arXiv:2601.09669v1 [math.OA] 14 Jan 2026

含单位元的 C*-代数中正的范数一元之间投影的度量刻画

ANTONIO M. PERALTA 和 PEDRO SAAVEDRA

Abstract. 我们以纯几何方式刻画含单位元的 C*-代数中正的范数一元之间的投影，这种刻画由底层巴拿赫空间的范数决定。具体而言，设 A 是一个 C*-代数（或 JB*-代数），其正锥和单位球面分别记为 A^+ 和 S_A。 A中的单位球面的正部分记为 S_{A^+}，即集合 $A^+ \cap \mathsf{S}_A$；而以子集 $\mathcal{S}$为中心的正的范数一元素的单位球面（其中 ${}_{A^+}$ ）为集合

$$\mathrm{Sph}_{\mathsf{S}_{A^+}}(\mathcal{S}) := \Big\{ x \in \mathsf{S}_{A^+} : \|x - s\| = 1 \text{ for all } s \in \mathcal{S} \Big\}.$$

假设 A 含单位元，我们证明，元素 $a \in \mathsf{S}_{A^+}$ 是一个投影，当且仅当它满足双球面性质，即 $\mathrm{Sph}_{\mathsf{S}_{A^+}}\left(\mathrm{Sph}^{\mathsf{S}_{A^+}}(\{a\})\right) = \{a\}$.

1. Introduction

人们早已广泛发现，C*-代数及其元素的代数性质与几何性质，通过深刻而令人惊讶的相互联系彼此交织。例如，R.V. Kadison 于 1951年证明，集合 $\partial_e(\mathcal{B}_A)$，即 C*-代数 A 的闭单位球 $\mathcal{B}_A$ 的极端点，恰好是 A中的极大部分等距元，也就是说，这些元素 $e \in A$ 满足： ee^* （等价地， e^*e）是一个投影，且（$\mathbf{1} - ee^*$）A（$\mathbf{1} - e^*e$）$= \{0\}$. 。此外，按照 Kadison 的术语， A 中单位球面的正部分的极端点集合，就是 A 中的投影集合（见 [9]）。B. Aupetit 的一项结果表明，半单 Banach 代数（或 Jordan–Banach 代数）中的元素 a 是幂等元，当且仅当其谱包含于集合 $\{0, 1\}$，并且存在常数 r、$C > 0$，使得 $\sigma(x) \subset \sigma(a) + C\|x - a\|$，其中 $\|x - a\| < r$，而 $\sigma(x)$ 和 $\sigma(a)$ 分别表示 x 和 a 的谱。C. Akemann 和 N. Weaver 在 [1] 中建立了 C*-代数中偏等距的几何刻画（另见 [6]）。

设 $\mathcal{S}$ 和 P 是巴拿赫空间 X的子集。子集周围的单位球面 $\mathcal{S}$ 在 P 定义为如下集合

$$\mathrm{Sph}_P(\mathcal{S}) := \Big\{ x \in P : \|x - b\| = 1 \text{ for all } b \in \mathcal{S} \Big\}.$$

注意，这些集合由 X上的范数决定。若分别用 A^+ 和S_{A^+} 表示C A 代数 A的正锥和单位球面的正部分，则只需范数即可确定集合$\mathrm{Sph}^{\mathsf{S}_{A^+}}(\mathcal{S})$，对每个 $\mathcal{S} \subseteq A$均如此。给定 $a \in A$，记$\mathrm{Sph}^{\mathsf{S}_{A^+}}(a)$为$\mathrm{Sph}^{\mathsf{S}_{A^+}}(\{a\})$。

关于本文的主要目标， [12,命题 2.2] 证明了，满足 $\mathrm{Sph}_{\mathsf{S}_{A^+}}\left(\mathrm{Sph}^{\mathsf{S}_{A^+}}(a)\right) = \{a\}$ 的 C*-代数 A 中，每个正的范数一元 a 都是投影。这个度量条件是否实际上构成非零投影的刻画，

Date：2026年1月15日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：47B49，46L05；次要分类：46B20。*Key words and phrases.* C*代数；投影；正单位球面；子集周围的单位球面。

这一问题仍未解决。以下几个特例已有针对这一挑战性问题的肯定答案： $A = M_n(\mathbb{C})$, 由 G. Nagy 给出 [11,命题 1]， $A = B(H)$，其中 H 是复希尔伯特空间，由本文第一作者证明 [12], ；而 A 为冯·诺伊曼代数或 AW*-代数的情形，则由 C.W. Leung、C.K. Ng 和 N.C. Wong 证明 [10]。我们通过证明上述问题在 A 为含单位元的 C*- 代数时有肯定解，推广了上述结果（见定理2.1）。

JBJB*-代数是一个复巴拿赫空间 $\mathfrak{A}$，其上带有一个双线性且交换的乘积 $((a,\ b) \mapsto a \circ b)$ 以及一个代数对合 $(a \mapsto a^*)$，并满足以下公理:
(1) $(a \circ b) \circ b^2 = (a \circ b^2) \circ b\, (\forall a,\ b \in \mathfrak{A})$（约当恒等式），(2) $\|\mathrm{U}_a(a^*)$
$\| = \|a\|^3\, (\forall a \in \mathfrak{A})$，其中 $\mathrm{U}_a(b) = 2(a \circ b) \circ a - a^2 \circ b\, (\forall a,\ b \in \mathfrak{A})$。
JB*-代数称为含单位元的，如果存在一个元素 $\mathbf{1} \in \mathfrak{A}$ 使得 $\mathbf{1} \circ a = a \circ \mathbf{1} = a$对所有 $a \in \mathfrak{A}$ 均成立。若将 Jordan 乘积定义为 $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$，则每个 C*-代数都是 JB*-代数。然而，JB*-代数的类严格大于 C*-代数的类。JBW*-代数是同时也是对偶巴拿赫空间的 JB*-代数。与冯·诺伊曼代数的情形一样，JBW*-代数总是含单位元的。每个 JB*-代数 $\mathfrak{A}$都具有一个正元素锥，记作 $\mathfrak{A}^+$。关于本文所采用的 JB*-代数的标准定义和性质，我们请参阅 [2, 5, 8] 以及 [15,§2]中的详细论述。

在 Jordan 框架中，对于 JB *-代数 $\mathfrak{A}$ 中的每个正的范数一元a，以下性质成立（见命题 2.3] [15, ）：
(a) $\mathrm{Sph}^{S_{\mathfrak{A}^+}}(\mathrm{Sph}^{S_{\mathfrak{A}^+}}(a)) = \{a\}$ 蕴含 a 是 $\mathfrak{A}$中的一个投影。(b) 若 $\mathfrak{A}$ 是 JBW*-代数，则 a 是投影当且仅当 $\mathrm{Sph}^{S_{\mathfrak{A}^+}}(\mathrm{Sph}^{S_{\mathfrak{A}^+}}(a)) = \{a\}$.

