arXiv:2601.09800v1 [math.SP] 14 Jan 2026

具有复多项式势的非谐振子的谱投影

Boris Mityagin 和 Petr Siegl

Abstract. 对于一大类多项式势 V，其中一个重要且具有启发性的代表是 $V(x) = x^{2a}+\mathrm{i}x^b, x \in \mathbb{R}, a,\ b \in \mathbb{N}$，我们证明：若 $a-1 < b < 2a$，非谐算子 $L = -(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2 + V(x)$的谱投影系 $\{P_n\}_n$在 $L^2(\mathbb{R})$中不构成（Riesz）基。此外，当 $\sigma = [b-(a-1)]/(1+a)$且 $\gamma > 0$足够小时，$\limsup_n \|P_n\|/\exp(\gamma n^\sigma) = \infty$。证明基于两组本身就颇具价值的结果：(a) 投影范数 $\|P_n\|$ 的增长与谱 $\sigma(L)$之外预解式 $\|(z-L)^{-1}\|$ 的行为之间的关系；(b) 特殊亚纯函数$1/F$的部分分式分解，其中 $F(w) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{w}{a_k}\right)$，$a_{k+1} \geq a_k > 0, k \in \mathbb{N}$，以及第一预解式恒等式的推广。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 6 2.1. 算子理论的一些事实 6 2.2. 具有复势函数的一维薛定谔算子 8 2.3. 无穷乘积与部分分式分解 9 3. 非谐振子的复扰动的谱投影 10 3.1. L 10的谱性质 3.2. 从谱投影到预解式 12 3.3. 预解式展开的正则化 13 3.4. L的预解估计及其推论 14 3.5. 基性质的缺失 17 4. 更快的预解式增长 19 4.1. 从投影到抽象 T 19的预解式 4.2. 虚偶非谐振子 26 4.3. 虚奇非谐振子 28 4.4. 共轭实非谐振子 30 5. 进一步的注记 31 5.1. 关于定理 4.3 的注记 31 5.2. $\|P_n\|$ 31估计的指数阶的尖锐性 5.3. $\|P_n\|$ 32估计中的一个子序列 5.4. 具有非整数 a的 L 的基性质缺失，b 325.5. 定理 4.8 中的临界情形 33 5.6. 定理 4.11 中的 $b = 0$ 情形 33 附录 A. 部分分式分解 34

日期：2026年1月16日。2020年数学主题分类。47A10，47B28，34L10，34L40。关键词和短语。具有复势的薛定谔算子、谱投影、基、亚纯函数的部分分式分解。

A.1. 命题 2.3 及其改进 34 A.2. 部分分式分解 35 A.3. 命题 2.4 和 2.5 的证明 39 附录 B. 定理 3.3 的证明 40 B.1. 设定与策略 40 B.2. 记号 41 B.3. 光滑截断函数 χ 42B.4. 相位函数 φ 42B.5. Re(i$\varphi(x)$) 的估计。 43 B.6. 函数 a_j 46 B.7. a_j 46的估计 B.8. N 的选择及相关估计 48 B.9. $\|(\lambda - L)$ 的上界 $u\|$ 49B.10. $\|u\|$ 50的下界 B.11. 预解式范数的下界 50 参考文献 50

1. Introduction

A s本文所分析的微分算子 L in $L^2(\mathbb{R})$ 的一个特例为

$$L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^{2a} + \mathrm{i}x^b, \qquad a, b \in \mathbb{N},\ b < 2a, \tag{1.1}$$

参见 (3.1)。它是可分希尔伯特空间中的无界 m-增生算子，且具有紧预解式。K. C. Shin 证明， L 的特征值 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 对所有 $n > N_0 > 0$ 都是单的，并且它们满足：当 $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \lambda_n &= (dn)^\kappa (1 + o(1)), \\ \lambda_{n+1} - \lambda_n &= \kappa d (dn)^{\kappa-1} (1 + o(1)), \quad \kappa = \frac{2a}{a+1} \in [1, 2), \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $d > 0$ 如 (3.10) 所示，参见 [Shi10b] 或下文的命题 3.2；另参见 [CCG06; CG14].

算子 L 具有如下结构： $L = A + B$，其中 $A = -(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2 + x^{2a}$ 是自伴的，而 $B = \mathrm{i}x^b$ 是其相对有界扰动。 A 的正交谱投影系是完备的；然而，由于 B 是非对称的， L 的谱投影的正交性不复存在。尽管如此， L 的谱投影系 $S_0 \cup \{P_n\}_{n>N_0}$ 是完备的（事实上，对于 $b \geq 2a$ 也如此）；这里

$$P_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z-\lambda_n|=\delta_{\lambda_n}} (z - L)^{-1}\, \mathrm{d}z, \quad \delta_\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(L) \setminus \{\lambda\}), \quad n > N_0, \tag{1.3}$$

且 S_0 是与其余 N_0 特征值相关的秩为$(S_0) = N_0$ 的投影，即存在 $R_0 > 0$ 使得 $|\lambda_{N_0}| < R_0 < |\lambda_{N_0+1}|$

$$S_0 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=R_0} (z - L)^{-1}\, \mathrm{d}z. \tag{1.4}$$

可以预期， L的谱投影是否具有基性质取决于扰动的强度；目标是找到具有基性质与不具有基性质之间的临界点。

已知若 $b < a-1$，则 L 的谱投影系具有 Riesz性质，参见 [MS19a，定理 6.4]。因此， L的预解式满足（取适当的常数 M， $R>0$）

$$\|(z-L)^{-1}\| \le \frac{M}{\operatorname{dist}(z,\sigma(L))}, \quad z\in\rho(L), \quad |z|\ge R. \tag{1.5}$$

关于抽象算子和微分算子（Dirac算子、Hill算子、Schr¨odinger）的 Riesz基性质的近期研究结果综述，参见 [AM12a; AM12b; DM11; DM10; DM12; MS16; MS19a; MS17; MS19b; Shk10; Shk16; Wys10]。

当 $b > a-1$时， L 的预解式行为会发生显著变化。具体而言，若 b 为奇数，对于任意固定的 $\beta\in\mathbb{R}$ 和任意 $N\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得对所有满足 $\alpha\ge 1$的 $\alpha+\mathrm{i}\beta\in\rho(L)$，我们有

$$\|(\alpha+\mathrm{i}\beta-L)^{-1}\| \ge C\alpha^N, \tag{1.6}$$

参见 [KS19，定理 3.7，例 3.8]；偶数 b的情形稍微复杂一些，但在定性上相似。事实上，这两种情况下预解式增长都是指数级的；具体而言，对于奇数 b，存在 $\eta>0$，使得

$$\|(\alpha+\mathrm{i}\beta-L)^{-1}\| \ge \exp(\eta\alpha^\tau), \quad \tau=\frac{b-(a-1)}{2a}, \tag{1.7}$$

见定理 3.3。后者是 [Kre+15，定理 7] 的推广，处理$a=b=1$ 的情形，并延续了半经典方法，参见例如 [DS99，第 2] 章。由于已知的特征值渐近式 (1.2)，可以利用 (1.6) 和 (1.7) 证明 L 的谱投影系不具有 Riesz性质。

然而，事实证明，对于 $b>a-1$， L 的谱投影甚至不具有基性质。更确切地说，作为我们关于 L的主要结果，我们证明，当 $\gamma>0$ 足够小时，有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|P_n\|}{\exp(\gamma n^\sigma)}=\infty, \tag{1.8}$$

其中

$$\sigma=\frac{b-(a-1)}{1+a}\in(0,1). \tag{1.9}$$

事实上，与特殊情形 $a=b=1$ 中研究的 [MSV17], 一样，我们预期 (1.8) 中的 lim 可以替代limsup，并且 $\|P_n\|$ 实际上会随着指数阶σ增长，见注 3.8。我们还预期，在 $b=a-1$处基性质的转变对于比多项式势更一般的势函数同样成立，见第 5.4 小节，其中还讨论了 $b=a-1$ 的 Abel基性质。

我们证明 (1.8) 的方法本身也具有独立价值，并适用于具有紧预解式和完备谱投影系的抽象 m-耗散算子 T（不需要摄动结构 $A+B$）。我们的策略是将谱投影的 $\varrho>0$ 阶指数界传递为预解式的同阶指数界。对于具有二次符号的微分算子，J. Viola 早先已观察到这种行为，参见 [BKS, 2013-14-ICMS]。

我们将针对受 L 启发的情形解释这一策略，其中 $\varrho<1/2$，并且特征值最终是单的，且满足 $\lambda_n=(dn)^\kappa(1+o(1))$，其中 d， $\kappa>0$ 当 $n\to\infty$ 时。在这种情况下，定理 4.3 表明，如果 T 的谱投影 P_n 满足

$$\|P_n\|\le\exp(\gamma|\lambda_n|^\varrho(1+o(1))), \quad n\to\infty, \tag{1.10}$$

对于 $\gamma > 0$ 和 $\varrho < 1/2$，那么对任意 $\delta > 0$，存在 $C > 0$，使得对于满足 $\operatorname{Re} z \geq 0$ 的 $z \in \rho(T)$

$$\|(z - T)^{-1}\| \leq \frac{C}{\operatorname{dist}(z, \sigma(T))} \exp\left((1 + \delta)\gamma \cos(\varrho \arg z)|z|^{\varrho}\right), \quad z \to \infty. \tag{1.11}$$

因此，指数阶 ϱ 从投影界传播到了预解式；此外，关于型 γ 的信息也同样得以传递。定理 3.5 针对 L 陈述了这一结果，而关于谱投影的断言 (1.8)，则可结合 (1.10)、(1.11) 与 (1.2)、(1.7) 得出；详情见定理 3.6。值得注意的是，定理 4.3（我们的第二个主要结果）的假设比上述情形更为灵活。只要求 $|\lambda_n| \geq (dn)^{\kappa}$、 $n \in \mathbb{N}$，而在对 $\mathbb{C}$ 中的某些射线上的预解式增长作出额外假设时，还可纳入 $\varrho \geq 1/2$ 。

定理 4.3 的证明依赖于预解式的一个新的重要恒等式。对于具有单特征值的 T，该恒等式写作

$$B_z(T) = \frac{1}{F(z)}(z - T)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z + a_n)F'(-a_n)}(a_n + T)^{-1}, \quad z \in \rho(T), \tag{1.12}$$

其中

$$B_z(w) = \frac{1}{F(w)(z - w)}, \quad F(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{a_k}\right), \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{z\}, \tag{1.13}$$

and

$$a_k = \left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{1}{\varrho}}, \quad \nu > 0,\ \varrho < 1/2,\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

关键在于认识到，(1.12) 是亚纯函数 $B_z(\cdot)$的部分分式分解的算子版本。

恒等式 (1.12) 确实使得我们能够将谱投影的指数界推广到预解式。具体而言，整函数 F（E. C. Titchmarsh 在 [Tit27], 中对其进行了深入研究）对任意 $\theta \in (-\pi, \pi)$ 都满足以下渐近行为

$$\log|F(re^{\mathrm{i}\theta})| = \pi\nu r^{\varrho}\frac{\cos(\theta\varrho)}{\sin(\pi\varrho)}(1 + o(1)), \qquad r \to +\infty. \tag{1.15}$$

令 ϱ 取为 (1.10) 中的形式，并在 (1.14) 中选取充分大的 $\nu > 0$，即可得到满足下式的规范函数 F

$$\log|F(\lambda_n)| = \pi\nu|\lambda_n|^{\varrho}\frac{\cos(\varrho \arg \lambda_n)}{\sin(\pi\varrho)}(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{1.16}$$

这 F 使谱投影的增长得以规整，从而 B_z 可以表示为一个收敛级数

$$B_z(T) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z - \lambda_j}\frac{1}{F(\lambda_j)}P_j. \tag{1.17}$$

根据 (1.12) 表示预解式，并利用 (1.15)、 $B_z(T)$ 的有界性以及 (1.12) 右端级数的收敛性，即可得到 $\|(z - T)^{-1}\|$ 的所需界。后者由 $1/F$ 的部分分式分解的收敛性得到保证

$$\frac{1}{F(w)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F'(-a_n)}\frac{1}{w + a_n}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{-a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \tag{1.18}$$

该式在 $\varrho < 1/2$ 时成立，此时

$$|F'(-a_n)| = \exp\left(\pi n \cot(\pi\varrho) + \mathcal{O}(\log n)\right), \quad n \to \infty, \tag{1.19}$$

参见第 2.3 小节和附录 A。

恒等式 (1.12)–(1.13) 的灵感来自某个“多项式”版本

$$(z-L)^{-1}\prod_{k=1}^{m}(k+L)^{-1}=\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{k+z}\right)(z-L)^{-1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{z+k}(k+L)^{-1}, \tag{1.20}$$

由 E. B. Davies 针对某些 $c_k\in\mathbb{C}$, $1\le k\le m<\infty$ 在 [Dav00, p. 434] 中提出。他的研究动机来自 $L^2(\mathbb{R})$ 中的偶虚振子

$$H=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\mathrm{i}|x|^b,\quad b>0. \tag{1.21}$$

