arXiv:2601.09751v1 [math.GR] 12 Jan 2026

图形 C(3)-T(6) 蕴含 CAT(0)

桂怀涛

摘要

图形小取消是经典小取消理论的推广，并为构造具有有趣性质的群提供了一种强有力的方法。在经典情形中，$C(3)$-$T(6)$ 小取消复形已知具有局部 CAT(0) 度量。本文为图形$C(3)$-$T(6)$ 复形构造了局部 CAT(0) 度量。

1 引言

图形小取消是经典小取消理论的推广。它提供了一种构造群的方法，使这些群的凯莱图包含某些预先指定的图，从而产生具有有趣性质的群；例如参见[Gro03，OW07，Osa20，CG19，Osa18]。

群的图形表示具有如下形式 $G = \langle f : \Gamma \to \Theta \rangle$，其中 Θ 是一个连通图，$f : \Gamma \to \Theta$ 是一个图浸入（即局部单射图同态），而 G 是 Θ 的基本群，再模去由 Γ中所有浸入圈的像生成的正规子群。这类表示的使用可追溯至 Rips 和 Segev 的工作，他们构造了不具有唯一乘积性质的无挠群（见 [RS87、Ste15]）。后来，Gromov 在 [Gro03] 中明确运用了基于图形表示的小消去理论，构造了 Gromov 怪物群——一个以弱意义包含扩张图的群。

与此类表示自然相关的二维组合复形有两种：加厚图形复形 X_t，其中将二维胞腔附着到 Θ 上，以填充由 Γ产生的圈；以及非加厚图示复形 X，其中将 Γ 各连通分支上的锥附着到 Θ 上。在后一种情形下，每个锥都经过三角剖分，使得 X 具有二维组合复形结构，且所有二维胞腔都是三角形。两个复形的基本群均为 G。精确定义将在第 2 节给出。

自 Gromov 引入双曲群以来 [Gro87]，小消去与非正曲率或负曲率之间的相互作用一直是一个活跃的研究领域。本文聚焦于非度量小取消条件。Gersten 和 Short 的一项经典结果 [GS90] 指出，经典的 $C(p)$-$T(q)$ 小消去群在 $1/p + 1/q < 1/2$ 时是双曲的。在临界情形 $1/p + 1/q = 1/2$，也就是说，当 $(p, q) \in \{(3,6),(4,4),(6,3)\}$ 时，小消去与度量

或组合非正曲率之间的多种联系已得到确立：经典的 $C(6)$ 群具有系统曲率 [Wis03], ；这一结果在 [OP18]中推广到了图示情形；图示 $C(4)$-$T(4)$ 群具有赫尔利性质 [Hod20，CCG+25]；经典的 $C(3)$-$T(6)$ 群是 CAT(0) 群[Pri88，BH13，Dud]。本文将最后一项结果推广到图示情形。

定理 1.1。 设 $G = \langle f: \ \Gamma \to \Theta \rangle$ 是一个满足 $Girth(\Gamma) \geq p$ 的 $T(q)$ 图示小消去表示，其中 $Girth(\Gamma)$ 表示 Γ 中最短圈的长度，并设X 为与该表示相关联的非加厚图示复形。

(1) 若$(p, q) = (3,6)$，则 X 具有局部 *CAT(0)* 度量。

(2) 若$(p, q) \in \{(4,5),(3, 7)\}$，则 X 具有局部 *CAT(-1)* 度量。

证明依赖于二维复形的链环条件。我们首先证明，小消去条件为图复形 X 中链环的围长提供下界。然后，我们为 X 中的每个 2-胞腔赋予欧几里得度量或双曲度量，并证明 X 满足链环条件。

请注意，满足定理 1.1 任一表述假设的任何图形表示，也满足相应的 $C(p)$ 小消去条件。若我们改为从较弱的假设出发，即图形表示是 $C(p)$-$T(q)$，那么我们可以稍微修改定理 1.1 的证明，使定理的结论仍然成立；见推论 4.1。

现在我们考虑单连通图示复形表示的群作用，设 X 是与 $C(p)$-$T(q)$ 图形表示的群作用 p, q 设 相关联的单连通非加厚图示复形 $\tilde{} \in \{(3,6)$、$(4,5)\}$。那么，它可以细分为一个三角形 $\tilde{}$ 复形 X' （即二维单纯复形），并赋予一种分片欧几里得度量，使其满足 CAT(0) 性质、递归性（在 [OPM21，定义 2 的意义下1]），且具有有理角（在 [NOP22] 的意义下）。

设 X 的是同构群（定义见第 2 节），$\tilde{}$ 那么它也通过组合自同构作用于 X'，并且相对于给定度量通过等距变换作用。因此，根据递归结构和 [OPM21，主定理]，或者根据 CAT(0) 结构和 [OP22，定理 A],，我们得到：

推论 1.2。 如果该作用几乎自由（即所有胞腔稳定子的基数都有统一上界），那么 G 满足蒂茨二择一；更确切地说， G 的每个有限生成子群要么是虚拟循环的，要么是虚拟的 $\mathbb{Z}^2$，要么包含一个非阿贝尔自由群。特别地，图式 $C(p)$-$T(q)$ 小消去群在$(p, q) \in \{(3, 6),(4, 5)\}$情形下满足蒂茨二择一。

$\tilde{}$ 此外，由于 X' 是一个具有有理角的 CAT(0) 三角复形，应用[NOP22，定理 1。1], 我们得到以下结果，它证明了 [HO21元猜想、猜想]的一个特例：

$\tilde{}$ **推论 1.3**。 如果 G 是有限生成的，且 G 的每个元素都固定了 X中的一个单元，那么$\tilde{}$ 整个群 G 固定了 X中的一个单元。

