0,4 \\ (\mathbb{Z}/2)^2 \text{ if } k = 1,3 \\ (\mathbb{Z}/2)^6 \text{ if } k = 2 \\ 0 \text{ else} \end{cases} \qquad H_k(\pi;\mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \text{ if } k = 0 \\ (\mathbb{Z}/2)^2 \text{ if } k = 1 \\ (\mathbb{Z}/2)^3 \text{ if } k = 2 \\ (\mathbb{Z}/2)^4 \text{ if } k = 3 \end{cases},$$

(2) 和 $\pi_2(X) \otimes \mathbb{Z}/2 \cong (\mathbb{Z}/2)^7$。

我们汇总生成元的信息：

(3) 群 $H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)$：由 $e_3 \times e_0$、$e_2 \times e_1$、$e_1 \times e_2$ 和 $e_0 \times e_3$ 生成，其中 e_i 表示 $\mathbb{RP}^\infty$ 中的第 i 个胞腔。(4) 群 $H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$：由 $e_2 \times e_0$、$e_1 \times e_1$ 和 $e_0 \times e_2$ 生成。(5) 群 $\pi_2(X) \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2$：由两个覆盖映射 $S^2 \to \mathbb{RP}^2$、两个$\{\text{pt}\} \times S^2$和手术的带圈球面，以及上文定义的两个同调类 α_1 和 α_2 生成。(6) 群 $H_2(X;\mathbb{Z}/2)$：由 $\mathbb{RP}^2$ 的两个副本、S^2 的两个副本、手术的带圈球面以及另一个同调类 R 生成。

以及这些映射：

(7) u^{π}_{X*} 在 $H_3(X;\mathbb{Z}/2)$ 上的映射：这是零映射。

(8) 映射 $\mathfrak{f}$：它分别将 $e_3 \times e_0$ 和 $e_0 \times e_3$ 映射到两个覆盖映射 $S^2 \to \mathbb{RP}^2$，并分别将 $e_2 \times e_1$ 和 $e_1 \times e_2$ 映射到 α_1 和 α_2。(9) Hurewicz映射 h_2^{Λ}：它将 S^2 的两个副本映射到 S^2的两个副本，并将手术的带圈球面映射到手术的带圈球面。(10) u_{X*}^{π} 在 $H_2(X;\mathbb{Z}/2)$ 上的映射：它将由 $\mathbb{RP}^2$ 的两个副本和某个同调类 R 生成的子群 $(\mathbb{Z}/2)^3$ 单射地映射到 $H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$。

至此，命题的陈述部分就完成了。我们暂缓证明，待当前证明完成后再给出。

由于 $w =$庞加莱对偶$(X, u_X^{\pi}) = 0$，我们有 $\delta^{X}{}_{,2}{}^{0} = \mu_J \circ \mathfrak{f}^X$。根据定理 5.11(8)，我们需要计算 $\mathfrak{f}^X$ 的像中元素的自交。根据图2可以计算出，α_1和 α_2有一个双重点；此外，$\mu_J(\alpha_1) = t$和 $\mu_J(\alpha_2) = s$，其中 $s,t \in H_1(B\mathbb{Z}/2 \times B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$ 分别是与 x_1和 x_2 对偶的生成元。两个覆盖映射 $S^2 \to \mathbb{RP}^2$ 分别有 $\mu_J = t$ 和 s（证明与本证明中先前对 $\mathbb{RP}^2 \times S^2$ 的计算完全相同，见映射 5.1）。

映射 d_2 是 $(w_1^{\pi} \smile \mathrm{Sq}^1(-))$ 的对偶：$H^1(B\mathbb{Z}/2 \times B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2) \to H^3(B\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$，其在生成元上的作用为

$$x_1 \mapsto x_1^3 + x_1^2 x_2$$
$$x_2 \mapsto x_1 x_2^2 + x_2^3$$

因为 $w_1^{\pi} = x_1 + x_2$。现在 d_2 是

$$x_1^3 \mapsto t = (x_1)^*$$
$$x_1^2 x_2 \mapsto t = (x_1)^*$$
$$x_2^3 \mapsto s = (x_2)^*$$
$$x_1 x_2^2 \mapsto s = (x_2)^*$$

这与 $\delta^{X}{}_{,0\,2}$ 一致。

情形（iii，b）中，流形 $X = \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ 不是通常的 Pin^+ 流形，且其正规 w_2 由 x_1x_2给出。此特征元在 $H_2(B\mathbb{Z}/2 \times B\mathbb{Z}/2)$ 中不为零，因此

$$\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2) = x_1x_2 \neq 0.$$

情形（iii，c），$X = ((S^2 \times \mathbb{RP}^2)\#\mathbb{RP}^4)_*$：计算表明，$S^2 \times \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^4$ 具有正规第二斯蒂费尔-惠特尼类 $w_2 = x_2^2$。令 $w \in H_2(S^2 \times \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^4;\ \mathbb{Z}/2)$ 为 Poincar´e 对偶 x_2^2。通过按照定理5.10 进行手术，我们得到（$S^2 \times \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^4$）$_*$，其仍以 w 作为特征元。此外，一个简单的 Mayer–Vietoris 论证表明，同调类 w 仍然非平凡，于是得到如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} H_2(S^2 \times \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^4;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & H_2(B(\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2);\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_2((S^2 \times \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^4)_*;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & H_2(B(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2);\mathbb{Z}/2) \end{array}$$

左侧的竖直映射实际上由一系列 Mayer-Vietoris 序列构成的之字形给出。由上述图表的交换性可知 sec 非零，因为 w 非平凡地映射到 $H_2(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$。□

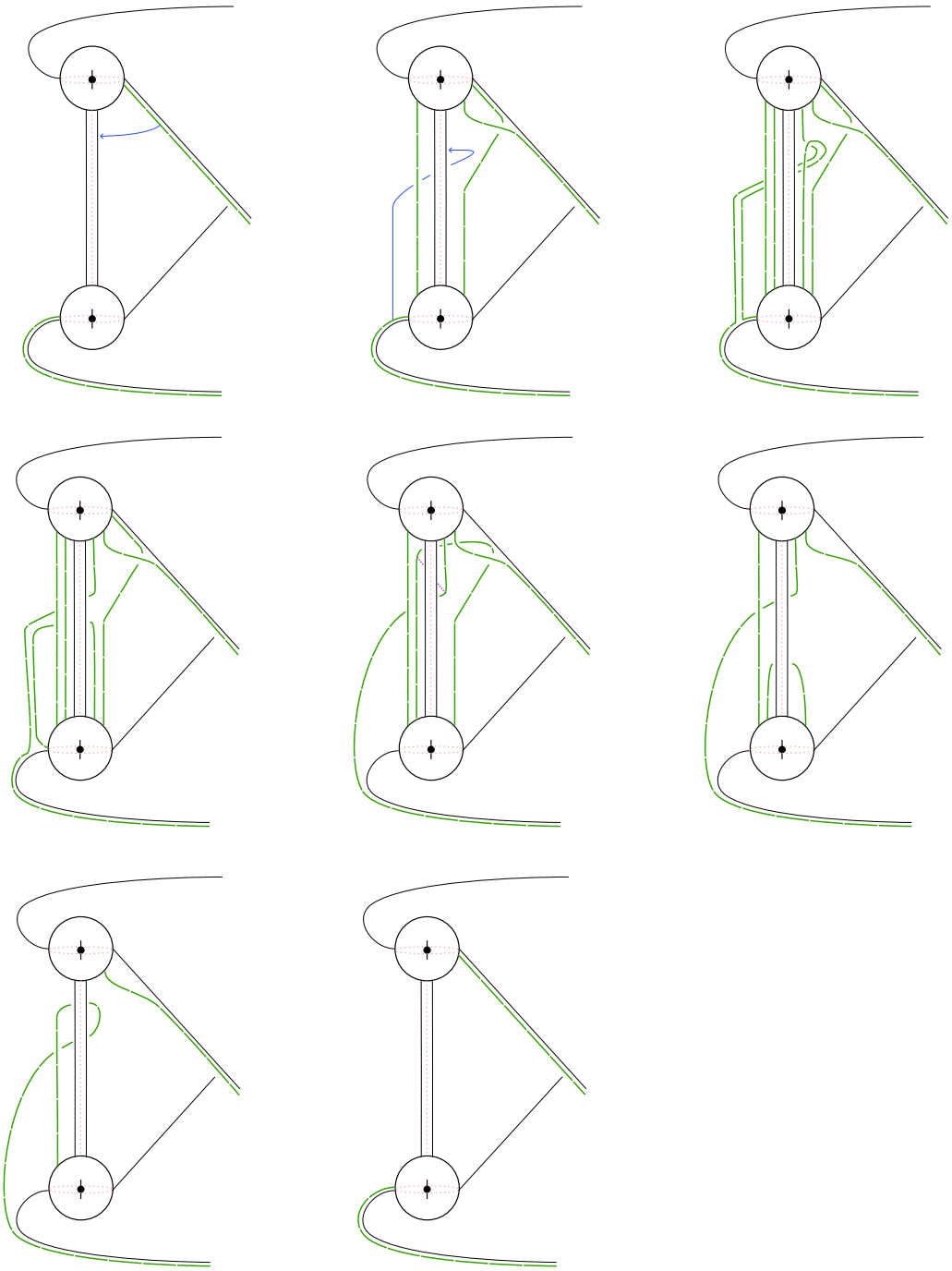


FIGURE 2. 环带 A_t 通过.....的正则同伦描述 γ，以间断虚线绿色显示；柯比图中相关部分则以黑色实线显示。单个交点的引导线以紫色虚线显示。把手滑动由蓝色箭头引导。图 1 中仅显示柯比图的相关部分。1 所示。

定理 5.11 的证明。 我们先证明（1）计算$B(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2)\simeq\mathbb{RP}^\infty\times\mathbb{RP}^\infty$ 的同调（生成元）是代数拓扑中的基本练习，由此可证明（3）和（4）。

令 X_0 为移除手术附着区域后得到的空间

$$(S^2\times\mathbb{RP}^2)\#(S^2\times\mathbb{RP}^2)\rightsquigarrow(S^2\times\mathbb{RP}^2\#S^2\times\mathbb{RP}^2)_*=:X,$$

该手术是在远离 w 的某个固定代表元处进行的。于是 X_0 具有包含映射 $S^2\times\mathbb{RP}^2\#$
$S^2\times\mathbb{RP}^2\hookleftarrow X_0\hookrightarrow X$。

考虑第一个包含映射对应的如下 Mayer-Vietoris序列（省略 $\mathbb{Z}/2$ 系数）。

$$0\longrightarrow H_2(S^1\times S^2)\xrightarrow{\text{belt}}H_2(X_0)\longrightarrow H_2(S^2\times\mathbb{RP}^2\#S^2\times\mathbb{RP}^2)\longrightarrow 0$$

最后一个映射为零，因为下一个映射是单射 $H_1(S^1\times S^2)\to H_1(S^1\times D^2)\oplus H_1(X_0)$。“带圈”所标记的映射的像给出 X_0 中的一个同调类，进而在 X 中由该把手的带圈球面给出。现在我们陈述第二个包含映射对应的序列。

$$0\longrightarrow H_2(S^1\times S^2)\longrightarrow H_2(X_0)\oplus H_2(D^2\times S^2)\longrightarrow H_2(X)\longrightarrow H_1(S^1\times S^2)\longrightarrow 0$$

这里最后一个映射为零，因为 $H_1(S^1\times S^2)$ 的生成元映射到 X_0 中的一个交换子，因此在同调中消失。

通过上述两个正合序列，我们得出存在一个（非典范）同构$H_2(X;\mathbb{Z}/2)\cong(\mathbb{Z}/2)^6\cong H_2(S^2\times\mathbb{RP}^2\#S^2\times\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2)\oplus(\mathbb{Z}/2)^2$，其中 $(\mathbb{Z}/2)^2$ 同调类由上文定义的带圈球面以及某个同调类 R 生成，而 $H_2(S^2\times\mathbb{RP}^2\#S^2\times\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2)\cong(\mathbb{Z}/2)^4$ 由两个 S^2 和两个 $\mathbb{RP}^2$ 生成。这证明了 (1) 和 (6)。

考虑 Serre 正合序列 (5.2)。最后一个映射 $(u_X^\pi)_*\colon H_2(X;\mathbb{Z}/2)\to H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 是满射；其核为 $(\mathbb{Z}/2)^3$,，由两个嵌入的二球面和所附加把手的带圈球面生成，因为球面类必然在 $H_2(B\pi)$中消失。这证明了 (10)。我们证明第一个映射 $(u_X^\pi)_*$ 为零。映射 $S^2\times\mathbb{RP}^2\#$
$S^2\times\mathbb{RP}^2\to B\mathbb{Z}/2\times B\mathbb{Z}/2$经过 2-骨架 $(B\mathbb{Z}/2\times B\mathbb{Z}/2)^{(2)}$ 分解，映射 $X\to B\mathbb{Z}/2\times B\mathbb{Z}/2$ 也是如此，因为在同伦等价意义下，只附加了一个 2-把手，这就证明了 (7)。

由于 $H_3(B\mathbb{Z}/2\times B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)\cong(\mathbb{Z}/2)^4$，我们有 $\pi_2(X)\otimes\mathbb{Z}/2\cong(\mathbb{Z}/2)^7$,，从而证明了 (2)。由于 h_2^Λ 的像是 $(\mathbb{Z}/2)^3$，其核必为 $(\mathbb{Z}/2)^4$。为了确定生成元，我们考虑映射 $\mathfrak{f}$。根据定理 A.6，$\mathfrak{f}$ 的另一种描述如下：可以通过将 n-胞腔沿 $n\geq 3$ 粘附到 X 上，构造 $B\pi$ 的一个模型，以消去所有高阶同伦群。在这个模型中，任意 $z\in H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 都是 3-胞腔的线性组合，这些 3-胞腔沿 X 中的二球面粘附。于是，$\mathfrak{f}(z)$ 就是这些粘接映射的线性组合。我们现在采用这种描述。

将 X 的分类映射分解为

$$X=(S^2\times\mathbb{RP}^2\#S^2\times\mathbb{RP}^2)_*\to(S^2\times\mathbb{RP}^2)\vee(S^2\times\mathbb{RP}^2)\cup f_2\to\mathbb{RP}^2\vee\mathbb{RP}^2\cup f_2\xrightarrow{\text{incl.}}\mathbb{RP}^\infty\times\mathbb{RP}^\infty,$$

其中 f_2 表示沿交换子粘附的一个 2-胞腔。由于 $\mathbb{RP}^2\vee\mathbb{RP}^2\cup f_2$ 恰好是 $\mathbb{RP}^\infty\times\mathbb{RP}^\infty$的 2-骨架，因此很容易看出映射 $\mathfrak{f}$ 在该空间上的形式；它由 $\mathbb{RP}^\infty\times\mathbb{RP}^\infty$中 3-胞腔的粘接映射给出。我们得到如下图表，该图表是交换的

根据 Serre 谱序列的自然性（参见第A节）。

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(X)\otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{RP}^2\vee\mathbb{RP}^2\cup f_2)\otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \\ \uparrow{\scriptstyle \mathfrak{f}_1} & & \uparrow{\scriptstyle \mathfrak{f}_2} \\ H_3(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2) & = & H_3(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2) \end{array}$$