本文最后一节旨在证明，当 $\mathfrak{A}$ 仅为含单位元的 JB*-代数时，(b)中的上述等价关系仍然成立。最终结论是，含单位元的 C*-代数（或含单位元的 JB*-代数） A 中的正的范数一元 p 是投影当且仅当 $\mathrm{Sph}_{S_{A^+}}\left(\mathrm{Sph}^{S_{A^+}}(p)\right) = \{p\}$。

2. A metric characterization of projections in unital C*-algebras

本文的主要结果是：在含单位元 C*-代数中，正的范数一元素之间投影的度量刻画如下。

定理 2.1。设 A 是一个含单位元 C^*-代数，且 p 是 A中的正的范数一元素。则以下陈述等价:
(a) p 是 A中的一个投影。(b)
球面$_{S_{A^+}}\left(\text{球面}^{S_{A^+}}(p)\right) = \{p\}$。

前一定理的证明将在一系列技术结果之后给出。下文中，C*-代数 A 中的所有投影组成的集合记为 $\mathrm{Proj}(A)$。如果 A是含单位元的，则符号 $\mathbf{1}$ 表示单位元。给定 $p \in \mathrm{Proj}(A)$，我们将 $p^\perp$ 记作 $\mathbf{1} - p$。每个 $a \in A$的谱记为 $\sigma(a)$。C*-代数理论中的一个众所周知的性质保证，对于每个范数一元素 $x \in A$ 和每个投影$p \in A$，条件 $pxp = p$ 蕴含 $x = p + (\mathbf{1} - p)x(\mathbf{1} - p)$（例如，参见[6, 引理 3.1]）。我们将使用这一性质，而不再另行说明。

$a \Rightarrow b$（见 [12, 定理 2.3] ）证明的最后几段隐含包含了以下辅助结果的一个较弱版本。这里我们给出一个更强的版本，并附上简化的证明。

引理 2.2. 设 A 是一个含单位元的 C^*-代数。那么 $\text{球面}_{S_{A^+}}\left(\text{球面}^{S_{A^+}}(\mathbf{1})\right)=\{\mathbf{1}\}$。

证明。显然 $\mathbf{1}\in \text{Sph}_{S_{A^+}}\left(\text{Sph}^{S_{A^+}}(\mathbf{1})\right)$。取 $b\in \text{Sph}_{S_{A^+}}\left(\text{Sph}^{S_{A^+}}(\mathbf{1})\right)$。若 b 不可逆（等价地，0 属于 $\sigma(b)$），容易看出 $\|b-\mathbf{1}\|=1$，因此根据假设有 $0=\|b-b\|=1$，这是不可能的。因此我们可以假设 b 可逆，或者等价地，$0\notin\sigma(b)$。若 $\sigma(b)\neq\{1\}$，则数 $m=\min\sigma(b)$ 必定严格小于 1。容易验证，元素 $\frac{b-m\mathbf{1}}{\|b-m\mathbf{1}\|}$ 属于 S_{A^+}，且 $\left\|\mathbf{1}-\frac{b-m\mathbf{1}}{\|b-m\mathbf{1}\|}\right\|=1$，以及 $\left\|b-\frac{b-m\mathbf{1}}{\|b-m\mathbf{1}\|}\right\|=m<1$，这与 $b\in \text{Sph}_{S_{A^+}}\left(\text{Sph}^{S_{A^+}}(\mathbf{1})\right)$ 矛盾。因此 $\sigma(b)=\{1\}$，从而 $b=\mathbf{1}$。

□

推论 2.3。 设 p 是一个（可能不含单位元的）C^*-代数 A中的非零投影。假设 $b\in \textit{Sph}_{S_{A^+}}\left(\textit{Sph}^{S_{(pAp)^+}}(p)\right)$ 且 $b\leq p$。那么 $b=p$。

证明。 考虑含单位元的 C*-代数 pAp，其单位元恰为 p。由于根据假设，$b\in pAp$，因此

$$b\in \text{Sph}_{S_{A^+}}\left(\text{Sph}_{S_{(pAp)^+}}(p)\right)\cap(pAp)\subseteq \text{Sph}_{S_{(pAp)^+}}\left(\text{Sph}_{S_{(pAp)^+}}(p)\right)=\{p\},$$

其中最后一个等式由引理 2.2 得出。 □

注意，在前一个引理的假设下，集合 $\text{Sph}_{S_{A^+}}\left(\text{Sph}^{S_{(pAp)^+}}(p)\right)$包含 $\text{Sph}_{S_{A^+}}\left(\text{Sph}^{S_{A^+}}(p)\right)$。

在下一个引理中，我们证明，以非零投影为中心的双重正球面中的每个元素，都在与该投影相对应的皮尔斯-2 子空间处取得其范数。由于本文最后一部分讨论 JB*-代数，我们将尽量采用接近 Jordan 框架的术语，不过，对于只关心 C*-代数结果的读者而言，无需特别运用约旦理论。给定 C*-代数 A中的一个元素 a，我们用 U_a 表示 A 上的算子，其定义为 $U_a(b)=aba(b\in A)$。若 a，b 属于 A，则称它们正交（简称 $a\perp b$），当且仅当 $ab^*=b^*a=0$。众所周知，$a\perp b$ 属于 A 意味着 $\|a+b\|=\max\{\|a\|,\|b\|\}$.

回忆一下，如果投影 $p$in a C*-algebra A 非零且$pAp=\mathbb{C}p$，则称其为极小投影。

引理 2.4。 设 A 为含单位元的 C^*-代数。假设 p 是 A中的一个非零投影，且b 是 $\textit{Sph}_{S_{A^+}}\left(\textit{Sph}^{S_{A^+}}(p)\right)$中的一个元素。那么，$\|U_p(b)\|=\|pbp\|=1$。

证明。 令 $c=U_{\mathbf{1}-p}(b)=U_{p^\perp}(b)\in U_{p^\perp}(A)=p^\perp Ap^\perp\subseteq A$。注意到，$c=0$当且仅当 $p^\perp\perp b^{\frac{1}{2}}$，等价地，$pb=bp=b$，在这种情况下 $b=U_p(b)$，因此$\|U_p(b)\|=\|b\|=1$，如所要求。因而我们可以假设 $c\neq 0$。

考虑连续函数 $f\colon[0,\|c\|]\to[0,1]$由 $f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\|c\|}t(t\in[0,\|c\|])$ 给出。注意，f是仿射且可逆的，其逆函数由 $f^{-1}(s)=2\|c\|\left(s-\frac{1}{2}\right)(s\in[0,1])$ 给出。在 C*-子代数 $U_{p^\perp}(A)=p^\perp Ap^\perp$中，通过连续函数演算定义元素 $d=f(c)\in p^\perp Ap^\perp$，显然它属于 $S_{U_{p^\perp}(A)}$。根据构造，$d\perp p$，因此 $\|d-p\|=\max\{\|d\|,\|p\|\}=1$，故由假设可得 $\|d-b\|=1$。[12] 中的引理 2.1 确保存在一个极小投影$w\in A^{**}$，使得以下陈述之一成立：

