arXiv:2601.09662v1 [math.SG] 14 Jan 2026

带边界曲面上射影结构的辛几何

AHMADREZA KHAZAEIPOUL 和 ECKHARD MEINRENKEN

Abstract.对于 Σ 带有非退化边界的定向曲面，我们考虑其射影结构的无限维变形空间，并将边界固定的同痕视为等价。我们证明，这个空间具有自然的辛结构，并且是积分边界上的 Adler-Gelfand-Dikii 空间的辛群胚的哈密顿空间。

Contents

1. 引言 1
2. 非退化曲线与 Adler-Gelfand-Dikii 空间 4
3. 曲面上的射影结构 13
4. 辛结构 21
5. 矩映射性质 27
6. Goldman 扭转 30
参考文献 32

1. 引言

根据 Adler [1] 和 Gelfand-Dikii [15], 空间 $\mathcal{R}_n(S^1)$ 上的标量微分算子 S^1

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{d^i}{dt^i} \tag{1}$$

具有主符号 $a_n = 1$ 和次主符号 $a_{n-1} = 0$ 的空间自然是一个无限维泊松流形。Drinfeld-Sokolov [12] 通过从 S^1 上的 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$-联络空间进行哈密顿约化，构造了这一泊松结构；这一对应关系后来发展为 Beilinson-Drinfeld 理论中的 Opers [5]。

对于 $n = 2$，空间 $\mathcal{R}_2(S^1)$ 是希尔算子的空间，其泊松结构是仿射线性的。它与 Virasoro 李代数 $\mathfrak{vir}(S^1)$的对偶空间上的 Kirillov-Kostant-Souriau 泊松结构相对应，并限制在 1 级的仿射子空间上（例如参见 [25]）。对于 $n > 2$，Adler-Gelfand-Dikii 结构并非仿射线性的，但它有一个

仍有一个 a 相应的李代数丛。将其显式积分为一个辛群胚

$$\mathcal{S}_n(S^1) \rightrightarrows \mathcal{R}_n(S^1) \tag{2}$$

是在 [2] 对 $n = 2$ 和 [21] 对 $n > 2$中得到的。为了描述底层的群胚，注意到 L 的基本解系给出一条非退化准周期曲线

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to S^{n-1}, \quad \gamma(t+1) = c \cdot \gamma(t) \tag{3}$$

其中 $c \in G$ 是 γ的单值化。反过来，任意这样的曲线都可由某个微分算子（1）实现。令 $\mathcal{D}_n(S^1)$ 表示所有非退化拟周期曲线所构成的空间，并令 $\mathcal{D}_n^{[2]}(S^1)$ 表示由等单值变形相关联的此类曲线对。后者具有对群胚结构，而群胚（2）可实现为其关于 G的商空间，

$$\mathcal{S}_n(S^1) = \mathcal{D}_n^{[2]}(S^1)/G \rightrightarrows \mathcal{R}_n(S^1) = \mathcal{D}_n(S^1)/G. \tag{4}$$

在 [3], 中，已有结果表明，对于带边界的紧致定向曲面 Σ，无限维 Teichm¨uller 空间

$$\mathrm{Teich}(\Sigma) = \mathrm{Hyp}(\Sigma)/\mathrm{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma) \tag{5}$$

是一个 1 级哈密顿维拉索罗空间，每个边界圆对应一个 $\mathfrak{vir}(S^1)$。这里的商是对固定边界且同伦于恒等映射的微分同胚取商，并且要求双曲结构具有理想边界：它们呈现出与闭庞加莱圆盘边界相同的边界行为。动量映射

$$\Phi\colon \mathrm{Teich}(\Sigma) \to \mathcal{R}_2(\partial\Sigma)$$

将这类双曲结构的等价类映射到边界上诱导的希尔算子。

本文针对 $n = 3$ 的情形展开类似的研究。我们不考虑（5），而是考虑变形空间

$$\mathfrak{P}(\Sigma) = \mathrm{Proj}(\Sigma)/\mathrm{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma). \tag{6}$$

这里，Proj(Σ) 是 Σ上具有非退化边界的射影结构空间，也就是说，任意射影坐标图在边界上的限制都是一条非退化曲线。根据构造，该变形空间带有一个映射，指向 Adler-Gelfand-Dikii 空间

$$\Psi\colon \mathfrak{P}(\Sigma) \to \mathcal{R}_3(\partial\Sigma). \tag{7}$$

对于没有边界的情形 $\partial\Sigma = \varnothing$，其变形空间理论十分丰富且发展成熟，尤其是其子空间 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$中凸射影结构的理论。Goldman 和 Choi [11] 证明，对于亏格为 $\mathsf{g} \geqslant 2$ 的情形，空间 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$ 是 $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ 的表示簇的 Hitchin分支，从而将其视为一个高阶 *Teichm¨uller* 空间 [20, 14]。特别地， $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 是一个维数为 $(2\mathsf{g} - 2)\dim G$的辛流形。Goldman 早期的工作 [17] 给出了 Fenchel-Nielsen 型

这些射影结构的参数化，从而导出了显式的达布坐标。整个变形空间 $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 也得到了充分理解 [8, 9]；它同样具有自然的辛结构 [17, 18]。

我们的第一个结果将辛结构的构造推广到了带边界的情形：

定理 A： 对于具有非空边界的紧致连通曲面，具有非退化边界的射影结构的变形空间 $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 自然是一个无限维辛流形。

我们的第二个结果将边界限制（7）解释为动量映射。对于由正双曲边界 holonomy 的凸射影结构构成的变形空间 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$，这一表述尤其令人满意。

定理 B： 群胚 $\mathcal{S}_3(\partial\Sigma) \rightrightarrows \mathcal{R}_3(\partial\Sigma)$ 通过改变边界曲线，在 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$上有一个定义良好的作用。此作用是哈密顿的，其动量映射由（7）给出。

在整个空间 $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 上，可以考虑对边界曲线进行微小变分。由此得到的局部群胚作用仍与辛结构相容，但不一定能扩展为全局作用。

这些构造 [3] 受到近期关于 JT 引力的研究 [30, 34, 40],的启发，尤其是受到具有波动边界的双曲结构这一概念的启发。正如我们将要看到的，“波动边界”的图景在射影结构的情形中同样十分突出。

本文结构如下。在第2节中，我们回顾非退化拟周期曲线的理论、它们与 Adler-Gelfand-Dikii 空间的关系，以及 Drinfeld-Sokolov 约化。讨论将采用无坐标的方式，以抽象圆而非 S^1来表述。对于具有 $n = 3$且具有正双曲单值化的情形，我们将作较为详细的描述。第3 节首先概述无边界紧曲面上的射影结构理论，并将该理论的某些方面推广到具有非退化边界的射影结构。正如我们将要说明的，每个具有非退化边界和正双曲单值化的凸射影结构，都可通过将半环带附接到具有测地边界的凸射影结构上得到；因此，我们可以利用 Goldman 理论，得到对 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$的显式 Fenchel-Nielsen 型描述。第4节介绍我们在空间$\mathfrak{P}(\Sigma)$上构造辛结构的方法。与 [3], 类似，这个辛 2-形式是通过对适当联络空间上的 Atiyah-Bott 辛结构进行约化而得到的。第5 节证明动量映射性质。在第6 节中，我们在本文框架下计算与“Goldman 扭转”相对应的哈密顿流。

致谢。 谨此感谢AntonAlekseev、BorisKhesin、Nathanial Sagman和Nicolau Cor.c˜ao Saldanha，就本研究相关问题进行交流。

2. Nondegenerate curves and the Adler-Gelfand-Dikii space

全文中，我们用 C 表示一个紧致连通定向一维流形——换言之，一个圆，但没有指定坐标。设 C 是一个选定的万有覆盖，因此 $\mathsf{C} = \mathsf{C}/\mathbb{Z}$。与 $1 \in \mathbb{Z}$ 对应的覆盖变换记作 $\sim \quad \sim\kappa\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$（沿正方向移动）。

2.1. 准周期曲线。 设 G 是一个李群，X 是 G的一个齐性空间。~若存在一个元素 $\mu(\gamma) \in G$，称为其单值化，使得曲线 $\gamma\colon \mathsf{C} \to X$ 满足准周期，则称该曲线为准周期曲线:

$$\gamma(\kappa(t)) = \mu(\gamma) \cdot \gamma(t)$$

对所有 t均成立。群 G 通过 $(a \cdot \gamma)(t) = a \cdot \gamma(t)$作用于准周期曲线空间，而单值化按照 $\mu(a \cdot \gamma) = a\,\mu(\gamma)\,a^{-1}$变换。

我们发现，从联络和平行移动的角度来理解准周期曲线很方便。与任意准周期曲线相关联的是一个三元组

$$(Q, \theta, \tau)$$

由一个主 G-丛 $Q \to \mathsf{C}$（配备联络 θ）以及一个 G-等变映射 $\tau\colon Q \to X$构成。这里

$$Q = (\widetilde{\mathsf{C}} \times G)/\sim, \qquad (t, h) \sim (\kappa(t), \mu(\gamma)h),$$

~配备由 $\mathsf{C} \times G$ 上的平凡联络诱导的联络 θ，并且

$$\tau\colon Q \to X, \quad \tau([(t, h)]) = h^{-1} \cdot \gamma(t).$$

~反过来，给定这样一个三元组，选取一个 θ-水平提升 $s\colon \mathsf{C} \to Q$，通过复合即可得到准周期路径 $\gamma = \tau \circ s$。作为一个简单应用，我们有:

~**引理 2.1** (单值化映射的局部截面)。给定一条准周期路径 $\gamma\colon \mathsf{C} \to X$,~存在 $\mu(\gamma)$ 的一个开邻域 $U \subseteq G$ 以及一个光滑映射 $f\colon U \times \mathsf{C} \to X$，使得每个 $f(h, \cdot)$ 都是单值化为 h 的准周期路径，并且 $f(\mu(\gamma), \cdot) = \gamma$。

~证明。令 (Q, θ, τ) 为与 γ 相关联的三元组。固定一个基点 $t_0 \in \mathsf{C}$，我们有$\sim\gamma = \tau \circ s$，其中唯一的水平提升 $s\colon \mathsf{C} \to Q$ 将 t_0 映至 $[(t_0, e)]$。选取一族光滑联络 $\theta_h,\ h \in U$，满足 $\theta_g = \theta$，使得 θ_h 相对于~的全纯单值化 $[(t_0, e)]$ 为 h。存在唯一的 θ_h-水平提升 $s_h\colon \mathsf{C} \to Q$，将 t_0 映至$[(t_0, e)]$。于是 $f(h, \cdot) = \tau \circ s_h$ 即为所需的准周期路径族。□

2.2. 非退化曲线。 我们将专门讨论 $G = \mathsf{SL}(n,\ \mathbb{R})$ 在 $X = S^{n-1}$上的作用。我们将球面视为 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 除以正标量所得的商空间，并使用射影记号 $(x_1\colon \cdots\colon x_n) \in S^{n-1}$ 表示 $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$的等价类。拟周期曲线

$$\gamma\colon \widetilde{\mathsf{C}} \to S^{n-1} \tag{8}$$

~若能提升为曲线 $\tilde{\gamma}\colon \mathsf{C} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$，且对任意选取的定向局部坐标 t，其导数都满足如下性质，则称其为（正）非退化的

$$\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t), \dots, \tilde{\gamma}^{(n-1)}(t) \tag{9}$$

构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个定向基。此条件不取决于坐标的选择或提升的选择。非退化拟周期曲线空间记为$\mathcal{D}_n(\mathsf{C})$；单值化映射给出一个 G-等变映射

$$\mu\colon \mathcal{D}_n(\mathsf{C}) \to G. \tag{10}$$

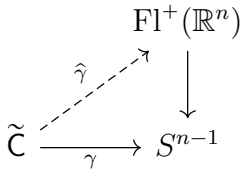
例 2.2. 设 $\mathsf{C} = S^1$，因此 ~$\mathsf{C} = \mathbb{R}$。对于满足 $\sum_i c_i = 0$ 的 $c_1 < \ldots < c_n$，曲线

$$\gamma(t) = (e^{c_1 t} : \cdots : e^{c_n t}) \tag{11}$$

是正的非退化曲线，其单值化为对角矩阵 $\mathbf{diag}(e^{c_1}, \cdots, e^{c_n})$。事实上，取 $\tilde{\gamma}(t) = (e^{c_1 t}, \cdots, e^{c_n t})$，朗斯基行列式为 $\det(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}', \ldots) = \prod_{i>j}(c_i - c_j) > 0$。

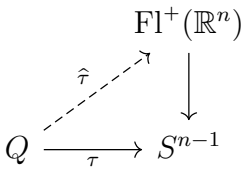
注 2.3. (a) 我们要求 (9) 是定向的，以确保空间 $\mathcal{D}_n(\mathsf{C})$ 是连通的。

(b) 令 $\mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$中定向旗标构成的流形：一列定向子空间 $E_i \subseteq \mathbb{R}^n$，其维数满足 $\dim E_i = i$（对 $i = 0, n$采用标准定向）。通过格拉姆-施密特正交化，$\mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{SO}(n)$。非退化曲线有一个典范提升

(12)


其中 $\hat{\gamma}(t)$ 是定向旗标，其 i阶子空间由导数（9）直到 $i-1$阶所张成。

(c) 根据第 2.1 节的一般讨论，每个 $\gamma \in \mathcal{D}_n(\mathsf{C})$ 都确定一个三元组(Q, θ, τ)，其中包含一个带联络的主 G-丛以及等变映射 $\tau\colon Q \to S^{n-1}$。提升 $\hat{\gamma}$ 确定了 τ 到一个 G-等变映射的提升

(13)


令 $Y_n(\mathsf{C}) = \mathcal{D}_n(\mathsf{C})/\sim$ 表示纤维的连通分支集合（10）：也就是说，是经过等单值变形后的路径。商映射记为

$$q\colon \mathcal{D}_n(\mathsf{C}) \to Y_n(\mathsf{C}). \tag{14}$$

利用引理 2.1 定义局部坐标图，我们看到 $Y_n(\mathsf{C})$ 是一个有限维流形，可能不是豪斯多夫的，并且单值化下降为一个局部微分同胚 $Y_n(\mathsf{C}) \to G$。

注记 2.4. (a) 对于 $n = 2$，空间 $Y_2(\mathsf{C})$ 是 SL 的万有覆盖的某个开子集$(2, \mathbb{R})$ (参见 Gold man [16] 和 Segal [37])。