利用 (1.20) 以及此前在 [Dav99], 中得到的 (1.6) 型预解算子下界，他证明谱投影 P_n of H 并不“温和”，也就是说，对于任意 $N>0$,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|P_n\|}{n^N}=\infty. \tag{1.22}$$

数值证据表明 $\|P_n\|$ 会呈指数增长，这一结论随后由 R. Henry 通过精确的直接分析予以证实，即

$$c(b)\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{\log\|P_n\|}{n}>0, \tag{1.23}$$

参见 [Hen12; Hen14a]，其中给出了更精确的渐近行为。

对于 (1.21) 中的 H，定理 4.3 以及关于 $\|(z-H)^{-1}\|$ 的已有下界表明，对于 $b>2/3$ 及充分小的 $\gamma>0$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|P_n\|}{\exp(\gamma n)}=\infty, \tag{1.24}$$

参见定理 4.8。我们预计(1.24)成立，其中用lim代替lim sup，正如含有 $b\in2\mathbb{N}$ 的特殊情形一样。限制条件 $b>2/3$ 是自然的，因为对于 $b=2/3$, $\{P_n\}$ 的完备性并非显然，直到最近才由 S. Tumanov 在 [Tum21a; Tum22] 中针对 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 内、在 0 处满足狄利克雷边界条件的算子加以证明；更多详情请参见第 5.5 小节。

在第 4.3 小节中，我们展示了如何将定理 4.3 同样应用于奇虚振子

$$H=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\mathrm{i}x^{2b+1},\quad b\in\mathbb{N}, \tag{1.25}$$

其中包括备受关注且得到广泛研究的三次情形，例如参见 [BB98; DDT01; Shi02; SK12; Hen14b; GG15]。这给出了对于一系列 $b\in\mathbb{N}$ 而类似于 (1.24) 的结果，参见定理 4.11；特殊情形 $b=1$ 曾在 [Hen14b], 中直接进行分析，参见注 4.12。

As 作为最后一项应用，我们在 $L^2(\mathbb{R})$中将定理 4.3用于共轭振子

$$H=e^{v}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+|x|^b\right)e^{-v}=\left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\mathrm{i}v'\right)^2+|x|^b \tag{1.26}$$

其中 $b\ge2$ 和 $v\in C^2(\mathbb{R})$是一个非负奇函数，在 $(0,\infty)$ 上递增，并且对某个 $s\in(0,1)$ 满足

$$v(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{2+b}{2}s},\quad x>1. \tag{1.27}$$

对于这些算子 H，谱投影范数的渐近行为已在 [MSV17] 中得到研究，而定理 4.3 为 H给出了新的预解算子范数界，详见第 4.4 小节。

本文结构如下。第 2 节回顾算子理论、具有复势的薛定谔算子以及无穷乘积及其部分分式分解中的一些有用结果；附录 A 对后者作了更详细的介绍。第 3 节分析 (1.1) 或 (3.1) 中的 L 。第 3.1 小节总结 L的谱性质，特别是在定理 3.3 中陈述预解估计 (3.22)；证明见附录 B。在第 3.2 至 3.4 小节中，我们证明适用于 L预解式的关键恒等式 (1.12) 的一个版本，并得出定理 3.5 中的预解式界以及定理 3.6 中关于谱投影的结果。第 3.5 小节讨论这些结果对基性质的影响。第 4 节考察一个抽象算子 T ，并建立 (1.12) 及其关于预解式范数的相关结果（定理 4.3）。第 4.2 至 4.4 小节讨论其在虚振子和共轭振子中的应用。最后，第 5 节汇集了关于本文结果、其尖锐性、临界情形和猜想的若干注记。

2. Preliminaries

我们以适合本文的专门形式总结算子理论、薛定谔算子分析和整函数的一些精选结果；更一般的结果可见所附参考文献。

2.1. 算子理论的一些事实。 设 $\mathcal{H}$ 为可分希尔伯特空间，且 T为具有紧预解式的稠定算子，并且 $0 \in \rho(T)$。 T的谱由孤立的、代数重数有限的特征值组成。注意，此类 T 的谱可能为空或为有限集；不过，我们不关注这些情形，并进一步假设存在无穷多个特征值 λ_n, $n \in \mathbb{N}$。我们约定特征值按代数重数重复计数，并按模非递减排列，即 $|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$, $n \in \mathbb{N}$。

T^{-1} 的奇异值记为 $\mathfrak{s}_n \equiv \mathfrak{s}_n(T^{-1})$， $n \in \mathbb{N}$，约定它们按重数重复计数并按非递增顺序排列，即 $\mathfrak{s}_{n+1} \leq \mathfrak{s}_n$, $n \in \mathbb{N}$，例如参见 [GK69，第 II 章]。 T^{-1} 属于 Schatten 类 $\mathcal{S}_q$,$q \in (0, \infty)$，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{s}_n(T^{-1})^q < \infty. \tag{2.1}$$

我们回顾一下，若存在 $\kappa > 0$ 使得

$$\mathfrak{s}_n = \mathcal{O}(n^{-\kappa}), \quad n \to \infty, \tag{2.2}$$

then

$$|\lambda_n^{-1}| = \mathcal{O}(n^{-\kappa}), \quad n \to \infty, \tag{2.3}$$

参见 [GK69，推论 II.3.2]。

T 的黎斯投影记为

$$Q_\lambda = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-\lambda|=\delta_\lambda} (z-T)^{-1} \, \mathrm{d}z, \quad \delta_\lambda := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T) \setminus \{\lambda\}), \quad \lambda \in \sigma(T), \tag{2.4}$$

注意，若 $\operatorname{rank}(Q_\lambda) = 1$，即特征值 λ是单的，则 $Q_\lambda = \langle \cdot, \ f_\lambda^* \rangle f_\lambda$其中$f_\lambda \in \operatorname{Ker}(T-\lambda)$和 $f_\lambda^* \in \operatorname{Ker}(T^*-\lambda)$经过归一化，使得 $\langle f_\lambda, \ f_\lambda^* \rangle = 1$。

T 的数值域为

$$\operatorname{Num}(T) = \{ \langle Tf, f \rangle \, : \, f \in \operatorname{Dom}(T), \|f\| = 1 \}. \tag{2.5}$$

对于具有紧预解式的 T，我们有 $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset \mathrm{Num}(T)$，并且

$$\|(z-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \mathrm{Num}(T))}, \qquad z \in \left(\overline{\mathrm{Num}(T)}\right)^{c}; \tag{2.6}$$

详见例如 [Kat95，第 V 章3] 或 [Mar88，第 26 章1] 。

我们回顾关于黎斯投影完备性的一个众所周知的结果，参见 [DS88，推论 XI.9.31]。

命题 2.1. 设 T 是可分希尔伯特空间$\mathcal{H}$中的稠密定义闭算子。假设 $\rho(T) \neq \emptyset$，且对某个 $z_0 \in \rho(T)$

$$(z_0 - T)^{-1} \in \mathcal{S}_q \tag{2.7}$$

满足 $q \in (0, \infty)$。设 $\gamma_1, \ldots, \gamma_j$ 为互不重叠的可微弧，并且在无穷远处具有极限方向；假设任意相邻的一对弧在无穷远处所成的角都小于π/q 。再假设对某个 $K \in \mathbb{Z}$， T 的预解式满足

$$\|(z-T)^{-1}\| = \mathcal{O}(|z|^K) \tag{2.8}$$

沿每个 γ_i, $i = 1, \ldots, j$，当 $z \to \infty$时成立。则黎斯投影系 Q_λ, $\lambda \in \sigma(T)$在 $\mathcal{H}$中完备。

T 的数值域包含于一个扇形内

$$\mathrm{Num}(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \vartheta\}, \tag{2.9}$$

其中 $\vartheta \leq \pi/2$。于是由 (2.6)，对于任意 $\varphi \in (-\pi, -\vartheta) \cup (\vartheta, \pi]$

$$\|(re^{\mathrm{i}\varphi} - T)^{-1}\| = \mathcal{O}(r^{-1}), \quad r \to +\infty. \tag{2.10}$$

因此，若 $T^{-1} \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$ 对于 $0 < q < \pi/(2\vartheta)$ 成立，则由命题 2.1 可知， T 的谱包含无穷多个特征值，且在 (2.4) 中定义的黎斯投影系 Q_λ, $\lambda \in \sigma(T)$ 在 $\mathcal{H}$ 中完备。

T 的数值域包含于一个“抛物型”区域内

$$\mathrm{Num}(T) \subset B_R(0) \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1, |\operatorname{Im} z| \leq h(\operatorname{Re} z)\} \tag{2.11}$$

其中 $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 连续，且满足

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = 0. \tag{2.12}$$

那么对于任意 $\vartheta > 0$，存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\mathrm{Num}(T + \alpha) \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \vartheta\} \tag{2.13}$$

并且还存在 $R_\vartheta > 0$ 使得

$$\mathrm{Num}(T) \subset B_{R_\vartheta} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \vartheta\} \tag{2.14}$$

因此由（2.6）可知，对于任意 $\varphi \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi]$,

$$\|(re^{\mathrm{i}\varphi} - T)^{-1}\| = \mathcal{O}(r^{-1}), \quad r \to +\infty. \tag{2.15}$$

由命题 2.1 可知，若对于 $q > 0$， $T^{-1} \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$，则 T 的谱包含无穷多个特征值，且黎斯投影系 Q_λ, $\lambda \in \sigma(T)$ 在 $\mathcal{H}$ 中完备。

2.2. 具有复势的一维薛¨定谔算子。 我们概述 [Kre+17 的特殊情形，定理 2.5、命题 2.6]；另参见 [AH15；BST17；SS22；Tum24]。

命题 2.2. 设 $V\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 满足 $V=V_0+V_1$，其中 $V_0\in C^1(\mathbb{R})$ 满足实部 $V_0\geq 0$，

$$|V_0(x)|\to\infty \quad and \quad |V_0'(x)|=o(|V_0(x)|^{\frac{3}{2}}),\quad |x|\to\infty, \tag{2.16}$$

且 $V_1\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 满足

$$V_1(x)=o(|V_0(x)|),\quad |x|\to\infty. \tag{2.17}$$

设 H 是一个薛定谔算子，作用于 $L^2(\mathbb{R})$

$$H=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V,\quad \mathrm{Dom}(H)=\{f\in H^2(\mathbb{R})\,:\,Vf\in L^2(\mathbb{R})\}. \tag{2.18}$$

则 $\rho(H)\neq\emptyset$，即 H 的预解式是紧的，并且对每个 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $C_\varepsilon>0$使得

$$\|Hf\|^2\geq(1-\varepsilon)(\|f''\|^2+\|V_0f\|^2)-C_\varepsilon\|f\|^2,\quad f\in\mathrm{Dom}(H). \tag{2.19}$$

我们指出，在 V满足假设 (2.17) 时，Dom(H) 的刻画中条件 $Vf\in L^2(\mathbb{R})$ 可以改为 $V_0f\in L^2(\mathbb{R})$。

特别地，设 $W\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $W=W_0+W_1$，其中 $W_0\in C^1(\mathbb{R};\,\mathbb{R})$、$W_0\geq 0$、$W_1\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\,\mathbb{R})$，并且

$$W_0(x)\to+\infty,\quad |W_0'(x)|=o(|W_0(x)|^{\frac{3}{2}})\quad\text{and}\quad W_1(x)=o(|W_0(x)|) \tag{2.20}$$

如 $|x|\to\infty$。因此，根据命题 2.2，算子

$$G=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+W,\quad \mathrm{Dom}(G)=\{f\in H^2(\mathbb{R})\,:\,Wf\in L^2(\mathbb{R})\} \tag{2.21}$$

是自伴的，具有紧预解式，并且图范数分离

$$\|Gf\|^2\geq(1-\varepsilon)(\|f''\|^2+\|W_0f\|^2)-C_\varepsilon\|f\|^2,\quad f\in\mathrm{Dom}(G) \tag{2.22}$$

成立。因此，如果 W_0 和 $|V_0|$ 在无穷远处的大小相同，即

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{|V_0(x)|}{W_0(x)}=1, \tag{2.23}$$

(2.19)、(2.22) 和 (2.23) 可用于比较 H 和 G 的预解式的奇异值，即存在 $\alpha,c_1,c_2>0$，使得

$$c_1\mathfrak{s}_n((G+\alpha)^{-1})\leq\mathfrak{s}_n((H+\alpha)^{-1})\leq c_2\mathfrak{s}_n((G+\alpha)^{-1}),\quad n\in\mathbb{N}; \tag{2.24}$$

另参见 [AH15，定理 1.1、1.2] 以及 [EE87，第 XII 章]。

我们分析中的重要情形是幂势，即自伴非谐振子

$$G_0=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+|x|^l,\qquad \mathrm{Dom}(G_0)=H^2(\mathbb{R})\cap\mathrm{Dom}(|x|^l),\quad l\in(0,\infty). \tag{2.25}$$