(I) $w \leq d$ 和 $w \perp b$ 属于 A^{**}。
(II) $w \leq b$ 和 $w \perp d$ 属于 A^{**}。

假设命题 (I) 成立。由于 $w, b \geq 0$，条件 $w \perp b$ 等价于 to

$$wb = bw = 0. \tag{2.1}$$

众所周知，不等式 $w \leq d \leq \mathbf{1} - p$ 意味着 $w \leq \mathbf{1} - p$ 和 $w = wbw$，因此

$$\begin{aligned} d = w + \mathrm{U}_{w^\perp}(d) &= w + (\mathbf{1} - w)b(\mathbf{1} - w) = w + (\mathbf{1} - w)p^\perp bp^\perp(\mathbf{1} - w) \\ &= w + (p^\perp - w)b(p^\perp - w) = w + \mathrm{U}_{(p^\perp - w)}(d) \in p^\perp A p^\perp. \end{aligned}$$

利用函数 f^{-1} 对连续函数演算再次应用，可得：

$$c = f^{-1}(f(c)) = f^{-1}(d) = 2\|c\| \left(d - \frac{1}{2} p^\perp \right) = 2\|c\| \left(w + \mathrm{U}_{(p^\perp - w)}(d) - \frac{1}{2} p^\perp \right). \tag{2.2}$$

注意到 $w \leq p^\perp$，因此 $\mathrm{U}_w \circ \mathrm{U}_{p^\perp} = \mathrm{U}_w$，由 (2.1) 和 (2.2) 可得

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{U}_w(b) = \mathrm{U}_w\left(\mathrm{U}_{p^\perp}(b)\right) = \mathrm{U}_w(c) &= 2\|c\| \mathrm{U}_w \left(w + \mathrm{U}_{(p^\perp - w)}(d) - \frac{1}{2} p^\perp \right) \\ = 2\|c\| \left(w^3 + \mathrm{U}_w(\mathrm{U}_{(p^\perp - w)}(d)) - \frac{1}{2}\mathrm{U}_w(p^\perp) \right) &= 2\|c\| \left(w + 0 - \frac{1}{2} w \right) = \|c\| w, \end{aligned}$$

这与 c 和 w 均非零矛盾。因此，上述情形 (I) 不可能成立。

最后，假设上述命题 (II) 成立。根据构造，$\frac{1}{2}p^\perp \leq d \leq p^\perp$，因此 d–在 A^{**} 中的值域投影（即满足 $qd = dq = d$的 d的最小投影）与 $p^\perp$重合。由于根据 (II) 中的假设，$w \perp d$，我们有 $w \perp r_{A^{**}}(d) = p^\perp$，从而得到 $w \leq p$。我们的假设还可推出 $w \leq b$。因此有 $wp = pw = w = wb = bw$，进而有 $w = \mathrm{U}_w(b) = \mathrm{U}_w(\mathrm{U}_p(b))$，这意味着

$$1 = \|w\| = \|\mathrm{U}_w(\mathrm{U}_p(b))\| \leq \|\mathrm{U}_p(b)\| \leq 1,$$

如所需。 □

现在我们可以对前面的引理作进一步改进。

命题 2.5。设 A 是一个含单位元的 C^*-代数。假设 p 是 A中的一个非零投影，且 b 是 $Sph_{\mathrm{S}_{A^+}}\left(Sph^{\mathrm{S}_{A^+}}(p)\right)$ 中的一个元素，并且 $\mathrm{U}_{p^\perp}(b) \neq 0$。此外，假设$x$ 是集合 $Sph^{\mathrm{S}_{A^+}}(p) \cap (pAp) = \{z \in pA^+p : \|p - z\| = \|z\| = 1\}$中的一个元素。那么，元素 $\mathrm{U}_x(b) = xpx$ 属于 A的单位球面。

证明。令 p、b 和 x 如命题所述。设 $y = p - x$，根据假设，它是 pAp 的单位球面中的一个正元素。我们首先考虑以下两种情况：

(•) 若 $\mathrm{U}_y(b) = 0$，则有 $0 = yb = (p - x)b$，因此 $pb = xb$。取伴随可得$bp = bx$。因此我们可以得出，$\mathrm{U}_p(b) = \mathrm{U}_x(b)$，于是由引理 2.4 可知，$\|\mathrm{U}_x(b)\| = \|\mathrm{U}_p(b)\| = 1$，如所求。
(•) 若 $\mathrm{U}_y(b) \neq 0$，则我们考虑元素

$$z = \frac{1}{2}\left(p^\perp + \frac{\mathrm{U}_{p^\perp}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^\perp}(b)\|} + \frac{\mathrm{U}_y(b)}{\|\mathrm{U}_y(b)\|} \right).$$

以下性质由构造可得： $0 \leq z, \left\| p^{\perp} + \mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| \right\| = 2, p^{\perp} + \mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| \in p^{\perp} A p^{\perp},$ 因此 $\left(p^{\perp} + \mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| \right) \perp \mathrm{U}_y(b) \|\mathrm{U}_y(b)\|$。因此，由正交性可得，

$$\|z\| = \max\left\{ \frac{1}{2} \left\| p^{\perp} + \frac{\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|} \right\|, \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathrm{U}_y(b)}{\|\mathrm{U}_y(b)\|} \right\| \right\} = 1.$$

类似的考虑可得

$$\|z - p\| = \max\left\{ \frac{1}{2} \left\| p^{\perp} + \frac{\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|} \right\|, \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathrm{U}_y(b)}{\|\mathrm{U}_y(b)\|} - 2p \right\| \right\} = 1.$$

关于 b 的假设意味着 $\|z - b\| = 1$。因此，我们可以应用 [12, 引理 2.1]，从而推出存在一个纯态 $\varphi \in \partial_e \left(\mathcal{B}_{(A^*)^+} \right)$，其支撑为唯一的极小投影 $w = \mathrm{supp}(\varphi) \in A^{**}$，且以下陈述之一成立：

(I) $\varphi(z) = 1$ 且 $\varphi(b) = 0$。

(II) $\varphi(z) = 0$ 且 $\varphi(b) = 1$。

假设 (I) 成立。在这种情况下，我们有 $2 = 2\varphi(z) = \varphi\left(p^{\perp}\right) + \varphi\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| + \mathrm{U}_y(b) \|\mathrm{U}_y(b)\| \right)$，其中 $\|p^{\perp}\|, \left\| \mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| + \mathrm{U}_y(b) \|\mathrm{U}_y(b)\| \right\| \leq 1$。因此，唯一的可能性是

$$\varphi\left(p^{\perp}\right) = \varphi\left(\frac{\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|} + \frac{\mathrm{U}_y(b)}{\|\mathrm{U}_y(b)\|} \right) = 1.$$

因此我们有

$$\varphi(z) = \varphi\left(p^{\perp} z\right) = \varphi\left(z p^{\perp}\right) = \varphi\left(p^{\perp} z p^{\perp}\right) = \varphi\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(z)\right), \text{ for all } z \in A.$$