(b) 球面上的非退化准周期路径在文献中已得到广泛研究。Little [28] 证明，恰有三个（正）非退化闭环同伦类，位于 S^2 （参见 [33, 第 2.3] 节）。Saldanha [35]计算了 S^2 上非退化闭环空间的同伦型。Khesin 和 B. Shapiro [23] 对具有指定初始旗标和终末旗标 $\hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1)$的正非退化路径空间的连通分支进行了分类 $\gamma\colon [0,1] \to S^2$。对于高维球面，我们特别提及 M. Shapiro 在 [39], 对 Little 定理的推广，以及 B. Shapiro 和 Saldanha [36] 关于非退化曲线空间同伦型的研究。

2.3. **Adler-Gelfand-Dikii 空间** $\mathcal{R}_n(\mathsf{C})$。 Adler-Gelfand-Dikii 算子（1）的无坐标定义涉及空间 $|\Omega|^r_{\mathsf{C}}$ 上的 r-密度C。我们取$\mathcal{R}_n(\mathsf{C})$为阶数为 n的线性微分算子空间

$$L\colon |\Omega|_{\mathsf{C}}^{\frac{1-n}{2}} \to |\Omega|_{\mathsf{C}}^{\frac{1+n}{2}}, \tag{15}$$

其主符号等于 1，次主符号等于 0。密度的次数应使这些条件有意义：主符号是一个标量，且 L, L^* 作用于相同的空间。空间 $\mathcal{R}_n(\mathsf{C})$ 是一个仿射空间，其底层向量空间为阶数为 $n-2$ 的线性微分算子空间。

为描述与非退化准周期曲线的关系 [22, 32], ，我们使用 n 阶朗斯基行列式，

$$W_n\colon |\Omega|^r_{\tilde{\mathsf{C}}} \times \cdots \times |\Omega|^r_{\tilde{\mathsf{C}}} \to |\Omega|^{n(r-\frac{1-n}{2})}_{\tilde{\mathsf{C}}}$$

在局部坐标中表示为

$$W_n(u_1, \dots, u_n) = \det \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

（该定义不依赖于坐标的选择。）给定 $L \in \mathcal{R}_n(\mathsf{C})$，设$u_1, \dots, u_n \in \Omega^{\frac{1-n}{2}}(\tilde{\mathsf{C}})$ 是提升算子 $\tilde{L}$ 在 $\tilde{\mathsf{C}}$上的基本解系，其朗斯基行列式为 $W_n(u_1, \dots, u_n) > 0$。（注意，对于 $r = \frac{1-n}{2}$，朗斯基行列式是一个标量。）根据常微分方程理论中的 Abel 公式，它实际上是常数。这个 n 元解组在 $\Omega^{\frac{1-n}{2}}(\tilde{\mathsf{C}})$ 中正密度乘法下的等价类，是一条非退化准周期曲线

$$\gamma = (u_1 : \dots : u_n)\colon \tilde{\mathsf{C}} \to S^{n-1}.$$

曲线 γ 由 L 决定，并且只确定到 G 的作用。反之，每一条非退化准周期曲线，表示为 $\gamma = (u_1 : \cdots : u_n)$，都通过以下公式确定 $L \in \mathcal{R}_n(\mathsf{C})$

$$L(u) = (-1)^n \frac{W_{n+1}(u, u_1, \dots, u_n)}{W_n(u_1, \dots, u_n)}.$$

所得映射

$$p \colon \mathcal{D}_n(\mathsf{C}) \to \mathcal{R}_n(\mathsf{C}) \tag{16}$$

是 G 对 $\mathcal{D}_n(\mathsf{C})$ 作用的商映射。

例 2.5. 设 $\mathsf{C} = S^1$, $\widetilde{\mathsf{C}} = \mathbb{R}$。对于互不相同的 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ 且满足 $\sum_i c_i = 0$，算子为

$$L = \prod_{i=1}^{n} (\frac{d}{dt} - c_i).$$

函数 $u_i(t) = \exp(c_i t)$ 构成一个基本解系，定义了准周期曲线 $\gamma(t) = (e^{c_1 t} : \dots : e^{c_n t})$，见例 2.2。

无限维仿射空间 $\mathcal{R}_n(\mathsf{C})$ 带有 ***Adler-Gelfand-Dikii***泊松结构 [22]。根据 Khesin 和 Ovsienko [32], , $\mathcal{R}_n(\mathsf{C})$ 的辛叶空间可识别为 G-轨道在 $Y_n(\mathsf{C})$中的空间。这一对应关系在 [2] (对于 $n = 2$) 和 [21] (对于 $n > 2$) 中得到加强，成为准辛群胚之间的 Morita等价

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}_n(\mathsf{C}) & & \mathcal{D}_n(\mathsf{C}) & & G \ltimes Y_n(\mathsf{C}) \\ \Downarrow & \swarrow^{p} & & \searrow^{q} & \Downarrow \\ \mathcal{R}_n(\mathsf{C}) & & & & Y_n(\mathsf{C}) \end{array} \tag{17}$$

这里 $G \ltimes Y_n(\mathsf{C}) \rightrightarrows Y_n(\mathsf{C})$ 是作用群胚，其 2-形式由拟辛群胚 $G \ltimes G$ 上的 2-形式拉回得到；该拟辛群胚积分了 G 上的 Cartan-Dirac结构（见 [2]）。另一方面， $\mathcal{S}_n(\mathsf{C}) \rightrightarrows \mathcal{R}_n(\mathsf{C})$ 是商空间

$$\mathcal{S}_n(\mathsf{C}) = \mathcal{D}_n^{[2]}(\mathsf{C})/G$$

群胚

$$\mathcal{D}_n^{[2]}(\mathsf{C}) = \mathcal{D}_n(\mathsf{C}) \times_{Y_n(\mathsf{C})} \mathcal{D}_n(\mathsf{C}) \tag{18}$$

由路径对 (γ_1, γ_0) 组成，这些路径可通过 $\mathcal{D}_n(\mathsf{C})$ 中的路径在保持单值化不变的情况下相互同伦。空间 $\mathcal{D}_n(\mathsf{C})$ 带有一个特别的 G-不变 2-形式 $\varpi_{\mathcal{D}}$，其构造见 [2, 21]。差值

$$\mathrm{pr}_1^* \varpi_{\mathcal{D}} - \mathrm{pr}_2^* \varpi_{\mathcal{D}}$$

下降为闭乘法2-形式 $\omega_{\mathcal{S}}$ on $\mathcal{S}_n(\mathsf{C})$，并证明其是非退化的。本文将把辛群胚 $(\mathcal{S}_n(\mathsf{C}), \omega_{\mathcal{S}})$ 视为另一种

对 Adler-Gelfand-Dikii泊松结构的描述，无需讨论泊松括号。

注记 2.6。 存在一个典范的仿射线性嵌入，它关于 $\mathrm{Diff}_+(\mathsf{C})$ 的作用等变，

$$\mathcal{R}_2(\mathsf{C}) \hookrightarrow \mathcal{R}_3(\mathsf{C}) \tag{19}$$

其像为满足性质 $L^* = -L$ 的算子子空间 $L \in \mathcal{R}_3(\mathsf{C})$。它提升为一个嵌入 $\mathcal{D}_2(\mathsf{C}) \hookrightarrow \mathcal{D}_3(\mathsf{C})$，且关于李群态射 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ 等变。用坐标表示，该嵌入由下式给出

$$\frac{d^2}{dt^2} + q(t) \quad \mapsto \quad L = \frac{d^3}{dt^3} + q(t)\frac{d}{dt} + \frac{1}{2}q'(t),$$

而其提升由拟周期曲线的复合给出 $\gamma\colon \quad \tilde{}\mathsf{C} \to S^1$ 与 Veronese 映射$S^1 \to S^2$，$(u_1 : u_2) \mapsto (u_1^2 : u_1u_2 : u_2^2)$。详情请参见 [33, 第 14]页。

2.4. Drinfeld-Sokolov。我们将使用 Drinfeld-Sokolov 构造，将$\mathcal{R}_n(\mathsf{C})$ 解释为某个主联络空间的商空间。我们的出发点是选取一个主 G-丛 $Q \to \mathsf{C}$、一个 G-等变映射 $\tau\colon Q \to S^{n-1}$，以及一个 G-等变提升 $\hat{\tau}\colon Q \to \mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^n)$ （参见（13））。主联络 $\theta \in \mathcal{A}(Q)$ 通过复合 $\gamma = \tau \circ s$ 给出拟周期曲线，其中 $s\colon \mathsf{C} \to Q$ 是 θ-水平提升，它是商映射 $\mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 的水平提升。如果该曲线 γ 非退化，则它确定一个 G-等变提升（依赖于 θ）

$$\hat{\tau}_\theta\colon Q \to \mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^n). \tag{20}$$

在 $u \in \mathrm{Gau}(Q)$ $\hat{\tau}_{u\cdot\theta} = \hat{\tau}_\theta \circ u^{-1}$ 的规范变换下。

定义 2.7。 若联络 $\theta \in \mathcal{A}(Q)$ 使得 $\hat{\tau}$-正，则映射 τ 在 θ 的水平叶上限制为非退化曲线，且提升映射 $\hat{\tau}_\theta$ 与 $\hat{\tau}$ 同伦。令$\mathcal{A}^{\hat{\tau}}(Q)$ 表示 $\hat{\tau}$-正联络的空间。

注意，这是一个开条件：$\hat{\tau}$-正联络的小扰动仍然是$\tilde{}$ $\hat{\tau}$-正的。提升 $s\colon \mathsf{C} \to Q$，以及曲线 $\gamma \in \mathcal{D}_n(\mathsf{C})$，只在 $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 的作用下定义，但所得算子 L 与选择无关。这定义了一个商映射

$$\mathcal{A}^{\hat{\tau}}(Q) \to \mathcal{R}_n(\mathsf{C}) \tag{21}$$

令 $\mathrm{Gau}(Q,\tau)$ 为规范变换群 $u\colon Q \to Q$，其固定 τ，即 $\tau \circ u^{-1} = \tau$；令 $\mathrm{Gau}_\circ(Q,\tau)$ 为其单位连通分支。以下是 Drinfeld-Sokolov 定理的一个版本：

命题 2.8 (Drinfeld-Sokolov)。 *$\mathrm{Gau}_\circ(Q,\tau)$ 在 $\mathcal{A}^{\hat{\tau}}(Q)$ 上的作用是自由的，且(21) 是其商映射。此作用有一个整体截面 $\mathcal{R}_n(\mathsf{C}) \to \mathcal{A}^{\hat{\tau}}(Q)$。*

证明涉及岩泽分解 $G = KAN$。其中 K 是旋转群 $\mathrm{SO}(n)$, A 是对角矩阵，其正元素的乘积为 1，而 N 是对角线上全为 1 的上三角矩阵。群 $B = AN$是标准旗 $\hat{v}_0 \in \mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^n)$的稳定子，其中 i维子空间由标准基向量 e_1、.....、 $e_i \in \mathbb{R}^n$张成。 $v_0 = e_1 \in S^{n-1}$ 的稳定子 $H \subseteq G$ 可表示为 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 中的矩阵，其第一列是 e_1的正倍数。等价地,

$$H = (K \cap H)AN, \quad K \cap H \cong \mathrm{SO}(n-1). \tag{22}$$

注意， $\tau\colon \ Q \to S^{n-1} = G/H$ 及其提升 $\hat{\tau}\colon \ Q \to \mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^n) = G/B$ 分别等价于将 Q 的结构群约化为 H 和 B，其中 $Q_H = \tau^{-1}(eH)$ 和$Q_B = \hat{\tau}^{-1}(eB)$。

命题*2.8*的证明。不妨设$\mathsf{C} = S^1$。对$Q_B \subseteq Q$ 作平凡化后，可将 $Q \cong S^1 \times G$ 识别为满足 $\hat{\tau}$的映射

$$\hat{\tau}\colon S^1 \times G \to \mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^n), \quad (t, h) \mapsto h^{-1} \cdot \hat{v}_0.$$

群$\mathsf{Gau}(Q, \ \tau) \subseteq \mathsf{Gau}(Q)$ 分别是环群 $LH \subseteq LG$。我们将说明如何利用$\mathsf{Gau}_\circ(Q, \ \tau)$中的适当变换，将任意给定的 $\theta \in \mathcal{A}^{\hat{\tau}}(Q)$ 化为标准形。

断言 1： 存在一个唯一的规范变换 $L_\circ(K \cap H) \subseteq L_\circ H$ ，将$\hat{\tau}_\theta$ 变为“标准提升” $\hat{\tau}$。事实上，在识别$\mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{SO}(n)$后，映射$\hat{\tau}_\theta(\cdot, \ h)$ 是 $L_\circ \mathrm{SO}(n) = L_\circ K$中的一个环路，它实际上包含于 $L_\circ(K \cap H) = L_\circ(\mathrm{SO}(n-1))$ 中（因为它是 τ的提升）。所需的第一个规范变换就是这个环路的逆。

这样安排好使 θ 成为具有附加性质$\hat{\tau}_\theta = \hat{\tau}$的 $\hat{\tau}$-正联络后，我们将证明:

断言 2： 满足 $\hat{\tau}_\theta = \hat{\tau}$ 的 $\hat{\tau}$-正联络由如下联络 1-形式 $\mathsf{A} = \xi \mathrm{d}t$ 给出

$$\xi = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * & * \\ r_1 & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & r_2 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & r_{n-1} & * \end{pmatrix} \tag{23}$$

其中 $r_1, \ldots, r_{n-1} > 0$。为证明这一点，设 $\mathsf{A} = \xi \mathrm{d}t$ 是与 θ对应的联络 1-形式。水平提升具有如下形式 $s(t) = (t, h(t))$ 其中 $h\colon \mathbb{R} \to G$ 是下列方程的一个解

$$h'(t)h(t)^{-1} = -\xi(t).$$

对应的曲线在 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 中是 $\tilde{\gamma}(t) = h(t)^{-1}e_1$。（这里我们将曲线写成列向量。）我们的假设（非退化性以及 $\hat{\tau}_\theta = \hat{\tau}$）意味着这些向量

$$v_i(t) = h(t)\tilde{\gamma}^{(i-1)}, \quad i = 1, \ldots, n$$

线性无关，并生成标准定向旗。也就是说， $v_i(t)$ 属于 $e_1, \dots, e_i$张成的空间，且 e_i的系数严格为正。这些向量递归地由 $v_1(t) = e_1$给出，并且

$$v_{i+1}(t) = v_i'(t) + \xi(t)v_i(t).$$

由此可知， $\xi(t)v_i(t)$ 属于 e_1、……、 e_{i+1}张成的空间，且 e_{i+1}前的系数严格为负。再通过另一次归纳，我们因此发现， $\xi(t)e_i$ （即矩阵 $\xi(t)$的第 i列）也具有相同的性质。这证明了断言 2。