G_0 的所有特征值都是单的、正的，我们将它们记为 μ_n、$n\in\mathbb{N}$；按递增顺序排列 μ_n。已知它们满足如下渐近行为：$n\to\infty$

$$\mu_n=(dn)^\kappa(1+o(1)),\quad \mu_{n+1}-\mu_n=\kappa d(dn)^{\kappa-1}(1+o(1)), \tag{2.26}$$

其中

$$d=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{l})}{\Gamma(1+\frac{1}{l})},\qquad \kappa=\frac{2l}{l+2}, \tag{2.27}$$

参见 [Tit62，第七章], [RS78，第 XIII 定理。82]或 [MS19a，第 6] 节。

2.3. **无穷乘积与部分分式分解**。 我们总结一些关于无穷乘积及相关部分分式分解的已知事实。

令 $F\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为一个无穷乘积

$$F(w)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{w}{a_k}\right),\qquad a_{k+1}\geq a_k>0,\ k\in\mathbb{N}, \tag{2.28}$$

其中

$$\exists\nu>0\ \exists\varrho\in(0,1):\quad n(r):=\#\{k:a_k\leq r\}=\nu r^{\varrho}(1+o(1)),\quad r\to+\infty. \tag{2.29}$$

F 的以下性质已为人所知，详情、参考文献和证明见附录 A。

命题 2.3. 设 F 如（2.28）所示，且满足（2.29）。则无穷乘积（2.28）绝对收敛， F 是一个整函数，并且对任意 $\theta\in$ （$-\pi$， π）

$$\log|F(re^{\mathrm{i}\theta})|=\pi\nu r^{\varrho}\frac{\cos(\theta\varrho)}{\sin(\pi\varrho)}(1+o(1)),\qquad r\to+\infty; \tag{2.30}$$

此外，对于任意固定的 $\varepsilon>0$，余项估计对 $\theta\in[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]$ 一致成立。

下文证明的一个关键要素是 $1/F$ 的部分分式分解。当零点 $\{-a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 由下式确定时，我们陈述结论

$$a_k:=\left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{1}{\varrho}},\qquad k\in\mathbb{N}, \tag{2.31}$$

其中 $\nu>0$ 和 $\varrho\in$ （0，1）。（注意，此时 (2.29) 成立。）

命题 2.4. 设 F 如 (2.28) 所示，其中 a_k、 $k\in\mathbb{N}$ 满足 (2.31)，且 $\nu>0$ 和$\varrho\in$ （0，1）。则

$$|F'(-a_k)|=\exp\big(\pi k\cot(\pi\varrho)+\mathcal{O}(\log k)\big),\qquad k\to\infty. \tag{2.32}$$

若进一步有 $\varrho\in$ （0，$1/2$），则

$$\frac{1}{F(w)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F'(-a_n)}\frac{1}{w+a_n}, \tag{2.33}$$

其中该级数在 $\mathbb{C}\setminus\{-a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的紧子集上一致收敛。

因此，对所有 $w\neq z$ 和 $w\neq -a_n$、 $n\in\mathbb{N}$，

$$\frac{1}{(z-w)F(w)}=\frac{1}{F(z)(z-w)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+a_n)F'(-a_n)(w+a_n)}. \tag{2.34}$$

对于 $\varrho=1/2$，项 $|F'(-a_k)|$ 不会呈指数增长，因此无法进行类似于 (2.33) 的部分分式分解。尽管如此，正弦函数的欧拉乘积公式导出了下文的分解 (2.35)。

命题 2.5。 设 F 如 (2.28) 所示，其中 a_k、 $k\in\mathbb{N}$ 满足 (2.31)，且 $\nu>0$ 和 $\varrho=1/2$、$k\in\mathbb{N}$。那么

$$\frac{1}{F(w)}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{w}{w+a_n}, \tag{2.35}$$

其中，该级数在 $\mathbb{C}\setminus\{-a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的紧子集上一致收敛。

因此，对于所有的 $w\neq z$ 和 $w\neq -a_n$, $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(z-w)F(w)}=\frac{1}{F(z)(z-w)}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a_n}{(z+a_n)(w+a_n)}. \tag{2.36}$$

注 2.6. 上述结果针对满足 (2.31) 的 $a_k, k \in \mathbb{N}$ 给出。事实上，这些结果基于对

$$\Phi(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{k^{\frac{1}{\varrho}}}\right), \tag{2.37}$$

含有 $\nu = 1$ 的特殊情形。一般 $\nu > 0$ 的结论可通过重新缩放来解释

$$F(w) = \Phi(tw), \quad t = \nu^{\frac{1}{\varrho}}; \tag{2.38}$$

参见附录 A.3。

也可以用一个有界序列扰动 (2.31) 中的 a_k，即考虑

$$a_k := \left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{1}{\varrho}} + b_k, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad b_k = \mathcal{O}(1), \quad k \to \infty. \tag{2.39}$$

Sed83 的引理 6] 表明，渐近行为 (2.32) 仍然成立，因此 (2.33) 和 (2.34) 也成立。

3. Spectral projections of complex perturbations of anharmonic oscillators

我们分析的第一个主要对象是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个算子

$$L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^{2a} + V_1(x), \quad \mathrm{Dom}(L) = \{f \in H^2(\mathbb{R}) : x^{2a} f(x) \in L^2(\mathbb{R})\} \tag{3.1}$$

其中 $a \in \mathbb{N}$，且多项式势 V_1 满足

$$\deg(\mathrm{Re}\, V_1) \le 2a - 1, \quad \deg(\mathrm{Im}\, V_1) = b, \quad 0 \le a - 1 < b < 2a, \tag{3.2}$$

and

$$\mathrm{Im}\, V_1(x) = c_b x^b + \ldots, \quad c_b > 0. \tag{3.3}$$

我们将进一步假设 $\mathrm{Re}\, V_1 \ge 1$，这总能通过平移实现，即在充分大的 $\alpha > 0$ 下，考虑 $L + \alpha$ 而非 L。（显然，将恒等算子的标量倍数加到 L上，不会改变其任何谱性质。）

3.1. 谱 性质 L。 关于 L的基本事实概述如下: .

命题 3.1。 设 L如 (3.1) – (3.3)中所示。那么

(i) 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $R_\varepsilon > 0$，使得 L 的数值域满足

$$\begin{aligned} \mathrm{Num}(L) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \ge 1, |z| \le R_\varepsilon\} \\ \cup \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \ge 1, |\mathrm{Im}\, z| \le (c_b + \varepsilon)(\mathrm{Re}\, z)^{\frac{b}{2a}}\right\} \quad \textit{if } b \textit{ is odd} \end{aligned} \tag{3.4}$$

and

$$\begin{aligned} \mathrm{Num}(L) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \ge 1, |z| \le R_\varepsilon\} \\ \cup \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \ge 1, 0 \le \mathrm{Im}\, z \le (c_b + \varepsilon)(\mathrm{Re}\, z)^{\frac{b}{2a}}\right\} \quad \textit{if } b \textit{ is 偶;} \end{aligned} \tag{3.5}$$

(ii) L 是 m-耗散的，且具有紧预解式，此外，

$$\mathfrak{s}_k(L^{-1}) = \mathcal{O}(k^{-\kappa}), \quad k \to \infty, \tag{3.6}$$

其中

$$\kappa = \frac{2a}{a+1}; \tag{3.7}$$

(iii) L的谱包含无穷多个特征值，且黎斯投影系 $Q_\lambda, \lambda \in \sigma(L)$（如(2.4) 中所示，其中 $T = L$）在 $L^2(\mathbb{R})$中完备。

证明概要。 (i) 结论 (3.4)、(3.5) 可通过直接估计得到，因为势函数 $V(x) = x^{2a} + V_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$，满足 $\operatorname{Re} V(x) = x^{2a} + \mathcal{O}(x^{2a-1})$，且当 $|x| \to \infty$ 时 $\operatorname{Im} V(x) = c_b x^b + \mathcal{O}(x^{b-1})$。

(ii) 第 2.2 小节中关于 V 的条件与 $V_0(x) = x^{2a}$ 均得到满足，因此 L 的预解集非空，且预解式是紧的（ L 的增生性由上面对 $\operatorname{Num}(L)$ 的包络关系推出）。(3.6) 和 (3.7) 中奇异值的行为由（2.24）得到，其中使用了 $H = L$ 和 $G = G_0$ （带有 $l = 2a$），见（2.25）和（2.26）。

(iii) L 的数值域包含于（2.11）右侧的一个“抛物”区域中，其中 $h(t) = (c_b + \varepsilon)\, t^{\frac{b}{2a}}$, $t > 0$。此外，由（3.6）可知，对于任意 $q > 1/\kappa$，都有 $L^{-1} \in \mathcal{S}_q$，因此关于特征值和完备性的结论可由命题 2.1 及其下方的注记推出。□

基于 [Sib75], K. C. Shin 的结果，K. C. Shin 证明了关于 L 的以下更精确的谱结果；我们将其表述为便于本文使用的形式；另见 [Shi02；Shi05]。

命题 3.2 ([Shi10a, 定理 1.1、1.3，推论 2.1、2.2])。 设 L 如 (3.1) – (3.3) 中所述， κ 如 (3.7) 中所述，并设 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 L 的特征值（按代数重数重复，并按模非递减顺序排列）。则

(i) 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N_0$，特征值 λ_n 均为单的，且

$$|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|; \tag{3.8}$$

(ii) λ_n 的实部满足

$$\operatorname{Re} \lambda_n = (dn)^{\kappa}(1 + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{1+a}})), \quad n \to \infty, \tag{3.9}$$

其中

$$d = \frac{\pi}{B\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2a}\right)} > 0; \tag{3.10}$$

(iii) “间隔”满足

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \kappa d (dn)^{\kappa-1} \left(1 + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{1+a}})\right), \quad n \to \infty; \tag{3.11}$$

(iv) λ_n 的虚部满足

$$\operatorname{Im} \lambda_n = (d'n)^{\kappa'} \left(1 + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{1+a}})\right), \quad n \to \infty, \tag{3.12}$$

其中

$$d' \neq 0, \quad \kappa > \kappa' = \kappa - \frac{j}{1+a} \quad \textit{for some } j \textit{ with } 1 \leq j \leq 2a, \tag{3.13}$$

or

$$\operatorname{Im} \lambda_n = \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{1+a}}), \quad n \to \infty; \tag{3.14}$$

(v)若 V_0 为偶数且 V_1 为奇数，则特征值 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为实数，但可能有有限个例外。

我们指出， $a = 1$ 和 $b = 1$ 的情形更为明确，即对于

$$L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{C}, \tag{3.15}$$

所有特征值都是单的，并且满足

$$\lambda_n = 2n - 1 + \alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{4}, \qquad n \in \mathbb{N}; \tag{3.16}$$

参见 [MSV17；Kre+15；MSV21]。

L的预解式范数满足以下下界。

定理 3.3。 设 L如(3.1) – (3.3) 所示，并设

$$\tau := \frac{b+1}{2a} - \frac{1}{2} = \frac{b-(a-1)}{2a}. \tag{3.17}$$

（注意，由于(3.2)，我们有 $\tau \in (0, 1/2)$。）则有以下结论。

(i) 若 b 为奇数，则对每个 $\varepsilon \in (0, c_b)$，存在 $\eta, R > 0$，使得对所有满足以下条件的 $z \in \rho(L)$

$$\operatorname{Re} z > R \quad and \quad |\operatorname{Im} z| \le (c_b - \varepsilon)(\operatorname{Re} z)^{\frac{b}{2a}}, \tag{3.18}$$

我们有

$$\|(z-L)^{-1}\| \ge \exp(\eta(\operatorname{Re} z)^{\tau}). \tag{3.19}$$

(ii) 若 b 为偶数，则对每个 $\varepsilon \in (0, c_b)$ 和满足以下条件的 $\omega \in (0, \omega_0)$

$$\omega_0 := \frac{b}{2a} - \frac{b}{2(b+1)} = \frac{b}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+1}\right) = \frac{b}{b+1}\tau, \tag{3.20}$$

存在 $\eta, R > 0$，使得对于所有满足（L）的 $z \in \rho$

$$\operatorname{Re} z > R, \quad \operatorname{Im} z \ge (\operatorname{Re} z)^{\frac{b}{2(b+1)}+\omega} \quad and \quad \operatorname{Im} z \le (c_b - \varepsilon)(\operatorname{Re} z)^{\frac{b}{2a}}, \tag{3.21}$$

我们有

$$\|(z-L)^{-1}\| \ge \exp\left(\eta \frac{(\operatorname{Im} z)^{\frac{b+1}{b}}}{(\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{2}}}\right) \ge \exp\left(\eta (\operatorname{Re} z)^{\omega \frac{b+1}{b}}\right). \tag{3.22}$$