根据上述刻画，映射 $\mathfrak{f}_2$ 将 $e_3\times e_0$ 映至 $2e_2\times e_0$，将 $e_0\times e_3$ 映至 $e_0\times 2e_2$，将 $e_2\times e_1$映至 $2e_1\times e_1\cup e_2\times 2e_0$，并将 $e_1\times e_2$ 映至 $2e_0\times e_2\cup e_1\times 2e_1$。注意，两个覆盖映射 $(S^2\to\mathbb{RP}^2)\in\pi_2(X)\otimes\mathbb{Z}/2$ 映至 $2e_2\times e_0$ 和 $e_0\times 2e_2$，位于 $\pi_2(\mathbb{RP}^2\vee\mathbb{RP}^2\cup f_2)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2$。映射 $\mathfrak{f}_2$ 是一个同构，因此 $\mathfrak{f}_1(e_3\times e_0)$ 和 $\mathfrak{f}_2(e_0\times e_3)$ 映至这些覆盖映射；由于这些覆盖映射在 $\mathbb{Z}/2$- 同调中为零，因此可提升至 $H_3(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$。

现在我们证明 $\alpha_1=\mathfrak{f}_1(e_2\times e_1)$（证明 $\alpha_2=\mathfrak{f}_1(e_1\times e_2)$ 也是一样的）。和上面一样，只需证明 α_1 映射到 $\partial(e_2\times e_1)\in\pi_2(\mathbb{RP}^2\vee\mathbb{RP}^2\cup f_2)\otimes\mathbb{Z}/2)$。两个圆盘 C和 C 都映射到 f_2，因此我们只需得出环带 A_1 映射到 $2e_2\times e_0$。回想一下，该环带由两次把手滑动构成，二者都是越过那个核映射到 $e_2\times e_0$ 的 2-把手进行的。这意味着环带的迹映射到 $2e_2\times e_0$，因此 α_1映射到 $\partial(e_2\times e_1)$。这就证明了 (8)。利用上述结果和 (10)，我们证明 (5)。结合 (5) 和 (6) 即得 (9)。□

定理的证明 5.8。设 $\xi=\xi(\pi,\ w_1^\pi,\ 0)$ 已知，并设 $(M,\ u_M^\pi)$ 是一个 $(B\pi,\ w_1^\pi)$-流形，且 $\mathfrak{sec}^{\mathrm{geo}}(M,\ u_M^\pi)=0$。我们将证明，总能建立与定理 5.9 中所考察的某个 1-型的比较，从而足以描述该微分。

设 $z\in H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)$，令 $\overline{\mathfrak{f}^M(z)}\colon S^2\looparrowright X$为一个浸入的 2-球面，使得 $[\mathfrak{f}^M(z)]\ \overline{\in\pi_2(M)}$ 是 $\mathfrak{f}^M(z)$ 的一个提升；又设 $[c\colon S^2\looparrowright M]\in\pi_2(M)$ 是 $\mathrm{PD}(w_2(M))$ 的一个提升，该提升存在，因为 M 的次级不变量消失。反设 $x:=\delta^{M,\ w}_{2}(z)-d_2(z)\in H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 非零。那么存在一个映射 $\varphi_x\colon\pi\to\mathbb{Z}/2$，它将 x 映射到 $H_1(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$ 的生成元。现在分情况讨论。

(1) 若 $w_1^\pi=0$，则对 φ_x 的核进行手术，得到一个 $(B\mathbb{Z}/2,w_1^\pi=0)$-流形 M'。(2) 若 $w_1^\pi(x)\neq 0$，则对 w_1^π 的核进行手术，得到一个 $(B\mathbb{Z}/2,w_1^\pi\neq 0)$-流形 M'。(3) 若 $w_1^\pi\neq 0$，但 $w_1^\pi(x)=0$，则对 $w_1^\pi\oplus\varphi_x$ 的一个核进行手术：$\pi\to\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$，得到一个 $(B(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2)\ w_1^\pi=(1,0))$-流形 M'。

在所有情况下，都在远离 $\mathfrak{f}^M(z)$ 和 c 的位置进行这些手术；根据一般位置原理，这是可以做到的。将此 5维手术迹记为 W。同调类 c 仍然表示 M' 的第二斯蒂费尔-惠特尼类，因为我们可以假设这些手术在 c 的补集中保留自旋 / Pin^+-结构。

令 $i_M\colon M\to W, i_{M'}\colon M'\to W$ 表示这两个包含映射。考虑如下图表，其中各行分别由 M、W 和 M' 的 Serre 正合序列构成，并且该图表由自然性保证可交换。

$$\begin{array}{ccccc} H_3(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^M} & \pi_2(M)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & H_2(M;\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow{\scriptstyle (i_M)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (i_M)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (i_M)_*} \\ H_3(\pi_1(W);\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^W} & \pi_2(W)\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & H_2(W;\mathbb{Z}/2) \\ \cong\uparrow{\scriptstyle (i_{M'})_*} & & \uparrow{\scriptstyle (i_{M'})_*} & & \uparrow{\scriptstyle (i_{M'})_*} \\ H_3(\pi_1(M');\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^{M'}} & \pi_2(M')\otimes_\Lambda\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & H_2(M';\mathbb{Z}/2) \end{array}$$

注意，由构造可知 $\pi_1(\varphi_x) = \pi_1(i_{M'}^{-1} \circ (i_M))$，因此 $\varphi_x = i_{M'}^{-1} \circ i_M$：$H_3(\pi; \mathbb{Z}/2) \to H_3(\pi_1(M'); \mathbb{Z}/2)$。由于我们是在远离 $\mathfrak{f}^M(z)$ 的位置进行手术的，这个浸入球面可以看作 M' 中的浸入球面；但为清晰起见，我们记 $y := [\mathfrak{f}(z)] \in \pi_2(M') \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2$，于是其满足 $\overline{(i'_M)}_*(y) = (i_M)_*(\mathfrak{f}(z))$。$y$ 与 $\mathfrak{f}^{M'}(\varphi_x(z))$ 不一定相同。(W, M') 的相对把手链复形为

$$C_*(W, M') = \begin{cases} \mathbb{Z}^n & * = 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

对于某个非负整数 n，因此

$$\ker\left((i_{M'})_* \colon H_2(M'; \mathbb{Z}/2) \to H_2(W; \mathbb{Z}/2)\right) \cong H_3(W, M'; \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^n,$$

由 1-把手的带状三维圆盘 B_ℓ 生成，而它们在 $H_2(M')$ 中的像是边界 ∂B_ℓ，其中 $\ell = 1, \ldots, n$。应用蛇引理

$$\ker((i_{M'})_* \colon \pi_2(M') \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2 \to \pi_2(W) \otimes_\Lambda \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^n,$$

再次生成了 ∂B_ℓ，因此存在整数 k_ℓ 使得

$$y + \sum_{\ell=1,\ldots,n} k_\ell \partial B_\ell = \mathfrak{f}^{M'}((\varphi_x)_*(z)).$$

我们得到

$$\begin{aligned}
(\varphi_x)_* d_2(z) &= d_2((\varphi_x)_*(z)) \\
&= \delta_2^{M', w_2(M')}((\varphi_x)_*(z)) = \mu_J(\mathfrak{f}^{M'}((\varphi_x)_*(z)) + \lambda_J(\mathfrak{f}^{M'}((\varphi_x)_*(z)), c) \\
&= \mu_J(y + \sum_{\ell=1,\ldots,n} k_\ell \partial B_\ell) + \lambda_J(y + \sum_{\ell=1,\ldots,n} k_\ell \partial B_\ell, c) = \mu_J(y) + \lambda_J(y, c) \\
&= (\varphi_x)_*[\mu_J(\mathfrak{f}^M(z)) + \lambda_J(\mathfrak{f}^M(z), c)] = (\varphi_x)_* \delta_2^{M, w}(z),
\end{aligned}$$

其中第一个等号来自 JSS 的自然性；第二个来自定理5.9；第三个来自 $\delta^{M'、w_2(M')\ 2}$ 的定义；第四个来自上述论证；第五个是因为∂B_ℓ 都是带框架的、嵌入的，且与 c 不相交；第六个来自元素 y 的定义；第七个则来自 $\delta^{M、\ 2}{}^{\ w}$ 的定义。

这意味着 $(\varphi_x)_*(\delta^{M、\ 2}{}^{\ w}(z) - d_2(z)) = 0$，这与 φ_x 的定义矛盾。因此$x = \delta^{M、\ 2}{}^{\ w}(z) - d_2(z) = 0$。□

引理 5.12. 对于任意闭的 $(B\pi, w_1^\pi)$-流形 (M, u_M)，若存在一个 π_1-同构 $u_M^\pi \colon M \to B\pi$，且 $u_{M*}^\pi([M]) = 0$ 使得庞加莱对偶$(w_2(M))$可由一个浸入球面表示，则在 I/IJ中有等式

$$a \frown z = \lambda_J(\mathfrak{f}^M(z), \mathrm{PD}(u_M^{\pi *} a))$$

对于任意 $z \in H_3(\pi; \mathbb{Z}/2)$ 和任意 $a \in H^2(\pi; \mathbb{Z}/2)$。

证明。首先，注意上述等式右边是良定义的，见定理 3.14。

通过将 k-胞腔附加到 M（其中 $k \geq 3$），构造一个 $B\pi$ 的模型。这样，映射 $\mathfrak{f}^M$ 便有了几何解释，可视为某个边界映射（见定理A.4）。令 $z \in H_3(\pi; \mathbb{Z}/2)$和 $a \in H^2(\pi; \mathbb{Z}/2$为任意元素。将 z 表示为从一个闭的 3 维流形 z到 $W^3 \to B\pi$的映射：这总是可以由 Thom [Tho54]实现。假设 W具有一个

具有单个 3-把手的把手体分解，并将去掉该把手后的流形记为 W^0 W。对映射 z作同伦变形，使得 W^0落在 M中。

为 M 中的浸入球面选择 $D:=$庞加莱对偶 $((u_M^\pi)^*(a))$ $\in H_2(M;\mathbb{Z}/2)$ 的一个模型。由假设，以下交换图中的下方水平映射为零，因此这是可能的

$$\begin{array}{ccc} H_2(M;\mathbb{Z}/2) & \xleftarrow[\text{PD}]{} & H^2(M;\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow{\scriptstyle u_{M*}^\pi} & & {\scriptstyle u_M^{\pi *}}\uparrow \\ H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xleftarrow[\frown u_M^{\pi *}[M]]{} & H^2(\pi;\mathbb{Z}/2) \end{array}$$

因此，庞加莱对偶 $((u_M^\pi)^*(a))$ 是球面的。 W^0 与 D 的横截相交由一个一维流形给出，我们将其记为 A，它是 $\mathbb{Z}/2$-零同调圆环和适当弧 $\{a_i\}_{i=1,\dots,k}$ in W^0的某个集合。在 A中，用弧 $\{\widetilde{a_i}\}_{i=1,\dots,k}$ in∂W^0 将所有弧闭合（这是唯一的做法，因为不同选择通过 W 的顶胞腔彼此同调），从而得到一个流形 A，按构造它与 $a \frown z$同调。

按构造，元素 $\partial W^0 \to M$是 $\mathfrak{f}^M(a) \in \pi_2(M) \otimes \mathbb{Z}/2$。因此，交$P:= \partial W^0 \pitchfork D$在计入群元素后，给出值 $\lambda_J(\mathfrak{f}^M(z)\ a)$。注意， $\partial A = P$，利用这一点，我们可以将 P 自然分解为大小为二的集合，$P = \{p_1, q_1\} \cup \{p_2, q_2\} \cup \dots \{p_k, q_k\}$，其中每一对 $\{p_i, q_i\}$ 由两条弧 $a_i \subseteq A, \widetilde{a_i} \subseteq A \setminus A \setminus A$连接。剩下需要证明的是，一维流形 A 与 ∂W^0 和 D的双重点环同调。

固定一个基点 $x_0 \in M$。对于每一对 $\{p_i, q_i\} \subset P$，我们分别固定从 x_0到 p_i、位于 D和 ∂W^0中的路径 γ_i、 $\widetilde{\gamma_i}$。对于 $p \in P$，令 $\theta(p)$ 为与点 p关联的 π_1 元素。那么

$$\lambda_J(\mathfrak{f}(z), a) = \sum_{p\in P} \theta(p) = \sum_{i=1,\dots,k} \theta(p_i) + \theta(q_i) = \sum_{i=1,\dots,k} \widetilde{\gamma_i}\gamma_i + \widetilde{\gamma_i}\widetilde{a_i}a_i\gamma_i = \sum_{i=1,\dots,k} \widetilde{a_i}a_i = \overline{A},$$

其中，第一个等式根据 λ_J的定义成立，第二个等式来自重新编号，第三个等式来自上述观察，第四个等式成立是因为我们是在同调中进行运算，而最后一个等式则由 A 分解为弧 $\widetilde{a_i}a_i$ 和零同调的圆得到。□

现在我们终于可以证明定理5.7。

定理 5.7的证明。 我们需要证明

$$\delta_2^{X,w}(z) = d_2(z)$$

对所有 $z \in H_3(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$。根据定理 B.9， d_2 与之对偶

$$d^2(-) = - \frown w_2^\pi + Sq^1(-) \frown w_1^\pi.$$

根据定理 5.6，存在一个闭的 $(B\pi,\ w_1^\pi)$-流形 M，使得 $\delta^{X,\ w_M} = \delta^{M,\ 2}$，$(u_M^\pi)_*([M]) = 0$，且障碍类 $w_M = \text{PD}(\mathcal{O}(M,\ u_M^\pi))$的庞加莱对偶是球面的。由于图表

$$\begin{array}{ccc} H_2(M;\mathbb{Z}/2) & \xleftarrow[\text{PD}]{} & H^2(M;\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow{\scriptstyle (u_M^\pi)_*} & & {\scriptstyle (u_M^\pi)^*}\uparrow \\ H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xleftarrow[\frown (u_M^\pi[M])^*]{} & H^2(\pi;\mathbb{Z}/2) \end{array}$$

与之可交换，并且 $(u_M^\pi)_*([M]) = 0$，我们有 $\text{PD}((u_M^\pi)^*(w_2^\pi))$ 是球面的。通过将w_M分解为 $w_M = \text{PD}(w_2(M)+(u_M^\pi)^*(w_2^\pi))$，我们看到 $\text{PD}(w_2(M))$ 也是球面的。此外，

根据定理 2.13，我们有 PD($w_2(M)$) 和 PD($(u_M^\pi)^*(w_2^\pi)$) 都是 s-特征的。这些事实给出了对 δ_2^{M,w_M}的如下描述。

$$\begin{aligned}\delta_2^{M,w_M}(z) &= \mu_J(\mathfrak{f}(z)) + \lambda(\mathfrak{f}(z), \mathrm{PD}(w_2(M) + (u_M^\pi)^*(w_2^\pi))) \\ &= \delta_2^{M,\mathrm{PD}(w_2(M))}(z) + \lambda(\mathfrak{f}(z), (u_M^\pi)^*(w_2^\pi)) \\ &= (w_1^\pi \smile \mathrm{Sq}^1(-))^*(z) + \lambda(\mathfrak{f}(z), (u_M^\pi)^*(w_2^\pi)) \\ &= (w_1^\pi \smile \mathrm{Sq}^1(-))^*(z) + (u_M^\pi)^*(w_2^\pi) \frown z \\ &= (w_1^\pi \smile \mathrm{Sq}^1(-))^*(z) + ((u_M^\pi)^*(w_2^\pi) \smile -)^*(z),\end{aligned}$$