本文结构如下。在第 2节，我们回顾图示小消去理论中的相关定义；在第 3节，我们讨论图形小取消条件 T的若干推论，尤其是它如何限制图复形中某些链环的围长；最后，在第 4节，我们证明定理1.1 及其推论。

2 预备知识

本节介绍图示小消去理论中的基本定义。我们的阐述主要遵循 [OP18，第 6] 节，以及 [CCG+25，第 6 节。4], 其中分别研究了图形 C(6) 群和 $C(4)$-T(4) 群。

CW 复形 X 与 Y 之间的连续映射称为**组合的**，如果它将 X 的每个开胞腔同胚映射到 Y的一个开胞腔上。若 CW 复形的**组合的**性质满足：对某个适当的细分， X 每个开胞腔的附着映射都是组合映射，则称该 CW 复形为组合的。

本文中，所有复形和映射均假定为组合的。我们将一个 n 维组合复形简称为 n-复形，并将图视为 1-复形。我们也将复形的 0-胞腔称为顶点，1-胞腔称为边。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 P_n 表示一个具有 n 条边的**路径图**，其顶点按顺序标记为从 0 到 n。复形 X 中的一条**路径**是一个映射 $\gamma\colon P_n \to X$，其中 n，而 n 称为 γ的**组合长度**，记作 $|\gamma|$。若路径 γ 满足 $\gamma(0) = \gamma(n)$，则称其为**闭合的**。若存在一个单射保序映射 $\iota\colon P_m \to P_n$，使得 $\gamma' = \gamma \circ \iota$，则称路径 $\gamma'\colon P_m \to X$ 是 γ 的**子路径**。长度为 1 的路径与有向边的记法可互换使用，二者不作区分。

对于 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，令 C_n 表示一个具有 n 条边的**圈图**，其顶点标记为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。X 中的**圈**是一个映射 $\tau\colon C_n \to X$，其中 n 为某个对象，其**组合长度**记作 $|\tau| = n$。令 R_n 表示一个 n 边形，即 1- 骨架为 C_n 的圆盘。X 中的每个 2- 胞腔都可以表示为一个映射 $R_n \to X$，其中 n 为某个对象。当路径、圈或 2-胞腔的代表元的大小未指定时，我们分别用 P、C 或 R 表示其定义域。

对于 $m \in \mathbb{N}$ 和 $n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，固定一个映射 $\gamma_{m,\,n}\colon P_m \to C_n$，该映射局部单射，并且延拓了从 $\{0, ..., m\}$ 到 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的典范映射。若图 Γ 中的每条浸入路径（即局部单射路径）都可经由某个浸入圈分解，则称图 Γ 为**路径-环可扩展**。也就是说，对于每条浸入路径 $\gamma\colon P_m \to \Gamma$，都存在一条浸入圈 $\tau\colon C_n \to \Gamma$，使得 $\gamma = \tau \circ \gamma_{m,\,n}$。

备注1。注意，图 Γ 是路径-环可扩展的，当且仅当Γ 的每个顶点都属于某个浸入圈。因此，对于任意连通图 Ω，我们可以考虑由 Ω 中所有属于浸入圈的顶点诱导的子图 Ω′。若 Ω 是一棵树，则 Ω′ 为空；若 Ω 不是树，则 Ω′ 是一个连通、路径-环可扩展的子图，且与 Ω 具有相同的基本群。对于有限图，路径-环可扩展等价于没有度为 1 的顶点。

给定一个图浸入 $f\colon\ \Gamma \to \Theta$，其中 Θ 连通，我们如下定义群 G。将图 $\Gamma = \coprod_i \Gamma_i$分解，其中每个图 Γ_i 都是一个连通分支。固定一个顶点 $u \in \Theta$，并对每个 i，选取一个顶点 $u_i \in \Gamma_i$ 以及一条路径 γ_i，它位于 Θ 中，从 u 到$f(u_i)$。定义同态 $f_i\colon\ \pi_1(\Gamma_i,\ u_i) \to \pi_1(\Theta,\ u)$，$[\gamma] \mapsto [\gamma_i \cdot f\circ\gamma \cdot \bar{\gamma_i}]$，其中$\gamma$ 是 Γ_i 中以 u_i为基点的闭路径，$\cdot$ 表示路径连接，$\bar{\cdot}$ 表示路径反向。然后定义 $G\colon = \pi_1(\Theta,\ u)\ /\langle\langle \bigcup_i f_i(\pi_1(\Gamma_i,\ u_i))\rangle\rangle$。该群在同构意义下定义良好，且独立于基点和连接路径的选取。$f\colon\ \Gamma \to \Theta$ 称为 G的图形表示，记作 $G = \langle f\colon\ \Gamma \to \Theta\rangle$。

有两种自然的方法可以构造基本群为 $G = \langle f$ 的二维复形：$\Gamma \to \Theta\rangle$。首先，令其 1-骨架为 Θ。对于每个浸入圈 $C \to \Gamma$，沿着复合映射 $C \to \Gamma \to \Theta$ 将一个 2-胞腔附着到 Θ 上。所得复形称为与 G 相关联的**加厚图形复形**，记作 X_t。另一种方法是，对 Γ 的每个连通分支 Γ_i，通过将 f 限制在 Γ_i 上，把单纯锥 $Cone(\Gamma_i)$ 附着到 Θ 上。所得复形称为与 G 相关联的**非加厚图示复形**，记作 X。注意，X 中的每个 2-胞腔都是一个三角形。非加厚图示复形 X 的**自同构** 是一个保持 Θ 的组合自同构。