我们注意到 $\omega_0 > 0$，因为由 (3.2) 可知

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b+1}. \tag{3.23}$$

证明。 证明见附录 B，其基于伪模的构造，特别参见 (B.21) 和 (B.22)。□

3.2. 从谱投影到预解式。 本节的目标是建立谱投影范数上界与预解式范数上界之间的联系。根据命题 3.2，我们固定 $R_0 > 0$，使得 $|\lambda_{N_0}| < R_0 < |\lambda_{N_0+1}|$，并引入

$$S_0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=R_0} (z-L)^{-1} \, \mathrm{d}z, \tag{3.24}$$

并且对于 $n > N_0$

$$P_n = Q_{\lambda_n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-\lambda_n|=\delta_{\lambda_n}} (z-L)^{-1} \, \mathrm{d}z, \tag{3.25}$$

其中

$$\delta_\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(L) \setminus \{\lambda\}). \tag{3.26}$$

注意到

$$\operatorname{rank}(S_0) = N_0, \quad \operatorname{rank}(P_n) = 1, \quad n > N_0, \tag{3.27}$$

并且投影系统 $\{S_0\} \cup \{P_n\}_{n>N_0}$ 两两不相交且完备；参见命题 3.1 和 (3.25)。由此可知，线性空间

$$\mathcal{D}_L := \left\{ h \in L^2(\mathbb{R}) \,:\, \exists N(h) > N_0 \ \forall k > N(h) \ P_k h = 0 \right\} \tag{3.28}$$

在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密。此外， L 的预解式在 $\mathcal{D}_L$ 上的作用为

$$(z-L)^{-1}h=(z-LS_0)^{-1}S_0h+\sum_{j=N_0+1}^{N(h)}\frac{1}{z-\lambda_j}P_jh,\qquad h\in\mathcal{D}_L,\ z\in\rho(L). \tag{3.29}$$

在适当的假设或估计下，(3.29) 可导出对所有 $h\in L^2(\mathbb{R})$成立的恒等式，或算子范数不等式。后者对我们尤为重要；受 [Dav00], 的启发，我们将使用并发展一种预解式恒等式

$$(z-L)^{-1}\prod_{k=1}^{m}(k+L)^{-1}=\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{k+z}\right)(z-L)^{-1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{z+k}(k+L)^{-1}, \tag{3.30}$$

其中常数为 $c_k\in\mathbb{C}$、 $1\le k\le m<\infty$，见 [Dav00，第 434] 页。

我们将 (3.30) 视为部分分式分解的算子版本

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-w}\frac{1}{\Phi(w)}&=\frac{1}{z-w}\frac{1}{\Phi(z)}+\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{z+a_k}\frac{1}{a_k+w},\\ c_k&=\frac{1}{\Phi'(-a_k)},\qquad 1\le k\le m<\infty,\end{aligned} \tag{3.31}$$

其中

$$\Phi(w):=\prod_{k=1}^{m}(w+a_k) \tag{3.32}$$

是一个次数为 $\Phi=m$ 的多项式，且具有单负零点 $\{-a_k\}_{k=1}^m$；在 (3.30) 的情形下，我们有 $a_k=k$、 $1\le k\le m$。这种观点为我们提供了处理“野性”投影系统 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的工具，也就是说， $\|P_n\|$ 的范数可能比任何多项式增长得都快；关于“驯服”系统的结果，即范数 $\|P_n\|$的增长为多项式，请参见 [Dav00] 。

3.3. 预解式展开的正则化。 为了对指数增长的谱投影范数进行正则化，我们旨在为无穷乘积建立类似于上文多项式 (3.32) 所对应的 (3.30) 的版本。我们选取规范函数$F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，其形式如 (2.28)，其中 a_k、 $k\in\mathbb{N}$ 满足 (2.31)，且 $\nu>0$ 和 $\varrho\in(0,1/2)$。

作为正则化的第一步（类似于 (3.30)），我们引入算子 B_z 并估计其范数。

引理 3.4。 设 L 如 (3.1) – (3.3) 所示， κ、 d 如 (3.7) 和 (3.10)所示。设 P_n、 $n>N_0$ 如 (3.25) 所示，并假设存在 M、 γ、 $\sigma>0$ 使得

$$\|P_n\|\le M\exp\left(\gamma(dn)^\sigma\right),\qquad n>N_0, \tag{3.33}$$

并且还满足（其中 κ来自(3.7)）

$$\varrho:=\frac{\sigma}{\kappa}<\frac{1}{2}. \tag{3.34}$$

对于 $\delta>0$，令 F 如(2.28) 中所述，其中 a_k、 $k\in\mathbb{N}$满足(2.31)，且 ϱ 来自(3.34)，并且

$$\nu=\gamma\frac{\sin(\pi\varrho)}{\pi}(1+\delta). \tag{3.35}$$

对每个 $z\in\rho(L)$，考虑稠定算子（回顾(3.28)）

$$B_zh:=\sum_{j=N_0+1}^{N(h)}\frac{1}{z-\lambda_j}\frac{1}{F(\lambda_j)}P_jh,\qquad h\in\mathrm{Dom}(B_z):=\mathcal{D}_L. \tag{3.36}$$

那么 B_z 存在唯一的有界延拓，定义在 $L^2(\mathbb{R})$ 上，并且满足

$$\|B_z\| \le \frac{M_1}{\operatorname{dist}(z, \{\lambda_n\}_{n>N_0})}, \quad z \in \rho(L), \tag{3.37}$$

其中

$$M_1 := \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \frac{\|P_j\|}{|F(\lambda_j)|} < \infty. \tag{3.38}$$

证明。由命题 3.2 以及 (3.4) 或 (3.5) 可知，对于任意小的 $\vartheta > 0$，所有具有足够大 j 的特征值 λ_j 均位于正实轴周围的一个扇形内，其半角为 ϑ。因此，再结合 (3.9)，存在 $j_\delta \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $j > j_\delta$

$$|\lambda_j| \ge \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{3\varrho}}}(dj)^{\kappa}, \qquad \cos(\varrho \arg \lambda_j) \ge \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}. \tag{3.39}$$

此外，根据命题 2.3，可以选取 j_δ，使得对于所有 $j > j_\delta$

$$|F(\lambda_j)| \ge \exp\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}\pi\nu|\lambda_j|^{\varrho}\frac{\cos(\varrho \arg \lambda_j)}{\sin(\pi\varrho)}\right). \tag{3.40}$$

接下来，由 (3.39)、(3.35) 和 (3.34)，对于所有 $j > j_\delta$，我们得到

$$|F(\lambda_j)| \ge \exp\left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}}\nu(dj)^{\kappa\varrho}\frac{\pi}{\sin(\pi\varrho)}\right) = \exp\left(\frac{1+\delta}{1+\frac{\delta}{2}}\gamma(dj)^{\sigma}\right). \tag{3.41}$$

利用假设 (3.33)，对于所有 $j > j_\delta$，有

$$\frac{\|P_j\|}{|F(\lambda_j)|} \le M\exp\left(-\frac{\delta}{2+\delta}\gamma(dj)^{\sigma}\right), \tag{3.42}$$

因此，(3.38) 中的级数收敛。回到 (3.36)，我们得到

$$\|B_z h\| \le \frac{M_1}{\operatorname{dist}(z, \{\lambda_n\}_{n>N_0})}\|h\|, \quad z \in \rho(L). \tag{3.43}$$

由于 $\mathrm{Dom}(B_z) = \mathcal{D}_L$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密，算子 B_z 确实存在唯一的有界延拓，并且满足 (3.37)。□

3.4. 的预解估计 L 及其推论。接下来，我们利用命题 2.4 中的部分分式分解，得到 L 的预解式范数上界。

定理 3.5。设 L 如 (3.1) –(3.3) 所示，κ、d 如 (3.7) 和 (3.10) 所示。设 P_n、$n > N_0$ 如 (3.25) 所示，并假设满足 (3.33) 和 (3.34)。那么，对于任意 $\delta > 0$，存在 $C \equiv C(\delta) > 0$ 和 $r \equiv r(\delta) > 0$，使得对于所有满足 $|z| \ge r$ 且 $|\arg z| \le \pi/2$ 的 $z \in \rho(L)$，

$$\|(z-L)^{-1}\| \le \frac{C}{\operatorname{dist}(z, \sigma(L))}\exp\left((1+\delta)\gamma\cos(\varrho \arg z)|z|^{\varrho}\right). \tag{3.44}$$

证明。设 F 如 (2.28) 所示，其中 a_k、$k \in \mathbb{N}$ 满足 (2.31)，且 ϱ 取自 (3.34)，并且

$$\nu = \gamma\frac{\sin(\pi\varrho)}{\pi}(1+\widetilde{\delta}) \tag{3.45}$$

~对于 $\delta>0$。（回想一下，此时这些 ν 和 ϱ 满足 (2.29)。）我们从 (3.36) 出发，使用 (2.34) 的部分分式分解以及引理 3.4 中对 B_z 范数的估计。具体而言，由 (2.34) 可知，对于所有 $h\in\mathcal{D}_L$ 和 $z\in\rho(L)$，

$$\begin{aligned}B_zh&=\sum_{j=N_0+1}^{N(h)}\frac{1}{(z-\lambda_j)F(\lambda_j)}P_jh\\&=\frac{1}{F(z)}\sum_{j=N_0+1}^{N(h)}\frac{1}{z-\lambda_j}P_jh+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+a_n)F'(-a_n)}\sum_{j=N_0+1}^{N(h)}\frac{1}{\lambda_j+a_n}P_jh\\&=\frac{1}{F(z)}(z-L)^{-1}(h-S_0h)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+a_n)F'(-a_n)}(a_n+L)^{-1}(h-S_0h).\end{aligned}\tag{3.46}$$

由于 L 是 m-耗散的，由 (2.6) 可得

$$\|(a_n+L)^{-1}\|\le\frac{1}{a_n},\tag{3.47}$$

因此，由 (2.31) 和 (2.32) 可得

$$M_2:=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|(a_n+L)^{-1}\|}{|F'(-a_n)|}<\infty.\tag{3.48}$$

由于 $\sigma(LS_0)\subset B_{R_0}(0)$，我们还有

$$\|(z-LS_0)^{-1}S_0\|\le\frac{\|S_0\|}{|z|-\|LS_0\|}\le\frac{2\|S_0\|}{|z|},\quad |z|\ge2\|LS_0\|.\tag{3.49}$$

重新整理 (3.46)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{F(z)}(z-L)^{-1}h=B_zh-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+a_n)F'(-a_n)}(a_n+L)^{-1}(h-S_0h)\\+\frac{1}{F(z)}(z-LS_0)^{-1}S_0h.\end{aligned}\tag{3.50}$$

因此，由于 $\mathcal{D}_L$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密，根据 (3.37)、(3.38)、(3.48) 和 (3.49)，对于所有满足 $|z|\ge2\|LS_0\|$ 且 $|\arg z|\le\pi/2$ 的 $z\in\rho(L)$，我们得到

$$\begin{aligned}\|(z-L)^{-1}\|&\le|F(z)|\left(\frac{M_1}{\operatorname{dist}(z,\{\lambda_n\}_{n>N_0})}+\frac{M_2(1+\|S_0\|)}{\operatorname{dist}(z,\{-a_n\}_{n\in\mathbb{N}})}\right)\\&\quad+\|(z-LS_0)^{-1}S_0\|\\&\le|F(z)|\left(\frac{M_1}{\operatorname{dist}(z,\sigma(L))}+\frac{M_2(1+\|S_0\|)}{|z|}\right)+\frac{2\|S_0\|}{|z|}.\end{aligned}\tag{3.51}$$

~由命题 2.3 以及 (2.31)、(3.34) 和 (3.35) 可知，存在 $r'\equiv r'(\delta)>0$，使得对于所有满足 $|z|>r'$ 且 $|\arg z|\le\pi/2$ 的 $z\in\mathbb{C}$

$$|F(z)|\le\exp\left(\pi\nu|z|^{\varrho}\frac{\cos(\varrho\arg z)}{\sin(\pi\varrho)}(1+\widetilde{\delta})\right)=\exp\left((1+\widetilde{\delta})^2\gamma\cos(\varrho\arg z)|z|^{\varrho}\right).\tag{3.52}$$

~~~~因此，回到 (3.51)，我们得到存在 $\widetilde{r}\equiv\widetilde{r}(\delta)\ge r'$ 和 $C\equiv C(\delta)>0$，使得对所有满足 $|z|>\widetilde{r}$ 且 $|\arg z|\le\pi/2$ 的 $z\in\rho(L)$，

$$\|(z-L)^{-1}\|\le\frac{\widetilde{C}}{\operatorname{dist}(z,\sigma(L))}\exp\left((1+\widetilde{\delta})^2\gamma\cos(\varrho\arg z)|z|^{\varrho}\right);\tag{3.53}$$
~~~~

~注意，常数 M_1 和 M_2 取决于 δ的选择。

最后，通过令 $\delta = (1+$ ~ $\delta)^2-1$、$C := C$ 以及 $r := \tilde{r}$，即可得到结论 (3.44)。 □