其中第一个等式由 δ^M 的定义得到，$_2{}^{w_M}$第二个等式由上述结果及 δ^M 的定义得到，PD(w_2（M）2，第三个等式由定理 5.8 得到，第四个等式由定理 5.12 得到，最后一个等式由杯帽公式得到。□

我们迄今所做的一切都蕴含了定理 B。为方便读者，现将其详细说明如下。

定理 B 的证明。令 $x \in H_4(\pi;\mathbb{Z}^{w_1^\pi})$。按照第 4.1 节中的类似论证，存在一个 $(B\pi, w_1^\pi)$-流形 M，使得 $u_M^\pi[M] = x$。于是定理 5.2 立即推出 $\delta^4{}_{,\ 0\ 2}(x) = d^4{}_{,\ 0\ 2}(x)$。

令 $z \in H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)$。选取 (Y, u_Y) 为一个 ξ-3-流形，使得 $\mathfrak{sec}(Y, u_Y) = 0$。根据定理 5.4，存在一个 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充 (X, u_X^π)，其障碍类 $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)$ Poincar´e- Lefschetz 对偶于某个 $w \in H_2(X;\mathbb{Z}/2)$，且该类具有球面代表元。根据定理 5.7，我们有 that $\delta^X{}_{,2}{}^{\ w}(z) = d_2^{(3,1)}(z)$。这意味着我们可以定义 $\delta_2^{(3,1)} := \delta^X{}_{,2}{}^{\ w}$，因为它与 X 和 w 无关；显然这意味着 $\delta_2^{(3,1)} = d_2^{(3,1)}$。□

同理，这意味着定理 C。

定理 C 的证明。令 $\pi := \pi_1(X)$，并令 $\xi = \xi(\pi, 0, 0)$。自旋结构 s 给出了 Y 上的一个ξ-结构。由定理 2.8 可计算得 $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi) = w_2^s$，即相对斯蒂费尔-惠特尼类。令 b为 X中的一个 $\mathbb{Z}/2$-零同调浸入球面。由 Serre 正合序列可知，存在 $z \in H_3(\pi;\mathbb{Z}/2)$，使得 b 是 $\mathfrak{f}(z)$ 的一个提升。对于正规 1-型 ξ，我们有

$$\lambda(b, c) - \mu(b) = \delta_2^{X,w}(z) = \delta_2^{(3,1)}(z) = d_2^{(3,1)}(z) = 0$$

其中所有等式均模 IJ成立。第一个结论由定理 5.5得出；第二个和第三个结论由定理B得出；第四个结论由定理 B.9得出，因为 w_2^π 和 w_1^π 均为零。结论立即成立。□

5.3. **几何微分** $\delta_3^{(4,0)}$。在本小节中，固定一个正规 1-型 $\xi = \xi(B\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$。现在我们将定义第三个几何微分

$$\delta_3^{(4,0)} \colon \ker(\delta_2^{(4,0)} \colon H_4(\pi;\mathbb{Z}^{w_1^\pi}) \to H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)) \to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\operatorname{im}(\delta_2).$$

定义 5.13. 用一个闭的（$B\pi, w_1^\pi$）-流形（M, u_M^π）来表示 $x \in \ker(\delta_2^{(4,0)} \colon H_4(\pi;\mathbb{Z}^{w_1^\pi}) \to H_2(\pi;\mathbb{Z}/2))$，其中有一个关于 $\mathcal{O}(M, u_M^\pi)$、相对于 ξ 的 c_Ma 球面代表元。于是我们定义

$$\delta_3^{(4,0)}(x) := \mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(M, u_M^\pi, c_M) = [\mu_J(c_M)] \in H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\operatorname{im}(\delta_2^{(3,1)}).$$

注意，上述定义类似于 $\delta_2^{(4,0)}$ （见定理 5.1）的定义，因为二者都被定义为某个闭 4-流形的二级/三级不变量。

与 $\delta_2^{(4,0)}$ 类似，我们需要证明这是良定义的，即它不依赖于代表 x的流形的选择。对于 $\delta_2^{(4,0)}$，我们通过证明它等于 JSS d_2 来做到这一点。这里我们不采用这种方法。

Pr命题 5.14. 上述对 $\delta_3^{(4,0)}$ 的定义是良定义的，即它定义了一个映射

$$\delta_3^{(4,0)} : \ker(\delta_2^{(4,0)} : H_4(\pi;\mathbb{Z}^{w_1^\pi}) \to H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)) \to H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\operatorname{im}(\delta_2^{(3,1)}).$$

证明. 首先，我们证明 δ_3 不依赖于 c_M的选择。设 $c_M, c'_M \in \pi_2(X)$是满足 $h_2(c_M) = h_2(c'_M)$ $=\mathrm{PD}(\mathcal{O}(M, u_M))$的元素，并令$a = c_M - c'_M \in \ker\ h_2$。现在我们得到

$$\begin{aligned}\mu_J(c_M) - \mu_J(c'_M) &= \mu_J(c'_M + a) - \mu_J(c'_M)\\ &= \mu_J(c'_M) + \mu_J(a) + \lambda_J(a, c_M) - \mu_J(c'_M)\\ &= \mu_J(a) + \lambda(c'_M, a) = \delta_2^{(3,1)}(a),\end{aligned}$$

其中，第二个等式是因为 λ_J 是 $\mathbb{Z}$与 μ_J对应的双线性形式（定理3.9），其余结论显然。

其次，我们需要证明 $\mu_J(c_M) \in H_1(\pi;\ \mathbb{Z}/2)/\operatorname{im}(\delta_2)$ 仅取决于 $u^\pi_{M*}[M]$。两个基本群 π 已识别的闭 4 维流形 M_1，M_2 是 $\mathbb{CP}^2$- 稳定微分同胚的，当且仅当它们在 $H_4(\pi;\mathbb{Z}^{w_1^\pi})$ 中的基本类相同。因此，只需证明 $\mu_J(c_M)$ 仅取决于 M 的 $\mathbb{CP}^2$-稳定类，也就是说，若

$N = \mathbb{CP}^2$或 $N = \overline{\mathbb{CP}^2}$，并取任意同调类 $c_{M\#N} \in \pi_2(M\#N)$，使得 $h_2(c_{M\#N})$ $=\mathrm{PD}(\mathcal{O}(M\#N, u^\pi_{M\#N}))$，则在 $H_1(\pi;\ \mathbb{Z}/2)/\operatorname{im}(\delta_2)$ 中有 $\mu_J(c_{M\#N}) = \mu_J(c)$。回想定理 5.5，只要 $c_{M\#N}$ 表示特征元，其选取便无关紧要。我们只对 $N = \mathbb{CP}^2$ 给出证明；另一种情况类似。取 $c_{M\#\mathbb{CP}^2}$ 的一个代表元，使其为同调类 $c \in \pi_2(M)$ 与同调类$[\mathbb{CP}^1] \in \pi_2(M\#\mathbb{CP}^2)$ 的连通和。现在

$$\mu_J(c + [\mathbb{CP}^1]) = \mu_J(c) + \mu([\mathbb{CP}^1]) + \lambda_J(c, [\mathbb{CP}^1]) = \mu_J(c) \in H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\operatorname{im}(d_2),$$

其中，第一个等式由定理3.9得出，第二个等式则是因为 $\mathbb{CP}^1$ 嵌入且与 c不相交。□

5.4. **几何三级不变量的定义良好性**。现在，我们采用第4 节给出的几何三次障碍的定义，并证明在对微分 ξ取商后，它只取决于所界定的 $\delta_2^{(3,1)}$ 和$\delta_3^{(4,0)}$ -3-流形。以下定理概括了这一点。

定理 5.15. 设(Y, u_Y) 是一个 ξ-3-流形，带有两个$(B\pi, w_1^\pi)$-填充(X, u_X^π) 和$(X', u_{X'}^\pi)$，使得障碍 $\mathcal{O}(X, Y,$ $u_Y, u_X^\pi)$ 有两个球面代表元 c_1 和 c_2，并且 $\mathcal{O}(X', Y, u_Y, u_{X'}^\pi)$ 有一个球面代表元 c'。那么有如下结论。

(1) $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(X, Y, u_Y, u_X^\pi, c_1) - \mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(X, Y, u_Y, u_X^\pi, c_2) \in \operatorname{im}(\delta_2)$,

[4]也就是说，在两边分别与若干个 $\mathbb{CP}^2$ 和 $\mathbb{CP}^2$ 作连通和后微分同胚。

(2) $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(X,Y,u_Y,u_X^\pi,c_1)-\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(X',Y,u_Y,u_{X'}^\pi,c')\in \mathrm{im}(\delta_2,\delta_3)$.

定理 5.15 的直接推论是，以下对象是良定义的。
(a) $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(X,Y,u_Y,u_X^\pi):=[\mu_J(c)]\in H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(\delta_2)$，其中选取某个 c来表示$\mathcal{O}(X,Y,u_Y,u_X^\pi)$。(b) $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y,u_Y):=[\mu_J(c)]\in H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/(\mathrm{im}(\delta_2),\mathrm{im}(\delta_3))$，其中选取某个$(B\pi,w_1^\pi)$-填充$(X,u_X^\pi)$以及 c 来表示 $\mathcal{O}(X,Y,u_Y,u_X^\pi)$。

定理 *5.15* 的证明。 注意，(1) 已在定理5.14的证明中得到证明。

现在证明(2)。设 $w\in H_2(X;\ \mathbb{Z}/2)$ 和 $w'\in H_2(X';\ \mathbb{Z}/2)$ 分别是 $'$的庞加莱-莱夫谢茨对偶 $\mathcal{O}(X,\ Y,\ u_Y,\ u_X^\pi)$ 和 $\mathcal{O}(X',\ Y,\ u_Y,\ u_{X'}^\pi)$。设

$$(M,u_M^\pi):=(X\cup_Y\overline{X'},u_X^\pi\cup_{u_Y}u_{X'}^\pi)$$

设其为通过沿 (Y,u_Y) 将 (X,u_X^π) 与 $(X',u_{X'}^\pi)$ 粘合而得到的闭 $(B\pi,w_1^\pi)$-流形。由定理 2.11，$X\cup X_2$ 具有 ξ-结构的障碍为和$w+w'\in H_2(X_1\cup X_2;\mathbb{Z}/2)$，由 $c:=c_1\#c'$ 表示。对映射 u_M^π 进行手术，使其避开 c，从而在基本群上成为同构，并使 c 仍表示 M具有 ξ-结构的障碍。利用定理 5.14，我们看到 $\mu_J(w+w')\in\mathrm{im}(\delta_3)$。□

6. Vanishing of the geometric tertiary obstruction

本节首先致力于证明定理 A。这一方向的主要结果如下。

定理 6.1. 设 $\xi=\xi(\pi,w_1^\pi,w_2^\pi)$ 是一个正规 *1*-型，且 (Y,u_Y) 是一个带有 $\mathfrak{pri}(Y,u_Y)=0=\mathfrak{sec}(Y,u_Y)$ 的 ξ-*3*-流形。那么，$\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y,u_Y)=0$ 当且仅当存在对 (Y,u_Y) 的 ξ-填充。

回顾一下，我们已经看到，初级障碍的消失等价于存在一个（$B\pi$，w_1^π）-填充（定理 4.2）。我们还看到，次级障碍的消失等价于存在一个（$B\pi$，w_1^π）-填充 X，使得扩张 ξ-结构的障碍类是球面的（定理 5.4）。我们将以这两个引理的推论作为证明定理 6.1的起点，也就是说，接下来采用如下设定。

设定 6.2。 我们有一个 ξ-*3*-流形 (Y,u_Y) 以及一个 $(B\pi,w_1^\pi)$-填充 (X,u_X^π)，使得障碍 $\mathcal{O}(X,Y,u_X^\pi,u_Y)\in H^2(X,Y;\mathbb{Z}/2)$ 的庞加莱对偶有一个球面代表元 $c\in\pi_2(X)$。

现在我们开始一系列引理，讨论当 $\mu_J(c)$ 以不同程度“消失”时所产生的各种后果。

引理 6.3. 假设我们处于定理 6.2 所描述的情形中。如果 $\mu(c)=0\in I\subset\mathbb{Z}[\pi]$ 那么以下两者必有其一：
(a) 同调类 c 可由 $X\#k(S^2\times S^2)$ 中的一个嵌入表示，其中某个 k。(b) 存在一个浸入 $c'\subset\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2$，使得 $[c']\in H_2(\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}/2)$ 是特征的，并且 $c\#c'$ 可由 $X\#2\mathbb{CP}^2\#k(S^2\times S^2)$ 中的一个嵌入表示，其中某个 k。

在这两种情况下，我们都可以找到一个新的 $(Y,\ u_Y)$ 零配边，使得将其变为零-ξ-配边的障碍类可以嵌入其中。

证明。这里我们会用到第3.4 节以及 Kervaire-Milnor 不变量。论证的大致思路如下。首先，证明我们可以使 $\mathrm{km}(c)=0$成立，然后应用定理 3.19 使 c 嵌入其中。在此过程中，我们会检查 c 在整个修改过程中始终是障碍类的一个代表元。

我们先假设 $\mathrm{km}(c)=1$，否则就可以跳过安排 $\mathrm{km}(c)=0$ 这一步。现在我们直接安排使 c 具有一个代数对偶球面：与 $\mathbb{CP}^2$ 作连通和，并将 c 管状化到 $\mathbb{CP}^1\subset\mathbb{CP}^2$ 中（注意，由于 $\mathbb{CP}^2$ 是单连通且定向的，因此延拓 $(B\pi,\ w_1^\pi)$-结构并无问题）。由于 $\mathbb{CP}^1\subset\mathbb{CP}^2$是 $\mathcal{O}(\mathbb{CP}^2,\ \mathbb{CP}^2\xrightarrow{*}B\pi)$ 的一个代表元，显然 $c\#\mathbb{CP}^1$ 是 $\mathcal{O}(X\#\mathbb{CP}^2,\ Y,\ u^\pi_{X\#\mathbb{CP}^2},\ u_Y)$ 的一个代表元。我们将 $\mathbb{CP}^2$ 并入 X，并假设我们的 c 具有一个代数对偶球面。

再次构造连通和 $X\#\mathbb{CP}^2$，并令 b为定理 3.20 给出的 $\mathbb{CP}^2$ 中的浸入球面，它是特征的，满足 $\mathrm{km}(b)=1$ 且 $\mu(b)=0$。将 c 管状化到 b中，得到 $c\#b$；注意，由于 b是特征的，$c\#b$ 仍是 $\mathcal{O}(X\#\mathbb{CP}^2,\ Y,\ u^\pi_{X\#\mathbb{CP}^2},\ u_Y)$ 的一个代表元。我们分两种情况讨论。首先假设 $c\#b$是 r-特征的。那么，根据定理 3.18，且由于 c 具有一个代数对偶球面，我们可以计算出 $\mathrm{km}(c\#b)=1+1=0$，因为 $c\#b$ 的双重点所对应的一组 Whitney 圆盘，是分别由 b 和 c的 Whitney 圆盘并集构成的，而这些 Whitney 圆盘都包含在各自的连通和项内。第二种情况，假设 $c\#b$ 不是 r-特征的。那么，根据定理 3.18，且由于 c 具有一个代数对偶球面，$\mathrm{km}(c\#b)=0$。由此完成了 $\mathrm{km}(c\#b)=0$ 的论证。我们再次将 $\mathbb{CP}^2$ 并入 X，并假设我们的 c 满足 $\mathrm{km}(c)=0$。