特别地，$\varphi\left(\mathrm{U}_y(b) \|\mathrm{U}_y(b)\| \right) = \frac{1}{\|\mathrm{U}_y(b)\|} \varphi\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(\mathrm{U}_y(b))\right) = \varphi(0) = 0$。因此，等式 $\varphi\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| + \mathrm{U}_y(b) \|\mathrm{U}_y(b)\| \right) = 1$ 可得 $\varphi\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| \right) = 1$。然而，条件 $\varphi(b) = 0$ 意味着

$$0 = \varphi(b) = \varphi\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\right) = \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|,$$

这与某个假设矛盾。因此，情形 (I) 不可能成立。

最后，假设上述情形 (II) 成立。条件 $\varphi(z) = 0$，结合元素 $\mathrm{U}_y(b)$ 和 $p^{\perp}$ 的正性，保证了 $\varphi(\mathrm{U}_y(b)) = \varphi(p^{\perp}) = 0$，而后者意味着 $w \leq p$（因为 w 是支撑 φ 的 A^{**} 中的极小投影）。此外，将柯西-施瓦茨不等式应用于半正半双线性映射 $(c, d) \mapsto \varphi(cd^*)$ 在元素 $c = y b^{\frac{1}{2}}$ 和 $d = b^{\frac{1}{2}}$ 处，可推出

$$0 \leq |\varphi(yb)|^2 \leq \varphi(\mathrm{U}_y(b))\, \varphi(b) = 0, \tag{2.3}$$

所以 $\varphi(yb) = 0$（$\varphi(by) = 0$ 亦然）。

由于 w 是 A^{**}中纯态 φ 的支撑（极小）投影，因此恒等式 $\mathrm{U}_w(a) = \varphi(a) w$ 对所有 $a \in A$均成立。特别地，

$$\mathrm{U}_w(yb) = \varphi(yb)\, w = 0.$$

为完成证明，我们应用 $\varphi(b) = 1$，将元素 b改写为$b = w + \mathrm{U}_{\mathbf{1}-w}(b)$的形式。特别地，$bw = wb = w$。这意味着

$$0 = \mathrm{U}_w(yb) = wybw = wyw = \mathrm{U}_w(y) = \mathrm{U}_w(p - x),$$

结合 $w \leq p$，可得 $w = \mathrm{U}_w(p) = \mathrm{U}_w(x) = wxw$。由最后一个恒等式可知 $x = w + w^{\perp}xw^{\perp}$，因此$\mathrm{U}_w \circ \mathrm{U}_x = \mathrm{U}_w$。最后，考虑由下式给出的不等式链

$$1 \geq \|\mathrm{U}_x(b)\| \geq \|\mathrm{U}_w\left(\mathrm{U}_x(b)\right)\| = \|\mathrm{U}_w(b)\| = \|\varphi(b)\, w\| = 1,$$

由此得到所需结论。 □

定理 *2.1* 的证明。$(b) \Rightarrow (a)$。这正是 [12] 中的命题 2.2（事实上，该结果对任意 C*-代数都成立）。

$(a) \Rightarrow (b)$ 令 p 为 A 中的一个投影。显然，$\{p\} \subseteq \text{球面}_{\mathrm{S}_{A^+}}\left(\text{球面}^{\mathrm{S}_{A^+}}(p)\right)$。为证明反向包含，任取一个 $b \in \text{球面}_{\mathrm{S}_{A^+}}\left(\text{球面}^{\mathrm{S}_{A^+}}(p)\right)$。根据推论 2.3，只需证明以下等价条件之一：

$$b \leq p \Leftrightarrow \mathrm{U}_p(b) = p \Leftrightarrow \mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) = 0.$$

反设 $\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \neq 0$。

令 $e = \mathrm{U}_p(b) \in \mathrm{U}_p(A)$。引理 2.4 推出 $\|e\| = 1$，因此 $e \in \mathrm{S}_{pA^+p}$. 我们的目标是证明 e 是 C*- 子代数 $\mathrm{U}_p(A) = pAp$ 的单位元，等价地，$\sigma_{\mathrm{U}_p(A)}(e) = \{1\}$。显然有包含关系 $\supseteq$，因为 $\|e\| = 1$。为证明反向包含，反设存在某个值 $t_0 \in \sigma_{\mathrm{U}_p(A)}(e) \cap [0, 1[$。

我们可以选取 $0 < \varepsilon < \frac{1-t_0}{2}$，并通过 pAp 中的连续函数演算定义元素 $x = g(e) \in pAp$，其中 $g:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ 是如下给出的连续函数

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon \\ \frac{1-\varepsilon-t}{1-2\varepsilon-t_0}, & \text{if } t_0 + \varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon \\ 0, & \text{if } 1 - \varepsilon \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

不难看出，$x \in \mathrm{U}_p(A) \cap \mathrm{S}_{A^+}$ 以及 $\|p - x\| = 1$。由于我们假设 $\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \neq 0$，命题 2.5 保证了 $\|\mathrm{U}_x(b)\| = 1$。另一方面，$x \in pAp$ 这一事实意味着 $\mathrm{U}_x(b) = \mathrm{U}_x(\mathrm{U}_p(b)) = \mathrm{U}_x(e)$，因此

$$1 = \|\mathrm{U}_x(b)\| = \|\mathrm{U}_x(e)\| = t_0 + \varepsilon < 1,$$

这就产生了矛盾。因此，不存在这样的 t_0，$\sigma_{\mathrm{U}_p(A)}(e) = \{1\}$，以及 $e = p$。这意味着 $p = \mathrm{U}_p(b) = pbp$，从而 $b = p + p^{\perp}bp^{\perp}$。

最后，我们得出与以下假设相矛盾的结论：$z = \mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) = p^{\perp}bp^{\perp} \neq 0$.如果 $\|z\| = 1$，则有 $\|p - b\| = \|z\| = 1$，等价地，$b \in \text{球面}^{\mathrm{S}_{A^+}}(p)$，并且根据假设$\|b - b\| = 1$，这不可能。因此 $0 < \|z\| < 1$。对于 $0 < \varepsilon < \|z\|$，考虑连续函数 $h:\ [0, \|z\|] \to \mathbb{R}$，其定义为

$$h(t) = \begin{cases} t, & \text{if } 0 \leq t \leq \|z\| - \varepsilon \\ 1 + \frac{1-\|z\|+\varepsilon}{\varepsilon}(t - \|z\|), & \text{if } \|z\| - \varepsilon \leq t \leq \|z\| \\ 1, & \text{if } \|z\| \leq t \leq 1 \end{cases},$$

以及元素 $y = h(z) \in p^{\perp}Ap^{\perp}$。容易验证，$0 \leq y \leq p + y$ with$\|p - (p + y)\| = \|y\| = 1 = \|p + y\|$，因此必有 $\|b - (p + y)\| = 1$。然而，$\|b - (p - y)\| = \|p + z - (p + y)\| = \|z - y\| = 1 - \|z\| < 1$，这是不可能的。□