经过这番准备，标准的 Drinfeld-Sokolov 理论 [5, 22] 给出一个唯一的规范变换，将 LB 变为 ξ 的标准形

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

这里， a_0、……、 a_{n-2}是与 θ对应的算子 L 的系数。这种形式的矩阵集合定义了一个作用的仿射截面。□

注2.9。断言 2 表明，具有 $\hat{\tau}_\theta = \hat{\tau}$ 的正则联络恰好就是针对结构群约化 $Q_B \subseteq Q$的 Beilinson-Drinfeld oper 联络 [5] 。

注记 2.10。 本命题中截面的构造用到了坐标。对于丛 Q，存在一个特定的 选择，其结构群约化为 Q_B，使得*Drinfeld-Sokolov* 截面

$$\mathcal{R}_n(\mathsf{C}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\hat{\tau}}(Q) \tag{25}$$

完全是典范的。参见 Segal 的论文 [38] （参见 [2]）。简言之，$_{1-n}$每个 $L \in \mathcal{R}_n(\mathsf{C})$ 都在 $(n-1)$ 阶 jet 丛 $E = J^{n-1}(|\Lambda|^{\ ^2}\mathsf{C})$上定义了一个线性联络，其中该丛是 $\frac{1-n}{2}$ -密度的线丛。此丛 E 带有一个自然的体积形式（由朗斯基行列式定义），以及由从 $(n-1)$ 阶 jet 到 $(n-k)$ 阶 jet 的映射之核给出的一个滤过。取 Q 为相应的主 G 丛，其结构群约化由该滤过定义。

回想一下， $\mathcal{A}(Q)$主联络的空间是一个仿射空间，带有规范群 $\mathsf{Gau}(Q)$的仿射作用。在$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$上选取一个不变度量（这里取迹型） $\xi_1 \cdot \xi_2 = \mathsf{tr}(\xi_1\xi_2)$，使其成为一个无限维泊松流形；$\mathsf{Gau}(Q)$的作用是哈密顿的，其仿射动量映射是 $\mathcal{A}(Q)$的恒等映射。子群 $\mathsf{Gau}_\circ(Q, \tau)$ 作用的（仿射）动量映射是投影

$$\mathcal{A}(Q, \tau) = \mathcal{A}(Q)/\operatorname{ann}(\mathfrak{gau}(Q, \tau)). \tag{26}$$

命题 2.11。 在 $\mathcal{A}^{\hat{\tau}}(Q)$ 经(26)所定义的$\mathrm{Gau}_\circ(Q,\tau)$- 作用下的动量映射$\mathrm{Gau}_\circ(Q,\tau)$-轨道构成单个轨道

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}(Q,\tau).$$

该轨道上的$\mathrm{Gau}_\circ(Q,\tau)$-作用是自由的。

证明。使用命题 2.8 证明中相同的平凡化，我们有 $\mathsf{ann}(\mathfrak{gau}(Q,\tau))$ 是 S^1 上取值于 $\mathsf{ann}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}^{\perp}$的 1-形式空间。这些矩阵的非零项都位于第一行。在 2.8 的证明中，我们利用了每个 $\hat{\tau}$-正则联络矩阵都可以通过 23式所示的规范变换化为如下形式，而这一形式又可以通过 $L(K \cap \mathrm{SO}(2))$中的规范变换化为 Drinfeld-Sokolov 标准形（24），且所有非常数项都位于最后一列。但我们也可以利用 LB 中的规范变换将（23）化为标准形 $\xi_1\, dt$ ，使所有这类项都出现在第一行，

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * & * \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

除以 $\mathsf{ann}(\mathfrak{gau}(Q,\tau))$ 相当于将联络 1-形式 ξ按其第一行取商。截面（27）在此商映射下变为一个点。□

总而言之，这将泊松空间 $\mathcal{R}_n(\mathsf{C})$表示为联络空间在$\mathcal{O}$层上的哈密顿约化（Drinfeld-Sokolov 约化），其中约化所依据的是 $\mathsf{Gau}_\circ(Q,\tau)$的作用：

$$\mathcal{R}_n(\mathsf{C}) = \mathcal{A}(Q)_{\mathcal{O}}. \tag{28}$$

2.5. 正双曲元素。现在我们将聚焦于情形 $n = 3$。若元素$g \in \mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$ 具有三个互不相同的正特征值，则称其为正双曲元素。这些特征值按如下顺序排列：

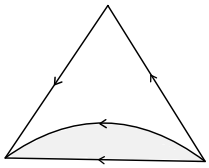
$$e^{c_1} < e^{c_2} < e^{c_3}, \quad \sum_i c_i = 0. \tag{29}$$

令 $t \mapsto g^t$ 表示经过 $g^1 = g$的唯一单参数子群；它在 S^2上定义了流 $\mathbf{v} \mapsto g^t \cdot \mathbf{v}$。存在一个在该流作用下保持不变的 S^2三角剖分，其中有六个顶点、十二条边和八个三角形。开三角形是 $\mathbb{R}^3$中由对应于这些特征值的三个特征向量所张成的开锥的像。若一组特征向量构成定向的基，则称该三角形为正，否则称为负。

三角形的三个顶点由对应于（29）的特征向量的像给出，它们分别是该流的排斥子、鞍点和吸引子。

命题 2.12。 假设 $\gamma \in \mathcal{D}_3(\mathsf{C})$ 具有正双曲单值化 g，且γ 是（全局）凸的：它与任意一条射影直线至多相交于两点。则

(a) 曲线 γ 包含在唯一一个正三角形 $\Delta^\gamma \subseteq S^2$ 内（该三角形由 g定义的三角剖分给出）。(b) 极限 $\gamma(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty}\gamma(t)$ 存在，且是 Δ^γ的顶点。(c) 对于任意选择的 $\mathsf{v} \in S^2$ 和任意选择的参数化 $\mathsf{C} \cong S^1$，曲线 γ 都存在到曲线 $t \mapsto g^t \cdot v$的等单值变形。（也就是说，这两条曲线属于 q: $\mathcal{D}_3(\mathsf{C}) \to Y_3(\mathsf{C})$的同一纤维。）



证明。 我们不妨设 $\mathsf{C} = S^1$, $\widetilde{\mathsf{C}} = \mathbb{R}$。利用 $\mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$ 作用下的等变性，我们可以安排使得

$$g = \mathrm{diag}(e^{c_1}, e^{c_2}, e^{c_3}), \tag{30}$$

因此， S^2 的三角剖分是标准的（由$\mathbb{R}^3$中标准正交象限的像给出）。如果 γ 与 $x_i = 0$定义的大圆相交，由拟周期性可知，它必定会与该大圆相交无穷多次。对于凸曲线而言，这是不可能的。因此，每条凸曲线都完全包含在 $x_1x_2x_3 \neq 0$所在集合的某个固定连通分支中。利用 $\mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$ 中对角元素的作用，我们可以安排使曲线包含于满足 $x_1 > 0, x_3 > 0$ 且 $x_2 \neq 0$ 的区域内。

引入坐标 $u = x_2/x_1,\ v = x_3/x_1$，其中 $v > 0$。流 g^t 由下式给出

$$(u, v) \mapsto (e^{t(c_2-c_1)}u, e^{t(c_3-c_1)}v).$$

其轨迹是满足 $b = \frac{c_3-c_1}{c_2-c_1} > 0$ 和 $c \in \mathbb{R}$ 的曲线 $v = cu^b$。观察点列 $\gamma(n) = g^n\gamma(0)$, $n \in \mathbb{Z}$，我们看到初始点 $\gamma(0)$（从而整条曲线 γ）必定位于满足 $u > 0$（即 $x_2 > 0$）的区域内，其图像形式为 $v = f(u)$，其中 $f' > 0$ 和 $f'' > 0$。给定两条凸非退化曲线 γ_0, γ_1，其单值化为 g，且都包含在该区域内，则它们的线性插值 $\gamma_s(t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1$（对于坐标选择 u, v，其中各项和取自 $\mathbb{R}^2$）再次具有这一性质。特别地，对于任意 $v \in \Delta^\gamma$ 的选择， $\gamma(t)$ 与 $t \mapsto g^t \cdot v$ 同伦。关于极限的结论由 $\lim_{t\to\pm\infty}\gamma(t) = \lim_{n\to\pm\infty}\gamma(n) = \lim_{n\to\pm\infty} g^n\gamma(0)$ 得出。□

唯一连接 $s^\gamma \subseteq S^2$ 极限点的凸测地线段 $\overline{\gamma(\pm\infty)}$是$\Delta^\gamma$闭三角形的开边之一，称为 Goldman 术语中的主线段 [17]。稍后，我们也将关注凸区域

$$\Omega^\gamma \subseteq S^2$$

（如上图中的阴影区域所示），由 γ 与主线段 s^γ 之间开区域内的所有点，以及这两条曲线本身组成（但不包括 $\gamma(\pm\infty)$）。

注 2.13. 对于给定的正双曲元素 g，其单值化为g 的凸曲线可以位于四个正三角形中的任意一个内。这解释了四个连通分支$\mu^{-1}(g)$。此外， $\mu^{-1}(g)$ 还包含非凸曲线。事实上，任意在 S^2 中、单值化为 g 的拟周期曲线，都可以通过“电话线”构造 C^0-逼近为非退化曲线 [35]。根据 Khesin-Shapiro 的结果 [23]，这些非凸曲线会产生 $\mu^{-1}(g)$的另外两个连通分支。

我们约定用记号 Δ 表示标准开三角形

$$\Delta = \{(x_1 \colon x_2 \colon x_2) \in S^2 |\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}.$$

它在由具有正元素的对角矩阵构成的子群 $A \subseteq \mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$ 的作用下保持不变。令 $A_+ \subseteq A$ 表示形如 $g = \mathsf{diag}(e^{c_1}, e^{c_2}, e^{c_3})$且满足 $c_1 < c_2 < c_3$ 和 $\sum c_i = 0$的矩阵子集，并记为

$$\mathcal{D}_3(\mathsf{C})_\Delta \subseteq \mathcal{D}_3(\mathsf{C}) \tag{31}$$

所有 凸 曲线在 $\mathcal{D}_3(\mathsf{C})$中的空间，其单值化属于 A_+ 且值域包含于$\Delta \subseteq S^2$。给定 $\gamma \in \mathcal{D}_3(\mathsf{C})_\Delta$，写作 $\gamma(t) = (1 \colon u(t) \colon v(t))$，我们可以使用 $\frac{1}{c_3 - c_1}\log(v)$ 作为 $\tilde{\mathsf{C}}$ 上的坐标，将 $\mathsf{C} = S^1$ 视为。在这些坐标下，我们有

$$\gamma(t) = (e^{tc_1} \colon \delta(t) e^{tc_2} \colon e^{tc_3}) \tag{32}$$

其中 $\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$ 为正且周期。通过计算朗斯基行列式，我们看到 γ 的凸性等价于不等式

$$\delta'' + 3c_2\delta' - (c_2 - c_1)(c_3 - c_2)\delta < 0.$$

我们注意到，该不等式的解构成一个凸锥，其中包含 $\delta = 1$。

注 2.14。 对于全局凸拟周期曲线 $\tilde{\mathsf{C}} \to S^2$，其单值化要么是正双曲型（即上文所讨论的情形），要么共轭于特征值均为 1 的 3×3 Jordan块，或者共轭于一个特征值为$\lambda > 0$ 的 2×2 Jordan块与一个条目为 λ^{-2}的 1×1 块的直和。相关讨论参见 [7, 第 2.2 节8] 。

3. Projective structures on surfaces

3.1. $(G,\ X)$**结构**。 射影结构可以在几何结构 [19]的框架内加以考察。设 X 是李群 G 的一个齐性空间。连通流形 M 上的一个 $\mathsf{A}(G,\ X)$ 结构由一个图册描述，其中坐标图取值于 X，过渡函数由 G中的元素给出。这些数据确定了一个三元组

$$(P, \theta, \sigma) \tag{33}$$

主 G-丛 $P \to M$ 配备平坦联络 θ 以及一个 G-等变映射$\sigma \colon\ P \to X$，满足

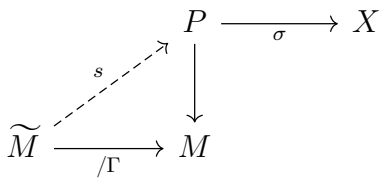
$$\ker(T\sigma) \cap \ker\theta = 0. \tag{34}$$

这里 (P, θ) 是由（常值）过渡函数定义的平坦丛。等价地，纤维 $P|_m$是坐标图 $\phi \colon U \to X$在 m附近的芽 $[\phi]_m$；平坦联络满足

使得对每个坐标图 (U,ϕ)，所得映射 $U\to P|_U,\ m\mapsto[\phi]_m$ 都是水平的。映射 σ 由下式给出

$$\sigma\colon P\to X,\ [\phi]_m\mapsto\phi(m). \tag{35}$$

它可视为伴随丛 $P\times_G X$ 的一个截面，称为$\widetilde{\text{发展截面}}$。给定一个单连通覆盖空间 M，其甲板变换群为 $\Gamma\ \widetilde{}$，通过将 σ 与商映射的一个 θ-水平提升复合，可得到该 (G,X)- 结构的一个发展映射 $\varphi=\sigma\circ s\colon M\to X$，



发展映射 φ 关于唯一的同态 $\varrho\in\mathrm{Hom}(\Gamma,G)$ 是等变的。 s 的选择，以及由此得到的映射 φ，在 G 的作用下是唯一的；不同的选择会使 ϱ 发生共轭变化。

反过来，任意一个三元组 (33)，其中包含一个主 G-丛及其平坦联络，以及一个 G-等变映射 $\sigma\colon P\to X$，且满足 (34)，都定义了 (G,X)-结构于 M，其发展映射为 $\varphi=\sigma\circ s$。由此 (G,X)- 结构定义的三元组，与 (P,θ,σ) 在典范意义下同构。