在本文中，我们将假设 Γ是路径-环可扩展的。这不失一般性：对于 Γ的每个连通分支 Γ_i，我们可以将 Γ_i 替换为备注 Γ'_i 中所述的路径-环可扩展子图1。令 $\Gamma' = \coprod_i \Gamma'_i$。则图形表示 $\langle f\colon\ \Gamma \to \Theta\rangle$ 和 $\langle f|_{\Gamma'}\colon\ \Gamma' \to \Theta\rangle$ 定义相同的群和相同的加厚图形复形，并且定义的非加厚图示复形彼此同伦等价。

定义 1. 加厚图形复形中的一个**片段** X_t 是图 Θ 中的一条非平凡浸入路径 $\gamma\colon P \to \Theta$，它在 Γ 中有两个不同的提升；也就是说，存在两条不同的路径 $\gamma_1,\ \gamma_2\colon P \to \Gamma$，使得 $f\circ\gamma_1 = f\circ\gamma_2 = \gamma$，但 $\gamma_1 \neq \gamma_2$。

定义 1 与 [OP18，定义 6.3], 前提是图 Γ具有路径-圈可扩张性。注意，若 γ 是复形 X_t中的一个片段，且 γ' 是 γ的一个非平凡子路径，则 γ' 也是一个片段。这是因为映射 $f\colon\ \Gamma \to \Theta$是浸入。

A **圆盘图** 是一个嵌入平面的有限可缩二维复形。加厚图形复形中的**圆盘图** X_t 是从此类圆盘图D 到 X_t的映射。圆盘图中的**片段** D 是一个沉浸的非平凡路径 $P \to D$，它可以通过 D的二维胞腔以两种不同的方式分解；也就是说，存在二维胞腔 $R_m \to D$ 和$R_n \to D$，使得路径 $P \to D$ 既可分解为 $P \to R_m \to D$，也可分解为 $P \to R_n \to D$，且不存在使下图交换的同构 $R_m \to R_n$：

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & R_m \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ R_n & \longrightarrow & D \end{array}$$

示例 **例 2.1.** 一个含有 n 个花瓣 的茉莉花是一个与 $\coprod_{i=1}^{n} R_{m_i}/\sim$ 同构的圆盘图，

其中，对于所有 i， $m_i \geq 3$ ，且对应关系由以下内容给出

$$\gamma_{m_{i-1},m_{i-1}}\big((m_{i-1}, m_{i-1}-1)\big) \sim \gamma_{m_i,m_i}\big((0,1)\big)$$

对于 i，约定 $m_0 := m_n$。当 $n \geq 3$ 时，这种圆盘图中的片段恰好对应于内部边。例子见图 *1* 。

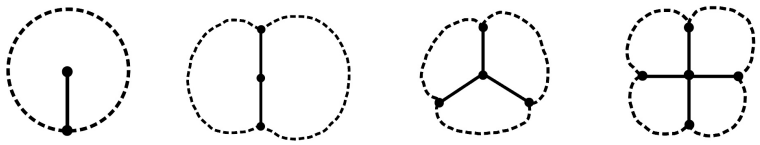


图 1：包含一至四个花瓣的茉莉花图

加厚图形复形中的圆盘图 $D \to X_t$ 若满足以下条件，则称为**约化的**：对于圆盘图中的每个片段 $P \to D$ ，复合 $P \to D \to X_t$ 仍是一个片段。

定义 2。设 p， $q \in \mathbb{N}_{>0}$。与图形表示 $G = \langle f : \Gamma \to \Theta \rangle$ 相关联的加厚图形复形 X_t 满足：

- 若不存在浸入圈 $C \to \Gamma$，使得复合 $C \to \Gamma \to \Theta$ 在 X_t 中可表示为少于 p 个片段的拼接，则称其满足 $C(p)$**小取消条件**；

- 若对于每个约化圆盘图 $D \to X_t$，其中都不存在度大于 2 且小于 q 的内部顶点 D ，则称其满足 $T(q)$**小取消条件**。

若相关的加厚复形X_t 满足 $C(p)$（分别为 $T(q)$）条件，则称表示式 $\langle f : \Gamma \to \Theta \rangle$ 及其对应的非加厚图示复形 X 满足该条件。

备注 2. 若 $C_n \to \Gamma$ 是一个浸入圈，且复合映射 $P_n \xrightarrow{\gamma_n,\ n} C_n \to \Gamma \to \Theta$ 由多个相同路径首尾相接而成，则路径 $P_n \to C_n \to \Gamma \to \Theta$是一个片段。不过， $C(2)$ 条件已经排除了这种情况。关于允许真幂的限制较弱的条件，参见例如 [Gru15，定义 1。3]。

3 小重叠条件 T

本节中，我们将更仔细地考察 $T(q)$ 小重叠条件，并讨论其若干推论。首先，我们将证明 Pride 的一项观察结果的图论类比 [Pri88，第 165], 页：当 $T(q)$ 时，经典 $q \geq 5$小重叠复形中的每个片段长度均为 1。这里给出的证明基本沿用了 [MW02，引理 3。5]。

引理 3.1. 设 $\langle f : \Gamma \to \Theta \rangle$ 是一个带有$q \geq 5$的 $T(q)$ 图示小消去表示，则关联的加厚图形复形 X_t 中的每个片段长度均为 *1*。