现在我们使用定理 3.19 并稳定嵌入 c。需要注意的是，由于 $S^2\times S^2$ 是一个单连通自旋流形，在与 $S^2\times S^2$ 进行连通和时延拓 ξ-结构不存在问题，因此 c 仍然是 $\mathcal{O}(X\#(S^2\times S^2)\ Y,\ u_Y,\ u^\pi_{X\#(S^2\times S^2)})$ 的一个代表元。□

以下三个引理是定理 5.15 证明的推论

引理 6.4。假设我们处于定理 6.2 所描述的情形中。如果 $\mu_J(c)=0\in I/IJ$那么存在另一个闭的（$B\pi,\ w_1^\pi$）流形 X'以及一个浸入 $c'\subset X'$，使得 $c\#c'\subset X\#X'$ 代表将 ξ-结构延拓到 $X\#X'$ 上的障碍，并且$\mu(c\#c')=0\in I\subset\mathbb{Z}[\pi]$。

证明。由定理 3.7，映射 $f\colon I\to I/IJ$ 的核由 Λ-线性组合生成，这些组合由 $\{2g\mid g\in\pi\}$ 和 $\{gh-g-h+1\mid g,h\in\pi\}$ 构成。根据假设，我们有 $\mu(c)\in\ker(f)$。对于这些生成元 $\omega\in\ker(f)$，我们将构造一个闭的 $(B\pi,w_1^\pi)$-流形 (M,u_M^π)，以及一个元素 $c_M\in\pi_2(M)$，使得在 Hurewicz映射 $h_2(c_M)$ 下，$=\mathrm{PD}(\mathcal{O}(M,u_M^\pi))$。

选取一个非单位元 $g\in\pi$。考虑在 $w_1^\pi(g)$ 平凡的情形下的 $M=S^1\times S^3\#\mathbb{CP}^2$，以及在 $w_1^\pi(g)$ 非平凡的情形下的 $M=S^1\tilde{\times}S^3\#\mathbb{CP}^2$。记 M 的基本群的生成元为 t。存在一个映射 $M\to B\pi$，它将 t 映到 g，我们用它赋予 M 一个 $(B\pi,w_1^\pi)$-结构。令 $p=(2-t)[\mathbb{CP}^1]\in\pi_2(M)$。此元素具有如下性质：$h_2(p)=\mathrm{PD}(w_2(M))=\mathrm{PD}(\mathcal{O}(M,u_M^\pi)$。由定理 3.4 可得

$$\begin{cases} w_1^\pi(t)\ \text{trivial} & \lambda(p,p)=(2-t)\overline{(2-t)}-1=4-2t-2t^{-1}=\mu(p)+\overline{\mu(p)} \\ w_1^\pi(t)\ \text{non-trivial} & \lambda(p,p)=(2-t)\overline{(2-t)}-3=-2t+2t^{-1}=\mu(p)+\overline{\mu(p)} \end{cases}$$

由此我们得出 $\mu((2-t)[\mathbb{CP}^1]) = (2-2t)$。从连通和 $X\#M$ 的形式出发，通过将环路 gt^{-1} 表示在 c 和 p 的代表元之外，并以保持 ξ 的方式对该环路做外科手术，得到 X'。特别要注意，环路 gt^{-1} 可以定向。可以看出，新的障碍类 $\mathcal{O}(X', Y, u^{\pi}_{X'}, u_Y)$ 由浸入 $c\#p$ 表示。由于手术是在 c 或 p 之外进行的，我们得到 $\mu(w\#p) = \mu(w) + 2 - 2g$。选取 g, $h \in \pi$ 这两个非零元素。考虑

$$M = \begin{cases} S^1\times S^3\#S^1\times S^3\#\mathbb{CP}^2 & \text{if } w_1^{\pi}(g)=0, w_1^{\pi}(h)=0 \\ S^1\tilde{\times} S^3\#S^1\times S^3\#\mathbb{CP}^2 & \text{if } w_1^{\pi}(g)=1, w_1^{\pi}(h)=0 \\ S^1\times S^3\#S^1\tilde{\times} S^3\#\mathbb{CP}^2 & \text{if } w_1^{\pi}(g)=0, w_1^{\pi}(h)=1 \\ S^1\tilde{\times} S^3\#S^1\tilde{\times} S^3\#\mathbb{CP}^2 & \text{if } w_1^{\pi}(g)=1, w_1^{\pi}(h)=1 \end{cases}$$

并固定 $\pi_1(M)$ 的两个生成元 t、s。存在一个映射 $M \to B\pi$，它将 t 映到 g，并将 s 映到h；利用此映射，可赋予 M 一个 $\xi(\pi, w_1^{\pi}, w_2^{\pi})$ 结构。选取 $p = (t+s^{-1}-1)[\mathbb{CP}^1]$。由定理 3.4，例如对 $w_1^{\pi}(t) = 0 = w_1^{\pi}(s)$，我们可知

$$\lambda(p,p) = (t+s^{-1}-1)\overline{(t+s^{-1}-1)} = ts + st - s - s^{-1} - t - t^{-1} + 3,$$

因此 $\mu(p) = ts - s - t$。可以验证，对于 $w_1^{\pi}(t)$ 和$w_1^{\pi}(t)$ 的所有其他组合，结果都相同。按照前面相同的论证，构造 $X\#M$，并在 gt^{-1} 和 hs^{-1} 上实施两次保持 ξ 的手术，然后观察 $\mu(w\#p) = \mu(w) + gh - g - h$。

现在，对上述操作进行某种有限组合，即可完成证明。 □

引理 6.5. 假设我们处于定理 6.2 所描述的情形。若 $\mu_J(c) \in \operatorname{im} \delta_2^{(3,1)}$，则存在一个 $\mathbb{Z}/2$-零同调的 $\alpha \in \pi_2(X)$，使得 $\mu_J(c\#\alpha) = 0 \in I/IJ \cong H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)$。

证明。 设 $z \in H_3(X; \mathbb{Z}/2)$ 满足 $\mu_J(c) = \delta_2^{(3,1)}(z)$，并任取一个 $\alpha \in \pi_2(X)$ 的提升$\mathfrak{f}^X(z)$。那么，由于 α 是 $\mathbb{Z}/2$-零同调的，我们可以像定理 5.14 的证明中那样计算，得到

$$\mu_J(c\#\alpha) - \mu_J(c) = \delta_2^{(3,1)}(z),$$

这表明 $\mu_J(c\#\alpha) = 0$属于 I/IJ。 □

引理 6.6. 假设我们处于定理 6.2 所描述的情形。若 $\mu_J(c) \in \operatorname{im} \delta_3$，则存在另一个流形 X'，满足 $c' \in \pi_2(X')$，且类似于定理 6.2 中的流形，使得$\mu_J(c') = 0 \in H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)/\operatorname{im} \delta_2$。

证明。 由于 $\mu_J(c) \in \operatorname{im} \delta_3^{(4,0)}$，存在一个作用于它的元素 $a \in H_4(\pi; Z^{w_1^{\pi}})$。因此，存在一个闭的 $(B\pi, w_1^{\pi})$-流形 M^4，其上的 $\mathcal{O}(M, u_M^{\pi})$ 由 $c_M\pi_2(M)$ 代表，使得 $\mu_J(c_M) = \mu_J(c)$。令 $(X\#M)'$ 表示将映射 $u_X^{\pi}\#u_M^{\pi}$ 通过外科手术变为一个 π_1-等价映射所得的结果，其中手术在远离 c 和 c_M 的某些固定代表元处进行，并以保持 ξ 的方式进行。接下来

$$[\mu_J(c\#c_M)] = [\mu_J(c) + \mu_J(c_M)] = 0 \in H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)/(\operatorname{im} \delta_2^{(3,1)})$$

其中，第一个等式源于 c 与 c_M 在 $(X\#M)'$ 中互不相交这一事实，以及定理3.9；第二个等式则由我们的假设得出。 □

定理 6.1的证明。 我们先证明“若”这一方向，即假设存在一个 ξ-填充 (X, u_X) of (Y, u_Y)。我们可以选取 $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)$ 的一个代表元，使其为一个围住嵌入的 D^3 的局部平凡结，因此 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y, u_Y) = 0$。

现在考虑“仅当”方向。根据定理4.2 和定理 5.4，我们可以假设处于定理 6.2所描述的情形。现在证明，我们可以为（ξ，Y）找到一个新的 u_Y-填充，使得 c 是嵌入的。

根据定理 6.6 和定理 6.5，我们可以假设我们的填充 X 有一个代表元c，对应于 $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)$，且满足 $\mu_J(c) = 0 \in H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)$。根据定理 6.4，我们还可以假设 c 具有性质 $\mu(c) = 0 \in \mathbb{Z}[\pi]$；由定理 6.3 可知，这意味着我们可以假设 c 是嵌入的。上述所有步骤都允许我们改变填充流形 X。

现在，我们推广 Kervaire-Milnor [KM61], 的一个论证，可以安排使 c的欧拉数为 $+1$：通过与 $\mathbb{CP}^2$ 和 $\mathbb{CP}^2$ 作连通和，并在必要时向 $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$或 $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ 中作管状连接。将 c 吹下，即用 c 的一个副本替换 D^4 的管状邻域，可将问题归结为把给定的 ξ- 结构从 S^3 延拓到 D^4；我们现在简要说明，这总是可以做到的。

考虑以下图表。

$$\begin{array}{ccccccc} & & B & \xrightarrow{\quad p \quad} & B\pi & & \\ & \overset{u_{S^3}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)} & & \downarrow{\scriptstyle w_1^\pi \times w_2^\pi} & & \\ S^3 & \hookrightarrow & D^4 & \xrightarrow[\nu_{D^4}]{} & BO & \xrightarrow[w_1 \times w_2]{} & K(\mathbb{Z}/2,1) \times K(\mathbb{Z}/2,2) \end{array}$$

根据正规 1-型 B 的定义，只要我们能够延拓映射 $p \circ u_S^3$，使得通过与 $w_1^\pi \times w_2^\pi$ 后复合所得到的相对上同调类 in$H^1(D^4, S^3; \mathbb{Z}/2) \oplus H^2(D^4, S^3; \mathbb{Z}/2)$ 是平凡的，u_{S^3} 就可以延拓到 D^4；而这显然成立，因为上同调群本身就是平凡的。这意味着我们已经证明 (Y, u_Y) 是 ξ-零配边的，从而完成证明。□

作为定理 6.1 的推论，我们得到以下关于三级不变量与几何三级不变量之间关系的结果。

推论 6.7。 设 (Y, u_Y) 是一个 ξ-3-流形，其中 $\mathfrak{pri}(Y, u_Y) = 0$，且 $\mathfrak{sec}(Y, u_Y) = 0$。那么，几何三级不变量 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y, u_Y)$ 消失，当且仅当通常的三级不变量 $\mathfrak{ter}(Y, u_Y)$ 消失。

证明。 假设 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y, u_Y)$ 消失。那么根据定理 6.1 存在一个 ξ-填充，因此 $\mathfrak{ter}(Y, u_Y)$ 也必定消失。类似地，若 $\mathfrak{ter}(Y, u_Y)$ 消失，则标准的 AHSS/JSS 论证表明存在一个 ξ-填充，因此根据定理 6.1 必有 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y, u_Y)$ 消失。□

现在我们可以证明A，即引言中的定理。

定理 A 的证明。根据定理 4.1，$u_Y^\pi([Y]) = 0$ 当且仅当 $(Y, u_Y) \in F_{2,1}$。此外，根据定理 4.2，$(Y, u_Y) \in F_{2,1}$ 当且仅当存在一个 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充 of (Y, u_Y)。现在假设这个填充 (X, u_X^π) 存在。根据定理 5.3，$(u_X^\pi)_* \mathrm{PD}(\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)) = 0$ 当且仅当 $(Y, u_Y) \in F_{1,2}$。此外，根据定理 5.4，$(Y, u_Y) \in F_{1,2}$ 当且仅当存在一个 $(B\pi, w_1^\pi)$-填充，使得 $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)$ 有一个球面代表元。现在假设这样的填充 $(X', u_{X'}^\pi)$ 存在，且 c a spherical representative for $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_{X'}^\pi)$。我们有 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y, u_Y) = [\mu_J(c)] = 0$ 当且仅当存在

一个 ξ-填充 of (Y, u_Y) 根据定理 6.1。注意，这等价于 $(Y, u_Y) \in F_{0,3}$ 因为$F_{0,3} = \{0\} \in \Omega_3^\xi$。
□

6.1. **比较 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}$ 与 $\mathfrak{ter}$。**现在我们证明 $\mathfrak{ter}$ 与 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}$ 是“相等的”。稍后我们会明确说明这意味着什么，但目前我们需要一个关于 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}$的实现结果。

命题 6.8。设 $\xi = \xi(\pi,\ w_1^\pi,\ w_2^\pi)$是一个正规 1-型，并设 $g \in \pi$。那么存在一个紧致四维流形 V_g 以及一个映射 $u_{V_g}^\pi\colon\ V_g \to B\pi$，使得

(1) $\partial V_g = S^1 \times S^1 \times S^1$若 $w_1^\pi(g) = 0$，则为 $\partial V_g = S^1 \times K$；若 K是克莱因瓶，则 $w_1^\pi(g) \neq 0$。(2) 存在一个识别 $\pi_1(V_g) \cong \mathbb{Z}$，在此识别下，$u_{V_g}^\pi$ 将 $+1$ 映到 g。(3) $u_{V_g}^{\pi *}(w_1^\pi) = w_1(V_g)$。(4)（正规）第二斯蒂费尔-惠特尼类 $w_2(V_g)$消失，因此 V_g 的正规 1-型为 $\xi(\mathbb{Z}, w_1(V_g), 0)$。(5) 存在一个 $\xi(\mathbb{Z}, w_1(V_g), 0)$-结构 p 作用于 ∂V_g，它诱导映射 $\pi_1(\partial V_g) \to \pi_1(V_g) \cong \mathbb{Z}$，使得障碍 $\mathcal{O}(V_g, \partial V_g, p, u_{V_g}^\pi)$是一个浸入球面 S在 V_g中的庞加莱对偶，并且 $\mu_J(S) = t - 1 \in I/IJ$。

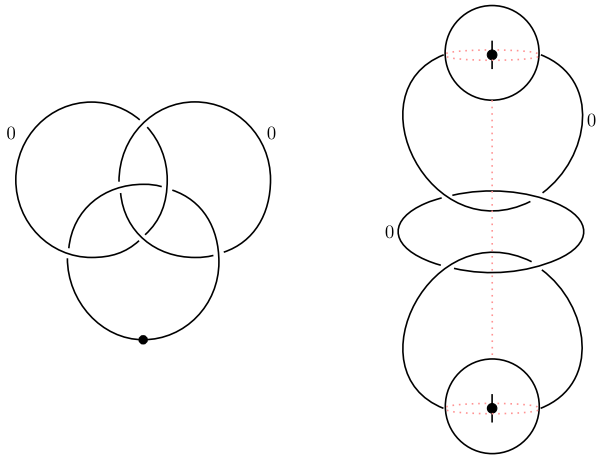


FIGURE 3. 左图：流形 V_g 若 g 可定向时的柯比图。右图：流形 V_g 若 g 不可定向时的柯比图。1-把手的记法源自 Akbulut [Akb16，第 1.1、1 节。5]