备注 3.1。 在下面的讨论中，我们通常会 固定 这一对 $(P,\ \sigma)$。记 $X=G/H$, 对 σ 的选择等价于将结构群约化 $P_H\subseteq P$ 为 $H\subseteq G$。（因此，选择 $(P,\ \sigma)$ 等价于选择一个主 H-丛。）在 P 上满足横截条件（34）的联络等价于在 P_H上的嘉当联络。

备注 3.2。 条件（34）意味着丛映射

$$T\sigma|_{\ker\theta}\colon\ker\theta\to TX \tag{36}$$

是逐纤维同构。如果 M和模型空间 X均带有定向，那么 $\ker\theta$和 TX继承定向，并且我们可以要求该映射是逐纤维保向的。

3.2.射影结构。曲面 Σ 上的射影结构 是一个$(\mathbf{PGL}(3,\ \mathbb{R}),\ \mathbb{R}\mathbf{P}^2)$-结构。如果 Σ是定向的，那么任意坐标图映射都唯一地提升为到球面 S^2的保向映射，其过渡映射属于 $\mathbf{SL}(3,\ \mathbb{R})$。由于定向将与我们的讨论相关，因此我们将把定向曲面上的射影结构视为 $(G,\ X)=(\mathbf{SL}(3,\ \mathbb{R}),\ S^2)$-结构。

射影结构可以用其（保向）发展映射 $\varphi\colon\widetilde{\Sigma}\to S^2$ 来描述，该映射关于一个态射 $\varrho\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\ G)$ 等变；这一对$(\varphi,\ \varrho)$ 在 G 的作用下唯一。 Σ 上的测地线 是一条曲线，它在局部坐标图中由 S^2 中的一条测地线给出。如果每条路径 $[0,\ 1]\to\Sigma$ 相对于固定端点都同伦于一条测地线，且除重新

参数化外唯一。等价地，[17], 发展映射 $\varphi\colon \widetilde{\Sigma} \to S^2$ 是单射，其像为凸集且包含于某个开半球中。

若 Σ 没有边界，我们用 $\mathbf{Proj}(\Sigma)$表示所有射影结构的空间，用 $\mathbf{cProj}(\Sigma)$ 表示凸射影结构的子空间。微分同胚群 $\mathbf{Diff}_0(\Sigma)$（其中包含同伦于恒等映射的微分同胚）作用于这些空间，其商空间即为变形空间，

$$c\mathfrak{P}(\Sigma) = \frac{\mathrm{cProj}(\Sigma)}{\mathrm{Diff}_0(\Sigma)} \subseteq \mathfrak{P}(\Sigma) = \frac{\mathrm{Proj}(\Sigma)}{\mathrm{Diff}_0(\Sigma)}.$$

按照 [11, 17]，我们列举一些射影结构的基本例子。

例 3.3（双曲结构）。令 $\mathbb{D}$表示庞加莱圆盘，其上带有通常的 $\mathbf{PSU}(1,\ 1)$作用。Σ 上的双曲结构是一个 $(\mathbf{PSU}(1,\ 1),\ \mathbb{D})$-结构；令 $\mathbf{Hyp}(\Sigma)$表示双曲结构空间。双曲几何的克莱因-贝尔特拉米模型定义了一个嵌入

$$\mathbb{D} \hookrightarrow S^2 \tag{37}$$

取 将中心 $0 \in \mathbb{D}$ 映射到 $(1\colon 0\colon 0) \in S^2$，并且对群态射等变

$$\mathrm{PSU}(1,1) \hookrightarrow \mathrm{SL}(3,\mathbb{R}). \tag{38}$$

（我们可以通过38的伴随表示来定义$(1,\ 1)$ 在其李代数$\mathfrak{psu}(1$上的表示$1) \cong \mathbb{R}^3$。）因此，任何带有双曲坐标图的图册都可以视为带有射影坐标图的图册。

如果 Σ 是紧致的且具有负欧拉示性数，那么以这种方式得到的射影结构是凸的，因为 $\Sigma \cong \mathbb{D}$ 由一致化定理可知。这定义了一个包含关系 $\mathbf{Hyp}(\Sigma) \to c\mathbf{Proj}(\Sigma)$。取同伦类后，我们得到一个包含关系

$$\mathrm{Teich}(\Sigma) \to c\mathfrak{P}(\Sigma) \tag{39}$$

泰希米勒空间的

例3.4（主环带 [17]）。令 $g = \mathrm{diag}(e^{c_1},\ e^{c_2},\ e^{c_3}) \in A_+$，即 $c_1 < c_2 < c_3$满足 $\sum c_i = 0$。映射

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2,\ (x,y) \mapsto (e^{xc_1}\colon -ye^{xc_2}\colon e^{xc_3}) \tag{40}$$

是到由所有 $(x_1\colon x_2\colon x_3)$ 构成的凸子集 Ω 上的嵌入，其中 $x_1,\ x_3 > 0$。它将变换 $(x,\ y) \mapsto (x+1,\ y)$ 与 g的作用联系起来。因此，φ 是开环带 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$上凸射影结构的发展映射。这是单值化 g的主环带。曲线 $y = 0$ 是该射影结构唯一的闭测地线。它将主环带分为两个半环带，分别由 $y \geqslant 0$ 和 $y \leqslant 0$定义。

例3.5（负欧拉示性数的曲面）。Choi和Goldman在Kuiper、Benz´ecri、Koszul、Kac-Vinberg等人先前工作的基础上，对紧致定向曲面上的射影结构进行了完整分类，Σ 且不

具有边界且欧拉示性数为负，$\chi(\Sigma) < 0$。的主要结果 [10] 指出，凸射影结构的变形空间就是SL¨的特征簇中的Hitchin分支（高阶Teichmüller空间） [20] 。(3, $\mathbb{R}$)。此外，根据Goldman的工作 [17] （另见Kim [24]），该空间具有*Fenchel-Nielsen*参数：

•沿着 Σ 中简单环路的整体单值化是正双曲元素；整体单值化的共轭类为该环路赋予两个长度参数。•每条简单环路都自由同伦于唯一一条闭测地线。这条测地线周围的局部模型由主环带给出（例3.4）。• 沿着互不相交的闭测地线切开，可将曲面分解为裤子。每个带测地边界的裤子上的射影结构由八个参数确定：每个边界分支对应两个长度参数，另有两个内部参数。•每个粘合圆还对应两个扭转参数，因为裤子可以像双曲结构的情形那样，以扭转方式粘合。（见下文第 3.3 节。）•对于亏格为 g $\geqslant 2$的曲面，有 2g -2 个裤子和 3g -3 个粘合圆。因此，凸射影结构由 $(2g-2)\cdot 2+(3g-3)\cdot(2+2) = (2g-2)\cdot \dim G$ 个参数描述。

更一般的射影结构（不一定是凸的），可通过在凸射影结构中粘入 π-环带 [8, 9, 11]得到。

3.3. **Goldman 扭转**。 再来考察主环带，例 3.4。 $A \subseteq G$ 在 S^2 上的作用保留 Ω，并与 g的作用相交换，因此下降为主环带上的一个射影变换作用。给定 $h \in A$，我们可以选取环带上的一个保向微分同胚F ，它在$y < -\epsilon$ 处为恒等映射，并且在 h 处与 $y > \epsilon$的作用一致，其中 $\epsilon > 0$。通过F的推前，会在环带上产生一个新的射影结构；当 $|y| > \epsilon$时，它与原结构一致，但在区域 $|y| \leqslant \epsilon$内发生变形。微分同胚F，以及由此得到的射影结构，在相差一个支撑于 ϵ-邻域内的微分同胚的意义下是唯一的，并且（特别地）同伦于恒等映射。

给定一般曲面上的射影结构 Σ，如例 3.5所示，以及一条具有正双曲 holonomy 的简单闭定向测地线 $\lambda \subseteq \Sigma$ ，我们可以将主环带用作模型，通过元素 $h \in A$对射影结构进行“扭转”。在同伦意义下，新的射影结构仅取决于 λ 和 h。因此，对任意λ，我们都得到 A 在空间 $\mathcal{P}(\Sigma)$上的一个作用，称为*Goldman* 扭转。不同简单闭定向测地线对应的 Goldman 扭转彼此可交换。

取 λ 为裤分解中的一条曲线，这些扭转会改变对应于 λ 的扭转参数，但不会影响其他任何参数。在 [41], Wienhard 和 Zhang 还引入了爆发流，它改变裤子的内部参数（但不影响扭转参数或长度参数）。

3.4. **具有非退化边界的射影结构**。Choi-Goldman 理论同样适用于带边界曲面上的射影结构，前提是边界分支是具有正双曲 holonomy 的测地线。本文将考虑相反的极端情形:

定义 3.6。设 Σ是一个带边界的连通定向曲面。若 Σ上的射影结构的、发展映射 $\varphi\colon \tilde{\Sigma} \to S^2$对边界分支 $\mathsf{C} \subseteq \partial\Sigma$的$\tilde{\ }$限制 φ 是非退化曲线，则称其具有非退化边界。我们用 $\mathbf{Proj}(\Sigma)$ 表示具有非退化边界的射影结构空间，用 $\mathbf{cProj}(\Sigma)$表示满足以下条件的子空间：(i) 射影结构是凸的；(ii) 所有边界 holonomy 均为正双曲型。相应的变形空间记为

$$c\mathfrak{P}(\Sigma) = \frac{c\,\mathrm{Proj}(\Sigma)}{\mathrm{Diff}_\circ(\Sigma, \partial\Sigma)}, \quad \mathfrak{P}(\Sigma) = \frac{\mathrm{Proj}(\Sigma)}{\mathrm{Diff}_\circ(\Sigma, \partial\Sigma)},$$

其中 $\mathbf{Diff}(\Sigma,\ \partial\Sigma)$ 是固定边界（逐点）的微分同胚群，而 $\mathbf{Diff}_\circ(\Sigma,\ \partial\Sigma)$ 是其单位连通分支。

与之前一样，凸性意味着每条路径 $[0,\ 1] \to \Sigma$ 都同伦于一条唯一的测地线（端点保持不变）；等价地，发展映射 φ 的像是凸的。若 $\partial\Sigma \neq \varnothing$，则空间 $c\mathfrak{P}(\Sigma) \subseteq \mathfrak{P}(\Sigma)$ 是无限维的。

$\tilde{\ }$考虑一个边界分支 $\mathsf{C} \subseteq \partial\Sigma$ 映射到 $\mathsf{C} \subseteq \partial\Sigma$。非退化曲线 $\gamma\colon \tilde{\mathsf{C}} \to S^2$ 确定一个 Adler-Gelfand-Dikii 算子 $L \in \mathcal{R}_3(\mathsf{C})$。改变$\tilde{\ }$中 C 的原像，或通过 G-作用改变 φ，都不会影响该算子。此外，L 在固定边界的微分同胚作用下保持不变。对 $\partial\Sigma$的所有连通分支使用这一构造，我们得到一个映射，

$$\Psi\colon \mathfrak{P}(\Sigma) \to \mathcal{R}_3(\partial\Sigma), \tag{41}$$

对于 $\mathbf{Diff}_+(\Sigma)/\mathbf{Diff}_\circ(\Sigma,\ \partial\Sigma)$ 的剩余作用是等变的。

3.5. **例子**。

例 3.7（双曲 0-度量）。在 [3], 具有理想边界的双曲结构，是通过一个图册来定义的，其坐标图取值于闭 庞加莱 圆盘$\mathbb{D}$，过渡函数由 $\mathbf{PSU}(1,1)$的元素给出，$\mathbb{D}$。（严格来说，这并不是一种(G,X)结构，因为它并非齐性空间。）克莱因-贝尔特拉米模型给出的嵌入（37）可延拓为一个嵌入 $\mathbb{D} \to S^2$，将闭庞加莱 圆盘嵌入到满足 $x_1 > 0$的半球中。因此我们得到一个映射 $\mathbf{Hyp}(\Sigma) \to \mathrm{cProj}(\Sigma)$，它与边界限制的映射相容 $\mathcal{R}_2(\partial\Sigma) \to \mathcal{R}_3(\partial\Sigma)$（参见备注 2.6）。转到变形空间后，得到如下图表

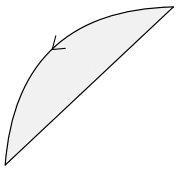
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Teich}(\Sigma) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{R}_2(\partial\Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{P}(\Sigma) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{R}_3(\partial\Sigma) \end{array} \tag{42}$$

例 3.8（圆盘）。作为 Little 定理的一个特例，[28], 任意两个（全局）凸非退化环路 $\lambda\colon\ S^1 \to S^2$ 都是同伦的。将 λ 延拓为圆盘 D^2 的一个嵌入（这种延拓在固定边界的同伦下唯一），便得到圆盘上的凸射影结构，其边界非退化。由此，具有非退化边界的凸射影结构空间可与凸非退化环路空间 $\lambda\colon\ S^1 \to S^2$在 G的作用下的商空间相识别。相比之下，圆盘上双曲 0-度量的 Teichmüller 空间是保定向微分同胚 $\mathrm{Diff}_+(S^1)/G$ 模去射影变换 [3]后的商空间。

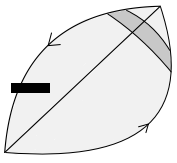
作为圆盘上的一种简单的非凸射影结构示例，取一个嵌入 $D^2 \to S^2$，其像包含一个半球，且边界是一条凸曲线。它与商映射的复合给出一个发展映射 $D^2 \to S^2$，该映射不是单射。

例 3.9（环带）。回顾例 3.4中关于开环带 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, 上射影结构的构造，其单值化为 $g = \mathrm{diag}(e^{c_1},\ e^{c_2},\ e^{c_3}) \in A_+$。它在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1,1]$ 上的限制定义了一个闭环带上的射影结构，其边界非退化。更一般地，给定两条曲线 $\gamma_\pm \in \mathcal{D}_3(S^1)_\Delta$，写成 $\gamma(t) = (e^{tc_1}\colon\ \delta_\pm(t)e^{tc_2}\colon\ e^{tc_3})$，其中周期函数 $\delta_\pm$ 如式（ 32 ）所示，满足 $-\delta_+(x) \leqslant y \leqslant \delta_-(x)$ 的子集是一个闭环带，经重新参数化后可识别为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1,1]$。