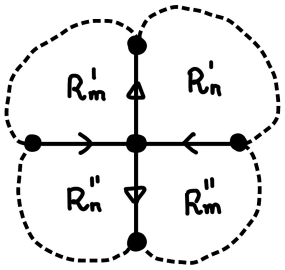


图 2：含有四个花瓣的圆盘图

证明。假设存在一个长度为 2 的片段 $\gamma: P_2 \to \Theta$，且 X_t中有此片段。根据定义，存在两条不同的浸入路径 $\gamma_1, \gamma_2: P_2 \to \Gamma$，使得 $f \circ \gamma_i = \gamma$ 对于 $i = 1$，长度为 2。由于 Γ 是路径-环可扩展的，每个 γ_i 都可分解并经由一个浸入圈，也就是说，存在浸入圈 $\tau_1: C_m \to \Gamma$ 和 $\tau_2: C_n \to \Gamma$，使得 $\gamma_1 = \tau_1 \circ \gamma_{2,m}$ 且$\gamma_2 = \tau_2 \circ \gamma_{2,n}$。不妨设 $m, n \geq 3$，因为例如若 $m < 3$，我们可以用复合映射 $C_{3m} \to C_m \xrightarrow{\tau_1} \Gamma$ 替换 τ_1，其中 $C_{3m} \to C_m$ 是一个覆盖映射。设 $R_m \to X_t$ 和 $R_n \to X_t$ 是 X_t 中的二维胞腔，其边界映射分别为 $f \circ \tau_1$ 和 $f \circ \tau_2$。设 D 为一个有四个花瓣的茉莉花图，它由取两个 R_m 的副本的不交并构造而成，分别记为 R'_m 和 R''_m，再取两个 R_n 的副本，分别记为R'_n 和 R''_n，并识别以下边对：$\gamma'_{2,m}\big((1,2)\big) \sim \gamma'_{2,n}\big((1,2)\big)$,$\gamma'_{2,n}\big((0,1)\big) \sim \gamma''_{2,m}\big((0,1)\big)$, $\gamma''_{2,m}\big((1,2)\big) \sim \gamma''_{2,n}\big((1,2)\big)$, $\gamma''_{2,n}\big((0,1)\big) \sim \gamma'_{2,m}\big((0,1)\big)$, 见图 2。于是映射 $R_m \to X_t$ 和 $R_n \to X_t$ 诱导出映射 $D \to X_t$。由于 D 中的每个片段都映射到 γ 或 $\bar{\gamma}$ 的子路径（ γ的反向路径），其像也仍是 X_t中的一个片段。因此，映射 $D \to X_t$ 定义了一个约化圆盘图。然而， D 有一个度为 4 的内部顶点，这与 $T(q)$条件矛盾。因此，不可能存在长度为 2 或更长的片段。

□

接下来，我们讨论 $T(q)$ 条件与图复形某些链环中圈的长度之间的联系。

设 Y 是一个二维复形， $v \in Y$ 是一个顶点。 Y 中 v 的链记作 $Lk(v, Y)$，定义如下。首先，将 Y 的每条边视为单位区间，并在 1-骨架 Y^1 上赋予诱导度量。对于 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$，令 $V_\epsilon := \{y \in Y^1 \mid d(v, y) = \epsilon\}$。对于两个不同的点 y、$y' \in V_\epsilon$，当且仅当它们包含在 Y 的同一个 2-胞腔的闭包中时，才用一条边连接 y 和 y'。令 E_ϵ 表示所有此类边的集合。所得图 (V_ϵ, E_ϵ) 在图同构意义下不依赖于 ϵ 的选取。令 $Lk(v, Y) := (V_\epsilon, E_\epsilon)$。直观地说， $Lk(v, Y)$ 可以看作 Y 与以 v 为球心的一个足够小的球面的交集。等价地，若将 Y 的每条边 $\{u, v\}$ 都关联到两条方向相反的定向边 (u, v) 和 (v, u)，那么 $Lk(v, Y)$ 的顶点与起始顶点为 v 的定向边一一对应。当且仅当对应的定向边张成 Y 的某个 2-胞腔的一个角时，这两个顶点才由 $Lk(v, Y)$ 中的一条边连接。

在经典情形下，已知（例如参见 [HPV85，第 296] 页，或 [MW02，第611]页），在适当假设下，一个二维复形满足 T（q）小交条件，当且仅当

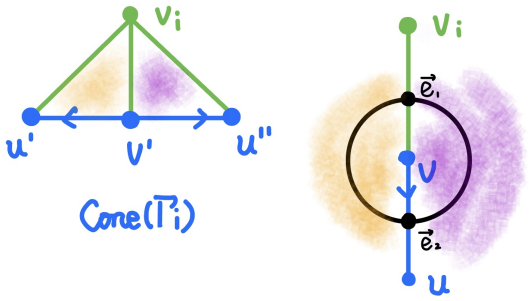


图 3： $Lk(v,X)$ 中的 2-圈

每个顶点的链中都不包含长度大于 2 且小于 q 的浸入圈。

在图示情形中，设 $\langle f\colon \Gamma\to\Theta\rangle$ 是一个图形表示， X 是与之对应的非加厚图示复形。我们首先描述 X 的组合结构。

将图 $\Gamma=\coprod_i\Gamma_i$ 写成其连通分支的不交并，这些连通分支称为关系子。回忆一下，X 是通过对每个关系子 Γ_i，将单纯锥 $Cone(\Gamma_i)$ 粘到图 Θ 上构造而成的。因此，X 的顶点集是 Θ 的顶点集与锥尖集的不交并，即 $V(X)=V(\Theta)\coprod V_{tip}(X)$。令 $E_{tip}(X)$ 为 X 中所有与锥尖关联的边的集合。那么， X 的边集分解为 $E(X)=E(\Theta)\coprod E_{tip}(X)$。对于锥 $Cone(\Gamma_i)$ 的锥尖 v_i，链 $Lk(v_i,X)$ 与其底图 Γ_i 同构。对于顶点 $v\in V(\Theta)$，链 $Lk(v,X)$ 是一个二部图，因为 X 中位于 v 处的每个角都由 $E(\Theta)$ 中的一条边和 $E_{tip}(X)$ 中的一条边组成。因此， $Lk(v,X)$ 中的每个圈长度都是偶数。