关于 L 的主要结果是以下关于谱投影范数的推论。它依赖于定理 3.3 中的预解式下界范数估计、命题 3.2 和定理 3.5 中 L 的特征值渐近行为。

定理 3.6。设 L 如(3.1)–(3.3)中所述， P_n 如(3.25)中所述， κ如(3.7) 中所述，并且 τ 如(3.17)中所述。令

$$\sigma := \kappa\tau = \frac{b-(a-1)}{1+a}. \tag{3.54}$$

（注意， $\sigma \in (0,1)$。）则存在 $\gamma > 0$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|P_n\|}{\exp(\gamma n^\sigma)} = \infty. \tag{3.55}$$

特别地， L 的特征系统不包含一个基。

证明。我们用反证法。假设谱投影满足

$$\|P_n\| \le M \exp\left(\widetilde{\gamma}(dn)^\sigma\right), \qquad n > N_0, \tag{3.56}$$

其中 $M > 0$、 $d > 0$ 如 (3.10) 所述， σ 如 (3.54) 所述，且 $\widetilde{\gamma} = \gamma d^{-\sigma}$。

考虑这些点

$$z_k = t_k + \mathrm{i}s_k, \quad k > N_0, \tag{3.57}$$

其中

$$t_k := \frac{\operatorname{Re}\lambda_k + \operatorname{Re}\lambda_{k+1}}{2}, \quad k > N_0, \quad s_k = \begin{cases} 0 & \text{if } b \text{ is odd}, \\ \frac{1}{2}c_b t_k^{\frac{b}{2a}} & \text{if } b \text{ is even}, \end{cases} \tag{3.58}$$

其中 N_0 如命题 3.2 所述。

由定理 3.3 可知，存在 $\eta' > 0$，使得对于所有具有充分大的 $N_1 > N_0$ 的 $k > N_1$

$$\|(z_k - L)^{-1}\| \ge \exp(\eta' t_k^\tau). \tag{3.59}$$

确实，若 b 为奇数，则由 (3.19) 得到 $\eta' = \eta$。若 b 为偶数，则我们将 $\varepsilon = c_b/2$ 代入 (3.22)，得到

$$\eta \frac{(\operatorname{Im} z_k)^{\frac{b+1}{b}}}{(\operatorname{Re} z_k)^{\frac{1}{2}}} = \eta \left(\frac{c_b}{2}\right)^{\frac{b+1}{b}} t_k^{\frac{b+1}{2a}-\frac{1}{2}} =: \eta' t_k^\tau. \tag{3.60}$$

另一方面，由定理 3.5 可知，对于 $\varrho = \sigma/\kappa = \tau \in (0, 1/2)$，对任意 $\delta > 0$，存在 $C > 0$，使得对于所有具有充分大 $N_2 > N_1$ 的 $k > N_2$

$$\|(z_k - L)^{-1}\| \le \frac{C}{\operatorname{dist}(z_k, \sigma(L))} \exp\left((1+\delta)\widetilde{\gamma}\cos(\varrho \arg z_k)|z_k|^\tau\right). \tag{3.61}$$

注意，当 $k \to \infty$ 时，$\arg z_k \to 0$。此外，由 (3.11) 可知，$\operatorname{Re}\lambda_k$ 满足

$$\operatorname{Re}\lambda_{k+1} - \operatorname{Re}\lambda_k = \kappa d^\kappa k^{\frac{a-1}{a+1}}(1 + \mathcal{O}(k^{-\frac{1}{a+1}})), \quad k \to \infty, \tag{3.62}$$

因此，序列 $\{\operatorname{Re}\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 最终递增，且其间隔最终一致地为正（事实上，当 $a > 1$ 时趋于无穷大）。因此，$\operatorname{dist}(z_k, \sigma(L))$ 最终一致地为正。总之，对任意 $\delta > 0$，存在 $N_3 > N_2$ 和 $C' > 0$，使得对于所有 $k > N_3$

$$\|(z_k - L)^{-1}\| \le C' \exp\left((1+2\delta)\widetilde{\gamma} t_k^\tau\right). \tag{3.63}$$

因此，我们得出结论：如果 $\widetilde{\gamma} < \eta'$，即 $\gamma < d^\sigma \eta'$，那么 (3.59) 和 (3.63) 相互矛盾。

最后，如果 L 的特征系统具有基性质，那么谱投影 P_n、$n > N_0$ 一致有界。然而，由于 (3.55)，这一条件并不满足。□

注 3.7。在定理 3.6 的证明中，我们利用定理 3.5 得到了 (3.63) 中关于 L 的预解式上界，该上界适用于 (3.57)、(3.58) 中的特殊序列 z_k, $k > N_0$，并由此与定理 3.3 给出的 (3.59) 中预解式下界产生矛盾。尽管如此，对上界 (3.63) 作适当调整后，对所有满足 $\operatorname{dist}(z, \sigma(L)) \geq \varepsilon$ 的 z 仍然成立，且任意 $\varepsilon > 0$ 均适用。事实上，也可以考虑满足 $\operatorname{dist}(z, \sigma(L)) \geq |z|^{-m}$ 的 z，其中某个 $m > 0$ 满足 $\operatorname{Re} z \to \infty$；这会在 (3.63) 的指数中产生一个额外项 $m \log |z| = o((\operatorname{Re} z)^\tau)$。无论哪种情况，都可以得到与下界 (3.59) 的矛盾。

注 3.8. 在带有 $a = b = 1$ 的特殊情形 (3.15) 中，已知

$$\|P_n\| = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\sqrt{|\pi \operatorname{Im} \alpha_1|}} \frac{\exp\left(\sqrt{2}|\operatorname{Im} \alpha_1| n^{\frac{1}{2}}\right)}{n^{\frac{1}{4}}} \left(1 + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})\right), \quad n \to \infty, \tag{3.64}$$

参见 [MSV17, 定理 2.6]。注意，对于 $a = b = 1$，我们有 $\sigma = 1/2$ in (3.55)，因此定理 3.6 中的指数阶 σ 是尖锐的。此外，(3.64) 和定理 3.5 表明（回顾 (3.16)）

$$\|(z - L)^{-1}\| \leq \frac{C}{\operatorname{dist}(z, \sigma(L))} \exp\left((1 + \delta)|\operatorname{Im} \alpha_1||z|^{\frac{1}{2}}(1 + o(1))\right) \tag{3.65}$$

对于所有满足 $|\arg z| \leq \pi/2$ 且 $|z|$ 足够大的 $z \in \rho(L)$，均成立。因此，在此情形下，(3.19) 中的指数阶 $\varrho = 1/2$ 也是尖锐的。

事实上，我们预期 (3.55) 对 lim 也成立，即不仅对某个子序列成立；并且定理 *3.6* 中所有情形下，(3.55) 中的指数阶 σ 都是尖锐的。

3.5. 基性质的缺失。定理 3.6 特别指出，L 的特征系统不包含一个基，因为谱投影 P_n、$n > N_0$ 不一致有界。事实上，若 P_n、$n > N_0$ 一致有界，则关于 $\|(z - L)^{-1}\|$ 会有一个比 (3.44) 严格得多的上界，见下文的 (3.68)、(3.79)。因此，只需 $\|(z - L)^{-1}\|$ 轻微增长，就足以排除 L 的基性质。关于 $L^2(\mathbb{R})$ 中算子的预解式估计

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + |x|^{2a} + \mathrm{i}W(x) \tag{3.66}$$

在 $a > 0$ 以及一系列扰动 W 下所得到的预解式范数的各种增长率，可见 KS19，定理 3.7、例 3.8、定理 5.2、例 5.3]；部分细节见下文第 5.4 小节。

命题 3.9。设 L 如(3.1) – (3.3) 所述，且满足 $a > 1$。设 P_n、$n > N_0$如(3.25) 所述，并假设存在 $M > 0$ 使得

$$\|P_n\| \leq M, \qquad n > N_0. \tag{3.67}$$

那么存在 $C > 0$ 和 $r > 0$，使得对于所有满足 $|z| \geq r$ 和$|\arg z| \leq \pi/2$的 $z \in \rho(L)$

$$\|(z - L)^{-1}\| \leq \frac{C|z|}{\operatorname{dist}(z, \sigma(L))}. \tag{3.68}$$

证明。我们像在 (3.30) 中那样，利用一个非常单的规范函数$\Phi(w) = w + 1$对 L 的预解式进行正则化。事实上，这相当于第一预解式恒等式

$$(z - L)^{-1} - (-1 - L)^{-1} = (z + 1)(z - L)^{-1}(1 + L)^{-1}, \quad z \in \rho(L). \tag{3.69}$$

对于所有 $h \in \mathcal{D}_L$，参见 (3.36)，我们有（回忆 (3.29)）

$$(z-L)^{-1}(1+L)^{-1}h = (1+L)^{-1}(z-LS_0)^{-1}S_0h + \sum_{j=N_0+1}^{N(h)} \frac{1}{(1+\lambda_j)(z-\lambda_j)} P_j h. \quad (3.70)$$

因此，利用 (3.49)、带有 $a_n = 1$ 的 (3.47) 以及 (3.67)，我们得到 $|z| \geq 2\|LS_0\|$ 的

$$\begin{aligned} \|(z-L)^{-1}(1+L)^{-1}h\|1 &\leq \frac{2\|S_0\|}{|z|}\|h\| + \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \frac{M}{(1+\operatorname{Re}\lambda_j)|z-\lambda_j|}\|h\| \\ &\leq \frac{2\|S_0\|}{|z|}\|h\| + \frac{M}{\operatorname{dist}(z,\sigma(L))} \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{1+\operatorname{Re}\lambda_j}\|h\|. \end{aligned} \quad (3.71)$$

由于 $a > 1$，因此 $\kappa > 1$，见 (3.7)，(3.9) 中 $\operatorname{Re}\lambda_j$ 的渐近表达式给出

$$M' := \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{1+\operatorname{Re}\lambda_j} < \infty. \quad (3.72)$$

因此，对所有 $|z| \geq 2\|LS_0\| + 1$,

$$\|(z-L)^{-1}(1+L)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\sigma(L))}\left(\frac{2\|S_0\|}{|z|} + MM'\right). \quad (3.73)$$

回到 (3.69)，可得对所有 $|z| \geq 2\|LS_0\|$

$$\begin{aligned} \|(z-L)^{-1}\| &\leq \|(1+L)^{-1}\| + |z+1|\|(z-L)^{-1}(1+L)^{-1}\| \\ &\leq 1 + \frac{|z+1|}{\operatorname{dist}(z,\sigma(L))}\left(\frac{2\|S_0\|}{|z|} + MM'\right), \end{aligned} \quad (3.74)$$

因此，结论 (3.68) 得证。 □

Rema定理 3.10. 设谱投影 P_n、 $n > N_0$ 满足多项式界

$$\|P_n\| \leq Mn^{\sigma}, \quad n > N_0, \quad (3.75)$$

其中 M， $\sigma > 0$。于是存在 $C > 0$ 和 $r > 0$，使得对于所有满足$|z| \geq r$和 $|\arg\ z| \leq \pi/2$ 的 $z \in \rho(L)$,

$$\|(z-L)^{-1}\| \leq \frac{C|z|^m}{\operatorname{dist}(z,\sigma(L))}, \quad (3.76)$$

其中

$$m = \left\lfloor \frac{\sigma+1}{\kappa} \right\rfloor + 1. \quad (3.77)$$

证明与命题 3.9 的证明类似，使用带有此 m 和 $a_k = k$的多项式规范 (3.32)。(3.76)中的界可以看作是 [Dav00，定理 3]的更定量化版本。

注记 3.11. 事实上，可以对 (3.71) 中的级数给出更精确的估计，从而改进 (3.68)。具体而言，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $C' > 0$，使得对所有满足 $|z| \geq e$、 $|\arg\ z| \leq \pi/2$ 且 $\operatorname{dist}(z,\sigma(L)) \geq \varepsilon$ 的 $z \in \rho(L)$, 均有

$$\sum_{j=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{(1+\operatorname{Re}\lambda_j)|z-\lambda_j|} \leq C' \begin{cases} \dfrac{\log|z|}{|z|} & \text{if } a = 1, \\ \frac{1}{|z|} & \text{if } a > 1. \end{cases} \quad (3.78)$$

利用 (3.9) 和 (3.11) 中 Re λ_j 的渐近行为，可以像 [MS19a, 引理 4.3] 那样证明这一估计。因此，对所有满足 $|z| \geq r$、$|\arg z| \leq \pi/2$ 且 $\operatorname{dist}(z, \sigma(L)) \geq \varepsilon$ 的 $z \in \rho(L)$，估计 (3.68) 可改进为

$$\|(z-L)^{-1}\| \leq \widetilde{C} \begin{cases} \log|z| & \text{if } a = 1, \\ 1 & \text{if } a > 1, \end{cases} \tag{3.79}$$

~ ~与 $C \equiv C(\varepsilon) > 0$。

4. Faster resolvent growth

定理 3.5 的证明表明，对于具有 L 特性的抽象算子 T，也可以得到相同的结论（事实上，这是下文中 $p = 1$ 对应的定理 4.3，参见注 4.2）。然而，如果预解式范数的指数阶大于 $1/2$，这种策略便不再适用，例如虚非谐振子的情形，见下文的 (4.57) 和 (4.64)。这一局限源于命题 2.4 中的部分分式分解；若对谱的位置和预解式增长作出额外假设，则可以克服这一局限。