3. The JB*-algebra case

本节将详细说明必要的修改和替代论证，以便将定理 2.1中关于含单位元 JB*-代数中投影的度量刻画推广到更广泛的情形。首先注意到，由自伴元素和单位元生成的含单位元 JB*-代数的范数闭自伴子代数，在等距 Jordan 意义下同构于一个交换含单位元 C*-代数（参见[8,定理 3.2.2 和 §3.8]）。因此，我们可以在 JB*-代数中为自伴元素定义连续函数演算。虽然不能利用这一性质从引理 2.2推出下一个引理，但可以很容易地调整论证。

引理 3.1。设 $\mathfrak{A}$ 是一个含单位元的 *JB* *-代数。那么 $Sph_{S_{\mathfrak{A}^+}}\left(Sph^{S_{\mathfrak{A}^+}}(\mathbf{1})\right)=\{\mathbf{1}\}$。

证明。取 $b\in \mathrm{Sph}_{S_{\mathfrak{A}^+}}\left(\mathrm{Sph}^{S_{\mathfrak{A}^+}}(\mathbf{1})\right)$，并将 A 记为由 b 和 $\mathbf{1}$ 生成的 JB*-子代数。正如上文所述，A 是一个以 $\mathbf{1}$ 为单位元的交换含单位元 C*-代数。此外，A 由 b 和 $\mathbf{1}$ 生成，这意味着 $A\cong C(\sigma_A(b))$。引理 2.2 的证明中相同的论证表明 $\sigma_A(b)=\{1\}$，因此 $b=\mathbf{1}$，证毕。□

下一个推论可通过与推论 2.3 中所用类似的论证得到。注意，对于 JB p -代数中的每个投影（即自伴幂等元）* $\mathfrak{A}$，子空间 $\mathrm{U}_p(A)$ 是 *的一个 JB 子代数 $\mathfrak{A}$，其单位元为 p（参见 [8,§2。6] 或[2, §1。3]）。

推论 3.2. 设 p 是一个（可能不含单位元的）*JB* *-代数 $\mathfrak{A}$中的非零投影。假设 $b\in$ 球面 $_{S_{\mathfrak{A}^+}}\left(\text{球面}^{S_{\mathrm{U}_p(\mathfrak{A})^+}}(p)\right)$ 且 $b\le p$。则 $b=p$。

引理 2.4 的证明经过适当调整所需工具后，可以很容易地推广到 Jordan 框架。回顾一下，在 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中，若元素 a、b 满足 $\{a,b,x\}=(a\circ b^*)\circ x+(c\circ b^*)\circ a-(a\circ x)\circ b^*=0$ 对所有$x\in\mathfrak{A}$成立，则称它们正交（简写为 $a\perp b$）。若 a 和 b 是$\mathfrak{A}$中的正元素，则由 $a\perp b\Leftrightarrow a\circ b=0$ [4, 引理 4.1], 可知，在这种情况下 $\mathrm{U}_a\mathrm{U}_b=0$。若将 C*-代数 A 视为配备自然 Jordan 乘积的 JB*-代数，则上述正交性的概念与 C*-代数 [3, §2]中的通常概念一致。与结合情形一样，$a\perp b$ 在 $\mathfrak{A}$ 中蕴含$\|a+b\|=\max\{\|a\|,\|b\|\}$. 这些性质以及其他几种正交性的等价表述，在 [3,§2]和 [4,§4]中均有全面综述。

我们的论证还需要以下性质：

设 p 是 JB*-代数 $\mathfrak{A}$中的一个投影。那么，对于每个范数为一的元素 $x\in\mathfrak{A}$ with $\mathrm{U}_p(x)=p$ we have $x=p+\mathrm{U}_{p^\perp}(x)$ (see [7, Lemma 1.6]). } (3.1)

给定 JB*-代数中的元素 a，b，符号 $\mathrm{U}_{a,\,b}$ 表示在 $\mathfrak{A}$ 上定义的线性映射 $\mathrm{U}_{a,\,b}(x)=(a\circ x)\circ b+(b\circ x)\circ a-(a\circ b)\circ x$.

若 p 是 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的一个投影，则 Jordan 乘法算子 $M_p(x)=p\circ x(x\in\mathfrak{A})$ 的特征值包含于集合 $\{0,\frac{1}{2},1\}$ 中；集合 $\mathfrak{A}_j(p):=\{x\in\mathfrak{A}:\ p\circ x=\frac{j}{2}x\}$ 是对应于特征值 $\frac{j}{2}$($j\in\{0,1,2\}$) 的特征子空间，并且我们有关于 p 的 $\mathfrak{A}$ 的如下 Peirce 分解：

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0(p)\oplus\mathfrak{A}_1(p)\oplus\mathfrak{A}_2(p).$$

映射 U_p，$2U_{p,\,1-p}$ 和 U_{1-p} 分别是将 $\mathfrak{A}$ 投影到直和项 $\mathfrak{A}_2(p)$、$\mathfrak{A}_1(p)$ 和 $\mathfrak{A}_0(p)$ 上的投影。以下乘法规则成立：

$$\mathfrak{A}_0(p)\circ\mathfrak{A}_0(p)\subseteq\mathfrak{A}_0(p),\ \mathfrak{A}_2(p)\circ\mathfrak{A}_2(p)\subseteq\mathfrak{A}_2(p),\ \mathfrak{A}_0(p)\circ\mathfrak{A}_2(p)=\{0\},$$

$(\mathfrak{A}_0(p)\oplus\mathfrak{A}_2(p))\circ\mathfrak{A}_1(p)\subseteq\mathfrak{A}_1(p)$，以及 $\mathfrak{A}_1(p)\circ\mathfrak{A}_1(p)\subseteq(\mathfrak{A}_0(p)\oplus\mathfrak{A}_2(p))$（见 [8, §2.6]）。由这些规则可知

$$U_{\mathfrak{A}_0(p),\mathfrak{A}_2(p)}(\mathfrak{A})=U_{\mathfrak{A}_0(p),\mathfrak{A}_2(p)}(\mathfrak{A}_1(p))\subseteq\mathfrak{A}_1(p),$$

$U_{\mathfrak{A}_0(p)\,\mathfrak{A}_0(p)}(\mathfrak{A}_1(p))\subseteq\mathfrak{A}_1(p)$，因此 $p\circ U_{\mathfrak{A}_0(p)\,\mathfrak{A}_0(p)}(\mathfrak{A}_1(p))=\frac{1}{2}U_{\mathfrak{A}_0(p)\,\mathfrak{A}_0(p)}(\mathfrak{A}_1(p))$。

然而，给定 $a_0,b_0\in\mathfrak{A}_0(p)$ 和 $c_1\in\mathfrak{A}_1(p)$，根据 [8, 引理 2.4.20] 我们有

$$\frac{1}{2}U_{a_0,b_0}(c_1)=p\circ U_{a_0,b_0}(c_1)=U_{p\circ a_0,b_0}(c_1)+U_{a_0,p\circ b_0}(c_1)-U_{a_0,b_0}(p\circ c_1)=-\frac{1}{2}U_{a_0,b_0}(c_1),$$