引理 3.2. 设 $\langle f\colon \Gamma\to\Theta\rangle$ 是一个满足 $q\geq 4$ 的 ***T(q)*** 图示表示。那么，对于任意顶点 $v\in V(\Theta)$， $Lk(v,X)$ 中的每个浸入圈，其长度要么为4，要么至少为 $2q$。此外，当 $q\geq 5$ 时， $Lk(v,X)$中不存在长度为 ***4*** 的浸入圈。因此，我们有 $Girth(Lk(v,X))\geq 2q$。

证明。首先，我们证明 $Lk(v,X)$ 中不存在长度为 2 的浸入圈。反设存在这样的圈。设该圈中的一个顶点代表从 v 到 $Cone(\Gamma_i)$ 的锥尖 v_i 的有向边 $\vec{e}_1$ 。设另一个顶点代表从 v 到顶点 $u\in V(\Theta)$ 的有向边 $\vec{e}_2$，如图 3 所示。由于 $\vec{e}_1$ 在某个 $v'\in\Gamma_i$ 对应的 $Cone(\Gamma_i)$ 中有唯一的提升 (v',v_i)，由这个 2-圈的边表示的角的提升也必定位于 $Cone(\Gamma_i)$ 中，并且与 (v',v_i) 相接。将这些提升后的角记为 $\angle v_iv'u'$ 和 $\angle v_iv'u''$，其中 u'，$u''\in\Gamma_i$。由于我们一开始考虑的是 $Lk(v,X)$ 中的浸入圈，有向边 (v',u') 和 (v',u'') 互不相同。然而，它们都映射到 $\vec{e}_2$，这与 $\Gamma\to\Theta$ 是浸入映射的假设矛盾。因此， $Lk(v,X)$ 中不存在长度为 2 的浸入圈。

其次，我们证明，在 $Lk(v,X)$ 中不存在长度大于 4 且小于 $2q$ 的浸入圈。我们仅讨论长度为 6 的情形，因为一般情形的论证类似，只是记号更加繁复。反设 $Lk(v,X)$ 包含一个

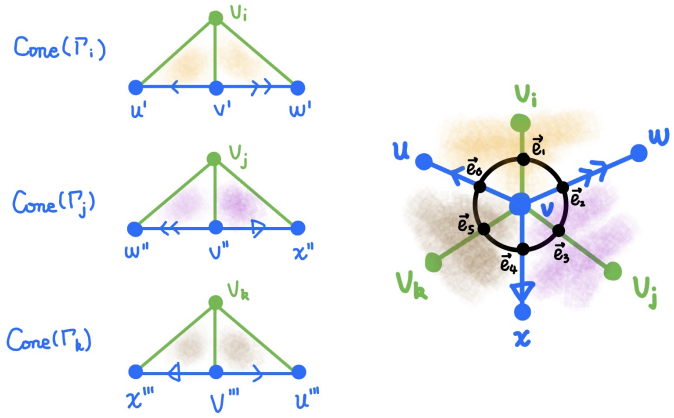
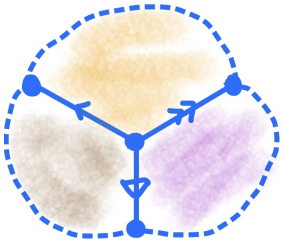


图4： $Lk(v,\ X)$中的6-环



X_t中带有三片花瓣的圆盘图

长度为 6 的浸入圈，其顶点表示有向边 $\vec{e}_1$、 $\vec{e}_2$、 $\vec{e}_3$、 $\vec{e}_4$、 $\vec{e}_5$、 $\vec{e}_6$，它们将 v连接到 v_i、 w、 v_j、 x、 v_k、 u，其中 v_i、 v_j、 $v_k \in V_{tip}(X)$，且 u、 w、 $x \in V(\Theta)$。在$Cone(\Gamma_i)$中，令 (v', v_i) 为 $\vec{e}_1$ 的提升，并将对应于$\{\vec{e}_1, \vec{e}_6\}$和 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$的角的提升分别记为 $\angle v_i v' u'$和 $\angle v_i v' w'$，其中 u'、 $w' \in \Gamma_i$。类似地，在 $Cone(\Gamma_j)$ 中，令 (v'', v_j) 为 $\vec{e}_3$ 的提升，并将对应于 $\{\vec{e}_3, \vec{e}_2\}$和 $\{\vec{e}_3, \vec{e}_4\}$的角的提升分别记为 $\angle v_j v'' w''$和 $\angle v_i v'' x''$，其中 w''、 $x'' \in \Gamma_j$。最后，在 $Cone(\Gamma_k)$ 中，令 (v''', v_k) 为 $\vec{e}_5$ 的提升，并将对应于 $\{\vec{e}_5, \vec{e}_4\}$和 $\{\vec{e}_5, \vec{e}_6\}$的角的提升分别记为 $\angle v_k v''' x'''$和 $\angle v_k v''' u'''$，其中 x'''、 $u''' \in \Gamma_k$；见图4。令$\gamma_1 : P_2 \to \Gamma_i$ 为经由 v' 从 u' 到 w' 的路径； $\gamma_2 : P_2 \to \Gamma_j$ 为经由 v'' 从 w'' 到 x'' 的路径； $\gamma_3 : P_2 \to \Gamma_k$ 为经由 v''' 从 x''' 到 u''' 的路径。由于起初取的是 $Lk(v, X)$ 中的浸入圈，因此每个 γ_ℓ 都是浸入的。由于 Γ 具有路径-环可扩展性，对每个 γ_ℓ，都存在一个浸入圈 $\tau_\ell :\ C_{m_\ell} \to \Gamma,\ m_\ell \geq 3$，使得 $\tau_\ell \circ \gamma_{2,m_\ell} = \gamma_\ell$。令$R_{m_\ell} \to X_t$ 为加厚图形复形 X_t 中对应于圈$C_{m_\ell} \to \Gamma$的 2-胞腔。取不交并 $\coprod_{\ell=1}^{3} R_{m_\ell}$，并将 $\gamma_{2,m_1}((0,1)) \sim \gamma_{2,m_3}((2,1))$, $\gamma_{2,m_2}((0,1)) \sim \gamma_{2,m_1}((2,1))$,$\gamma_{2,m_3}((0,1)) \sim \gamma_{2,m_2}((2,1))$识别起来，构造一个带有三个花瓣的茉莉花图 D，如图5所示。包含映射 $R_{m_\ell} \to X_t$ 诱导出映射 $D \to X_t$。由于 $Lk(v, X)$ 中的圈是浸入的，因此边 (v', w') 和 (v'', w'') 不同，所以 $\vec{e}_2$ 是一个片段。同理， $\vec{e}_4$ 和 $\vec{e}_6$ 也是片段。因此，$D \to X_t$ 是一个约化圆盘图。然而， D 包含一个度为 3 的内部顶点，