为无坐标地描述这个例子，设 $\mathbf{C}$ 为一个“抽象”圆，并假设 $\gamma \in \mathcal{D}_3(\mathbf{C})$ 具有正双曲单值化 g。令 $\Omega^\gamma \subseteq S^2$ 为由曲线 γ 和连接 $p_- = \gamma(-\infty)$ 与 $p_+ = \gamma(\infty)$的测地弧 s^γ 围成的凸区域，包含这两条曲线但不包含 $p_\pm$:



商空间 $\Omega^\gamma/\langle g\rangle$ 是一个闭环带，带有一种射影结构，其一条边界为测地边界（即测地弧的像），另一条边界为非退化边界。这就是与 γ 相关的半环带 。令 $R \in \mathbf{PGL}(3,\mathbb{R})$ 表示关于经过 $\gamma(\pm\infty)$的大圆的反射。给定两条曲线 $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{D}_3(\mathbf{C})$，它们的单值化为 g 且端点为 $p_\pm$，令 $\Omega = \Omega^{\gamma_0} \cup R(\Omega^{\gamma_1}) \subseteq S^2$。区域 Ω 如图所示



其中，深色阴影区域表示 g作用下的一个基本域。商空间 $\Sigma = \Omega/\langle g\rangle$ 是一个具有非退化边界的射影环带。

如此一来，任何一对具有正双曲单值化的等单值曲线 $(\gamma_1,\gamma_0)\in\mathcal{D}_3^{[2]}(\mathsf{C})$ 都在 $\mathsf{C}\times[-1,1]$上定义了一个凸射影结构。通过 G 的作用对这样的一对进行共轭不会改变该射影结构。因此，我们得到一个包含关系

$$c\mathfrak{P}(\mathsf{C}\times[-1,1])\subseteq\mathcal{D}_3^{[2]}(\mathsf{C})/G=\mathcal{S}_3(\mathsf{C}).$$

其像是群胚 $\mathcal{S}_3(\mathsf{C})\rightrightarrows\mathcal{R}_3(\mathsf{C})$ 在具有正双曲单值化的算子L 子集上的限制，并对应于凸曲线 $\gamma\in p^{-1}(L)$。利用 G-作用，我们可以安排单值化属于 A_+，从而留下 A的剩余作用。因此我们也有

$$c\mathfrak{P}(\mathsf{C}\times[-1,1])\cong\mathcal{D}_3^{[2]}(\mathsf{C})_\Delta/A, \tag{43}$$

其中 $\mathcal{D}_3^{[2]}(\mathsf{C})_\Delta\subseteq\mathcal{D}_3^{[2]}(\mathsf{C})$ 是 $\mathcal{D}_3(\mathsf{C})_\Delta$中的曲线对。（参见第 2.5节。）

例 3.10（负欧拉示性数曲面）. 设 Σ是一个亏格为 g、具有 r 个 >0 边界分支的紧致连通定向曲面，其欧拉示性数为负，即 $\chi(\Sigma)=2-2\mathsf{g}-\mathsf{r}<0$。假设给定了一个属于 $c\mathrm{Proj}(\Sigma)$的射影结构，其发展映射为 $\varphi\colon\widetilde{\Sigma}\to\Omega\subseteq S^2$，关联的态射为 $\varrho\in\mathrm{Hom}(\Gamma,G)$。每个边界圆 $\mathsf{C}\subseteq\partial\Sigma$ 都同伦于唯一的测地环路 $\lambda_\mathsf{C}\subseteq\Sigma$。事实上，$\varphi$ 到映射至 C 的一个连通分支 $\widetilde{\mathsf{C}}\subseteq\partial\widetilde{\Sigma}$ 上的限制是一个非退化曲线 $\gamma\colon\widetilde{\mathsf{C}}\to S^2$，具有正双曲单值化，而 λ_C 是连接极限点 $\gamma(\pm\infty)$的线段的像。令 $\Sigma_\mathsf{C}\subseteq\Sigma$ 为由 $\Omega^\gamma\subseteq\Omega$ 的像给出的主半环带。将所有此类半环带（测地线本身除外）从 Σ 中移除后，我们得到一个具有测地边界的射影结构曲面，称为核心

$$\Sigma_{\mathrm{core}}=\Sigma-\bigsqcup_{\mathsf{C}\subseteq\partial\Sigma}(\Sigma_\mathsf{C}-\lambda_\mathsf{C}).$$

对于（完备）双曲结构的情形（如例 3.7 中所示），这就是曲面的通常凸核心，而环带 Σ_C 则是漏斗（喇叭）——例如参见[6,第 2.4 节。1]。

通过选取一个微分同胚 $\Sigma_{\mathrm{core}}\cong\Sigma$ （我们令其在λ_C的领圈邻域之外为恒等映射），可以将 Σ_{core} 上的射影结构传回 Σ。由此我们得到一个典范映射

$$c\mathfrak{P}(\Sigma)\to c\mathfrak{P}_{\mathrm{geod}}(\Sigma)$$

到具有测地边界的凸射影结构的有限维变形空间（模去与恒等映射同伦且保持边界的微分同胚，但不一定逐点固定边界）。后一个空间带有一个自然映射到 $(A_+)^r$，将这样的射影结构映到边界分支 $\mathsf{C}_1,\ldots,\mathsf{C}_r$ 周围单值化的共轭类。将半环带粘合回去后，我们得到其作为 $(A_+)^r$ 上纤维积的描述，

$$c\mathfrak{P}(\Sigma)=c\mathfrak{P}_{\mathrm{geod}}(\Sigma)\times_{(A_+)^r}\underbrace{\times_{i=1}^{\mathsf{r}}(\mathcal{D}_3(\mathsf{C}_i)_\Delta)}. \tag{44}$$

Goldman 理论 [17] 为曲面的给定裤分解以及一组“模型缝” $c\mathfrak{P}_{\mathrm{geod}}(\Sigma)$引入了该空间上的 Fenchel-Nielsen参数 [13,第 10.6 节。2]。这涉及 $A_+ \times A = \mathbb{R}^2_{>0} \times \mathbb{R}^2$ 的一份拷贝，对应于每个 $3\mathsf{g} + \mathsf{r} - 3$个粘合圆；每个 $2\mathsf{g}\,\mathsf{r} - 2$ 个裤子对应两个“内部”参数；每个边界圆对应 A_+ 的一份拷贝。将此描述与（57）结合，我们得到

$$c\mathfrak{P}(\Sigma) \cong \underbrace{(\mathbb{R}^2)^{2\mathsf{g}+\mathsf{r}-2}}_{\text{pants}} \times \underbrace{(\mathbb{R}^2_{>0} \times \mathbb{R}^2)^{3\mathsf{g}+\mathsf{r}-3}}_{\text{gluing circles}} \times \underbrace{\times_{i=1}^{\mathsf{r}} (\mathcal{D}_3(\mathsf{C}_i)_\Delta)}_{\text{boundaries}}.$$

注记 3.11. 根据 Labourie [27] 和 Loftin [29], 紧致定向曲面上凸射影结构的变形空间 Σ 无边界，且 $\chi(\Sigma) < 0$也是复结构的变形空间 J 以及一个 J-全纯三次微分。类似地 [33], 对于 C 这个紧致定向一维流形， $\mathcal{R}_3(\mathsf{C})$等价于 C 上的射影结构以及一个定义在 C上的三次微分。若能将这些结果结合起来，研究具有非退化边界的射影结构，将会很有意思。

3.6. 群胚作用。 给定一个发展映射 $\varphi\colon \widetilde{\Sigma} \to S^2$ 及其相应的单值化 $\varrho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$，令 $[\varphi] \in \mathfrak{P}(\Sigma)$ 表示其在G 的作用和 $\mathrm{Diff}_+(\Sigma$的 $\partial\Sigma)$作用下的等价类。我们得到一个群胚 $\mathcal{L}(\Sigma) \rightrightarrows \mathfrak{P}(\Sigma)$，其箭头为

$$[\varphi_1] \longleftarrow [\varphi_0]$$

由发展映射的等单值变形给出，即对于固定的 ϱ，发展映射的同伦 φ_t 。由于任何此类同伦都定义了边界限制的等单值变形 $\partial\varphi_t$ ，我们得到一个群胚态射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{S}_3(\partial\Sigma) \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ \mathfrak{P}(\Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{R}_3(\partial\Sigma) \end{array}$$

这里 $\mathcal{S}_3(\partial\Sigma) \rightrightarrows \mathcal{R}_3(\partial\Sigma)$ 表示群胚 $\mathcal{S}_3(\mathsf{C}) \rightrightarrows \mathcal{R}_3(\mathsf{C})$ 的直积，其中 C 遍历 Σ 的边界分支。

我们可以将 $\mathcal{L}(\Sigma)$ 视为群胚 $\mathcal{S}_3(\partial\Sigma)$ 在某个局部 作用下的作用群胚。为了得到全局群胚作用，映射

$$\mathcal{L}(\Sigma) \to \mathcal{S}_3(\partial\Sigma) \times_{\mathcal{R}_3(\partial\Sigma)} \mathfrak{P}(\Sigma). \tag{45}$$

（由边界限制和 $\mathcal{L}(\Sigma)$ 的源映射给出）必须是一个双射。由于边界值的“小”同伦 $\partial\varphi$ 可以延拓为 φ 的同伦，该映射在局部是 $1-1$。但一般来说，它在整体上并非满射：例如， $\partial\varphi$ 可能同伦于一个不再是单射的非退化拟周期映射。对于具有正双曲边界单值的凸射影结构，则不会出现这个问题：

命题 3.12. 在 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$上的限制是一个作用群胚。也就是说，(45) 在 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$上限制为一个双射。

证明。考虑 Σ 上的一个凸射影结构，其发展映射为 $\varphi\colon \widetilde{\Sigma} \to S^2$，单值化为 $\varrho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$，其像为 $\Omega = \phi(\Sigma)$。对于每个边界分量 C，选取其一个原像 C，发展映射在其上的限制是一条非退化准周期曲线 $\gamma\colon \widetilde{\mathsf{C}} \to S^2$，其单值化为正双曲单值化 $g_\gamma \in G$。端点 $\gamma(\pm\infty)$ 是 g_γ 的不动点，因此在边界值 $\partial\varphi = \varphi|_{\partial\widetilde{\Sigma}}$ 的同伦下保持不变。这意味着 $\Omega_{\mathrm{core}} = \varphi(\Sigma_{\mathrm{core}})$ 在 φ 的任意等单值变形下保持不变。整个区域 Ω 是 Ω_{core} 与各区域 $\Omega^\gamma \subseteq \Delta^\gamma \subseteq S^2$ 的并集，而 φ 的等单值变形等价于所有边界曲线 γ 之并集的等单值变形。□

对 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$ 的群胚作用也可以从描述（57）的角度来理解，它由以下作用给出：

$$\mathcal{D}_3^{[2]}(\mathsf{C})_\Delta / A \subseteq \mathcal{S}_3(\mathsf{C}) \tag{46}$$

对每个边界分支 C，作用于 $\mathcal{D}_3(\mathsf{C})_\Delta$上。

4. Symplectic structure

在本节中，Σ 表示一个紧致、连通、定向且带边界的曲面 $\partial\Sigma$（边界也可能为空）。$\mathfrak{P}(\Sigma)$ 上的辛结构最终将通过约化，从主丛上联络空间的 Atiyah-Bott 辛结构得到。由于存在边界项，需要特别谨慎处理。

4.1. σ-正联络。考虑由主 $G = \mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$-丛 $(P,\ \sigma)$ 与一个 G-等变发展截面组成的对

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\ \sigma\ } & S^2 = G/H \\ \big\downarrow & & \\ \Sigma & & \end{array} \tag{47}$$

在边界上，我们还固定 $\partial\sigma$ 的一个提升：$\partial P \to S^2$ 至一个映射（参见（12））

$$\begin{array}{ccc} \partial P & \xrightarrow{\ \widehat{\partial\sigma}\ } & \mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^3) = G/B \\ \big\downarrow & & \\ \partial\Sigma & & \end{array} \tag{48}$$

由于 σ 等价于将结构群约化到 $H \subseteq G$，因此选择 $(P,\ \sigma)$相当于选择一个主 H-丛 P_H。由于 $\pi_1(H) = \pi_1(\mathsf{SO}(2)) = \mathbb{Z}$，我们看到

对于 $\partial\Sigma = \varnothing$，这些由一个整数（欧拉数）分类

$$e(P,\sigma) = e(P_H) \in \mathbb{Z}. \tag{49}$$

若 Σ 具有非空边界，则选择 $\partial\sigma$ 会将 ∂P 的结构群约化为可缩群 B，从而确定 $\partial P_H \supseteq \partial P_B$ 的一类平凡化，并因此 $e(P, \sigma)$ 得以定义。在此以及下文中，为简化记号，我们省略对提升（48）的引用。给定数据（47），我们定义：

定义 4.1。 联络 $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ 称为 σ-正的，当且仅当：

（a）水平叶状结构与 σ-层集横截，即 $\ker\theta \cap \ker(T\sigma) = 0$，且所得丛映射

$$T\sigma|_{\ker(\theta)} \colon \ker(\theta) \to TS^2$$

是保向的。

（b）边界联络 $\partial\theta \in \Omega^1(\partial P, \mathfrak{g})$ 是 $\partial\sigma$-正的（参见定义 2.7）。s

p的 σ面 p正联络将记作 $\mathcal{A}^\sigma$ (P).