证明。令

$$Y_g = \begin{cases} S^1 \times S^1 \times S^1 & w_1(g) = 0 \\ S^1 \times K & w_1(g) \neq 0, \end{cases}$$

其中 $K := S^1 \tilde{\times} S^1$ 表示克莱因瓶。在非定向情形下，定向特征由复合映射 $S^1 \times (S^1 \tilde{\times} S^1) \xrightarrow{q} S^1 \to B\mathbb{Z}/2$ 给出（这里 q 是投影到 K 后再与纤维丛映射复合）。在上述两种情形中，V_g 都将定义为对 Y进行适当填充。

若 $w_1(g) = 0$，定义 $u_{Y_g}^\pi\colon\ Y_g = S^1 \times S^1 \times S^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_3} S^1 = B\mathbb{Z}$，其中 pr_3 表示投影到第三个坐标。我们通过取填充 $S^1 \times D^2 \times S^1$ 来描述 Y_g 的一个（$B\mathbb{Z}$，0）-填充

并对 $\pi_1(u^{\pi}_{Y_g})$ 的核进行外科手术以构造流形 V_g，其使用图3中的柯比图进行描述3。固定诱导的 π_1-同构 $V_g \to B\mathbb{Z}$，其在边界上的限制为 $u^{\pi}_{Y_g}$。

若 $w_1(g) \neq 0$，定义 $u^{\pi}_{Y_g}\colon Y_g = S^1 \times S^1 \widetilde{\times} S^1 \xrightarrow{q} B\mathbb{Z} = S^1$。注意，$Y_g$的第一斯蒂费尔-惠特尼类可经由 $u^{\pi}_{Y_g}$因子分解。我们通过取填充$B\mathbb{Z}$，w_1^{π}-填充 Y_g来描述，其中取填充 $S^1 \times H$，H 表示实心克莱因瓶，然后对$\pi_1(u^{\pi}_{Y_g})$的核进行外科手术，以构造 V_g；图 3 中用柯比图表描述了它。固定诱导的π_1-同构 $V_g \to B\mathbb{Z}$，其在边界上限制为 $u^{\pi}_{Y_g}$。

现在，1、2和3立即成立。图 3 中流形的第二同调群上的整数交叉形式在两种情况下都是偶的，因此第二切向吴类（等于第二正规斯蒂费尔-惠特尼类）消失，从而确立了4（这是因为 V_g的基本群中没有 2-扭元）。

选取 p_B作为某个 $\xi(\mathbb{Z}, w_1^{\pi}, 0)$-结构，定义在 V_g上。回忆定理 2.5 指出，一个流形 $\xi(\mathbb{Z}, w_1^{\pi}, 0)$-结构是一个映射 Y_g，即 $u^{\pi}_{Y_g}\colon Y_g \to B\mathbb{Z}$ 覆盖 w_1^{π}，以及一个定义在 $^+$上的 Pin Y_g-结构。由于前者已经具备，现在我们来定义一个合适的 Pin$^+$-结构。图 3所示的把手分解定义了一个同构

$$H^2(V_g, \partial V_g; \mathbb{Z}/2) \cong H_2(V_g; \mathbb{Z}/2) \to (\mathbb{Z}/2) \oplus (\mathbb{Z}/2).$$

令 $x \in H^1(Y_g; \mathbb{Z}/2)$ 为 $(1,1) \in H^2(V_g, Y_g; \mathbb{Z}/2)$ 的任意一个原像（注意，这样的原像存在，因为映射 $H^1(Y_g; \mathbb{Z}/2) \to H^2(V_g, Y_g; \mathbb{Z}/2)$ 是满射）。Y_g 上的 Pin$^+$-结构构成 $H^1(Y_g; \mathbb{Z}/2)$ 上的一个主齐性空间，因此我们可以定义 $p = p_B|_{Y_g} \cdot x$。

ξ在 Y_g 上的 $\mathbb{Z}, w_1^{\pi}, 0)$-结构无法延拓到 V_g，因为 x 并非来自 $H^1(V_g; \mathbb{Z}/2)$。根据构造，p 延拓到 V_g 的障碍 $o(V_g, \partial V_g, p, V_g \to B\mathbb{Z})$ 在两种情况下都由一个浸入的 2-球面 S 表示；该球面由两个把手的核构成，并由图 3 中显而易见的环带连接。这两个球面都有两个自交，其中只有一个自交对应非平凡群元素，从而给出 $\mu_J(S) = t - 1$。这就证明了 (5)。□

为了证明 $\mathfrak{ter}$ 与 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}$ 相同，我们必须证明它们落在同一个群中。在定理 5.7 中，我们已经证明 d_2、δ_2 重合；特别是，我们必须证明 $\mathrm{im}(d_3) = \mathrm{im}(\delta_3) \subseteq H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2)$。我们分别证明这两个包含映射。

引理 6.9. 对于 $\xi = \xi(\pi, w_1^{\pi}, w_2^{\pi})$ 这一正规 1-型，我们对 $d_3\colon E^3_{4,0} \to E^3_{1,2}$ JSS 的微分以及 δ_3 定理5.13 中定义的几何映射满足

$$\mathrm{im}(\delta_3) \subseteq \mathrm{im}(d_3) \subset H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2).$$

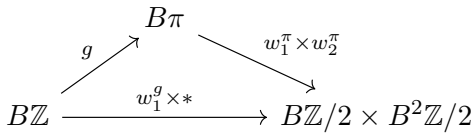
证明. 设 $x \in \mathrm{im}\,\delta_3 \subset H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2)$ 是一个非零元素。那么，我们可以用一个 ξ-3-流形 (Y, u_Y) 来表示等价类 $[x] \in H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2, d_3)$，且该流形属于相应的配边类。定理 6.7 表明 (Y, u_Y) 是 ξ-零配边的，因此$x \in \mathrm{im}\, d_3$. □

定理 6.10. 固定 $\xi = \xi(\pi, w_1^{\pi}, w_2^{\pi})$ 这一正规1-型。设(Y, u_Y) 是一个 ξ-3-流形，满足$\mathfrak{pri}(Y, u_Y) = 0 = \mathfrak{sec}(Y, u_Y)$。那么

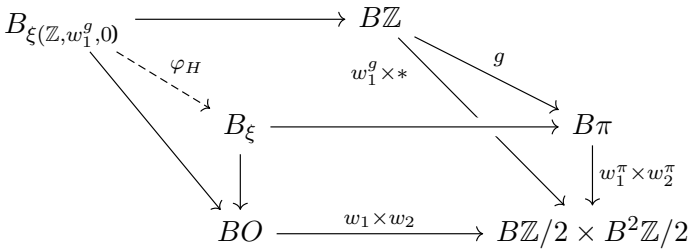
$$[\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y, u_Y)] = \mathfrak{ter}(Y, u_Y) \in H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2, d_3).$$

证明。若 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y, u_Y) = 0$我们已在定理 6.7 中看到 $\mathfrak{ter}(Y, u_Y) = 0$。因此我们假设 $\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y, u_Y)$ 非零。

设 (X, u_X^π) 是 $(B\pi, w_1^\pi)$ 对 (Y, u_Y) 的填充，并进一步设 c 是 $\mathcal{O}(X, Y, u_Y, u_X^\pi)$ 的一个球面代表元（见定理 5.4）。令 $g \in \pi$ 为 $\mu_J(c) \in H_1(\pi; \mathbb{Z}/2)$ 的任意一个提升。根据假设，$\mu_J(c)$ 非平凡，因此 g 也非平凡。我们有 $\mu_J(c) = g-1 \in I/IJ$（同构 $H_1(\pi; \mathbb{Z}/2) \cong I/IJ$ 见定理 3.6(4)）。根据符号滥用，我们选取一个映射 $g\colon B\mathbb{Z} \to B\pi$，它将生成元映到 g。固定一个同伦 $H\colon B\mathbb{Z}\times I \to B\mathbb{Z}/2\times B^2\mathbb{Z}/2$，使其连接以下映射



并利用它得到一个映射 $\varphi_H\colon B_{\xi(\mathbb{Z}, w_1^g, 0)} \to B_\xi$ 到 BO



它将 $\xi(\mathbb{Z}, w_1^\pi, 0)$-流形映射到 ξ-流形。此外，这给出了一个 Thom 谱的映射 $M\xi(\mathbb{Z}, w_1^\pi, 0) \to M\xi$，它诱导出一个配边群的映射

$$(\varphi_H)_*\colon \Omega_3^{\xi(\mathbb{Z}, w_1^g, 0)} \to \Omega_3^\xi.$$

设 V 为定理6.8 中针对元素 g 和定向特征w_1^g 所给出的流形。在整个证明中，我们将沿用该命题中的记号。

由定理 6.8 V，存在一个关于 $\xi(\mathbb{Z}, w_1(V), 0)$ 的 1-光滑化 p_B，现在我们固定它。由定理 6.8 的 (5)，在 ∂V 上存在一个 $\xi(\mathbb{Z}, w_1(V), 0)$- 结构 p，其延拓到 V 的障碍是某个浸入球面 S，满足 $\mu(S) = t - 1$，其中 t 是 $\pi_1(V)$ 的生成元。$H^1(\partial V; \mathbb{Z}/2)$ 作用在 ∂V 上的 $\xi(\mathbb{Z}, w_1(V), 0)$-结构集合上，这一作用由 $B^2\mathbb{Z}/2$ 上的 H-空间结构给出。将这些结构之差记为 $x \in H^1(\partial V; \mathbb{Z}/2)$，即 $x := p - p_B|_{\partial V}$。在连接同态下有

$$H^1(\partial V; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\mathfrak{d}} H^2(V, \partial V; \mathbb{Z}/2)$$

我们有 $\mathfrak{d}(x)$ =庞加莱对偶$^{-1}(S)$。

定义 $[\partial V, u_B] = \varphi_{H*}([\partial V, p_B|_{\partial V}])$，它给出 ξ 上的一个结构，并可延拓到 ∂V V。定义 $[\partial V, u] := [\partial V, u_B] \cdot x$。等价地，我们有 $\varphi_H([\partial V, p]) = [\partial V, u]$。由 $\mathfrak{d}(x)$ =庞加莱对偶$^{-1}(S)$ 可知，S 确实也是将 u 延拓到 V 的障碍。证明可采用与 [Ker57, 第 521]页类似的论证。

现在我们证明 $\mathfrak{ter}^{\text{geo}}(Y, u_Y) = \mathfrak{ter}(Y, u_Y)$。根据假设，我们有 $\mathfrak{ter}^{\text{geo}}((Y, u_Y) + (\partial V, u)) = 0$，并且由定理 6.7 可得 $\mathfrak{ter}((Y, u_Y) + (\partial V, u)) = 0$。现在，$\mathfrak{ter}^{\text{geo}}(Y, u_Y)$ =$\mathfrak{ter}(Y, u_Y)$ 当且仅当 $\mathfrak{ter}^{\text{geo}}(\partial V, u) = \mathfrak{ter}(\partial V, u)$。

利用 James 谱序列，我们发现 $\mathfrak{ter}^{\xi(\mathbb{Z}, w_1^g, 0)} \in H_1(B\mathbb{Z};\ \mathbb{Z}/2) \cong I/IJ \cong \mathbb{Z}/2$由 $t-1$生成，是元素在配边群 $\Omega_{\xi(\mathbb{Z}, w_1^g, 0)}$ 3中成为平凡元的唯一障碍。但 $\mathfrak{ter}^{\text{geo}}(\partial V,\ p) = t-1 \in H_1(B\mathbb{Z};\ \mathbb{Z}/2)$。根据定理6.7 $\mathfrak{ter}(\partial V,\ p)$不可能消失

因此 $\mathfrak{ter}(\partial V,\ p) = t-1$。现在，由于 $(\varphi_H)_*$ 来自 Thom 谱的映射，我们有如下三级障碍的自然性

$$g_*(\mathfrak{ter}^{\xi(\mathbb{Z},w_1^g,0)}([\partial V,p])) = \mathfrak{ter}^{\xi}(\varphi_H([\partial V,p])) = \mathfrak{ter}^{\xi}(\partial V,u)$$

因此 $\mathfrak{ter}^{\xi}(\partial V,u) = g-1$。由于 V是 ∂V的一个（$B\pi, w_1^g$）-填充，我们使用定理 2.7 对 V 进行手术，使映射 $V \to B\pi$ 成为一个 π_1-同构。这些手术可以避开 $\mathcal{O}(V,\partial V,p,g)$的某个球面代表元的代表元进行，因此我们可以如下计算$\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(V,u)$

$$\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(V,u) = g_*(\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(V,p)) = g_*(t-1) = g-1.$$

如上所述，结论由此得出。 □

命题6.11. 对于 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 为正规 1-型时，对于 $d_3\colon\ E^3_{4,0} \to E^3_{1,2}$JSS 的微分以及 δ_3 定理 5.13 中定义的几何映射满足

$$\mathrm{im}(d_3) = \mathrm{im}(\delta_3) \subset H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2).$$

证明。 在定理 6.9 中，我们已经证明 $\mathrm{im}(\delta_3) \subseteq \mathrm{im}(d_3)$。

假设 $x \in \mathrm{im}\, d_3 \subseteq H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2)$。用 π中的一个元素表示 x。根据定理6.8，存在一个 ξ-3-流形（$\partial V, u_{\partial V}$）的（$B\pi, w_1^\pi$）-填充（$V, u_V^\pi$），并带有 $\mathcal{O}(V,\partial V,u_{\partial V},u_V^\pi)$的球面代表元 c，使得 $\mu_J(c) = x-1 \in I/IJ$，因此 $\mu_J(c) = x \in H_1(\pi;\ \mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2)$。现在根据定理 6.10 以及我们的假设，可得

$$0 = [x] = [\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(V,\partial V,u_{\partial V},u_V^\pi)] = \mathfrak{ter}(\partial V,u_{\partial V}) \in H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2,d_3).$$

根据 $\mathfrak{ter}$的定义，这意味着存在一个$(\partial V, u_{\partial V})$的 ξ-填充(X,u_X)。现在构造一个闭的$(B\pi, w_1^\pi)$-流形(M, u_M)：$=(V,u_V^\pi)\cup_{(\partial V,u_{\partial V})}(X,u_X)$。根据构造，$c$是 $\mathcal{O}(M,u_M^\pi)$的一个代表元，因此 $\delta_3((u_M^\pi)_*[M]) = \mu_J(c) = x$，从而 $x \in \mathrm{im}\ \delta_3$。 □

定理 6.10 和定理 6.11 的直接推论是

推论6.12。 对于一个正规 *1*-型 $\xi = \xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$，对于任意满足 $\mathfrak{pri}(Y,u_Y) = 0 = \mathfrak{sec}(Y,u_Y)$ 的 ξ-*3*-流形(Y,u_Y)，我们有

$$\mathfrak{ter}^{\mathrm{geo}}(Y,u_Y) = \mathfrak{ter}(Y,u_Y) \in H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(d_2,d_3) = H_1(\pi;\mathbb{Z}/2)/\mathrm{im}(\delta_2,\delta_3).$$