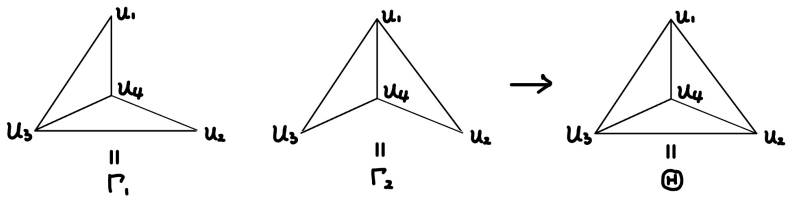


图6：一个不满足 $T(4)$ 的图形表示

这与假设矛盾：$\Gamma \to \Theta\rangle$ 是满足 $q \geq 4$ 的 $T(q)$ 小消去表示。因此，在 $Lk(v,\ X)$ 中不会出现长度为 6 的浸入圈。一般情形可用类似的论证得到。

最后，我们证明，当 $q \geq 5$ 时，$Lk(v,\ X)$ 中不会出现浸入的 4-圈。若存在这样的 4-圈，将其绕行两次便会得到一个浸入的 8-圈。由于 $8 < 2q$，这与上一步的结论矛盾。因此，在这种情况下不存在浸入的 4-圈。

□

引理 3.2 的逆命题一般并不成立。例如，设 Θ 是一个有四个顶点的轮图：先取一个三角形，其顶点标记为 u_1、u_2、u_3，然后添加一个中心顶点 u_4，并添加连接 u_4 与每个 u_i 的边，其中 $1 \leq i \leq 3$。令 Γ_1 为从 Θ 中删去边 $\{u_1, u_2\}$ 后得到的子图，并令 Γ_2 为删去边 $\{u_2, u_3\}$ 后得到的子图。设 $\Gamma = \Gamma_1 \coprod \Gamma_2$；见图6。令 $f : \Gamma \to \Theta$ 为典范映射，并令 X 为相应的非加厚图示复形。注意，$Lk(u_i, X)$ 中每个浸入圈的长度都是 4 的倍数；特别地，每个这样的圈的长度要么为 4，要么至少为 8。然而，将三角形 $u_1u_2u_4$、$u_2u_3u_4$ 和 $u_1u_3u_4$ 填满后，可在相应的加厚图形复形 X_t 中得到一个约化圆盘图。该图包含一个度为 3 的内部顶点，因此 X_t 不满足 $T(4)$ 条件。

4 结果证明

本节为非加厚图示复形赋予分片常曲率度量，并证明定理 1.1。我们还将证明一个稍强的结论：我们不再假设定理 1.1中的围长条件，而是假设相应的 $C(p)$ 小取消条件。该结果表述为推论 4.1。最后，我们将说明，如何结合此处构造的非正曲率结构与文献中的已有结果，推出其余推论。

我们首先回顾如何为二维复形赋予分片欧几里得（或双曲）度量，以及此类复形的链环条件；该条件刻画了此类度量何时是局部 CAT(0)（分别为 CAT(-1)）。更多细节请参见 [BH13]。

设 X 是一个带有胞腔分解 $\coprod_\lambda e^n_\lambda$ 的二维复形。对于每个 n-胞腔 e^n_λ，都有一个从 n 维多面体到 X 的典范映射，其像为 e^n_λ。特别地，X 可以实现为这些多面体的不交并的商空间。通过将每个胞腔 e^n_λ 对应的多面体嵌入

$\mathbb{E}^2$（分别为 $\mathbb{H}^2$），使其像为其顶点像的凸包。令 φ_λ^n 表示从 $\mathbb{E}^2$（或 $\mathbb{H}^2$）中的多面体到 X 的映射。假设满足以下相容条件：每当一个 m-胞腔 e_η^m 是一个 n-胞腔 e_λ^n 的面时，映射 $(\varphi_\lambda^n)^{-1}\circ\varphi_\eta^m$ 是等距嵌入。在此假设下，各胞腔上的度量在 X 上诱导出一个伪度量 d。此外，如果 X 中只出现有限种等距类型的胞腔，那么 d 是一个真正的度量，并且 $(X,\ d)$ 是一个完备度量空间。