注意，σ-正性是一个开条件：若一个联络是 σ-正的，那么它的小扰动也都是如此。联络在边界上的拉回给出一个映射

$$\mathcal{A}^\sigma(P) \to \mathcal{A}^{\widehat{\partial\sigma}}(\partial P).$$

令 $\chi(\Sigma)$ 表示 Σ的欧拉示性数。

命题 4.2。 使 (P, σ) *(在给定提升* (48) *的* $\partial\sigma$*)* 存在一个 σ-正联络 θ 的必要条件是

$$e(P,\sigma) = \chi(\Sigma). \tag{50}$$

证明。 先假设 $\partial\Sigma = \varnothing$。稳定子 H 对 $v = (1$的作用：0: $0)$ 在$T_vS^2 \cong \mathbb{R}^2$ 上的作用限制为 $\mathrm{SO}(2) \subseteq H$ 的通常旋转作用。因此，

$$e(P,\sigma) = e(P_H) = e(P_H \times_H T_vS^2)$$

（其中最后一项是定向秩 2 向量丛通常意义下的欧拉数）。若θ 是一个 σ-正联络，则 $T\sigma$ 定义了定向向量丛之间的一个同构$T\Sigma \to P_H \times_H T_vS^2$。因此，在这种情况下，$e(P, \sigma) = e(T\Sigma)$ 就是欧拉示性数。此论证可推广至边界可能非空的情形：此时，$e(T\Sigma)$ 利用 $T\Sigma|_{\partial\Sigma}$ 的平凡化同伦类来定义，其中边界方向 $T\partial\Sigma$ 是固定的。（双曲情形的详细内容见 [3, 命题 4。9] ）□

注 4.3。 对于作用于闭庞加莱圆盘 $\mathbb{D}$ 上的群 $G' = \mathrm{PSU}(1, 1)$ 同样可以考虑带有等变映射的主 G'-丛 P'

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\sigma'} & \overline{\mathbb{D}} \\ \downarrow & & \\ \Sigma & & \end{array} \tag{51}$$

（我们要求 σ' 是带边界流形之间的一个态射，其含义是：对于 $\partial\mathbb{D}$的边界定义函数，其拉回是$\partial P'$的边界定义函数。）这些对象同样由整数 $e(P',\ \sigma') \in \mathbb{Z}$ 分类（见 [3]）。利用$\mathbb{D} \hookrightarrow S^2$ 来自克莱因-贝尔特拉米模型的包含映射，对 $(P',\ \sigma')$ 进行提升可得一对 $(P,\ \sigma)$，其中$e(P',\ \sigma') = e(P,\ \sigma)$。

4.2. 由平坦联络得到的射影结构。 固定 $(P,\ \sigma)$，以及提升$\frown\partial\sigma$，满足 $e(P,\ \sigma) = \chi(\Sigma)$。我们将保持 σ且其边界限制保持提升 $\partial\sigma$的同伦类的规范变换群记为 $\mathsf{Gau}(P,\ \sigma)$。$\mathsf{Gau}(P,\ \sigma)$ 在联络上的作用保持σ-正联络子空间不变。

给定一个 平坦主联络 θ，定义4.1 中的第一个条件 σ意味着其将 θ-水平叶局部微分同胚地映射到 S^2。如第3.1节所述，这确定了 θ-水平叶状结构上的射影结构，继而下降到 Σ。若 Σ 有非空边界，则定义4.1中的第二个条件确保边界非退化。由此得到一个典范映射

$$\mathcal{A}^{\sigma}_{\mathrm{flat}}(P) \to \mathrm{Proj}(\Sigma). \tag{52}$$

命题 4.4。 群 $\mathrm{Gau}(P,\sigma)$ 在 $\mathcal{A}^{\sigma}_{\mathrm{flat}}(P)$ 上自由作用，其中

$$\mathrm{Proj}(\Sigma) = \mathcal{A}^{\sigma}_{\mathrm{flat}}(P)/\,\mathrm{Gau}(P,\sigma).$$

证明。 若两个联络 θ,θ' 由 $\mathsf{Gau}(P,\sigma)$中的一个规范变换联系起来，则得到的射影结构不变。这表明（52）在 $\mathsf{Gau}(P,\sigma)$-轨道上为常数。如上所述，每个具有非退化边界的射影结构都确定一个三元组 (P_1,σ_1,θ_1)，其中 $e(P_1,\sigma_1) = \chi(\Sigma)$。特别地，存在一个主 H-丛同构 $(P_1)_H \to P_H$。（若边界非空，则可选择与边界上的平凡化相容的同构。）进而，它确定一个同构 $P_1 \to P$，将 σ_1 映至 σ。这表明映射（52）是满射。

还需证明该作用是自由的。通过选取射影坐标图，只需对开子集 $U \subseteq S^2$ 上的标准射影结构证明这一断言，其中有 $P = U \times G$, $\sigma(m,g) = g^{-1}\cdot m$，且配备平凡联络，其联络 1-形式为 $\mathsf{A} = 0$。设规范变换 $\psi \in C^\infty(U,G)$ 保持 σ 不变，并满足$\psi \bullet A = 0$。第二个条件意味着 ψ是一个常值 规范变换，由 $(m,g) \mapsto (m,ag)$给出，其中固定 $a \in G$。但此时，对所有 m,g，$(\psi\cdot\sigma)(m,g) = \sigma(m,a^{-1}g) = g^{-1}\cdot am$等于 $\sigma(m,g)$，当且仅当对所有 $m \in U$都有 $a\cdot m = m$。也就是说，$a = e$。□

对于平凡丛 $P = \Sigma \times G$，主联络 θ 可用其联络 1-形式 A 来描述，而对于映射 $f\colon \Sigma \to S^2$，$\sigma(m,\ g) = g^{-1}\cdot f(m)$。若$f(m) = \psi(m)\cdot(1\colon 0\colon 0)$对某个 $\psi\colon \Sigma \to G$成立，我们可以通过 ψ^{-1}进行规范变换，用到基点 $(1\colon 0\colon 0) \in S^2$的常值函数替换 f。

例 4.5. S^2 上的典范射影结构由平凡丛 $S^2 \times G$ 和平凡联络 $\mathsf{A} = 0$ 描述，其中 $\sigma(m,\ g) = g^{-1}\cdot m$。在仿射图

$\Sigma = \{(1 : u : v) | \ u, \ v \in \mathbb{R}\}$ 中，我们有 $m = \psi(m) \cdot (1 : 0 : 0)$，其中

$$\psi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ v & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

经由 ψ^{-1}进行规范变换后，我们看到该射影结构也可由 $\sigma(m, \ g) = g^{-1} \cdot (1 : 0 : 0)$ and 描述

$$\mathsf{A} = \psi^{-1}\mathsf{d}\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathsf{d}u & 0 & 0 \\ \mathsf{d}v & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

例 4.6（主环带）。我们沿用例3.4中的记号。根据~构造，环带 Σ 是平面 $\Sigma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$的商空间，其坐标为$(x, \ y)$发展映射为 $\varphi: \ \widetilde{\Sigma} \to S^2$ 定义为

$$\varphi(x, y) = (e^{xc_1} : -e^{xc_2}y : e^{xc_3})$$

这可以写成 $\varphi = \psi \cdot (1 : 0 : 0)$ with

$$\psi(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xc_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{xc_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{xc_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

经由 ψ^{-1}进行规范变换后，我们得到联络 1-形式 $\mathsf{A} = \psi^{-1}\mathsf{d}\psi$,

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ -y(c_2 - c_1) & c_2 & 0 \\ (c_3 - c_1) & 0 & c_3 \end{pmatrix} \mathsf{d}x - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{d}y. \tag{54}$$

命题4.7。 设 $P = \Sigma \times G$ 具有发展截面 $\sigma(m, g) = g^{-1} \cdot (1 : 0 : 0)$。联络 *1*-形式 $\mathsf{A} \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ 是 σ-正的，当且仅当

$$\mathsf{A}_{21} \wedge \mathsf{A}_{31} \in \Omega^2(\Sigma)$$

是与给定定向相容的体积形式。

证明。 用 $T_{(m, \ e)}P = T_m\Sigma \times \mathfrak{g}$表示时，水平提升为 $v \mapsto (v, \ -\iota_v(\mathsf{A}))$。另一方面，映射 $G \to S^2, \ \ g \mapsto g^{-1} \cdot (1 : 0 : 0)$ 在 e处的微分将 $\xi \in \mathfrak{g}$映射为$-(\xi_{21}, \ \xi_{31})^\top \in \mathbb{R}^2$ （最后两个分量来自 ξ的第一列）。因此，所需条件是 $v \mapsto \iota(v)(\mathsf{A}_{21}, \mathsf{A}_{31})^\top$ 为保定向同构。等价地，$\mathsf{A}_{21} \wedge \mathsf{A}_{31}$ 是一个体积形式。□

例 4.8。 设 $L \in \mathcal{R}_3(S^1)$ 是一个微分算子 $L = \partial^3 + a_1\partial + a_0$，其系数函数为 $a_0, \ a_1$。考虑半环带 $S^1 \times [0, \ \infty)$，其坐标为 $u, \ v$。联络 1-形式

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{d}u$$

（其中 $\bullet$ 表示一个规范变换，$g \bullet \mathsf{A} = \mathrm{Ad}_g \mathsf{A} - \mathrm{d}g g^{-1}$）是平坦的，并且在边界附近为 σ-正。（计算表明 $\mathsf{A}_{21} \wedge \mathsf{A}_{31} = (1 + v a_0(u)) \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$。）其在边界上的拉回是与 L 相对应的联络的 Drinfeld-Sokolov 标准形。

4.3. **辛结构的构造**。暂且设 G是一个李群，且其李代数 $\cdot$ 上带有一个 Ad-不变非退化对称双线性型 $\mathfrak{g}$。对于每个主 G丛 $P \to \Sigma$，若其底空间是紧致定向曲面（可能带有边界），则此双线性型定义了主联络空间上的 ***Atiyah-Bott* 辛结构** [4]。将 $\mathcal{A}(P)$ 的切空间识别为取值于伴随丛的 1-形式 $\mathcal{A}(P)$，Atiyah-Bott 形式由楔积后积分给出：$\int_\Sigma \alpha \cdot \beta$对于 $\alpha,\ \beta \in \Omega^1(\Sigma,\ \mathfrak{g}(P))$。该辛结构在主丛自同构群的作用下保持不变

$$\mathrm{Aut}_+(P) \circlearrowright \mathcal{A}(P)$$

其底映射保定向。该作用具有一个仿射动量映射，其中整体部分涉及曲率 $F^\theta \in \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g}(P))$，边界部分则涉及联络的拉回 $\partial\theta$。更具体地，将李代数 $\mathfrak{aut}(P)$ 识别为 Atiyah algebroid $\mathsf{At}(P) = TP/G$,的截面，并回忆一下，联络定义了一个分裂 s^θ：$\mathsf{At}(P) \to \mathfrak{g}(P)$。对于 $\zeta \in \mathfrak{aut}(P)$，动量映射的分量由下式给出

$$\mathcal{A}(P) \to \mathbb{R},\quad \theta \mapsto -\int_\Sigma F^\theta \cdot s^\theta(\zeta) + \int_{\partial\Sigma} \text{bdry terms}. \tag{55}$$

边界项只依赖于 $\partial\theta$ 和 $\zeta|_{\partial\Sigma}$，若 ζ 沿 $\partial\Sigma$消失，则边界项也消失。详细讨论请参见 [3, 附录 B]。联络上的 Atiyah-Bott 结构下降为

$$\mathcal{M}(P) = \mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(P)/\operatorname{Gau}(P, \partial P), \tag{56}$$

平坦联络模空间上的辛结构，其中取商时所用的规范变换在边界上为恒等变换。该空间带有 $\mathsf{Gau}_\circ(\partial P)$ 的剩余规范作用，其动量映射为 $\mathcal{M}(P) \to \mathcal{A}(\partial P),\quad [\theta] \mapsto \partial\theta$。

在我们的情形中，$G = \mathsf{SL}(3, \mathbb{R})$，我们取 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ 上的非退化对称双线性形式为迹型 $(\xi, \eta) \mapsto \mathsf{tr}(\xi\eta)$。由命题 4.4 可知，$\mathsf{Proj}(\Sigma)$ 是 $\mathcal{A}^\sigma_{\mathrm{flat}}(P)$ 在 $\mathsf{Gau}(P, \sigma)$ 作用下的商空间，而 $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 则通过再对 $\mathsf{Diff}_\circ(\Sigma, \partial\Sigma)$ 取商得到。这提示我们，可以通过相对于保持 σ的自同构子群进行约化，并要求底映射属于 $\mathsf{Diff}_\circ(\Sigma, \partial\Sigma)$，来构造 $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 上的辛形式。然而，若 $\partial\Sigma$ 有非空边界，这就不是直接的辛约化：底映射固定边界的自同构仍可能在 $P|_{\partial\Sigma}$上非平凡地作用，因此会在动量映射中产生边界项。

遵循 [3], 中的策略，我们引入一个中间空间

$$\mathcal{M}^\sigma(P) = \mathcal{A}^\sigma_{\mathrm{flat}}(P)/\operatorname{Aut}_\circ(P, \partial P, \sigma) \tag{57}$$

其中 $\mathrm{Aut}_\circ(P、\partial P、\sigma)\subseteq \mathrm{Aut}_+(P、\sigma)$ 是保持 σ、底映射与恒等映射同伦且逐点固定 ∂P 的自同构。该空间带有 $\mathrm{Gau}_\circ(\partial P、\partial\sigma)$ 的剩余作用，以及一个到 $\mathcal{A}^{\partial\sigma}(\partial P)\subseteq\mathcal{A}(\partial P)$ 的等变映射。

命题 4.9. 空间 (57)是一个辛约化，

$$\mathcal{M}^\sigma(P)=\mathcal{A}^\sigma(P)/\!\!/\operatorname{Aut}_\circ(P,\partial P,\sigma). \tag{58}$$

σ-正平坦联络的包含映射下降为一个$\mathrm{Gau}_\circ(\partial P,\partial\sigma)$-等变局部辛同胚，

$$\mathcal{M}^\sigma(P)\to\mathcal{M}(P) \tag{59}$$

与到 $\mathcal{A}(\partial P)$ 的映射相互交织。

证明。$\mathrm{Aut}(P,\sigma)$ 的李代数是 P 上保持 σ的 G-不变向量场，或者等价地说，是与 P_H相切的向量场。这些向量场是子李代数丛 $\mathrm{At}(P,\sigma)\cong\mathrm{At}(P_H)$ 的截面，其中该子丛属于 Atiyah 阿尔gebroid $\mathrm{At}(P)=TP/G$。空间 $\mathfrak{aut}(P,\partial P,\sigma)$由 $\mathrm{At}(P,\sigma)$ 的截面 ζ组成，这些截面沿 $\partial\Sigma$消失。$\mathrm{Aut}_\circ(P,\partial P,\sigma)$的动量映射由式（55）经限制得到，因此就是

$$\theta\mapsto-\int_\Sigma F^\theta\cdot s^\theta(\zeta),$$

不涉及边界项。联络 θ 满足定义4.1 中的第一个条件，当且仅当限制

$$s^\theta|_{\mathrm{At}(P,\sigma)}\colon\ \mathrm{At}(P,\sigma)\to\mathfrak{g}(P) \tag{60}$$