最后我们指出，上述内容并未证明 d_3 和 δ_3 作为映射相同；我们尚无法确定这一点。

Appendix A. The Serre exact sequence

设 X 是任意具有有限 4-骨架的连通空间，设 $\pi = \pi_1(X)$，并设 $u_X^\pi\colon X \to B\pi$是任意分类映射。则有如下众所周知的正合序列：

$$H_3(X;R) \xrightarrow{(u_X^\pi)_*} H_3(\pi;R) \xrightarrow{\mathfrak{f}^X := d_3} \pi_2(X)\otimes_\Lambda R \xrightarrow{h_R^\Lambda} H_2(X;R) \xrightarrow{(u_X^\pi)_*} H_2(\pi;R). \tag{A.1}$$

系数可以取任意阿贝尔群，不过在本节中，我们始终假设 R 是 $\mathbb{Z}$或 $\mathbb{Z}/2$。此正合序列是纤维化 $\widetilde{X} \to X \to B\pi$ 的 Serre 谱序列所给出的五项序列。映射 $\mathfrak{f}^X$ 因而由某个第三微分 d_3 给出。在下一节中，我们将证明，此映射可以用 X 的第一 k 不变量来表示。我们并不声称这一结果是原创的，但一直未能在文献中找到它。

令 k 为 X 的第一 k不变量，也就是说，令 $k \in H^3(\pi; \pi_2(X))$ 为将主纤维化分类的元素

$$B^2\pi_2(X) \to P_2(X) \to B\pi,$$

其中， $P_2(X)$ 是 X 的第二 Postnikov 阶段。令 $\Lambda \to R$ 为增广映射，从而使 R 成为左 Λ-模。令 $k^r \in H^3(\pi; \pi_2(X) \otimes_\Lambda R)$ 为约化的 k 不变量，并令 $\mathrm{ev}(k^r) \in \mathrm{Hom}(H_3(\pi) R)$ 为求值映射。于是

定理 A.1. 设 X 是一个空间， $\pi = \pi_1(X)$ 且 $X \to X \to B\pi$ 是一个纤维化。则对于正合序列（ d_3 *A.1*）中的映射 *A.1*，有 $d_3 = \mathrm{ev}(k^r)$。

注 A.2. 定理 A.1 是一个更一般定理的特例，该定理将在第三位作者的学位论文 [Ves26]中陈述。

定理 *A.1*的证明。 为简便起见，记 $A = \pi_2(X) \otimes_\Lambda R$。存在如下纤维化之 zig-zag

$$\begin{array}{ccccc}
B^2A & \longrightarrow & B^2\pi_2(X) & \longleftarrow & \widetilde{X} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P_2^r(X) & \longrightarrow & P_2(X) & \longleftarrow & X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B\pi & = & B\pi & = & B\pi
\end{array}$$

其中最左侧的纤维化是由约化的 k-不变量 $k^r \in H^3(\pi; A)$ 给出的主纤维化。考虑以下各纤维化的第三微分。由于我们有同构 $H_0(\pi; H_2(A)) \xrightarrow{\cong} H_0(\pi; H_2(B^2\pi_2(X))) \xleftarrow{\cong} H_0(\pi; H_2(\widetilde{X}))$ $\cong A$，上述锯齿链表明，上述纤维化的第三微分相等。

接下来我们只考虑最左侧的纤维化。它在纤维的 π_2 上具有 π 的平凡作用，因此可以将其提升为分类空间，得到一个纤维化

$$P_2^r(X) \to B\pi \xrightarrow{k^r} B^3A.$$

特别是，上述复合映射是零伦的，因此得到如下

$$\begin{array}{ccccc}
B^2A & \longrightarrow & P_2^r(X) & \longrightarrow & B\pi \\
\| & & \downarrow * & & \downarrow k^r \\
B^2A & \longrightarrow & EB^3A & \longrightarrow & B^3A,
\end{array}$$

是纤维化之间的映射，其中 $EB^3 \simeq *$ 和 $B^2A \to EB^2A \to B^3A$ 是万有纤维化。因此，由 Serre 谱序列微分的自然性，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
H_3(B\pi) & \xrightarrow{d_3} & A \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}(k^r)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
A & \xrightarrow{\mathrm{id}} & A,
\end{array}$$

因此 $\mathrm{ev}(k^r) = d_3$。 □

在本文中，我们需要 $\mathrm{ev}(k^r)$ 的各种等价定义。我们现在定义映射$\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_2$: $H_3(B\pi) \to \pi_2(X) \otimes_\Lambda \mathbb{Z}$ 并证明它们等于 $\mathrm{ev}(k^r)$。

定义 A.3 ($\mathfrak{f}_1$). 考虑如下两个 $\mathbb{Z}$的 Λ-分解，其中下方的是自由分解。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_2(X) & \longrightarrow & C_2(\widetilde{X}) & \xrightarrow{d_2^{\widetilde{X}}} & C_1(\widetilde{X}) & \xrightarrow{d_1^X} & C_0(\widetilde{X}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathfrak{f}_1^{\mathrm{chain}}} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_*} & & \uparrow & & \\
C_4(\widetilde{B\pi}) & \longrightarrow & C_3(\widetilde{B\pi}) & \xrightarrow{d_2^\pi} & C_2(\widetilde{B\pi}) & \xrightarrow{d_1^\pi} & C_1(\widetilde{B\pi}) & \xrightarrow{d_0^\pi} & C_0(\widetilde{B\pi}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

根据同调代数基本定理，我们可以提升恒等映射 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，从而得到这些竖直映射。映射 $\mathfrak{f}_1^{\mathrm{chain}}$给出上同调群 $H^3(\pi;\pi_2(X))$中的一个元素。我们将 $\mathfrak{f}_1$ 定义为 $\mathfrak{f}_1^{\mathrm{chain}}$在以下复合映射下的像

$$H^3(\pi;\pi_2(X))\to H^3(\pi;\pi_2(X)\otimes_\Lambda R)\to \mathrm{Hom}(H_3(B\pi),\pi_2(X)\otimes_\Lambda R).$$

定义 A.4 ($\mathfrak{f}_2$). 固定 $B\pi$ 的一个代表元为 X，并附加维数为 3、4、.....的胞腔。定义 $\mathfrak{f}_2$: $H_3(\pi;R)\to\pi_2(X)\otimes_\Lambda R$，将 $\sum_i r_i e_3^i$ 映到 $\sum_i([\partial e_3^i])\otimes r_i)\in\pi_2(X)\otimes_\Lambda R$；其中，选择一条通往基点的触须后，$\partial e_3^i$ 可视为 $\pi_2(X)$中的一个元素。由于其落在 $\pi_2(X)\otimes_\Lambda R$中，$\mathfrak{f}_2(\sum_i r_i e_3^i)$的取值不依赖于这些选择。

定义 A.5（$\mathfrak{f}_3$）。固定 $B\pi$ 的一个代表元，使其为附加了维数为 3、4、.....的胞腔的 X。如下定义映射 $\mathfrak{f}_3$: $H_3(\pi;R)\to\pi_2(X)\otimes_\Lambda R$。取一个同调类 $z\in H_3(\pi;R)$。Thom 证明了 [Thom54], 每个维数至多为 6 的整系数同调类都可以由一个 R-定向流形上的映射表示。用一个 3 维流形 z: $W_z\to B\pi$ 表示 z。选取 W_z 的某个三角剖分，并记 W_z° 为去掉任意一个 3-单形内部后的 W_z。构造一个仅含 0、1、2-胞腔的 CW复形 C_z，使其与 h: $C_z\to W_z^\circ$ 同伦等价。将映射 $z\circ h$: $C_z\to B\pi$ 同伦变形，使其值域落在 X 中。选取一个同伦逆h^{-1}: $W_z^\circ\to C_z$，并得到一个与 $z|_{W_z^\circ}$ 同伦的映射 $W_z^\circ\to B\pi$，其值域落在 X 中。定义$\mathfrak{f}_3$，令 z 映到 $[\partial W_z^\circ]\in\pi_2(X)\otimes_\Lambda R$。

命题 A.6. 我们有等式 $\mathrm{ev}(k^r)=\mathfrak{f}_1=\mathfrak{f}_2=\mathfrak{f}_3$，因此特别地，映射 $\mathfrak{f}_1$、$\mathfrak{f}_2$和 $\mathfrak{f}_3$ 都是良定义的。

证明。 等价关系 $\mathrm{ev}(k^r)=\mathfrak{f}_1$ 由 [EM49], 给出；它甚至将相应定义中所用的上同调类 $H^3(\pi;\pi_2(X))$ 等同起来。关于现代处理，参见 [CK25]。因此$\mathfrak{f}_1$ 是良定义的。

接下来我们证明 $\mathfrak{f}_2=\mathfrak{f}_1$。$\mathfrak{f}_1$ 的定义不依赖于 $B\pi$的模型，因此选取一个用于定义 $\mathfrak{f}_2$的模型。定义映射 $\mathfrak{f}^{\mathrm{cell}}$: $C_3(\widetilde{B\pi})\to\pi_2(X)$，方法是将定义在一个 3-胞腔 e_3 上的映射线性~延拓：取粘附映射 ∂e_3，其像落在 X中。映射 $\mathfrak{f}^{\mathrm{cell}}$ 属于以下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_2(X) & \xrightarrow{d_2^{\widetilde{X}}} & C_2^{\mathrm{cell}}(\widetilde{X}) \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathfrak{f}^{\mathrm{cell}}} & & \| \\
C_4^{\mathrm{cell}}(\widetilde{B\pi}) & \xrightarrow{d_3^\pi} & C_3^{\mathrm{cell}}(\widetilde{B\pi}) & \xrightarrow{d_2^\pi} & C_2^{\mathrm{cell}}(\widetilde{B\pi}),
\end{array}$$

因此定义了一个上同调类 $[\mathfrak{f}^{\mathrm{cell}}]\in H^3(\pi;\pi_2(X))$。由于 $\mathfrak{f}_1$ 是良定义的，映射 $\mathfrak{f}^{\mathrm{cell}}$ 本可以作为 $\mathfrak{f}_1^{\mathrm{chain}}$用于定理 A.3，因此 $\mathfrak{f}^{\mathrm{cell}}$ 在复合映射下映射到 $\mathfrak{f}_1$

$$H^3(\pi;\pi_2(X))\to H^3(\pi;\pi_2(X)\otimes_\Lambda R)\to \mathrm{Hom}(H_3(B\pi),\pi_2(X)\otimes_\Lambda R).$$

根据构造，$\mathfrak{f}$ 也映射到 $\mathfrak{f}_2$，这表明 $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2$。

最后我们证明 $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_3$。设 $B\pi$ 如上所述。令 $z \in H_3(\pi; R)$ 为任意一个元素，其由从一个 R-定向的 3-流形 z 出发的映射表示：$W_z \to B\pi$。对于 W_z 的任意给定三角剖分，将 z 逼近为一个胞腔映射，使得除一个 3-胞腔外的所有 3-胞腔都映射到X。R-基本类 $[W_z]$ 由 W_z 中的所有 3-胞腔之和给出，因此z 可以由 3-胞腔的一个 R-线性组合表示，其中除一个胞腔外，其余所有胞腔都位于 X中。由于 X 中 3-胞腔的所有边界都是零伦的，因而立即得到 $\mathfrak{f}_2(z) = \mathfrak{f}_3(z)$。

□

Appendix B. James spectral sequence

由第二位署名作者的学位论文定义的 James 谱序列（以下简称 JSS）[Tei92，定理 3.1。1] 用于计算配边群 Ω_n^ξ 当 $w_1(\xi) = 0$。在本文中，我们研究可能不可定向的 ξ-结构，因此有必要构造一个更一般的 JSS。以下构造是对上述文献中所给构造的略微推广。

注 B.1. 尽管本文完全在光滑范畴中进行（见定理 1.4），但我们所介绍的 James 谱序列同样适用于拓扑范畴，并且在其中也有用途，例如研究拓扑4-流形的 2-型时（如 [OP25]）。要得到下文讨论的拓扑版本，只需将所有稳定向量丛替换为稳定拓扑丛。对于拓扑丛，也有相应的托姆空间／谱（见 [Rud98, IV 5.12]），也应在此处将它们替换进去。下述所有论证只需做出这些改动即可原样成立。

定义 B.2. 设 $\xi_n : B \to BO_n$ 是一个 n 维向量丛。则我们将托姆空间 定义为 ξ_n 的空间 $\mathrm{Th}(\xi_n) := D\xi_n / S\xi_n$，其中 $D\xi_n$ 和 $S\xi_n$ 分别是由 ξ_n 给出的、位于 B 上的圆盘丛和球丛的全空间。

这里的谱是指序列谱，也称为预谱。序列谱是一个空间序列 E_1，E_2，.....由 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 索引，其粘合映射为 $\Sigma E_n \to E_{n+1}$。关于 Thom 谱的以下定义，参见例如 [Mal25，第 2.1 节。4]。

定义 B.3. 设 ξ: $B \to BO$ 是一个稳定向量丛。定义 ξ的 *Thom* 谱为

$$M\xi := (\mathrm{Th}(\xi_n), \Sigma\,\mathrm{Th}(\xi_n) \to \mathrm{Th}(\xi_{n+1}))$$

其中 ξ_n 由以下同伦拉回给出

$$\begin{array}{ccc} B_n & \longrightarrow & B \\ \downarrow{\scriptstyle \xi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ BO_n & \longrightarrow & BO \end{array}$$

并且粘合映射 $\Sigma\mathrm{Th}(\xi_n) \to \mathrm{Th}(\xi_{n+1})$) 是由同伦等价 $\mathrm{Th}(\xi_N \oplus \varepsilon_1) \cong \Sigma\mathrm{Th}(\xi_n)$ 以及映射 $\xi_n \oplus \varepsilon_1 \to \xi_{n+1}$ 在 $B_n \to B_{n+1}$上的限制给出的通常映射，其中 ε_1 是平凡一维向量丛。[5]

设 $F \to B \xrightarrow{f} K$ 是一个纤维化，并设 ξ: $B \to BO$ 是一个稳定向量丛。我们选择映射 $BO_n \to BO$ 的一个代表元，使其成为一个纤维化，记作

[5]注意，谱 MO 可通过取 $\xi = \mathrm{Id} : BO \to BO$以这种方式得到。

by BO_n 纤维化$\longrightarrow BO$。于是可知 B_n 纤维化$\longrightarrow B$ 是一个纤维化。设 $\xi_n\colon B_n \to BO_n$ 为拉回。定义 F_n 为复合映射 B_n 纤维化$\longrightarrow B$ 纤维化$\longrightarrow K$ 的纤维。

引理 B.4. 设 ζ_k 是 B_n上的一个 k维向量丛。那么复合映射$D(\zeta_k) \to B_n \to K$ 是一个以 $D(\zeta_k|_{F_n})$ 为纤维的纤维化，且下述为一个相对纤维化

$$(D(\zeta_k|_{F_n}), S(\zeta_k|_{F_n})) \longrightarrow (D(\zeta_k), S(\zeta_k)) \xrightarrow{\text{fib.}} K. \tag{B.1}$$

证明. 第一个断言由下列交换图得出，其中最左侧的方块是一个拉回

$$\begin{array}{ccccc} F_n & \hookrightarrow & B_n & \xrightarrow{\text{fib.}} & B \xrightarrow{\text{fib.}} K \\ {\scriptstyle\text{fib.}}\uparrow & & {\scriptstyle\text{fib.}}\uparrow & & \\ D(\zeta_k|_{F_n}) & \hookrightarrow & D(\zeta_k) & & \overset{\text{fib.}}{\curvearrowright} \end{array}$$