赋予 d 如上所述的分片欧几里得（或双曲）度量后，X 中顶点 v 的几何度量链是链图 $Lk(v,X)$，其中每条边所赋予的度量长度等于相应 2-胞腔的角（视为 $\mathbb{E}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$ 中的角度）。如果对于每个顶点$v\in X$，$Lk(v,X)$中的每个单射圈的度量长度都至少为 2π，则称复形 X 满足链环条件。已知 (X,d) 是局部 CAT(0)（分别为 CAT(-1)）的，当且仅当它满足链环条件；参见 [BH13，引理 5.6]。

定理 1.1 的证明。设 $\langle f:\ \Gamma\to\Theta\rangle$ 是一个 $T(q)$ 图形表示，其中 $Girth(\Gamma)\geq p$，并设 X 为其关联的非加厚图示复形。回忆一下，$X=\coprod_\lambda R_3^\lambda/\sim$ 可以实现为三角形的不交并的商空间。沿用引理 3.2 前一段中引入的记号，对于每个 λ，每个三角形R_3^λ 恰有两条边映射到 $E_{tip}(X)$，以及一条边映射到 $E(\Theta)$。对于每个$v\in V_{tip}(X)$，链 $Lk(v,X)$ 同构于 Γ 中对应于 v 的分支。因此，$Girth(\Gamma)\geq p$ 蕴含 $Girth\big(Lk(v,X)\big)\geq p$。对于 $v\in V(\Theta)$，引理 3.2 表明，若 $\langle f:\ \Gamma\to\Theta\rangle$ 是一个 $T(q)$ 图形表示，且具有 $q\geq 5$，则 $Girth\big(Lk(v,X)\big)\geq 2q$。

对于 (1)，赋予每个 2-胞腔 R_3^λ 欧几里得三角形的度量，其中映射到 $E_{tip}(X)$ 的两条边长为 1，而映射到 $E(\Theta)$ 的边长为 $\sqrt{3}$。采用这一选择后，对于每个 $v\in V_{tip}(X)$，几何链接 $Lk(v,\ X)$ 中的每条边的度量长度均为 $\frac{2\pi}{3}$；而对于所有 $v\in V(\Theta)$，$Lk(v,X)$ 中的每条边的度量长度均为 $\frac{\pi}{6}$。因此，赋予诱导度量 d 后，复形 $(X,\ d)$ 满足链环条件，且是局部 CAT(0)。

对于 (2)，只需将 X 中的每个 2-胞腔度量化为 $\mathbb{H}^2$ 中一个固定的等腰测地三角形，其顶角为 $\frac{2\pi}{p}$，两个底角为 $\frac{\pi}{q}$。这样的三角形存在，因为 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$。 □

对于 $T(q)$ 图形表示 $\langle f:\ \Gamma\to\Theta\rangle$ 若满足 $q\geq 5$，引理 3.1 表明，相关加厚图形复形 X_t 中的所有片段长度均为 1。因此，对于这些图形表示，$C(p)$ 条件比要求 $Girth(\Gamma)\geq p$. 在下面的推论中，我们将证明，定理 $Girth(\Gamma)\geq p$ 中的假设 1.1 可以放宽为 $C(p)$ 条件。

推论 4.1。设 $\langle f:\ \Gamma\to\Theta\rangle$ 是一个 $C(p)$-$T(q)$ 图形小取消表示，则相应的非加厚图示复形 X 可以赋予局部 *CAT(0)* 度量，当 $(p,\ q)=(3,\ 6)$，以及局部 $CAT(-1)$ 度量，当 $(p,\ q)\in\{(3,\ 7),\ (4,\ 5)\}$时。

证明。 首先，我们描述 Γ 和 Θ的细分，使得 Γ 的细分围长至少为 p。定义

$$E_1(\Theta) \coloneqq \{e \in E(\Theta) : f^{-1}(e) \text{ is a single edge}\}$$
$$E_1(\Gamma) \coloneqq \{e \in E(\Gamma) : f(e) \in E_1(\Theta)\}.$$

将 $E_1(\Theta)$ 和 $E_1(\Gamma)$ 中的每条边细分为 p 条边，并分别将 Γ 和 Θ 的所得细分记为 Γ' 和 Θ'。存在由 f 诱导的典范图浸入$f'\colon \Gamma' \to \Theta'$，与 $\langle f' : \Gamma' \to \Theta' \rangle$ 相关联的非加厚图示复形 X' 是 X 的一个细分。按照定理 1.1 的证明，为 X' 配备分片欧几里得（或双曲）度量 d，使得锥尖$v \in V_{tip}(X')$处的每个角的角度均为 $\frac{2\pi}{p}$，而其他每个角的角度均为 $\frac{\pi}{q}$。要证明 d 是局部 CAT(0)（分别为 CAT(-1)），只需验证对所有 $v \in V_{tip}(X')$，$Girth(Lk(v, X')) \geq p$；并且对所有 $v \in V(\Theta')$，$Girth(Lk(v, X')) \geq 2q$。

我们首先证明 $Girth(\Gamma') \geq p$，这意味着对于每个$v \in V_{tip}(X')$，$Girth(Lk(v, X')) \geq p$。只需证明，在 Γ 中，每个带有 $1 \leq k < p$ 的单射 k-圈都至少包含一条属于 $E_1(\Gamma)$ 的边。注意，对于 $e \in E(\Gamma)$，要么 $e \in E_1(\Gamma)$，要么其像$f(e)$可以参数化为一个长度为 1 的片段。由于 $\langle f\colon \Gamma \to \Theta \rangle$ 是一个 $C(p)$图形表示，每个带有 $|C| < p$ 的浸入圈 $\tau\colon C \to \Gamma$ 都必须包含一条属于$E_1(\Gamma)$的边。因此 $Girth(\Gamma') \geq p$。