出发点是分解式 (2.34) 或 (2.36)。对于任意 $p \in \mathbb{N}$，经过代换和直接运算，在命题 2.4 的设定下可得

$$\frac{1}{(z^p - w^p)F(w^p)} = \frac{1}{F(z^p)(z^p - w^p)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^p + a_n)F'(-a_n)(w^p + a_n)}, \tag{4.1}$$

thus

$$\frac{1}{(z-w)F(w^p)} = \frac{1}{F(z^p)(z-w)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} w^k z^{p-1-k}}{(z^p + a_n)F'(-a_n)(w^p + a_n)}. \tag{4.2}$$

由于 $|F'(-a_n)|$ 呈指数增长，见 (2.32)，如果进一步假设 T 的预解式范数在 $\mathbb{C}$中的特殊射线上不会增长过快，则 (4.2) 中求和的附加项可以得到补偿。例如，对于 $p = 2$，需要控制的主项为

$$\begin{aligned} \|T(a_n + T^2)^{-1}\| &\leq \|T(\mathrm{i}a_n^{\frac{1}{2}} + T)^{-1}\| \|(-\mathrm{i}a_n^{\frac{1}{2}} + T)^{-1}\| \\ &\leq (1 + a_n^{\frac{1}{2}} \|(\mathrm{i}a_n^{\frac{1}{2}} + T)^{-1}\|) \|(-\mathrm{i}a_n^{\frac{1}{2}} + T)^{-1}\|, \end{aligned} \tag{4.3}$$

因此，至少在虚轴上，在数列 $\{\mathrm{i}a_n^{1/2}\}$、$\{-\mathrm{i}a_n^{1/2}\}$ 上，T 的预解式范数相较于 $|F'(-a_n)|$ 应增长得足够慢。

在 $\varrho = 1/2$ 的情形下采取类似步骤，并结合 (2.36)，可得恒等式

$$\frac{1}{(z-w)F(w^p)} = \frac{1}{F(z^p)(z-w)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{z^p + a_n} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} w^k z^{p-1-k}}{w^p + a_n}. \tag{4.4}$$

4.1. 从投影到抽象 T 的预解式。

假设 4.1. 设 T 是可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中具有紧预解式的闭算子，并将 T 的特征值记为 λ_n、$n \in \mathbb{N}$（按代数重数重复，并按如下方式排序：$|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$）。设 $p \in \mathbb{N}$，并假设

(i) T 的谱包含在一个圆盘和一个扇形的并集中（带有一些 $R > 0$和 $\epsilon_0 \in (0, 1]$）

$$\sigma(T) \subset B_R(0) \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq (1 - \epsilon_0)\frac{\pi}{p} \right\}; \tag{4.5}$$

(ii) 在 $\mathbb{C}$中的以下射线上，预解式范数是多项式有界的

$$\|(re^{\mathrm{i}\frac{\pi}{p}(1+2k)}-T)^{-1}\|\le Kr^N,\quad r\ge R+1,\quad k=0,1,\dots,p-1, \tag{4.6}$$

其中 $K\ge 1$ 和 $N\in[-1,\infty)$；

(iii) 存在 $R_0>R>0$，使得对所有满足 $|\lambda|>R_0$ 的 $\lambda\in\sigma(T)$，几何重数与代数重数相等；

(iv) 谱投影系 Q_λ、$\lambda\in\sigma(T)$ 在 $\mathcal{H}$ 中完备；

(v) 特征值 λ_n 满足

$$|\lambda_n|\ge cn^\kappa,\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{4.7}$$

其中某个 $c,\ \kappa>0$。

注 4.2。(3.1) 中的算子 L 满足假设 4.1，且 $p=1$。由 (3.4)、(3.5) 可知，对任意 $\epsilon_0\in(0,1)$，存在 $R>0$，使得 L 的谱满足 (4.5)，其中$p=1$；此外，预解估计 (4.6) 对 $N=-1$ 成立，参见第 2.1 小节，尤其是 (2.11) 附近。根据命题 3.2，L 的特征值 λ_n 在 $n>N_0$ 时为单的；而当 $n>N_0$ 时，谱投影 $P_n\equiv Q_{\lambda_n}$ 的秩为 1。由命题 3.1 (iii) 可知，谱投影完备。最后，命题 3.2 中的特征值渐近行为可证 (4.7)。事实上，要验证 (4.7) 成立，只需利用奇异值的行为 (3.6)，参见 (2.3)。

定理 4.3. 设假设 *4.1* 成立。假设

$$\|Q_\lambda\|\le\exp\left(\gamma|\lambda|^{p\varrho}(1+o(1))\right),\quad \lambda\in\sigma(T),\ |\lambda|\to+\infty, \tag{4.8}$$

对某些 $\gamma>0$ 和 $\varrho>0$。若 $\varrho<1/2$ 或

$$\varrho=\frac{1}{2}\quad and\quad N<-1+\frac{1}{2p}, \tag{4.9}$$

那么对任意 $\epsilon_1\in(0,1]$ 以及任意 $\delta>0$，存在 $C\equiv C(\epsilon_1,\delta)>0$ 和 $r\equiv r(\epsilon_1,\delta)>0$，使得对所有满足 $|z|>r$ 且 $|\arg z|\le(1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 $z\in\rho(T)$，

$$\|(z-T)^{-1}\|\le\frac{C}{\operatorname{dist}(z,\sigma(T))}\exp\left((1+\delta)\gamma\frac{\cos(p\varrho\arg z)}{\cos\left((1-\epsilon_0)\pi\varrho\right)}|z|^{p\varrho}\right). \tag{4.10}$$

证明。我们沿用定理 3.5 证明中的步骤。

考虑如 (2.28) 中的 F，其中 a_k、$k\in\mathbb{N}$ 满足 (2.31)，即

$$a_n:=\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\varrho}},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{4.11}$$

其中 $\varrho\le 1/2$ 如 (4.8) 中所示，且

$$\nu:=\gamma\frac{\sin(\pi\varrho)}{\pi}\frac{1}{\cos\left((1-\epsilon_0)\pi\varrho\right)}(1+\delta). \tag{4.12}$$

注意，只需对所有 $\delta\in(0,\delta_*)$（其中 $\delta_*\in(0,1)$）证明断言 (4.10) 即可（因为这样一来，(4.10) 对任意 $\delta\ge\delta_*$ 都成立）。我们选取充分小的 $\delta_*>0$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 以及所有 $\delta\in(0,\delta_*)$，都有 $F(\lambda_n^p)\neq 0$。这是可能的，因为 $\lambda_n^p<0$ 只有有限多个，因此至多只有有限多个 $\delta\in(0,1)$ 可能存在满足 $n\in\mathbb{N}$ 的 $\lambda_n^p\in\{-a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$。

对于每个 $z\in\rho(T)$，考虑算子

$$B_zh:=\sum_{\substack{\lambda\in\sigma(T)\\ R_0<|\lambda|<R(h)}}\frac{1}{z-\lambda}\frac{1}{F(\lambda^p)}Q_\lambda h, \tag{4.13}$$

定义在 $\mathcal{H}$ 的一个稠密子空间上

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_T := \big\{h \in \mathcal{H} \,:\, &\text{there exists } \ R(h) > R_0 \text{ such that } Q_\lambda h = 0 \\ &\text{for all } \lambda \in \sigma(T) \text{ with } \ |\lambda| > R(h)\big\},\end{aligned} \tag{4.14}$$

参见 (3.28)。因此，根据命题 2.3 以及关于 T 的谱位置的假设 (4.5)，我们可以选取足够大的 $r_\delta > R_0$，使得

$$\begin{aligned}|F(\lambda^p)| &\geq \exp\left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{4}}\pi\nu|\lambda^p|^\varrho\frac{\cos\left(\arg(\lambda^p)\varrho\right)}{\sin(\pi\varrho)}\right) \\ &\geq \exp\left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{4}}\pi\nu|\lambda|^{p\varrho}\frac{\cos\left((1-\epsilon_0)\pi\varrho\right)}{\sin(\pi\varrho)}\right) \\ &= \exp\left(\frac{4+4\delta}{4+\delta}\gamma|\lambda|^{p\varrho}\right), \quad \lambda \in \sigma(T),\ |\lambda| > r_\delta;\end{aligned} \tag{4.15}$$

在最后一步中用到了 (4.12) 中对 ν 的选择。假设 (4.8) 表明，还可以选取足够大的 r_δ，使得

$$\|Q_\lambda\| \leq \exp\left(\gamma|\lambda|^{p\varrho}\frac{4+2\delta}{4+\delta}\right), \quad \lambda \in \sigma(T),\ |\lambda| > r_\delta. \tag{4.16}$$

因此

$$\|B_z h\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\sigma(T))}\sum_{\substack{\lambda\in\sigma(T)\\ R_0<|\lambda|\leq R(h)}}\frac{\|Q_\lambda\|}{|F(\lambda^p)|}\|h\| \leq \frac{M_1}{\operatorname{dist}(z,\sigma(T))}\|h\| \tag{4.17}$$

其中

$$M_1 = \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(T)\\ R_0<|\lambda|}}\frac{\|Q_\lambda\|}{|F(\lambda^p)|} \leq \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(T)\\ R_0<|\lambda|}}\exp\left(-\gamma\frac{2\delta}{4+\delta}|\lambda|^{p\varrho}\right). \tag{4.18}$$

条件 (4.7) 保证了 (4.18) 中右侧的求和是有限的。

在第二步中，对于 $\varrho < 1/2$，我们使用并分析展开式 (4.2)；对于 $\varrho = 1/2$，则使用并分析 (2.36)。为此，我们先给出估计 (4.21) 和 (4.22)。

我们有

$$T(T-\zeta)^{-1} = 1 + \zeta(T-\zeta)^{-1}, \quad \zeta \in \rho(T), \tag{4.19}$$

并且对于任意的 $v > 0$ 和 $k = 0, \ldots, p-1$

$$\begin{aligned}v^p + T^p &= \prod_{j=0}^{p-1}\left(T - ve^{\mathrm{i}\frac{\pi}{p}(1+2j)}\right), \\ T^k(v^p+T^p)^{-1} &= \left(\prod_{j=0}^{k-1}T\left(T - ve^{\mathrm{i}\frac{\pi}{p}(1+2j)}\right)^{-1}\right)\left(\prod_{j=k}^{p-1}\left(T - ve^{\mathrm{i}\frac{\pi}{p}(1+2j)}\right)^{-1}\right).\end{aligned} \tag{4.20}$$

因此，利用条件 (4.6)，对于任意 $k = 0, \ldots\ldots, p-1$ 以及 $v \geq R+1$

$$\begin{aligned}\|T^k(v^p+T^p)^{-1}\| &\leq \left(\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 + v\|(ve^{\mathrm{i}\frac{\pi}{p}(1+2j)} - T)^{-1}\|\right)\right)\prod_{j=k}^{p-1}\|(ve^{\mathrm{i}\frac{\pi}{p}(1+2j)} - T)^{-1}\| \\ &\leq \left(\prod_{j=0}^{k-1}(1+Kv^{1+N})\right)\prod_{j=k}^{p-1}Kv^N \leq (2K)^p v^{pN+k}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

接下来，我们验证对于满足 $|\arg z| \le (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的所有 z 以及所有 $v>0$,

$$|z^p+v^p| \ge 2^{1-p}\left(\sin\frac{\pi\epsilon_1}{2}\right)(|z|+v)^p. \tag{4.22}$$

事实上，令 $\psi \equiv \pi(1-\epsilon_1)$，首先注意到

$$|p\arg z| \le \psi, \quad \cos(p\arg z) \ge \cos\psi, \quad \cos\frac{\psi}{2} = \sin\frac{\pi\epsilon_1}{2}. \tag{4.23}$$

于是，(4.22) 可如下证明

$$\begin{aligned}
|z^p+v^p|^2 &= (|z|^p\cos(p\varphi)+v^p)^2 + (|z|^p\sin(p\varphi))^2 \\
&= |z|^{2p} + 2|z|^p v^p\cos(p\arg z) + v^{2p} \ge |z|^{2p} + 2|z|^p v^p\cos\psi + v^{2p} \\
&= (1-\cos\psi)(|z|^{2p}+v^{2p}) + (|z|^p+v^p)^2\cos\psi \\
&\ge \left(\frac{1}{2}(1-\cos\psi)+\cos\psi\right)(|z|^p+v^p)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\psi)(|z|^p+v^p)^2 \\
&= \left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2(|z|^p+v^p)^2 = \left(\sin\frac{\pi\epsilon_1}{2}\right)^2(|z|^p+v^p)^2 \\
&\ge 2^{2(1-p)}\left(\sin\frac{\pi\epsilon_1}{2}\right)^2(|z|+v)^{2p}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