是一个同构（参见 [3, 命题 6 的证明。2]）。因此我们看到，对于所有 $\zeta\in\mathfrak{aut}(P、\partial P、\sigma)$，积分均为零，当且仅当 $F^\theta=0$，即 θ是平坦的。也就是说，$\mathrm{Aut}_\circ(P、\partial P、\sigma)$作用的零水平集恰好是 $\mathcal{A}^\sigma_{\mathrm{flat}}(P)$，其零叶层由 $\mathrm{Aut}_\circ(P、\partial P、\sigma)$轨道方向给出。

另一方面，$\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(P)$ 的零叶状结构也由 $\mathrm{Gau}(P,\partial P)$-轨道方向给出。因此，在局部，$\mathrm{Aut}_\circ(P,\partial P,\sigma)$-轨道方向与 $\mathrm{Gau}(P,\partial P)$-轨道方向重合。通过变形基映射，$\mathrm{Aut}_\circ(P,\partial P,\sigma)$中的每个元素都与 $\mathrm{Gau}(P,\partial P,\sigma)$中的某个元素同伦。因此，如果两个 σ-正联络处于同一个 $\mathrm{Aut}_\circ(P,\partial P,\sigma)$-轨道中，那么它们也处于同一个 $\mathrm{Gau}(P,\partial P)$-轨道中。于是，$\sigma$-正联络的包含映射下降为一个局部辛同胚（59）。□

射影结构的变形空间由以下商空间得到

$$\mathfrak{P}(\Sigma)=\mathcal{M}^\sigma(P)/\operatorname{Gau}_\circ(\partial P,\partial\sigma). \tag{61}$$

辛结构不能直接下降，因为它不是 $\mathrm{Gau}_\circ(\partial P,\partial\sigma)$-基本的。不过请注意，$\mathrm{Gau}_\circ(\partial P,\partial\sigma)$ 作用的动量映射由映射$\mathcal{M}^\sigma(P)\to\mathcal{A}(\partial P),\ \ [\theta]\mapsto\partial\theta$给出，随后再复合到 $\mathcal{A}(\partial\mathcal{P},\partial\sigma)$的商映射：

$$\mathcal{M}^\sigma(P)\to\mathcal{A}(\partial P)/\operatorname{ann}(\mathfrak{gau}(\partial P,\partial\sigma)),\ \ [\theta]\mapsto[\partial\theta] \tag{62}$$

这里的括号表示联络的等价类。根据命题2.11，(62)的像是一个单独的余伴随 Gau$(\partial P, \partial\sigma)$-轨道

$$\mathcal{O} = \mathcal{A}^{\partial\sigma-\mathrm{reg}}(\partial P)/\operatorname{ann}(\mathfrak{gau}(\partial P, \partial\sigma)). \tag{63}$$

因此，借助辛几何中的“移位技巧”，我们可以将 61 写成关于 $\mathcal{O}$ 的辛约化。总结如下：

命题 4.10。 空间 $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 是一个辛约化，

$$\mathfrak{P}(\Sigma) = \mathfrak{P}(\Sigma)_{\mathcal{O}} = (\mathcal{M}^{\sigma}(P) \times \mathcal{O}^{-})/\!\!/ \operatorname{Gau}_{\mathfrak{o}}(\partial P, \partial\sigma). \tag{64}$$

我们利用公式（64）在 $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 上定义辛结构。

*Re*注 4.11。 若 $\partial\Sigma = \varnothing$，则不需要第二步，我们可直接得 e

$$\mathfrak{P}(\Sigma) = \mathcal{A}^{\sigma}(P)/\!\!/ \operatorname{Aut}_{\mathfrak{o}}(P, \sigma).$$

注 4.12。 对于 $\partial\Sigma = \varnothing$ 的情形，Goldman [18] 给出了 $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 上辛结构的另一种构造方式，将其视为一个无限维辛约化。将 Goldman 的方法推广到具有非退化边界的情形，将会很有意思。

5. Moment map property

回顾一些辛几何中的概念。辛流形 M_1, M_2之间的拉格朗日关系 L: $M_1 \dashrightarrow M_2$是一个拉格朗日子流形 $L \subseteq M_2 \times M_1^{-}$，其中上标表示相反的辛结构。辛群胚 $\mathcal{S} \rightrightarrows B$ 在辛流形 M上的作用，沿映射 Φ: $M \to B$，称为哈密顿作用，当且仅当作用映射是一个拉格朗日关系

$$L\colon S \times M \dashrightarrow M.$$

辛群胚的哈密顿作用这一概念源于 Mikami-Weinstein[31], ，他们指出，李群 G 在辛流形上的通常哈密顿作用，等价于余切群胚 $T^*G \rightrightarrows \mathfrak{g}^*$的哈密顿作用。

在第 3.6 节中，我们描述了 $\mathcal{S}_3(\partial\Sigma) \rightrightarrows \mathcal{R}_3(\partial\Sigma)$ 在射影结构变形空间 $\mathfrak{P}(\Sigma)$ 上沿映射 Ψ: $\mathfrak{P}(\Sigma) \to \mathcal{R}_3(\partial\Sigma)$ 定义的一个“局部”群胚作用。这个“局部”作用是通过一个子群胚来定义的

$$\mathcal{L}(\Sigma) \subseteq \mathfrak{P}(\Sigma) \times (\mathcal{S}_3(\partial\Sigma) \times \mathfrak{P}(\Sigma))^{-}.$$

现在我们将证明，局部群胚作用是哈密顿的，即 $\mathcal{L}(\Sigma)$定义了一个拉格朗日关系。我们将通过与类似的群胚进行比较来证明这一点

for 空间 $\mathcal{M}(P)$ 和 $\mathcal{M}^\sigma(P)$。我们的策略由下图描述

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\partial P)\times\mathcal{M}(P) & \xrightarrow{\mathcal{L}(P)} & \mathcal{M}(P) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{S}^{\partial\sigma}(\partial P)\times\mathcal{M}^\sigma(P) & \xrightarrow{\mathcal{L}^\sigma(P)} & \mathcal{M}^\sigma(P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}_3(\partial\Sigma)\times\mathfrak{P}(\Sigma) & \xrightarrow{\mathcal{L}(\Sigma)} & \mathfrak{P}(\Sigma) \end{array}$$

其中虚线箭头是拉格朗日关系。在图中，$\mathcal{L}(P)$ 由辛群胚 $\mathcal{S}(\partial P)\rightrightarrows\mathcal{A}(\partial P)$ 在 $\mathcal{M}(P)$ 上的作用给出。中间的箭头由顶行通过“限制”得到。底行由中间行通过 Drinfeld-Sokolov 约化得到。

5.1. 群胚 $\mathcal{S}(Q)$、$\mathcal{S}^{\hat{\tau}}(Q)$、$\mathcal{S}_3(\mathsf{C})$。设 $Q\to\mathsf{C}$ 是抽象圆上的主 G-丛。$\mathcal{A}(Q)$ 主联络的空间是一个无限维泊松流形，其辛叶是规范群 $\mathrm{Gau}_\circ(Q)$的单位连通分支的轨道。（一个同构 $Q\cong S^1\times G$ 将规范群与环群识别起来。）其辛群胚是作用群胚

$$\mathcal{S}(Q)=\mathrm{Gau}_\circ(Q)\times\mathcal{A}(Q)\rightrightarrows\mathcal{A}(Q),$$

带有 2-形式 $\omega_{\mathcal{S}}$，该 2-形式由其与 Gau 的（扭曲）余切丛的识别得到$_\circ(Q)$。（参见 [2, 例 A。12]。）它还可以用以下方式描述：$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$空间 $\mathcal{P}(Q)$ 由准周期截面组成，截面取自拉回丛 $Q\to\mathsf{C}$。这里 $t\in\Gamma(Q)$若满足下式 $\kappa^*t=\mu(t)\cdot t$ 对某个单值化 $\mu(t)\in G$，则称其为准周期的。在上的主作用诱导出在准周期截面上的作用，其商映射为

$$p\colon\mathcal{P}(Q)\to\mathcal{A}(Q)$$

将 $t\in\mathcal{P}(Q)$ 映射到使 t 平行的唯一联络 θ。令 $\mathcal{P}^{[2]}(Q)$ 由成对的准周期截面 (t_1,t_0) 组成，这些截面通过等单值化同伦相互关联。等价地，将 t_0 映射到 t_1 的唯一规范变换属于 $\mathrm{Gau}_\circ(Q)$。因此我们有 $\mathcal{P}^{[2]}(Q)\cong\mathrm{Gau}_\circ(Q)\times\mathcal{P}(Q)$，它下降为一个识别

$$\mathcal{S}(Q)\cong\mathcal{P}^{[2]}(Q)/G\rightrightarrows\mathcal{A}(Q). \tag{65}$$

如 [2], 所示，空间 $\mathcal{P}(Q)$ 带有一个特殊的 $\mathrm{Aut}(Q)\times G$-不变 2-形式$\varpi_{\mathcal{P}}$，并具有良好性质。此外，该 2-形式建立了$\mathcal{S}(Q)$与在 G的万有覆盖上的一个拟辛群胚之间的 Morita等价。以下是这一结果的直接推论：

命题 5.1. $\omega_{\mathcal{S}}$到 $\mathcal{P}^{[2]}(Q)$ 的拉回是差值$\mathrm{pr}_1^*\,\varpi_{\mathcal{P}}-\mathrm{pr}_2^*\,\varpi_P$，其中$\mathrm{pr}_i\colon\ \mathcal{P}^{[2]}(Q)\to\mathcal{P}(Q)$ 是两个投影。

给定 $\tau\colon Q\to S^2$ 及其提升 $\hat\tau\colon Q\to \mathrm{Fl}^+(\mathbb{R}^3)$，我们可以考虑一个相关的空间 $\mathcal{P}^{\hat\tau}(Q)$，其中的准周期截面对应的联络 θ 是 $\hat\tau$-正的。（参见定义 2.7。）令 $\mathcal{P}^{\hat\tau,[2]}(Q)$ 由这类截面构成的对组成，且这些截面还通过这类截面的等单值化同伦彼此相关。则

$$\mathcal{S}^{\hat\tau}(Q)\cong \mathcal{P}^{\hat\tau,[2]}(Q)/G \rightrightarrows \mathcal{A}^{\hat\tau}(Q) \tag{66}$$

是 $\mathcal{S}(Q)$的一个子群胚。由于 $\hat\tau$-正性是一个开条件，这个子群胚在 $\mathcal{S}(Q)$中是开子群胚，因此也是辛的。群 $\mathsf{Gau}_\circ(Q,\tau)$ 作用于 $\mathcal{A}^{\hat\tau}(Q)$，其商空间为 $\mathcal{R}_3(\Sigma)$。同样，$\mathcal{S}^{\hat\tau}(Q)$ 在 $\mathsf{Gau}_\circ(Q,\tau)\times\mathrm{Gau}_\circ(Q,\tau)$ 的作用下的商空间是辛群胚 $\mathcal{S}_3(\Sigma)\rightrightarrows\mathcal{R}_3(\Sigma)$。与命题 4.10 之前的讨论类似，辛结构并不下降，而是通过移位技巧得到。也就是说，

$$\mathcal{S}_3(\Sigma)=\big(\mathcal{S}^{\hat\tau}(Q)\times(\mathcal{O}^-\times\mathcal{O})\big)/\!\!/\big(\mathrm{Gau}_\circ(Q,\tau)\times\mathrm{Gau}_\circ(Q,\tau)\big). \tag{67}$$

（在最后一个等式中，我们可以用 $\mathcal{S}^{\hat\tau}(Q)$ 替换 $\mathcal{S}(Q)$。）关于辛群胚这一构造的更多细节，参见 [21]。

5.2. **（局部）群胚作用。** 回到第 4节的设定，考虑一个带边界的紧致定向曲面 Σ、一个主 G-丛 $P\to\Sigma$、一个发展截面 $\sigma\colon\ P\to S^2$，以及边界限制的一个提升 $\widehat{\partial\sigma}$，使得 $e(P,\ \sigma)=\chi(\Sigma)$。~我们还固定一个万有覆盖 $\Sigma\to\Sigma$，其覆盖变换群为 Γ；拉回~ ~丛记为 $P\to\Sigma$。

辛群胚

$$\mathcal{S}(\partial P)=\mathrm{Gau}_\circ(\partial P)\times\mathcal{A}(\partial P)\rightrightarrows\mathcal{A}(\partial P)$$

是所有$\mathcal{S}(\partial P|_{\mathsf{C}_i})\rightrightarrows\mathcal{A}(\partial P|_{\mathsf{C}_i})$的直积，其中$\mathsf{C}_i$遍历$\partial\Sigma$的所有连通分支。如同（65）中所述，它可以用以下各对来描述 $(t_1,\ t_0)$ 其中 Γ-准周期截面~ ~$t\colon\ \partial\Sigma\to\partial P$。

$\mathsf{Gau}_\circ(\partial P)$的作用在模空间 $\mathcal{M}(P)$ 上的作用等价于辛群胚 $\mathcal{S}(\partial P)$的作用。特别地，其图定义了一个拉格朗日子群胚

$$\mathcal{L}(P)\subseteq\mathcal{M}(P)\times\big(\mathcal{S}(\partial P)\times\mathcal{M}(P)\big)^-.$$

将 $\mathcal{M}(P)$ 视为在 $\mathsf{Gau}(P,\partial P)\times G$,~ ~的作用下，对 Γ-准周期截面空间 $s\colon\ \Sigma\to P$ 取商是方便的。记 $[s]$ 为此类截面的等价类，则子群胚 $\mathcal{L}(P)$ 由所有

$$([s_1],[(t_1,t_0)],[s_0]) \tag{68}$$

满足以下条件的元素组成：s_0 与 s_1 在保持单值化不变的情况下同伦，且 t_0，t_1 是 s_0，s_1的边界值。

空间 $\mathcal{M}^\sigma(P)$（参见（57））同样可以描述为截面 s的等价类，并附加要求：s 是 σ-正的，即与 s 对应的联络是 σ-正的。与上一节一样，定义（开）

$\widehat{\ }$辛子群胚 $\mathcal{S}^{\partial\sigma}(\partial P)\subseteq\mathcal{S}(\partial P)$。它在 $\mathcal{M}^{\sigma}(P)$ 上的“局部”群胚作用由子群胚给出

$$\mathcal{L}^{\sigma}(P)\subseteq\mathcal{M}^{\sigma}(P)\times\big(\mathcal{S}^{\widehat{\partial\sigma}}(\partial P)\times\mathcal{M}^{\sigma}(P)\big)^{-}, \tag{69}$$