再结合纤维化的复合仍是纤维化这一事实即可。第二个事实成立，是因为对于任意向量丛，球丛到圆盘丛的包含映射是一个余纤维化。□

本节余下部分中，设 h 是一个广义同调理论，且对所有 $i < 0$，均有 $\pi_i(h) = 0$。

定义 B.5. 定义 $\rho_n\colon \pi_1(K) \to \mathrm{Aut}(h_*(Th(\xi_n|_{F_n})))$ 为定理 B.4 中关于 $\zeta_k := \xi_n$ 的相对纤维化的单值化（在 h-同调层面上）。类似地，定义$\rho_n^+\colon \pi_1(K) \to \mathrm{Aut}(h_*(\mathrm{Th}(\xi_n \oplus \varepsilon))$ 为定理 B.4 中关于 $\zeta_k := \xi_n \oplus \varepsilon$ 的纤维化所对应的单值化。

引理 B.6。 存在一个自然的稳定化映射 $g_n\colon \mathrm{Th}(\xi_n|_{F_n}) \to \mathrm{Th}(\xi_n \oplus \varepsilon|_{F_{n+1}})$，定义在托姆空间之间，并且对于任意 $\gamma \in \pi_1(K)$，它适合下面的交换图。

$$\begin{array}{ccccc} h_*\,\mathrm{Th}(\xi_n|_{F_n}) & \xrightarrow[\cong]{s_n} & h_{*+1}\,\mathrm{Th}(\xi_n \oplus \varepsilon|_{F_n}) & \xrightarrow{(g_n)_*} & h_{*+1}\,\mathrm{Th}(\xi_{n+1}|_{F_{n+1}}) \\ {\scriptstyle\rho_n(\gamma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho_n^+(\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle\rho_{n+1}(\gamma)} \\ h_*\,\mathrm{Th}(\xi_n|_{F_n}) & \xrightarrow[\cong]{s_n} & h_{*+1}\,\mathrm{Th}(\xi_n \oplus \varepsilon|_{F_n}) & \xrightarrow[(g_n)_*]{} & h_{*+1}\,\mathrm{Th}(\xi_{n+1}|_{F_{n+1}}) \end{array} \tag{B.2}$$

此外，映射 ρ_n （来自定理 B.5 ）存在一个极限，给出一个映射

$$\hat{\rho}\colon \pi_1(K) \to Aut(h_*M(\xi|_F)).$$

证明。 首先我们构造映射 g_n。在交换图中

$$\begin{array}{ccccc} F_n & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{\text{fib.}} & K \\ {\scriptstyle g_n}\downarrow & & \downarrow & & =\downarrow \\ F_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\text{fib.}} & K \end{array}$$

我们看到映射 $F_n \to B_n \to B_{n+1} \to K$ 是零伦的，因此存在一个映射 g_n，使其符合上述图表。

我们得到两个纤维化之间的一个诱导映射（B.1）

$$\begin{array}{ccccc}(D(\xi_n\oplus\varepsilon|_{F_n}),S(\xi_n\oplus\varepsilon|_{F_n})) & \longrightarrow & (D(\xi_n\oplus\varepsilon),S(\xi_n\oplus\varepsilon)) & \longrightarrow & K\\ \downarrow{\scriptstyle (g_n)_*} & & \downarrow & & \downarrow\\ (D(\xi_{n+1}|F_{n+1}),S(\xi_{n+1}|_{F_{n+1}})) & \longrightarrow & (D(\xi_{n+1}),S(\xi_{n+1})) & \longrightarrow & K.\end{array}$$

由此便在相应的托姆空间之间诱导出一个映射，如所述，并说明图表（B.2）的右方块可交换。（B.2）的左方块可交换，因为根据构造，ρ_n^+ 在向量丛的 ε-直和项上作用平凡。至此，便证明了（B.2）可交换。下图中的外层矩形

$$\begin{array}{ccccc}F & \longrightarrow & B & \longrightarrow & BO\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ F_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & BO_n\end{array}$$

是一个拉回。这是因为右方块是拉回，而左方块也可利用泛性质证明为拉回；这里用到 F 和 F_n 分别是 $B\xrightarrow{\text{纤维}}K$ 和 $B_n\xrightarrow{\text{纤维}}K$。

令 $M\xi|_F$ 为 $\xi|_F$ 的托姆谱，即 $M\xi|_F$ 是序列谱

$$(\mathrm{Th}(\xi_n|_F),\Sigma\,\mathrm{Th}(\xi_n|_F)\to\mathrm{Th}(\xi_{n+1}|_F))$$

其粘合映射由 $\Sigma\,\mathrm{Th}(\xi_n|_F)\xrightarrow{s_n\simeq},\ \mathrm{Th}(\xi_n\oplus\varepsilon|_F)\xrightarrow{g_n}\mathrm{Th}(\xi_{n+1}|_F)$ 给出。特别地，根据谱的同调的定义，我们有如下余极限

$$\mathrm{colim}_{n\to\infty}\,h_{n+k}\,\mathrm{Th}\,\xi_n|_{F_n}=h_k(M\xi|_F).$$

我们利用这一点证明，对于 $\gamma\in\pi_1(K)$，映射 $\rho_n(\gamma)$ 的极限存在。上述余极限可以表示为商 $\sqcup h_{n+k}\,\mathrm{Th}(\xi_n|_{F_n})/\sim$，其中 $\sim$ 通过将最终具有相同像的那些元素等同起来定义。这样我们可以定义

$$\hat{\rho}(\gamma)\in\mathrm{Aut}(h_*M(\xi|_F)),$$

任意元素 $x\in h_*M(\xi|_F)$：选取一个原像 $x_n\in h_{n+k}\,\mathrm{Th}(\xi_n|_{F_n})$，并定义 $\hat{}\rho(\gamma)(x)$ 为 $\rho_n(\gamma)(x_n)$ 的像。□

定理 B.7 (James 谱序列)。设 h 为一个广义同调理论，并且对所有 $i<0$ 都有 $\pi_i(h)=0$，设

$$F\to B\xrightarrow{f}K$$

为一个纤维化，并设 $\xi\colon\ B\to BO$ 为一个稳定向量丛。记 $\hat{}\rho\colon\ \pi_1(K)\to\mathrm{Aut}(h_*(M(\xi|_F)))$ 为由定理 *B.6* 诱导的单值化。则存在一个谱序列

$$E^2_{p,q}\cong H_p(K;h_q(M(\xi|F))_{\hat{\rho}})\Longrightarrow h_{p+q}(M\xi).$$

证明。设 $F_n\to B_n\xrightarrow{f}K$ 对于 $n\in\mathbb{N}$为由标准包含 $BO_n\to BO$确定的纤维化序列，其中 F_n 定义为纤维（如上所述，我们安排 $BO_n\to BO$为纤维化）。由此得到相对纤维化序列（B.1）

$$(D(\xi_n|_{F_n}),S(\xi_n|_{F_n}))\longrightarrow(D(\xi_n),S(\xi_n))\xrightarrow{\text{fib.}}K.$$

其单值变换为 ρ_n。相应地，存在一个对应的相对扭曲 Serre 谱序列（见 [DK01，定理 9。34]）

$$ {}^nE^2_{p,q} \cong H_p(K; h^n_q(D(\xi_n|_{F_n}), S(\xi_n|_{F_n}))_{\rho_n}) \Longrightarrow h^n_{p+q}(D(\xi_n), S(\xi_n)) \cong h_{p+q}(M\xi_n|_{F_n}), $$

微分记为 ${}^nd^k_{p,\ q}$。上述最后一个同构来自 Thom 同构定理，我们使用了由 $h^n_* = h_{*+n}$ 定义的同调理论 h^n [6]。

现在我们希望将 JSS 表示为这些相对扭曲塞尔谱序列的直接极限。回顾一下映射的复合

$$ h_* \operatorname{Th}(\xi_n|_{F_n}) \xrightarrow{s_n} h_{*+1} \operatorname{Th}(\xi_n \oplus \varepsilon|_{F_n}) \xrightarrow{(g_n)_*} h_{*+1} \operatorname{Th}(\xi_{n+1}|_{F_{n+1}}) $$

其中 s_n 是悬挂同构，并且 $(g_n)_*$ 在定理 B.6 中定义。

利用同一个引理，这个复合诱导出一个谱序列同态，记为 ${}^n\varphi^k_{p,\ q}$。例如，在第二页上，${}^n\varphi^2_{p,\ q}$ 由以下复合给出

$$ \begin{aligned} {}^nE^2_{p,q} &\cong H_p(K; h^n_q(D(\xi_n|_{F_n}), S(\xi_n|_{F_n}))_{\rho_n}) \\ &\cong H_p(K; \widetilde{h}^n_q(\operatorname{Th}(\xi_n|_{F_n}))_{\rho_n}) \xrightarrow{(s_n)_*, \cong} H_p(K; \widetilde{h}^n_{q+1}(\operatorname{Th}(\xi_n \oplus \varepsilon|_{F_n}))_{\rho_n^+}) \\ &\cong H_p(K; \widetilde{h}^{n+1}_q(\operatorname{Th}(\xi_n \oplus \varepsilon|_{F_n}))_{\rho_n^+}) \xrightarrow{(g_n)_*} H_p(K; \widetilde{h}^{n+1}_q(\operatorname{Th}(\xi_{n+1}|_{F_{n+1}}))_{\rho_{n+1}}) \cong {}^{n+1}E^2_{p,q} \end{aligned} $$

其中第三行的第一个同构由重新编号 $h^1_q = h_{q+1}$ 给出。由 Serre 谱序列的自然性，我们得到一个包含这些微分的交换图

$$ \begin{array}{ccc} {}^nE^k_{p,q} & \xrightarrow{{}^nd^k_{p,q}} & {}^nE^k_{p-k,q+k-1} \\ \downarrow{\scriptstyle {}^n\varphi^k_{p,q}} & & \downarrow{\scriptstyle {}^n\varphi^k_{p-k,q+k-1}} \\ {}^{n+1}E^k_{p,q} & \xrightarrow[{}^{n+1}d^k_{p,q}]{} & {}^{n+1}E^k_{p-k,q+k-1}. \end{array} $$

由于直接极限是正合函子，余极限

$$ (E^k_{p,q}, d^k_{p,q}) := \operatorname{colim}_{n\to\infty}({}^nE^k_{p,q}, d^k_{p,q}). $$

保持微分不变，并由此可知我们的余极限确实定义了一个谱序列 .

第二页的计算与 [Tei92]中的完全相同，因此我们得到

$$ E^2_{p,q} = \operatorname{colim}_{n\to\infty} H_p(K; h_q(T(\xi_n|_{F_n}))_{\rho_n}) \cong H_p(K; h_q(M\xi|_F)_{\hat{\rho}}). \qquad \square $$

在所有应用中，我们都取 $h = \pi^s$ （即稳定同伦论），稳定向量丛 $\xi = \xi(\pi、\ w_1^\pi、\ w_2^\pi)$ 将是一个正规 1- 型，而我们将以下纤维化作为输入

$$ \operatorname{BSpin} \to B \to B\pi, \tag{B.3} $$

这给出了我们的正规 1-型。现在我

们来表示单值化 $\hat{}\rho$。

[6]请注意， [Tei92] 此处的论证存在一个疏漏：即使单值化 ρ_n $\hat{}\rho$ 是平凡的，也不能确定单值变换 ρ_n 是否平凡。我们的论证通过始终允许 Serre 谱序列带有扭曲来解决这一问题。

引理 B.8. 对纤维化（*B.3*）应用 $h = \pi^s$ *JSS*，可得单值化$\hat{\rho}$: $\pi_1(K) \to \mathrm{Aut}(\Omega_i^{\mathrm{Spin}})$ 在低维时由下式给出

$$\begin{cases} \hat{\rho}(\gamma) = \mathrm{Id} & for\ i = 1, 2, 3 \\ \hat{\rho}(\gamma) = w_1(\gamma) & for\ i = 0, 4. \end{cases}$$

证明。任意 $\mathbb{Z}/2$-作用在 $\mathbb{Z}/2 \cong \Omega_1^{\mathrm{Spin}} \cong \Omega_2^{\mathrm{Spin}}$ 上都是平凡的。

对于 $i = 0, 4$，可将纤维化 $B\,\mathrm{Spin} \to B \to K$ 与纤维化 $BSO \to BO \to K(\mathbb{Z}/2, 1)$ 进行比较。这给出了系数 $\Omega_i^{\mathrm{Spin}} \to \Omega_i^{SO}$的同构，其中 $i = 0, 4$。在 $BSO \to BO \to K(\mathbb{Z}/2, 1)$ 上的单值化由定向反转给出。通过考察符号数可知，定向反转在 Ω_0^{SO}和 Ω_4^{SO}上给出非平凡对合，由自然性即可完成证明。□

将 JSS 应用于这些数据得到

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(\pi; \pi_q^s(M(\xi|\,\mathrm{BSpin}))_{\hat{\rho}}) \cong H_p(\pi; (\Omega_q^{\mathrm{Spin}})_{w_1^\pi}) \Longrightarrow \pi_{p+q}^s(M\xi) \cong \Omega_{p+q}^{\xi}.$$

B.1. **JSS 的第二微分。** 现在我们着手证明以下关于 1-型 $\xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 的 JSS 中第二微分 d_2 的结果。下文中，用于任何 JSS 的广义同调理论 h 始终假定为稳定同伦，即 $h = \pi^s$。

命题 B.9 (参见 [Tei92，定理 3.1。3], [OP25，命题 5。9])。JSS 中关于 1-型 d_2 的第二个微分 $\xi(\pi, w_1^\pi, w_2^\pi)$ 表示为

$$d_2 = (\mathrm{Sq}^2(-) + \mathrm{Sq}^1(-) \smile w_1 + - \smile w_2)^* \colon H_r(\pi; \Omega_1^{\mathrm{Spin}}) \to H_{r-2}(\pi; \Omega_2^{\mathrm{Spin}})$$

对于 $r \leq 4$ 和

$$d_2 = (\mathrm{Sq}^2(-) + \mathrm{Sq}^1(-) \smile w_1 + - \smile w_2)^* \circ \mathrm{red}_2 \colon H_r(\pi; \Omega_0^{\mathrm{Spin}}) \to H_{r-2}(\pi; \Omega_1^{\mathrm{Spin}})$$

对于 $r \leq 5$。

为证明这一点，我们将遵循 Orson-Powell [OP25 第 5][7] 节中的做法；他们在此证明了一个类似的结果（上文已引用），并在上文同样引用的第二位署名作者的工作基础上作了进一步拓展。补充这些细节将更便于指出非定向情形所需的修改。

引理 B.10 ([OP25，引理 5 的非定向版本。3])。设 ξ: $B \to BO$ 是 *CW* 复形上的一个（可能非定向的）稳定向量丛。那么

$$\mathrm{Sq}^2 \phi^\infty(-) = \phi^\infty(\mathrm{Sq}^2(-) + w_2(\xi) \smile - + w_1(\xi) \smile \mathrm{Sq}^1(-)),$$