这保证了

$$U_{\mathfrak{A}_0(p),\mathfrak{A}_0(p)}(\mathfrak{A}_1(p))=\{0\},\ \text{and consequently}\ U_{\mathfrak{A}_0(p),\mathfrak{A}_0(p)}\left(U_{\mathfrak{A}_0(p),\mathfrak{A}_2(p)}(\mathfrak{A})\right)=\{0\}.\quad(3.2)$$

与 C*-代数的情形一样，JB*-代数 $\mathfrak{A}$中的投影 p 称为极小的，如果 $U_p(\mathfrak{A})=\mathbb{C}p\neq\{0\}$. JB*-代数上的态（即正的范数为一的泛函）若不能表示为两个不同态的凸组合，则称为纯态。对于 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 上的每个纯态 φ，都存在唯一的极小投影 $w\in\mathfrak{A}^{**}$ 满足 $U_w(x)=\varphi(x)w$对所有 $x\in\mathfrak{A}$ 成立（更一般的结果见 [2, 引理 4.14] 或 [7, 命题 4]）。

引理 3.3. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含单位元的 *JB**-代数。假设 p 是 $\mathfrak{A}$中的一个非零投影，且 b 是 $Sph_{S_{\mathfrak{A}^+}}\left(Sph^{S_{\mathfrak{A}^+}}(p)\right)$中的一个元素。那么，$\|U_p(b)\|=1$。

证明. 定义 $c:=U_{1-p}(b)=U_{p^\perp}(b)\in U_{p^\perp}(\mathfrak{A})\subseteq\mathfrak{A}$。注意到，$c=0$ 当且仅当 $p^\perp\circ b^{\frac{1}{2}}=0$，等价地，$p^\perp\circ b=0\Leftrightarrow p\circ b=b$，在这种情况下 $b=U_p(b)$，因此 $\|U_p(b)\|=\|b\|=1$，如所愿。假设$c\neq0$不失一般性。与结合情形一样，我们通过含单位元的 JB*-代数 $U_{p^\perp}(\mathfrak{A})$ 上的连续函数演算，定义元素 $d=f(c)\in U_{p^\perp}(\mathfrak{A})$，其中 f: $[0,\|c\|]\to[0,1]$由 $f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\|c\|}t$($t$在 $[0,\|c\|]$) 给出。容易验证，由正交性可得 $\|d-p\|=\max\{\|d\|,\|p\|\}=1$，因此根据假设有 $\|d-b\|=1$。根据 [15, 引理 2.1(*a*)], (3.1)以及该引理之前的说明，存在一个极小投影$w\in\mathfrak{A}^{**}$，使得以下陈述之一成立：

(I) $d=w+U_{w^\perp}(d)$ 且 $w\perp b$ 属于 $\mathfrak{A}^{**}$。

(II) $b=w+U_{w^\perp}(b)$ 且 $w\perp d$ 属于 $\mathfrak{A}^{**}$。

我们将分别考虑这两种情况。

(I) 由于 $w\leq d\leq p^\perp$，我们有 $p^\perp=w+(p^\perp-w)$，其中 $w\perp(p^\perp-w)$。因此可以推得

$$\begin{aligned}d=w+U_{w^\perp}(d)&=w+U_{w^\perp}U_{p^\perp}(d)=w+U_{w^\perp}\left(U_w(d)+2U_{w,p^\perp-w}(d)+U_{p^\perp-w}(d)\right)\\&=w+U_{w^\perp}U_w(d)+2U_{w^\perp}U_{w,p^\perp-w}(d)+U_{w^\perp}U_{p^\perp-w}(d)\\&=w+2U_{w^\perp}U_{w,p^\perp-w}(d)+U_{w^\perp}U_{p^\perp-w}(d).\end{aligned}$$

由（3.2）可知 $U_{w^\perp}U_{w,\,p^\perp-w}(d)=0$. 此外，由于 $w^\perp\circ(p^\perp-w)=p^\perp-w$，因此 $U_{p^\perp-w}(d)\in\mathfrak{A}_2(w^\perp)$，我们可以断言 $U_{w^\perp}U_{p^\perp-w}(d)=U_{p^\perp-w}(d)$。于是，$d=w+U_{p^\perp-w}(d)$。现在，在 $U_{p^\perp}(\mathfrak{A})$ 中再次应用连续函数演算，得到：

$$c=f^{-1}(f(c))=f^{-1}(d)=2\|c\|\left(d-\frac{1}{2}p^\perp\right)=2\|c\|\left(w+U_{(p^\perp-w)}(d)-\frac{1}{2}p^\perp\right).\quad(3.3)$$

另一方面，考虑到 $w \perp b$， $w \leq p^{\perp}$ 以及先前的结论，我们得到

$$0 = \mathrm{U}_w(b) = \mathrm{U}_w\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\right) = \mathrm{U}_w(c) = 2\|c\|\mathrm{U}_w\left(w + \mathrm{U}_{(p^{\perp}-w)}(d) - \frac{1}{2}p^{\perp}\right)$$
$$= 2\|c\|\left(w^3 + \mathrm{U}_w(\mathrm{U}_{(p^{\perp}-w)}(d)) - \frac{1}{2}\mathrm{U}_w(p^{\perp})\right) = 2\|c\|\left(w + 0 - \frac{1}{2}w\right) = \|c\|w \neq 0,$$

这与假设矛盾。因此，上述情形 (I) 不可能成立。

(II) 根据构造， $\frac{1}{2}p^{\perp} \leq_{-} d \leq p^{\perp}$，因此 $\mathfrak{A}^{**}$ 中 d 的值域投影（参见 [8, 引理 4.2.6]）与 $p^{\perp}$ 重合。由 (II) 中的假设， $w \perp d$ ，我们有 $w \perp r_{A^{**}}(d) = p^{\perp}$，进而得到 $w \leq p$。根据我们的假设，还可推出 $b = w + \mathrm{U}_{w^{\perp}}(b)$，因此 $\mathrm{U}_w(b) = \mathrm{U}_w(w + \mathrm{U}_{w^{\perp}}(b)) = w$，这意味着

$$1 = \|w\| = \|\mathrm{U}_w(b)\| = \|\mathrm{U}_w(\mathrm{U}_p(b))\| \leq \|\mathrm{U}_p(b)\| \leq 1,$$

正如所需。 □

为了证明乔丹版本的命题 2.5 我们需要对柯西-施瓦茨不等式作进一步改进。

引理 3.4。设 φ 是 *JB**-代数 $\mathfrak{A}$ 上的一个正泛函。假设 a 和 b 是 $\mathfrak{A}$ 中的正元素，且满足 $\varphi(\mathrm{U}_a(b)) = 0$。那么 $\varphi(a \circ b) = 0$。