由等价类（68）组成，但其中 s_0，s_1 为 σ-正的，而它们之间的等单值化同伦则经过 σ- 正截面。从这一描述可明显看出，局部辛同胚 $\mathcal{M}^{\sigma}(P)\ \to\ \mathcal{M}(P)$ 和 $\widehat{\ }$ $\mathcal{S}^{\partial\sigma}(\partial P)\subseteq\mathcal{S}(\partial P)$ 限制为一个局部一一映射，$\mathcal{L}^{\sigma}(P)\to\mathcal{L}(P)$。特别地，$\mathcal{L}^{\sigma}(P)$ 是拉格朗日的。

定理 5.2. 子群胚

$$\mathcal{L}(\Sigma)\subseteq\widehat{\mathfrak{P}}(\Sigma)\times\big(\mathcal{S}_3(\partial\Sigma)\times\widehat{\mathfrak{P}}(\Sigma)\big)^{-} \tag{70}$$

是拉格朗日的。也就是说，$\mathcal{L}(\Sigma)$定义了一个辛群胚的（局部）哈密顿作用。

证明。空间 $\mathcal{L}(\Sigma)$ 已在第 3.6 节中用等价类$[(\phi_1,\ \phi_0)]$ 的发展映射 $\widetilde{\Sigma}\ \to\ S^2$进行了描述。每个这样的发展映射都来自一个 σ-$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$正准周期截面 $s\colon\ \Sigma\to P$；若两个截面通过 $\mathsf{Gau}(P,\ \sigma)$相关联，则它们给出相同的发展映射。因此，$\mathcal{L}(\Sigma)$ 恰是 $\mathcal{L}^{\sigma}(P)$ 在商映射下的像

$$\mathcal{M}^{\sigma}(P)\to\mathfrak{P}(\Sigma),\quad \mathcal{S}^{\widehat{\partial\sigma}}(\partial P)\to\mathcal{S}_3(\partial\Sigma).$$

正如我们所见，这些商映射也可以看作是关于轨道$\mathcal{O}$的约化。由此可得，$\mathcal{L}(\Sigma)$ 是拉格朗日的。□

6. Goldman twists

设 $\lambda\subseteq\Sigma$ 是一个定向简单闭环，且不同伦于任何边界分支。与 λ相关联的是 A-作用（扭转），它作用于空间 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$，如第3.3节所述。对于没有边界的情形，文献 [17] 和 [24] 证明了 A-作用是哈密顿的，其动量映射为全纯单值化的对数

$$\mathrm{Hol}_{\lambda}\colon c\mathfrak{P}(\Sigma)\to A_+.$$

（全纯单值化定义到共轭为止，但每个正双曲元素都共轭于 A_+中的唯一元素。）我们将针对可能具有非空边界时的辛结构描述，验证这一事实。我们将使用

$$\xi_1=\mathrm{diag}(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),\quad \xi_2=\mathrm{diag}(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$$

作为李代数 $\mathfrak{a}=\mathsf{Lie}(A)$ 的一组基。令 $\mathbf{diag}(e^{c_1},\ e^{c_2},\ e^{c_3})\in A_+$ 为绕 λ 的单值化。

定理 6.1。 给定 Σ 中一条简单环路 λ，它不同伦于任何边界分支，则函数

$$H_i = \mathrm{tr}(\log(\mathrm{Hol}_\lambda)\xi_i)\colon c\mathfrak{P}(\Sigma) \to \mathbb{R}$$

是由 ξ_i 给出的扭转流的哈密顿函数。

记 $\mathrm{Hol}_\lambda = (e^{c_1},\ e^{c_2},\ e^{c_3}) \in A_+$，其中 $c_1 < c_2 < c_3$，$\sum c_i = 0$，则有

$$H_1 = \frac{1}{2}(c_3 - c_1),\ H_2 = c_2.$$

这与 [17, 第 1 节8] 一致，差别仅在于归一化。

为证明该定理，固定一对 (P, σ) 并列出 $\widehat{\partial\sigma}$ 用于构造辛结构。在 附近，我们可以为 P 选择一个平凡化，使得 σ 由 $g^{-1}\{1\colon 0\colon\ 0)$ 给出。这些数据使我们能够用联络 1- 形式 A 描述 附近的射影结构。以 为闭测地线的凸射影结构由主环带建模，其联络 1-形式A 由方程（54）给出。我们需要用联络 1-形式来描述该射影结构在扭转流作用下的像。

固定 $\epsilon > 0$，并令 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 为一个函数：当 $y \leqslant -\epsilon$ 时取值为 0，当 $y \geqslant \epsilon$时取值为 1。映射

$$\mathsf{F}_i(t)\colon (x, y) \mapsto \exp(t\chi(y)\xi_i)) \cdot (x, y)$$

当 $|t|$ 充分小时，它们是微分同胚，并表示由 $\exp(t\xi_i) \in A$ 给出的扭转。

引理 6.2. 这些微分同胚下射影结构的拉回，对应于联络 *1*-形式 $\mathsf{A}_i(t) = \mathsf{A} + t\alpha_i$，其中

$$\alpha_1 = \left(\xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\chi'(y)\mathsf{d}y, \qquad \alpha_2 = \left(\xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\chi'(y)\mathsf{d}y. \tag{71}$$

证明。这些表达式通过先计算 $\mathsf{F}_i(t)^*\mathsf{A}$，再施加规范变换得到，使 $\mathsf{A}_i(t)$ 与 A 在 $|y| \geqslant \epsilon$处一致。计算表明，我们可以取

$$\mathsf{A}_1(t) = \exp(-bt\chi\xi_2) \bullet \mathsf{F}_1(t)^*\mathsf{A},\quad \mathsf{A}_2(t) = \exp(-t\chi\xi_2) \bullet \mathsf{F}_2(t)^*\mathsf{A}$$

其中 $b = \frac{1}{2} - \frac{c_2 - c_1}{c_3 - c_1}$。 □

注意，α_i 不依赖于 c_i，且它们具有特殊形式 $\alpha_i = \xi_i\chi'(y)\mathsf{d}y +$下三角。

定理*6.1*的证明。我们要证明的是

$$-\iota(\xi_i^\sharp)\omega = \mathsf{d}H_i \tag{72}$$

其中，$c\mathfrak{P}(\Sigma)$上的向量场 $\xi_i^\sharp$ 是由 ξ_i定义的扭转流的生成元。我们将在一个给定的凸射影结构处验证这一恒等式，该结构以一个 σ-正联络 θ 表示。扭转流可以通过改变 θ 来实现，而这种改变局限于给定测地线 λ附近。因此，我们可以在局部模型中进行研究，该模型由

主环带，配备平凡的 G-丛，以及处于标准形式的 σ，并且联络 1-形式 A 由（54）给出，扭转流则由以下形式描述：α_i 见（71）。

现在考虑 $c\mathfrak{P}(\Sigma)$ 在给定射影结构处的任意切向量。它由一个射影结构的单参数族表示，因此在 λ 附近由一族联络 1-形式给出 A_t，其中 $\mathsf{A}_0 = \mathsf{A}$。我们可以假设，对于所有 λ（即子流形 $y = 0$）而言，它始终是一条测地线，并且 t拉回A_t 到子流形 $y = 0$ 上的形式为（54）中第一项给出的标准形式，其中 c_i 取决于 t。因此，

$$\log \mathrm{Hol}_\lambda(A_t) = \mathrm{diag}(c_1(t), c_2(t), c_3(t)) \in \mathfrak{a}.$$

连接族 A_t 的 t-导数具有如下形式

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathsf{A}_t = (\zeta + \text{lower triangular})\mathsf{d}x + [\dots]\mathsf{d}y.$$

其中 $\zeta = \frac{d}{dt}|_{t=0}\mathsf{diag}(c_1(t),\ c_2(t),\ c_3(t))$。因此，

$$\int \mathrm{tr}(\alpha_i \frac{d}{dt}|_{t=0}\mathsf{A}_t) = -\int \mathrm{tr}(\xi_i\zeta)\chi'(y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = -\mathrm{tr}(\xi_i\zeta) = -\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{tr}(\xi_i \log \mathrm{Hol}_\lambda(A_t)).$$

这验证了动量映射性质（72）。 □

References

1. M. Adler, 《形式伪微分算子的迹泛函与Korteweg-de Vries型方程的辛结构》, Invent. Math. 50 (1978/79), 第3期, 219–248。2. A. Alekseev 和 E. Meinrenken, 《关于余伴随Virasoro作用》, Journal of Geometry and Physics 195 (2024), 105029。3. A. Alekseev 和 E. Meinrenken, 《具有理想边界的曲面上的Teichm ¨uller模空间的辛几何》, Comm. Math. Phys. 405 (2024), 第10期, 论文编号229, 共46页。4. M. F. Atiyah 和 R. Bott, 《黎曼曲面上的Yang-Mills方程》, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 308 (1982), 523–615。5. A. Beilinson 和 V. Drinfeld, 《 Opers 》, 2005, math/0501398。6. D. Borthwick, 《无限面积双曲曲面的谱理论》, 第2版, 《理论与实验物理进展》, 第318卷, Birkh ¨auser/Springer, 2016年。7. A. Casella、D. Tate 和 S. Tillmann, 《曲面上的实射影结构模空间》, MSJ Memoirs, 第38卷, 日本数学会, 东京, 2020年。8. S. Choi, 《实射影曲面的凸分解 I。- π环与凸性》, J. Differential Geom. 40 (1994), 第1期, 165–208。9. , 《实射影曲面的凸分解 II。容许分解》, J. Differential Geom. 40 (1994), 第2期, 239–283。10. S. Choi 和 W. Goldman, 《闭曲面上的凸实射影结构构成闭集》, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 第2期, 657–661。11. , 《紧曲面上实射影结构的分类》, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 34 (1997), 第2期, 161–171。12. V. Drinfeld 和 V. Sokolov, 《Korteweg-de Vries型方程与单李代数》, Dokl. Akad. Nauk SSSR 258 (1981), 第1期, 11–16。

13. B. Farb 和 D. Margalit，《映射类群入门》，普林斯顿数学丛书，第49卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012年。14. V. Fock 和 A. Goncharov，《凸射影结构的模空间》，《Adv. Math.》208 (2007)，第1期，249–273。15. I. M. Gelfand 和 L. A. Dikii，《与可积非线性微分方程相关的一族哈密顿结构》，苏联科学院应用数学研究所预印本（1978），第136号，41页。16. W. M. Goldman，《不连续群与欧拉类》，博士论文，加州大学伯克利分校，1980年。17. ，《紧曲面上的凸实射影结构》，J. Differential Geom. 31 (1990)，第3期，791–845。18. ，《曲面上仿射联络的辛几何》，《J. Reine Angew. Math.》407 (1990)，126–159。19. ，《流形上的几何结构》，数学研究生教材丛书，第227卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2022年。20. N. J. Hitchin，《李群与Teichm¨uller空间》，《Topology》31 (1992)，第3期，449–473。21. A. Khazaeipoul，《Adler-Gelfand-Dikii泊松结构的辛群胚》，预印本，2025年。22. B. Khesin 和 R. Wendt，《无限维群的几何》，数学及其边界领域成果，第3辑，第51卷，施普林格出版社，柏林，2009年。23. B. A. Khesin 和 B. Z. Shapiro，《 S^2 上的非退化曲线与Zamolod- S^2 chikov代数的轨道分类》，Comm. Math. Phys. 145 (1992)，第2期，357–362。24. Hong Chan Kim，《实射影结构模空间上的辛整体坐标》，J. Differential Geom. 53 (1999)，第2期，359–401。25. A. A. Kirillov，《圆的微分同胚群的轨道与局部李超代数》，《Funktsional. Anal. i Prilozhen.》15 (1981)，第2期，75–76。26. S. Kobayashi，《微分几何中的变换群》，数学及其边界领域成果，施普林格出版社，1972年。27. F. Labourie，《曲面上的平坦射影结构与三次全纯微分》，《Pure Appl. Math. Q.》3 (2007)，第4期，1057–1099。28. J. Little，《单位二维球面上曲线的非退化同伦》，J. Differential Geometry 4 (1970)，339–348。29. J. Loftin，《仿射球面与凸 $\mathbb{RP}^n$-流形》，《Amer. J. Math.》123 (2001)，第2期，255–274。30. J. Maldacena、D. Stanford 和 Z. Yang，《二维近反德西特空间中的共形对称性及其破缺》，《理论与实验物理进展》2016 (2016)，第12期，12C104。31. K. Mikami 和 A. Weinstein，《辛群胚的矩与约化》，《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》24 (1988)，第1期，121–140。32. V. Ovsienko 和 B. Khesin，《Gelfand-Dikii括号的辛叶与不可展平曲线的同伦类》，《Funktsional. Anal. i Prilozhen.》24 (1990)，第1期，38–47。33. V. Ovsienko 和 S. Tabachnikov，《射影微分几何：旧与新》，剑桥数学专著丛书，第165卷，剑桥大学出版社，剑桥，2005年，从施瓦茨导数到微分同胚群的上同调。34. P. Saad、S. Shenker 和 D. Stanford，《JT引力作为矩阵积分》，预印本，2019年，arXiv:1903.11115。35. N. Saldanha，《球面上局部凸曲线空间的同伦型》，《Geom. Topol.》19 (2015)，第3期，1155–1203。36. N. Saldanha 和 B. Shapiro，《 $\mathbb{S}^n$ 中的局部凸曲线空间与群 B_{n+1}^+ 的组合学》，《J. Singul.》4 (2012)，1–22。

37. G. Segal，某些无限维群的酉表示，Comm. Math. Phys. **80**（1981年），第3期，301–342。38. , *KdV*方程的几何，《国际现代物理学A辑》 **6**（1991年），2859–2869，载于《量子场论中的拓扑方法》一(的里雅斯特，1990年）。39. M. Z. Shapiro，非退化曲线空间的拓扑，《Funktsional. Anal. i Prilozhen.》**26**（1992年），第3期，93–96。40. D. Stanford 和 E. Witten，*JT*引力与随机矩阵理论系综，《理论与数学物理进展》**24**（2020年），第6期，1475–1680。41. A. Wienhard 和 T. Zhang，形变凸实射影结构，《奉献几何学》**192**（2018年），327–360。