下面分别讨论这两种情况。

• $\varrho < 1/2$： 与 (3.46) 类似，我们得到，对于所有满足 $|\arg z| \le (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 $h \in \mathcal{D}_T$ 和 $z \in \rho(T)$,

$$\begin{aligned}
B_z h = &\frac{1}{F(z^p)}(z-T)^{-1}(h-S_0h) \\
&+ \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{p-1-k}}{z^p+a_n}\frac{1}{F'(-a_n)}T^k(a_n+T^p)^{-1}(h-S_0h).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

注意到 $-a_n \in \rho(T^p)$, $n\in\mathbb{N}$, 因为上文选取 a_n 时满足 $F(\lambda_n^p) \ne 0, n\in\mathbb{N}$。回顾 $a_n>0$ 和 $|F'(-a_n)|$ 呈指数增长（见 (2.32)），利用 (4.21) 和 (4.22)，我们得到，对于满足 $|\arg z| \le (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 z

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{p-1-k}}{z^p+a_n}\frac{1}{F'(-a_n)}T^k(a_n+T^p)^{-1}(I-S_0)\right\| \\
&\le \frac{\|(I-S_0)\|}{2^{1-p}\sin\frac{\pi\epsilon_1}{2}}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{p-1-k}}{(|z|+a_n^{\frac{1}{p}})^p}\frac{\|T^k(a_n+T^p)^{-1}\|}{|F'(-a_n)|} \\
&\le \frac{\|(I-S_0)\|}{2^{1-p}\sin\frac{\pi\epsilon_1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|T^k(a_n+T^p)^{-1}\|}{|F'(-a_n)|}\right)\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{|z|^{p-1-k}}{|z|^p}\right) = \mathcal{O}(|z|^{-1}),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

作为 $z\to\infty$。按照（3.50）中的类似方式重新整理 (4.25)，利用 $\mathcal{D}_T$ 在 $\mathcal{H}$ 中的稠密性以及估计 (4.17)、(4.26) 和 (3.49) 的类似结果，我们得到对于满足 $|\arg z| \le (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 z

$$\|(z-T)^{-1}\| \le |F(z^p)|\left(\frac{M_1}{\operatorname{dist}(z,\sigma(T))}+\mathcal{O}(|z|^{-1})\right)+\mathcal{O}(|z|^{-1}), \quad z\to\infty. \tag{4.27}$$

- $\varrho = 1/2$: 我们使用 (4.4) 而不是 (4.2)。将 (4.4) 改写为以下形式

$$\begin{aligned}\frac{1}{F(z^p)(z-w)} = \frac{1}{F(w^p)(z-w)} &- 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^p}{z^p+a_n}\frac{\sum_{k=0}^{p-1} w^k z^{p-1-k}}{w^p+a_n} \\ &+ 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sum_{k=0}^{p-1} w^k z^{p-1-k}}{w^p+a_n}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

与 (3.46) 中一样，我们得到对所有 $h \in \mathcal{D}_T$ and $z \in \rho(T)$，均有

$$\begin{aligned}\frac{1}{F(z^p)}(z-T)^{-1}(h-S_0h) = B_z h &- 2\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2p-1-k}}{z^p+a_n} T^k (a_n+T^p)^{-1}h \\ &+ 2\sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n T^k (a_n+T^p)^{-1}h.\end{aligned} \tag{4.29}$$

(4.29) 右侧的第一项求和可利用 (4.21) 和 (4.22) 以直接方式估计。具体而言，对于满足 $|\arg z| \le (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 z，对所有 $a_n \ge (R+1)^p$，均有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{|z|^{2p-1-k}}{|z^p+a_n|}\|T^k(a_n+T^p)^{-1}\| &\le (2K)^p \frac{2^{p-1}}{\sin\frac{\pi\epsilon_1}{2}}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{|z|^{2p-1-k}}{(|z|+a_n^{\frac{1}{p}})^{p-k+k}} a_n^{N+\frac{k}{p}} \\ &\le p(2K)^p \frac{2^{p-1}}{\sin\frac{\pi\epsilon_1}{2}}|z|^{p-1}a_n^N.\end{aligned} \tag{4.30}$$

利用 (4.9) 中关于 N 的条件，我们有

$$N < -1 + \frac{1}{2p} \le -\frac{1}{2}, \tag{4.31}$$

因此，回想起 (4.11) 中的 $\varrho = 1/2$，我们得到，对于满足 $|\arg z| \le (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 z

$$\left\|\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2p-1-k}}{z^p+a_n} T^k (a_n+T^p)^{-1}\right\| = \mathcal{O}(|z|^{p-1}), \quad z\to\infty. \tag{4.32}$$

我们将 (4.29) 右侧的第二项求和改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k}\sum_{n=1}^{\infty} T^k\left((a_{2n}+T^p)^{-1} - (a_{2n-1}+T^p)^{-1}\right)h \\ &\quad = \sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k}\sum_{n=1}^{\infty} T^k\left((a_{2n-1}-a_{2n})(a_{2n}+T^p)^{-1}(a_{2n-1}+T^p)^{-1}\right)h.\end{aligned} \tag{4.33}$$

利用 (4.21)，我们得到，对于所有 $k = 0,\dots,p-1$ 以及所有 $a_n \ge (R+1)^p$

$$\begin{aligned}&\|(a_{2n-1}-a_{2n})T^k(a_{2n}+T^p)^{-1}(a_{2n-1}+T^p)^{-1}\| \\ &\quad \le |a_{2n-1}-a_{2n}|\|T^k(a_{2n}+T^p)^{-1}\|\|(a_{2n-1}+T^p)^{-1}\| \\ &\quad \le |a_{2n-1}-a_{2n}|(2K)^p a_{2n}^{N+\frac{k}{p}} K a_{2n-1}^N = \mathcal{O}(a_n^{2N+\frac{3}{2}-\frac{1}{p}}), \quad n\to\infty,\end{aligned} \tag{4.34}$$

其中最后一步我们使用了 $|a_{2n-1}-a_{2n}| = \mathcal{O}(a_n^{1/2})$ 作为 $n\to\infty$，见 (4.11)，其中 $\varrho = 1/2$。由 (4.9) 中关于 N 的条件可得

$$2N + \frac{3}{2} - \frac{1}{p} < -\frac{1}{2}, \tag{4.35}$$

因此，对于满足 $|\arg\ z| \leq (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 z，我们得到

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k} T^k (a_n + T^p)^{-1} \right\| = \mathcal{O}(|z|^{p-1}), \quad z \to \infty. \tag{4.36}$$

与论证 (4.27) 时类似的推理表明，对于满足 $|\arg\ z| \leq (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 z

$$\|(z-T)^{-1}\| \leq |F(z^p)| \left(\frac{M_1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(T))} + \mathcal{O}(|z|^{p-1}) \right) + \mathcal{O}(|z|^{-1}), \quad z \to \infty. \tag{4.37}$$

最后，(4.10) 中的结论由 (4.27) 或 (4.37)、(2.30) 以及 (4.12) 中对 ν 的选择得出。（注意，(4.37) 中的 $\mathcal{O}(|z|^{p-1})$ 可以吸收到 (4.10) 中的余项 $o(1)$ 里。更多细节请参见下文定理 3.5 证明中 (3.51) 之后的部分。）□

注 4.4. 假设除了定理 4.3 的假设之外，

$$\lim_{n\to\infty} \arg \lambda_n = \vartheta_0 \in (-\tfrac{\pi}{p}, \tfrac{\pi}{p}); \tag{4.38}$$

此类算子的一个例子见下文第 4.2 小节。那么对于任意 $\epsilon_1 \in (0,1]$ 和任意 $\delta > 0$，存在 $C \equiv C(\epsilon_1, \delta) > 0$ 以及 $r \equiv r(\epsilon_1, \delta) > 0$，使得对于所有满足 $|z| > r$ 且 $|\arg\ z| \leq (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 $z \in \rho(T)$，

$$\|(z-T)^{-1}\| \leq \frac{C}{\operatorname{dist}(z, \sigma(T))} \exp\left((1+\delta)\gamma \frac{\cos(p\varrho \arg z)}{\cos(p\varrho\vartheta_0)} |z|^{p\varrho} \right). \tag{4.39}$$

事实上，在 (4.15) 中，无需使用 $\cos(\arg(\lambda^p)\varrho) \geq \cos((1-\epsilon_0)\pi\varrho)$，只需注意到

$$\cos(\arg(\lambda^p)\varrho) = \cos(p\varrho\vartheta_0)(1+o(1)), \quad \lambda \in \sigma(T),\ \lambda \to \infty, \tag{4.40}$$

并相应地调整 (4.12) 以及 (4.15) 中的第二个估计。细节从略。

我们针对数值域包含在“抛物线”区域内的算子 T 给出定理 4.3 的一个推论，参见第 2.1 小节中的 (2.11)。此类算子的一个例子见 L(3.1) 和命题 3.1。

推论 4.5。 设 T 是可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的一个具有紧预解式的闭算子，并且 T 的数值域满足 (2.11)、(2.12)。设 T^{-1} 的奇异值$\mathfrak{s}_k$ 满足

$$\mathfrak{s}_k = \mathcal{O}(k^{-\frac{1}{\kappa}}), \quad k \to \infty, \tag{4.41}$$

对某个 $\kappa > 0$ 成立，并且存在 $R_0 > 0$，使得对于所有满足 $|\lambda| > R_0$的 $\lambda \in \sigma(T)$，几何重数与代数重数相同。假设

$$\|Q_\lambda\| \leq \exp\left(\gamma |\lambda|^{p\varrho}(1+o(1))\right), \quad \lambda \in \sigma(T),\ |\lambda| \to +\infty, \tag{4.42}$$

对某些 $\gamma > 0$, $p \in \mathbb{N}$ 和 $\varrho \in (0, 1/2]$。那么，对于任意 $\epsilon_1 \in (0,1]$ 以及任意 $\delta > 0$，都存在 $C \equiv C(\epsilon_1, \delta) > 0$ 和 $r \equiv r(\epsilon_1, \delta) > 0$，使得对所有满足 $|z| > r$ 且 $|\arg\ z| \leq (1-\epsilon_1)\pi/p$ 的 $z \in \rho(T)$，

$$\|(z-T)^{-1}\| \leq \frac{C}{\operatorname{dist}(z, \sigma(T))} \exp\left((1+\delta)\gamma \cos(p\varrho \arg z)|z|^{p\varrho}\right). \tag{4.43}$$

证明。 我们验证假设 4.1 中的条件。 T 的谱包含于 Num(T) 中，因此对于任意 $p \in \mathbb{N}$ 和任意 $\epsilon_0 > 0$（取充分大的 $R > 0$），(4.5) 均成立。事实上，在这种情况下，我们甚至有带 $\vartheta_0 = 0$ 的 (4.38)。此外，由于 (4.41)，(4.7) 也成立，见第 2.1 小节。

我们有预解式界 (2.15)，因此 (4.6) 在 $N=-1$ 下成立（另请注意，若 $\varrho=1/2$，则满足 (4.9) 中对 N 的限制）。由于对于任意 $\varepsilon>0$，$T^{-1}\in\mathcal{S}_{\frac{1}{\kappa}+\varepsilon}$，见 (4.41),- 由命题 2.1 可得谱投影 Q_λ、 $\lambda\in\sigma(T)$ 的完备性，见第 2.1 小节。

特征 值的代数重数和几何重数相等。

因此，将 $p\in\mathbb{N}$ 和 $\varrho\in(0,\ 1/2]$ 按照 (4.42) 代入定理 4.3，并结合注 4.4 中的 $\vartheta_0=0$，即可得出该结论。□

与定理 3.6 类似，预解式范数的下界可以传递到谱投影。

推论 4.6. 设 T 满足关于 $p\in\mathbb{N}$ 的假设 *4.1*，且存在 $\epsilon_1\in(0,1]$ 以及一条连续曲线

$$\Gamma:\mathbb{R}_+\to\left\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}z\geq 1,|\arg z|\leq(1-\epsilon_1)\frac{\pi}{p}\right\} \tag{4.44}$$

使得 $|\Gamma(t)|\to+\infty$ 当 $t\to+\infty$ 时成立，并且对于某些 η、$r>0$ 和 $\tau\leq p/2$,

$$\|(z-T)^{-1}\|\geq\exp(\eta|z|^\tau),\quad z\in\operatorname{Im}(\Gamma)\cap\rho(T),\ |z|>r. \tag{4.45}$$

若 $\tau=p/2$，则进一步假设 N *in* (4.6) 满足 $N<-1+1/(2p)$。

那么，对于每个 $\gamma\in(0,\gamma_0)$，其中（ϵ_0 取自 (4.5)）

$$\gamma_0=\eta\cos\left((1-\epsilon_0)\frac{\tau}{p}\pi\right), \tag{4.46}$$

我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|Q_{\lambda_n}\|}{\exp(\gamma|\lambda_n|^\tau)}=\infty. \tag{4.47}$$

此外，若

$$\lim_{n\to\infty}\arg\lambda_n=\vartheta_0\in(-\tfrac{\pi}{p},\tfrac{\pi}{p}), \tag{4.48}$$