证明。假设 $\mathfrak{A}$ 含单位元且单位元为 1 并无妨。令 B 表示由 a、b 和 1 生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB* 子代数。根据 Shirshov-Cohn 定理（参见 [8, 定理 2.4.14 和 7.2.5] ，或 [17, 推论 2.2]），存在一个含单位元的 C* 代数 A，其单位元为 1，且包含 B 作为 JB* 子代数。 A 上的乘积将以直接并置表示。显然， $\varphi|_B$ 是 B^* 上的正泛函。令 ϕ 表示 $\varphi|_B$ 到 A 的 Hahn-Banach 延拓。我们可以看到，根据命题 1.5.2]， ϕ 是 A [16, 上的正泛函。此外， $0 = \varphi(\mathrm{U}_a(b)) = \phi(aba)$。最后，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$|\varphi(a \circ b)| = |\phi(a \circ b)| \leq \frac{1}{2}\left(|\phi(ab^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})| + |\phi(bb^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}a)|\right) \leq \phi(b)^{\frac{1}{2}}\phi(aba)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

由此完成证明。 □

命题2.5 的乔丹版本现在表述如下：

命题 *3.5.* 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含单位元的 *JB**-代数。假设 p 是$\mathfrak{A}$中的一个非零投影，且 b 是 $Sph_{\mathrm{S}_{\mathfrak{A}^+}}\left(Sph^{\mathrm{S}_{\mathfrak{A}^+}}(p)\right)$ 中的一个元素，满足 $U_{p^{\perp}}(b) \neq 0$。假设 x是集合 $Sph^{\mathrm{S}_{\mathfrak{A}^+}}(p) \cap U_p(\mathfrak{A})$ $= \{z \in U_p(\mathfrak{A}^+) : \|p - z\| = \|z\| = 1\}$中的一个元素。那么，元素 $U_x(b)$ 属于 $\mathfrak{A}$的单位球面。

证明。证明与命题 2.5 的证明非常相似，我们将尝试简化其中的细节。取 $y = p - x \in \mathrm{S}_{\mathfrak{A}^+} \cap \mathrm{U}_p(\mathfrak{A})$。若 $\mathrm{U}_y(b) = 0$ （等价地， $y \perp b$），根据 Shirshov-Cohn 定理（参见 [8,定理 2.4.14 和 7.2.5] 或 [17,推论 2.2]），记 B 为由 y、b 和 1 生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子代数，则存在一个以 1 为单位元的含单位元 C*-代数 A ，它将 B 作为 JB*-子代数包含在内。使用 A的（结合）乘积，并以并置表示，我们有 $pb = xb$、 $bp = bx$，且 $\mathrm{U}_p(b) = pbp = xbx = \mathrm{U}_x(b)$。在这种情况下，引理 3.3 保证 $\|\mathrm{U}_x(b)\| = \|\mathrm{U}_p(b)\| = 1$，正如所需。因此，我们可以假设 $\mathrm{U}_y(b) \neq 0$。

考虑该元素

$$z = \frac{1}{2}\left(p^{\perp} + \frac{\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|} + \frac{\mathrm{U}_y(b)}{\|\mathrm{U}_y(b)\|}\right).$$

容易验证，$0 \leq z$、$\left\| p^{\perp} + \mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| \right\| = 2$、$p^{\perp} + \mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| \in \mathrm{U}_{p^{\perp}}(\mathfrak{A})^{+}$，其中$\left(p^{\perp} + \mathrm{U}_{p^{\perp}}(b) \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|\right)^{\perp} \mathrm{U}_{y}(b) \|\mathrm{U}_{y}(b)\|$,

$$\|z\| = \max\left\{\frac{1}{2}\left\|p^{\perp} + \frac{\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|}\right\|, \frac{1}{2}\left\|\frac{\mathrm{U}_{y}(b)}{\|\mathrm{U}_{y}(b)\|}\right\|\right\} = 1,$$

and

$$\|z - p\| = \max\left\{\frac{1}{2}\left\|p^{\perp} + \frac{\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|}\right\|, \frac{1}{2}\left\|\frac{\mathrm{U}_{y}(b)}{\|\mathrm{U}_{y}(b)\|} - 2p\right\|\right\} = 1.$$

因此，关于 b 的假设意味着 $\|z - b\| = 1$。引理 2.1 in [15] 意味着存在一个纯态 φ，其属于 $\mathfrak{A}$，且支撑于唯一的极小投影 $w = \mathrm{supp}(\varphi) \text{in } \mathfrak{A}^{**}$，使得以下陈述之一成立：

(I) $\varphi(z) = 1$ 且 $\varphi(b) = 0$。
(II) $\varphi(z) = 0$ 且 $\varphi(b) = 1$。

在情形 (I) 中，我们有 $2 = 2\varphi(z) = \varphi\left(p^{\perp}\right) + \varphi\left(\frac{\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|} + \frac{\mathrm{U}_{y}(b)}{\|\mathrm{U}_{y}(b)\|}\right)$，因此

$$\varphi\left(p^{\perp}\right) = \varphi\left(\frac{\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|} + \frac{\mathrm{U}_{y}(b)}{\|\mathrm{U}_{y}(b)\|}\right) = 1.$$

特别地，对于所有 $z \in \mathfrak{A}$，$p^{\perp} \geq w$, $\varphi(x) = \varphi\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(z)\right)$，因此 $\varphi\left(\frac{\mathrm{U}_{y}(b)}{\|\mathrm{U}_{y}(b)\|}\right) = \frac{1}{\|\mathrm{U}_{y}(b)\|}\varphi\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(\mathrm{U}_{y}(b))\right) = \varphi(0) = 0$。因此，$\varphi\left(\frac{\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)}{\|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\|}\right) = 1$。然而，事实 $\varphi(b) = 0$ 意味着

$$0 = \varphi(b) = \varphi\left(\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\right) = \|\mathrm{U}_{p^{\perp}}(b)\| \neq 0,$$

这是不可能的。

(II) 条件 $\varphi(z) = 0$ 与元素 $\mathrm{U}_{y}(b)$ 和 $p^{\perp}$ 的正性相结合，保证了 $\varphi(\mathrm{U}_{y}(b)) = \varphi(p^{\perp}) = 0$, 而后者蕴含 $w \leq p$ （因为 w 是 $\mathfrak{A}^{**}$ 中支撑 φ 的极小投影）。引理 3.4 保证了 $\varphi(y \circ b) = 0$。由于 w 是 A^{**} 中纯态 φ 的支撑（极小）投影，因此对所有 $a \in A$，恒有恒等式 $\mathrm{U}_{w}(a) = \varphi(a)w$。特别地，

$$\mathrm{U}_{w}(y \circ b) = \varphi(y \circ b)\, w = 0. \tag{3.4}$$

条件 $\varphi(b) = 1$ 以及引理 3.3 之前的说明 $b = w + \mathrm{U}_{w^{\perp}}(b)$，并由（3.4），

$$0 = \mathrm{U}_{w}(y \circ b) = \mathrm{U}_{w}(y \circ w) + \mathrm{U}_{w}(y \circ \mathrm{U}_{w^{\perp}}(b)). \tag{3.5}$$