对于 ϕ^∞ 稳定 *Thom* 同构映射。

证明。证明过程与 [OP25 中引理 5 的证明完全相同。3] 不过，与其记号中的项 $U_n \smile \rho_n^*(w_1(\xi_n)) \smile \mathrm{Sq}^1(\rho_n^*(x))$ 消失不同，这里恰好会产生额外项 $\mathrm{Sq}^1(-) \smile w_1(\xi)$。□

为了进一步简化记号，我们现在将其记为

$$\mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi), w_2(\xi)}(-) := \mathrm{Sq}^2(-) + w_2(\xi) \smile - + w_1(\xi) \smile \mathrm{Sq}^1(-).$$

下一步是计算 JSS 某个退化版本的微分，我们现在陈述并证明这一结果。

[7] 一个记号上的区别是，我们用 ξ 表示向量丛，而 Orson-Powell 用 v 表示。

引理 B.11 (非可定向版本，见 [OP25，引理 5。4])。 设 B 是一个 CW复形，并考虑 James 谱序列的输入

$$* \to B \xrightarrow{\mathrm{id}} B \qquad \text{and} \qquad \xi\colon B \to BO$$

于是，James 谱序列具有如下微分 $d^{r,\,2^s}\colon E^{r,\,2^s} \to E^{r-2,\,2^{s+1}}$ 对所有$r \geq 2$均成立。

（1）由万能系数定理，$d^{r,\,1\,2}\colon H_r(B;\,\mathbb{Z}/2) \to H_{r-2}(B;\,\mathbb{Z}/2)$ 被识别为[8]$(\mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi)\ w_2(\xi)})^\vee$。更准确地说，以下方块图是交换的：

$$\begin{array}{ccc} H_r(B;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\quad d_2^{r,1}\quad} & H_{r-2}(B;\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ H^r(B;\mathbb{Z}/2)^\vee & \xrightarrow{(\mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi),w_2(\xi)})^\vee} & H^{r-2}(B;\mathbb{Z}/2)^\vee. \end{array}$$

（2）映射 $d^{r,\,0\,2}\colon H_r(B;\mathbb{Z}^{w_1(\xi)}) \to H_{r-2}(B;\mathbb{Z}/2)$ 被识别为先进行模 2 约化，再作用 $(\mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi)\ w_2(\xi)})^\vee$。更准确地说，以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccc} H_r(B;\mathbb{Z}^{w_1(\xi)}) & & \xrightarrow{\qquad d_2^{r,0}\qquad} & & H_{r-2}(B;\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow\mathrm{red}_2 & & & & \downarrow\cong \\ H_r(B;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\cong} & H^r(B;\mathbb{Z}/2)^\vee & \xrightarrow{(\mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi),w_2(\xi)})^\vee} & H^{r-2}(B;\mathbb{Z}/2)^\vee. \end{array}$$

证明。我们沿用 [OP25，引理 5 的证明。4]。首先注意，ϕ_∞ 仍然诱导出上述退化纤维化的 JSS 与托姆谱 $M(\xi)$ 的 Atiyah–Hirzebruch 谱序列之间的自然同构。后者中的微分众所周知可表示为

$$d_2^{r,1} = (\mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi),w_2(\xi)})^\vee \qquad \text{and} \qquad d_2^{r,0} = (\mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi),w_2(\xi)})^\vee \circ \mathrm{red}_2\,.$$

证明由此归结为证明一个大型图表可交换，这与 [OP25第 235 页的图 (5)]完全相同，除了第三个方块被替换为

$$\begin{array}{ccc} H^r(M(\xi);\mathbb{Z}/2)^\vee & \xrightarrow{(\phi^\infty)^\vee} & H^r(B;\mathbb{Z}/2)^\vee \\ \downarrow(\mathrm{Sq}^2)^\vee & & \downarrow(\mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi),w_2(\xi)})^\vee \\ H^{r-2}(M(\xi);\mathbb{Z}/2)^\vee & \xrightarrow{(\phi^\infty)^\vee} & H^{r-2}(B;\mathbb{Z}/2)^\vee \end{array}$$

an而此方块由定理B.10证明可交换；第一个方块则被替换为 y

$$\begin{array}{ccc} H_r(M(\xi);\mathbb{Z}^{w_1(\xi)}) & \xrightarrow{\phi_\infty} & H_r(B;\mathbb{Z}^{w_1(\xi)}) \\ \downarrow\mathrm{red}_2 & & \downarrow\mathrm{red}_2 \\ H^{r-2}(M(\xi);\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\phi_\infty} & H^{r-2}(B;\mathbb{Z}/2) \end{array}$$

这显然也可交换。其余方块根据 [OP25]中的论证仍保持不变。 □

[8]在本节中，记号 $(-)^\vee$ 仅表示 Hom 函子 $(-;\mathbb{Z}/2)$。

有了前面的引理，我们可以陈述并证明一个一般性结论：在微分可以与 JSS 的退化情形进行比较的情况下，我们也能够计算该微分。

命题 B.12 （ [OP25的非定向版本，推论 5。7]）。设

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad f \quad} & K \\ \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow \\ BO & \longrightarrow & K(\mathbb{Z}/2,1)\times K(\mathbb{Z}/2,2) \end{array}$$

为纤维化的拉回方块。假设存在同调类 $w_1 \in H^1(K;\ \mathbb{Z}/2)$ 和 $w_2 \in H^2(K;\ \mathbb{Z}/2)$，使得 $f^*(w_1) = w_1(\xi)$ 以及 $f^*(w_2) = w_2(\xi)$。

(1) 假设对于某个 $r \in \mathbb{Z}$，$f_*\colon H_r(B;\ \mathbb{Z}/2) \to H_r(K;\ \mathbb{Z}/2)$ 是满射。那么，根据定理 *B.11*，d^r*,1 2*：$H_r(K;\ \mathbb{Z}/2) \to H_{r-2}(K;\ \mathbb{Z}/2)$ 是 $(Sq^2_{w_1},\ w_2)^\vee$。*(2)* 假设对于某个 $r \in \mathbb{Z}$，$f_*\colon H_r(B;\ \mathbb{Z}^{w_1}(\xi))\ \to H_r(K;\ \mathbb{Z}^{w_1})$ 是满射。那么，根据定理 *B.11*，d^r*,0 2*：$H_r(K;\ \mathbb{Z}^{w_1}) \to H_{r-2}(K;\ \mathbb{Z}/2)$ 是先进行模 *2* 约化，再进行 $(Sq^2_{w_1},\ w_2)^\vee$。

注意，与 [OP25，推论 5。7]，相比，定理 B.12中的纤维化有更强的要求，因为我们需要 JSS 中的扭曲与我们的纤维化 $F \to B \to K$中的扭曲 $* \to B \to B$ 一致。根据定理 B.8 可知，加入这一额外假设后，情况确实如此，因此微分 $d^r,\ 0\ 0$ 的定义域如所写是正确的。

证明。 OP25 [OP25，推论 5。7] 的附加假设满足，因为映射 $* \to B$ 自旋 $\to BO$ 在 Thom 谱 $\pi_i(M(*)) \cong \pi_i^{st} \xrightarrow{\cong} \pi_i(M(\xi\circ i))$ 上诱导出同构，其中 $i = 0,\ 1,\ 2$。(1) 的证明与原文中的证明完全类似；(2) 的证明留给读者。

下面给出所需的设置。根据假设，对于任意 $x \in H_r(K;\mathbb{Z}/2)$，存在一个 $y \in H_r(B;\ Z/2)$，使得 $f_*(y) = x$。接下来的证明与 [OP25] 中的完全相同，除了它们最后计算的差异；现在我们重新进行这部分计算。令 $u \in H^{r-2}(K;\mathbb{Z}/2)$ 为任意对象。于是我们有

$$\begin{aligned} \left((f^*)^\vee \circ \mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi),w_2(\xi)}(u)\right)(y) &= \left(\mathrm{Sq}^2_{w_1(\xi),w_2(\xi)}(f^*u)\right)(y) \\ &= \mathrm{Sq}^2(f^*u)(y) + \left(w_2(\xi)\cup(f^*u)\right)(y) + \left(w_1(v)\cup\mathrm{Sq}^1(f^*(u))\right)(y) \\ &= \mathrm{Sq}^2(u)(f_*y) + \left((f^*w_2)\cup(f^*u)\right)(y) + \left(f^*w_1\cup f^*\,\mathrm{Sq}^1(u)\right)(y) \\ &= \mathrm{Sq}^2(u)(f_*y) + \left(w_2\cup u\right)(f_*y) + \left(w_1\cup\mathrm{Sq}^1(u)\right)(f_*y) \\ &= \mathrm{Sq}^2(u)(x) + \left(w_2\cup u + w_1\cup\mathrm{Sq}^1(u)\right)(x) \\ &= \mathrm{Sq}^2_{w_1,w_2}(x). \end{aligned}$$

□

现在，我们通过使用定理 B.12 来证明定理 B.9（前文已陈述），从而完成本节。

定理 B.9 的证明。在 [Tei92, 定理 3.1.3] 的证明中，第二位署名作者证明了 $H_i(B;\mathbb{Z}/2) \to H_i(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$ 对于 $i \le 4$ 是满射，并且 $H_i(B;\mathbb{Z}) \to H_i(\pi;\mathbb{Z})$ 对于 $i \le 5$ 是满射。在非定向情形下，证明相同，并利用了 $H_5(K(\mathbb{Z}/2,\ 1)\ \times K(\mathbb{Z}/2,\ 2);\ \mathbb{Z}^{w_1})$ 是有限的这一事实。最后利用定理 B.12 完成证明。□

References

[Akb16] Selman Akbulut, *4-manifolds*, 牛津数学研究生教材，第 25 卷，牛津大学出版社，牛津，2016 3559604 27, 40 。MR Bin R. H. Bing, ，《数学年刊》（[54] *Locally tame sets are tame* 2 **59** 1954 145 158 4 ）（），–（英文）。Cai Ste[40] *Homeomorphisms between topological manifolds and analytic manifolds* wart S. Cairns, ，《数学年刊》（2）41（1940），796–808（英文）。4[CK25] Anthony Conway 和 Daniel Kasprowski, *The first relative k-invariant*, 2025年，预印本，见 https://arxiv.org/abs/ 2510 18796 45 。 .[01] DK James F. Davis 和 Paul Kirk, *Lecture notes in algebraic topology*, 数学研究生教材，第 35 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001年。MR 1841974 49[EM49] Samuel Eilenberg 和 Saunders MacLane, *Homology of spaces with operators. ii*, 《美国数学会汇刊》**65** 1949 1, 49 99 45 （），第 – 期（英文）。FQ M. H. Freedman 和 F.[90] *Topology of 4-manifolds* Quinn, ，普林斯顿数学丛书，第 39 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1990 4, 18 。Fre M. H. Freedman, ，《微分几何杂志》17（1982），第[82] *The topology of four-dimensional manifolds* 3, 357 453 4 – 期。HK I. Hambleton 和 M. Kreck,[88] *On the classification of topological 4-manifolds with finite fundamental group* **280** 1988 1, 85 104 ，《数学年刊》（），第 – 期。25[57] *Relative characteristic classes* Ker Michel Kervaire, ，《美国数学杂志》79 3，517 1957 558（），第 – 期。8, 42[89] Kir Robion C. Kirby, *The topology of 4-manifolds*, 数学讲义，第 1374 卷，施普林格出版社，柏林，1989 1001966 90 57012 4 。MR（j: ）KM M. A. Kervaire 和 John W. Milnor,[61] *On 2-spheres in 4-manifolds*, 《美国国家科学院院刊》47（1961），1651–1657（英文）。18, 19, 39[KNV25] Daniel Kasprowski、John Nicholson 和 Simona Vesel´a, *Stable equivalence relations on 4-manifolds*, 《伦敦数学会会刊》（3）131（2025），第 5 期，论文编号 e70101。MR 4989093 5[KPRT24] Daniel Kasprowski、Mark Powell、Arunima Ray 和 Peter Teichner, *Embedding surfaces in 4-manifolds* **28** 2024 5, 2399 2482 18 ，《几何与拓扑》（），第 – 期（英文）。[KPT22] Daniel Kasprowski、Mark Powell 和 Peter Teichner, *Four-manifolds up to connected sum with complex projective planes* **144** 2022 1, 75 118 ，《美国数学杂志》（），第 – 期。4, 5[25] *The Kervaire-Milnor invariant in the stable classification of spin 4-manifolds*KPT, ，《突尼斯数学杂志》**7** 2025 2, 417 436 4904391 4 （），第 – 期。MR Kre M. Kreck, ，《数学年刊》（2）149（1999），第 3[99] *Surgery and duality* 期，707–754。~~1, 6, 8,~~ 25[KT24] Danica Kosanovi´c 和 Peter Teichner, *A new approach to light bulb tricks: disks in 4-manifolds*, 《杜克数学杂志》**173** 2024 4, 673 721 4734552 11 （），第 – 期。MR Mal Cary Malkiewich, ，[25] *Spectra and stable homotopy theory* 讲义，检索于: 08 2025 46 /。Mil John W.[63] *Spin structures on manifolds* 2 **9** 1963 198 203 Milnor, ，《数学教学》（）（），–。4[52] Moi Edwin E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V: The triangulation theorem and Hauptvermutung* 2 **56** 1952 96 114 ，《数学年刊》（）（），–（英文）。4[74] *Characteristic classes*MS John Milnor 和 James Stasheff, ，第 76, 1974 3 期普林斯顿大学出版社，。[69] *Dehn's lemma for certain 4-manifolds* **7** 1969 143 147 246309 Nor R. A. Norman, ，《数学发明》（）–。MR 17 19OP25] Patrick Orson 和 Mark Powell, *Mapping class groups of simply connected 4-manifolds with boundary* **131** 2025 1, 199 275 ，《微分几何杂志》（），第 – 期。4947553 46, 50, 51, 52 MR[98] *On Thom spectra orientability and cobordism* Rud Yuli B. Rudyak, , , ,, 施普林格数学专著，施普林格出版社，柏林，1998年。附 Haynes Miller 撰写的序言。MR 1627486 46[Sto94] Richard Stong, *Existence of π1-negligible embeddings in 4-manifolds: A correction to Theorem 10.3 of Freedmann and Quinn* **120** 1994 4, 1309 1314 ，《美国数学会会刊》（），第 – 期。1215031 18 MR[92] *Topological 4-manifolds with finite fundamental group* Tei P. Teichner, ，博士论文，美因茨大学，德国，1992，Shaker 出版社，ISBN 3-86111-182-9。2, 5, 7, 19, 22, 46, 49, 50, 52[Tho54] R´en´e Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.*, 《瑞士数学评论》**28** 1954 17 86 32, 45 （），–。[69] Tri A. G. Tristram, *Some cobordism invariants for links*, 《剑桥哲学学会会刊》66（1969），251–264（英文）。18

[26] ´ 2026 44 Ves SIMONA
[99] *Surgery on compact manifolds*
VESELA, *The* 1.5*-type and surfaces in* 4*-manifolds*, , 《学位论文》, （即将出版）。Wall C.T.C.Wall, 《数学综述与专著》, 第69卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1999年。由 A. A. Ranicki 编辑并撰写前言。8, 10, 11

University of Texas at Austin, US*Email address*:
daniel.galvin@austin.utexas.edu

Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany
Email address: teichner@mpim-bonn.mpg.de

Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany
Email address: vesela@mpim-波恩.mpg.de