接下来，我们证明对于每个 $v \in V(\Theta')$，$Girth(Lk(v, X')) \geq 2q$。注意，每个顶点$v \in V(\Theta')$要么是 Θ 中的原始顶点，要么是位于 $E_1(\Theta)$中一条边上的细分顶点。如果 v 是细分顶点，那么它位于 $E_1(\Theta)$中的一条边上，而 $Lk(v, X')$是一条长度为 2 的路径。因此 $Girth(Lk(v, X')) = \infty$。如果 $v \in V(\Theta)$，那么 $Lk(v, X')$同构于 $Lk(v, X)$，并且根据引理 3.2，这个链的围长至少为 $2q$。

因此， X' 满足链环条件，且 X 上的度量 d 是局部 CAT(0)（分别地，CAT(-1)）。由于 X' 是 X的细分，同一度量 d 也下降到X 上。

□

~设 X是一个单连通的 $C(p)$-$T(q)$ 非加厚图示复形，且 $(\sim p\ q \in,)\{$ (3, 6), (4, 5)}。与推论 4.1 的证明相同，我们可以将 X细分为三角形复形 X'。当 (p, q) = (3, 6) 时，可以将 X'中的每个 2-胞腔赋予欧几里得三角形度量，其角度为 $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$。当 (p, q) = (4, 5) 时，我们不必为每个 2-胞腔赋予双曲度量，而是可以再次为每个 2-胞腔赋予欧几里得三角形度量，此时角度为$\sim\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$。在这两种情况下， X' 上的诱导度量都是 CAT(0) 的、递归的（见 [OPM21，从定义 2.1 到例 2.5 的第 2], 节），且具有有理角（见 [NOP22]中定理 1.1 前的段落）。因此，推论 1.2 可由[OPM21 的主定理]或 [OP22 的定理 A], 推出，而推论 1.3 则由 [NOP22 的定理 1.1]推出。

致谢

我谨向 Damian Osajda 致谢，感谢他提出这一课题、进行了许多富有启发性的讨论，并对早期稿件提出意见。我也感谢 Mart´ın Blufstein 与我进行了有益的讨论并协助校对，还要感谢 Tim Berland 的热心交流。本文所述研究部分由嘉士伯基金会资助，资助编号为 CF23-1226。

参考文献

[BH13] Martin R Bridson 和 Andr´e Haefliger。《非正曲率度量空间》，第 319 卷。施普林格科学与商业媒体，2013年。[CCG+25]J´er´emie Chalopin、Victor Chepoi、Anthony Genevois、Hiroshi Hirai 和 Damian Osajda。Helly群。《几何与拓扑》，29(1):1–70，2025年。[CG19] R´emi Coulon 和 Dominik Gruber。Burnside群上的小消去理论。《数学进展》，353:722–775，2019年。[Dud] Karol Duda。小消去群的挠子群。《群、几何与动力学》。即将出版。[Gro87] Mikhael Gromov。双曲群。载于《群论论文集》，第 75–263 页。施普林格，1987年。[Gro03] Mikhail Gromov。随机群中的随机游走。《几何与泛函分析》，13:73–146，2003年。[Gru15] Dominik Gruber。具有图形 C(6) 和 C(7) 小消去表示的群。《美国数学会汇刊》，367(3):2051–2078，2015年。[GS90] Steve M Gersten 和 HB Short。小消去理论与自动群。《数学创刊》，102(1):305–334，1990年。[HO21] Thomas Haettel 和 Damian Osajda。局部椭圆作用、挠群与非正曲率空间。《arXiv 预印本 arXiv:2110.12431》，2021年。[Hod20] Nima Hoda。二次复形。《密歇根数学杂志》，69(2):241–271，2020年。[HPV85] Patricia Hill、Stephen J Pride 和 Alfred D Vella。关于小消去理论的 T(q)条件。《以色列数学杂志》，52(4):293–304，1985年。[MW02] Jonathan P McCammond 和 Daniel T Wise。小消去理论中的扇与梯子。《伦敦数学学会会刊》，84(3):599–644，2002年。

[NOP22] Sergey Norin、Damian Osajda 和 Piotr Przytycki。挠群不能作用于二维 CAT(0) 复形。《杜克数学杂志》，171(6):1379–1415，2022年。[OP18] Damian Osajda 和 Tomasz Prytu-la。脉动群的子群族分类空间。《群、几何与动力学》，12(3):1005–1060，2018年。[OP22] Damian Osajda 和 Piotr Przytycki。二维 CAT(0) 复形的蒂茨二择一。载于《数学论坛：圆周率》，第 10 卷，文章编号 e25。剑桥大学出版社，2022年。[OPM21] Damian Osajda、Piotr Przytycki 和 J McCammond。适当作用于二维递归复形的群的蒂茨二择一。《数学进展》，391:107976，2021年。[Osa18] Damian Osajda。残有限非精确群。《几何与泛函分析》，28(2):509–517，2018年。[Osa20] Damian Osajda。一些无限图的小消去标记及其应用。《数学学报》，225(1):159–191，2020年。[OW07] Yann Ollivier 和 Daniel Wise。外自同构群无限的 Kazhdan 群。《美国数学会汇刊》，359(5):1959–1976，2007年。[Pri88] Stephen J Pride。星形复形与双曲复形的依赖问题。《格拉斯哥数学杂志》，30(2):155–170，1988年。[RS87] Eliyahu Rips 和 Yoav Segev。不具有唯一乘积性质的无挠群。《代数杂志》，108(1):116–126，1987年。[Ste15] Markus Steenbock。不具有唯一乘积性质的 Rips–Segev 无挠群。《代数杂志》，438:337–378，2015年。[Wis03] Daniel T Wise。Sixtolic 复形及其基本群。《预印本》，2003年。