应用关于 w 的 $\mathfrak{A}^{**}$ Peirce 分解，我们推得元素 $y \circ \mathrm{U}_{w^{\perp}}(b)$ 属于空间 $\mathfrak{A}_{0}^{**}(w) \oplus \mathfrak{A}_{1}^{**}(w)$, 因此 $\mathrm{U}_{w}(y \circ \mathrm{U}_{w^{\perp}}(b)) = 0$。再次应用 Peirce 分解可得 $\mathrm{U}_{w}(y \circ w) = \mathrm{U}_{w}(y)$。由（3.5）可知 $\mathrm{U}_{w}(y) = 0$，等价地，$\mathrm{U}_{w}(x) = \mathrm{U}_{w}(p) = w$。应用（3.1）可证明 $x = w + \mathrm{U}_{w^{\perp}}(x)$。由上述结论以及 Peirce 分解的性质可得

$$\mathrm{U}_{w, \mathrm{U}_{w^{\perp}}(x)}(b) = \mathrm{U}_{w, \mathrm{U}_{w^{\perp}}(x)}(w + \mathrm{U}_{w^{\perp}}(b)) = 0,$$

以及 $\mathrm{U}_{\mathrm{U}_{w^\perp}(x)}(b) \in \mathfrak{A}_0^{**}(w)$. 最后，不等式

$$\begin{aligned} 1 \geq \|\mathrm{U}_x(b)\| &\geq \|\mathrm{U}_w(b) + 2\mathrm{U}_{w,\mathrm{U}_{w^\perp}(x)}(b) + \mathrm{U}_{\mathrm{U}_{w^\perp}(x)}(b)\| \\ &= \|\mathrm{U}_w(b) + \mathrm{U}_{\mathrm{U}_{w^\perp}(x)}(b)\| = \max\{\|\mathrm{U}_w(b)\|, \|\mathrm{U}_{\mathrm{U}_{w^\perp}(x)}(b)\|\} \\ &\geq \|\mathrm{U}_w(b)\| = \|\varphi(b)\, w\| = 1 \end{aligned}$$

得到所需结果。 □

现在我们可以得到定理 2.1 关于含单位元 JB*-代数的一个版本。

定理 3.6。 设 $\mathfrak{A}$ 为一个含单位元的 *JB**-代数，且 p 为 $\mathfrak{A}$中的正的范数一元素。则下列陈述等价：

(a) p 是 $\mathfrak{A}$中的一个投影。(b) $Sph_{\mathrm{S}_{\mathfrak{A}^+}}\left(Sph^{\mathrm{S}_{\mathfrak{A}^+}}(p)\right) = \{p\}$。

证明。 蕴含关系 $(b) \Rightarrow (a)$ 已在 [15, 命题 2.3(a)]中证明。反之，在定理 2.1$(a) \Rightarrow (b)$ 的证明中，分别用推论 3.2、引理 3.3 和命题 3.5 替换推论 2.3、引理2.4和命题2.5，论证仍然有效。 □

Acknowledgement

A. M. Peralta 获得由 MICIU/AEI/ 10.13039/501100011033 资助的 PID2021-122126NB-C31 项目资助，以及安达卢西亚自治区政府 FQM375 项目、IMAG–Mar´ıa de Maeztu 项目 CEX2020-001105-M/AEI/10.13039/501100011033 的资助（由 ERDF/EU 提供），并获得中国科学技术部（MOST）G2023125007L 项目的资助。

P. Saavedra 获得西班牙科学、创新与大学部提供的大学教师培养（FPU）项目资助（资助编号：FPU23/00747）。

数据可用性 由于本文准备期间未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

声明

利益冲突作者声明不存在任何利益冲突。

References

[1] C.A. Akemann, N. Weaver，C*-代数和冯·诺伊曼代数中若干类算子的几何刻画， *Proc. Am. Math. Soc.* **130** (2002)，第10期，3033–3037。[2] E.M. Alfsen, F.W. Shultz， *Geometry of state spaces of operator algebras*，数学：理论与应用，Birkh¨auser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，2003。[3] M. Burgos, F.J. Fern´andez-Polo, J.J. Garc´es, J. Mart´ınez Moreno, A.M. Peralta，C*-代数、JB*-代数和JB*-三重系统中的正交性保持映射， *J. Math. Anal. Appl.* **348** (2008 1, 220 233)，第 – 期。[4] M. Burgos, F.J. Fern´andez-Polo, *Asian-Eur. J. Math.* **2** 2009 3, 387 405 J.J. Garces, A.M. Peralta，重新审视正交性保持映射，( )，第 – 期。[5] M. Cabrera Garc´ıa, A. Rodr´ıguez Palacios, *Non-associative normed algebras. Vol. 1*。《Vidav-Palmer 定理与 Gelfand-Naimark 定理》，第154卷，*Encyclopedia of Mathematics and its Applications*。剑桥大学出版社，剑桥，2014。[6] F.J. Fern´andez-Polo, 2018 1, 75 116 A.M. Peralta，偏等距：综述， *Adv. Oper. Theory* **3** ( )，第 – 期。

[7] Y. Friedman, B. Russo， JBW^*-三重系统预对偶的结构， *J. Reine Angew. Math.*，**356** (1985)，67–89。[8] H. Hanche-Olsen, E. Størmer， *Jordan Operator Algebras*。美国波士顿，英格兰伦敦，澳大利亚墨尔本：Pitman Publishing Inc.，1984。[9] R.V. Kadison，算子代数的等距映射， *Ann. Math.* (2) **54** (1951年)，325–338。[10] C.W. Leung, C.K. Ng, N..C. Wong，算子代数正元单位球面上的迁格利问题与直径关系，
Trans. Am. Math. Soc. **378** (2025)，**4**，2695–2711。[11] G. Nagy，在算子范数下归一化正算子空间的等距映射，
Publ. Math. ( )，- 。
Debrecen **92** 2018 243 254
[12] A. M. Peralta，单位球面中正算子之间投影的刻画，
Adv. Oper. ( )，– 。
Theory **3** 2018 731 744
[13] A.M. Peralta，算子代数迁格利问题综述， *Acta Sci. Math.* **84** (2018)，81–123。[14] A.M. Peralta，关于正算子的单位球面， *Banach J. Math. Anal.* **13** (2019)，91–112。[15] A.M. Peralta, P. Saavedra，通过正元球面识别JBW*-代数。预印本，2025年。arXiv:2505.03287。[16] S. Sakai， *C*-algebras and W*-algebras*，施普林格出版社，柏林，1971年。[17] J.D.M. Wright，Jordan C* 代数， *Michigan Math J.* **24** (1977)，291–302。

（A.M.Peralta） Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada (IMAG), Departamento de Análisis Matemático Facultad de Ciencias Universidad de Granada 18071 , , , , Granada Spain.

Email address: aperalta@ugr.es

(Pedro Saavedra) Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Universida d de Granada, 18071 Granada, Spain.

Email address: psaavedraortiz@ugr.es