则对所有满足以下条件的 $\gamma\in(0,\gamma_0)$，(4.47) 成立:

$$\gamma_0=\eta\cos\left(\tau\vartheta_0\right). \tag{4.49}$$

证明。我们用反证法。假设存在 $r>0$，使得对所有满足 $|\lambda|>r$ 的$\lambda\in\sigma(T)$,

$$\|Q_\lambda\|\leq\exp(\gamma|\lambda|^\tau)=\exp(\gamma|\lambda|^{p\varrho}), \tag{4.50}$$

其中 $\varrho=\tau/p\leq 1/2$。

由于假设 (4.7) 和 [Agr95，引理 3], 给出 $c>0$ 以及一个严格递增序列 $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$，使得

$$|\lambda_{j_k+1}|-|\lambda_{j_k}|\geq c|\lambda_{j_k+1}|^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \tag{4.51}$$

我们选取点 z_k，使其位于 Im(Γ) 中，并满足

$$|z_k|=\frac{|\lambda_{j_k+1}|+|\lambda_{j_k}|}{2},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{4.52}$$

由于

$$|z_k|\leq|\lambda_{j_k+1}|\leq 2|z_k|, \tag{4.53}$$

我们得到

$$\operatorname{dist}(z_k,\sigma(T))\geq\frac{c}{2}|\lambda_{j_k+1}|^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\geq\frac{c}{2}\min\{1,2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\}|z_k|^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}=:c'_\kappa|z_k|^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \tag{4.54}$$

应用定理 4.3，我们得到

$$\begin{aligned}\|(z_k-T)^{-1}\| &\le \frac{C}{\operatorname{dist}(z_k,\sigma(T))}\exp\left((1+\delta)\gamma\frac{\cos(p\varrho\arg z_k)}{\cos\left((1-\epsilon_0)\pi\varrho\right)}|z_k|^{p\varrho}\right)\\ &\le \exp\left((1+\delta)\gamma\frac{1}{\cos\left((1-\epsilon_0)\pi\varrho\right)}|z_k|^{\tau}-\frac{\kappa-1}{\kappa}\log|z_k|+\log\frac{C}{c'_\kappa}\right)\\ &= \exp\left((1+\delta)\gamma\frac{1}{\cos\left((1-\epsilon_0)\pi\frac{\tau}{p}\right)}|z_k|^{\tau}(1+o(1))\right),\quad k\to\infty.\end{aligned} \tag{4.55}$$

然而，这与 (4.45) 矛盾，因为 $z=z_k$ if

$$\gamma<\eta\cos\left((1-\epsilon_0)\pi\frac{\tau}{p}\right). \tag{4.56}$$

最后，若还满足 (4.48)，则可使用 (4.39)，由此得到的 $\|(z_k-T)^{-1}\|$ 估计与 (4.55) 类似，它对所有满足 γ_0 in (4.49) 的 $\gamma<\gamma_0$ 都与 (4.45) 矛盾。□

4.2. **虚偶非谐振子**。令 $b\in(0,\infty)$，并考虑虚偶振子

$$H=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\mathrm{i}|x|^b,\quad \operatorname{Dom}(H)=\{f\in H^2(\mathbb{R}):|x|^bf(x)\in L^2(\mathbb{R})\}, \tag{4.57}$$

其研究尤其见于 [Dav99; Dav00; Hen12; Hen14a]。我们总结 H 的已知性质。

命题 4.7。设 H 如 (4.57) 所示，其中 $b\in(0,\infty)$。则

(i) H 的数值域满足

$$\operatorname{Num}(H)\subset\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z\ge 0,\operatorname{Im}z\ge 0\}; \tag{4.58}$$

(ii) H 是 m-耗散的，且具有紧预解式，此外

$$\mathfrak{s}_k((1+H)^{-1})=\mathcal{O}(k^{-\kappa}),\quad k\to\infty, \tag{4.59}$$

其中

$$\kappa=\frac{2b}{b+2}; \tag{4.60}$$

(iii) H 的谱由无穷多个单特征值 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 组成，其形式为

$$\lambda_n=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{b+2}}\mu_n,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{4.61}$$

其中，$\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是(2.25) 中具有 $l=b$ 的自伴非谐振子 G_0 的特征值；

(iv) 若 $b>2/3$，则与 H 的特征值 λ_n 相关的一维黎斯投影系统 $P_n\equiv Q_{\lambda_n}$, $n\in\mathbb{N}$（见(2.4)，其中 $T=H$）在 $L^2(\mathbb{R})$ 中完备；(v) 当 $r\to+\infty$ 时，我们有

$$\|(\mathrm{i}r-H)^{-1}\|=\mathcal{O}\left(r^{-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{b}\right)}\right),\qquad \|(r-H)^{-1}\|=\mathcal{O}\left(r^{-\frac{1}{2}\frac{b}{b+1}}\right); \tag{4.62}$$

(vi) 对于任意 $\varepsilon\in(0,\pi/4)$，存在 $\eta,R>0$，使得对所有满足以下条件的 $z\in\rho(H)$

$$|z|>R\quad and\quad \arg z\in\left[\varepsilon,\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right], \tag{4.63}$$

我们有（其中 κ 如(4.60)所示）

$$\|(z-H)^{-1}\|\ge\exp(\eta|z|^{\frac{1}{\kappa}}). \tag{4.64}$$

证明。 (i) 数值域 (4.58) 的包络可通过直接估计得到。

(ii) 关于 m-增生性和预解式的紧性，见第 2.2 小节。通过比较 H 与 G_0，可知 $l = b$的估计 (4.59) 可由第 2.2 小节中的 (2.24) 得出。

(iii) 这一结论基于 (2.26) 和复伸缩，参见例如 [Dav00]，[RS78，第 XIII 章.10]。

(iv) 由 (4.59) 可知，对于任意 $\varepsilon > 0$， H的预解式属于 $\mathcal{S}_{\frac{1}{\kappa}+\varepsilon}$。注意，对于$b > 2/3$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} < 2. \tag{4.65}$$

由数值域的包含关系 (4.58) 和预解式界 (2.6)，可得对于每个 $\omega \in [\pi/2, 3\pi/2]$

$$\|(re^{\mathrm{i}\omega} - (H + e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}))^{-1}\| = \mathcal{O}(1), \qquad r \to +\infty. \tag{4.66}$$

因此，完备性的结论可由命题 2.1 得出。

(v) 参见 [AS23，第 3.2 定理、第 4.2 定理、第 5.3、5.4 和 7.1] 节；另参见 [Bou02；Pra06；Bor13]。

(vi) 证明遵循附录 B 中针对 L 由 (3.1) 得出的论证，这些论证在技术上对 H略为简单。详情请参见 [DSZ04] 或 [Kre+15，定理 1，第 VII 节]；另见[Dav99；KS19]。□

推论 4.6 给出了以下关于 H的谱投影的结果，参见 L定理 3.6。

定理 4.8。 设 H 如 (4.57) 中所述，其中 $b \in (2/3, \infty)$，且设 P_n, $n \in \mathbb{N}$为与特征值 λ_n 对应的 H的一维黎斯投影，见 (4.61)。则存在 $\gamma > 0$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|P_n\|}{\exp(\gamma n)} = \infty. \tag{4.67}$$

证明。我们将推论 4.6 应用于旋转算子和移位后的 H，即 y,

$$T := e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} (H + 1). \tag{4.68}$$

为此，我们首先验证假设 4.1 得到满足。

由 (4.58) 中 Num(H) 的包围关系以及预解式界 (2.6)，我们得到

$$\|(e^{\pm\frac{\mathrm{i}}{4}\pi} r - T)^{-1}\| = \mathcal{O}(1), \quad \|(e^{\pm\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi} r - T)^{-1}\| = \mathcal{O}(r^{-1}), \quad r \to +\infty. \tag{4.69}$$

因此，(4.6) 成立。 T 的谱为

$$\sigma(T) = \{e^{\mathrm{i}\frac{2-b}{2+b}\frac{\pi}{4}} \mu_n + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\}_{n\in\mathbb{N}}, \tag{4.70}$$

因此，(4.48) 成立，其中

$$\vartheta_0 = \frac{2-b}{2+b}\frac{\pi}{4} \in (-\pi/4, \pi/8). \tag{4.71}$$

此外，对于 (4.60) 中的 κ，(4.7) 成立；并且由于 T 的所有特征值都是单的，假设 4.1 (iii) 也成立。最后，根据命题 2.1，谱投影系 $P_n \equiv Q_{\lambda_n}$,$n \in \mathbb{N}$ 是完备的，因为对于任意 $\varepsilon > 0$, $1/\kappa < 2$，都有 $T^{-1} \in \mathcal{S}_{\frac{1}{\kappa}+\varepsilon}$，见 (4.65)，且我们有预解式界 (4.69)。总之，带有 $p = 4$ 的假设 4.1 确实成立。

利用 (4.64) 以及 (4.68) 中的旋转，我们得到，对于 $z > R$，(4.45) 以 $\tau := 1/\kappa < 2 = p/2$ 的形式成立，即以 $\Gamma(t) = t, t > 0$ 的形式成立。因此，推论 4.6 给出

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|P_n\|}{\exp(\gamma|\lambda_n|^\tau)} = \infty \tag{4.72}$$

若 $\gamma \in (0, \gamma_0)$，其中 $\gamma_0 = \eta \cos(\tau\vartheta_0)$。由 (4.70) 可知，结论 (4.67) 成立

$$|\lambda_n| = |\mu_n|(1 + o(1)) = (dn)^\kappa(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \tag{4.73}$$

其中 $d > 0$ 与 (2.27) 中相同，且 $l = b$ 和 $\kappa\tau = \kappa/\kappa = 1$。 □

我们指出，在定理 4.8 的证明中，对于情形 $b > 2$，可以取 $p = 2$；对于 $b > 1$，可以取 $p = 3$。此外，若 $b > 1$，则可使用 $T := \exp(-i\pi/(b + 2))(H + 1)$，参见 (4.68)，从而 T 的谱为实数，且 (4.6) 得以满足；此时 $\vartheta_0 = 0$ 和 γ_0 得到改进。细节从略。

注 4.9。 定理 4.8 改进了 [Dav00，定理 6]，的结果；该文证明了谱投影范数无法由 n 的任何幂次所界定，并证实了基于数值证据所猜想的指数增长。对于 $b \in 2\mathbb{N}$，所得到的指数阶是尖锐的；对微分算子的直接渐近分析表明，对于 $b = 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\|P_n\|}{n} = \log(1 + \sqrt{2}), \tag{4.74}$$

参见 [DK04]，另见 [Vio13；Kre+15]，而对于 $b \in 2\mathbb{N}$,

$$c(b) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\log\|P_n\|}{n} > 0, \tag{4.75}$$

更多细节及更精确的渐近展开，参见 [Hen12；Hen14a] 。对于$b \notin 2\mathbb{N}$，我们的结果似乎是新的；此外，指数阶 1 也是尖锐的，参见第 5.2 小节。

我们预期(4.67) 中的lim 可以代替limsup。

4.3. 虚奇非谐振子。 令 $b \in \mathbb{N}$，并考虑虚奇振子

$$H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{i}x^{2b+1}, \quad \mathrm{Dom}(H) = \left\{ f \in H^2(\mathbb{R}) : |x|^{2b+1} f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}. \tag{4.76}$$

H 的基本谱性质总结如下。

命题 4.10。 设 H 如(4.76) 所示，且满足 $b \in \mathbb{N}$。则

(i) H 的数值域满足

$$\mathrm{Num}(H) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}; \tag{4.77}$$

(ii) H 是具有紧预解式的 m-耗散算子，此外

$$\mathfrak{s}_k((1 + H)^{-1}) = \mathcal{O}(k^{-\kappa}), \quad k \to \infty, \tag{4.78}$$

其中

$$\kappa = \frac{4b + 2}{2b + 3}; \tag{4.79}$$

(iii) 对于任意 $b = 4j - 3$、 $j \in \mathbb{N}$，即 $2b + 1 = 8j - 5$，存在 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N_0$， H 的特征值 λ_n 都是单且为实数；此外，它们满足渐近行为

$$\begin{aligned} \lambda_n &= (dn)^\kappa(1 + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2b+1}})), \\ \lambda_{n+1} - \lambda_n &= \kappa d(dn)^{\kappa-1}(1 + o(1)), \qquad n \to \infty, \end{aligned} \tag{4.80}$$

其中

$$d = \frac{\pi}{B\left(\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2b+1}\right)\cos\left(\frac{1}{2b+1}\frac{\pi}{2}\right)} > 0 \tag{4.81}$$

（我们回顾一下约定：特征值按代数重数重复计数，并按模非递减的顺序排列）；

(iv) 黎斯投影系 Q_λ, $\lambda \in \sigma(H)$在 $L^2(\mathbb{R})$中完备；(v) 我们有 $r \to +\infty$

$$\|(\pm \mathrm{i}r - H)^{-1}\| = \mathcal{O}\left(r^{-\frac{4b}{3(2b+1)}}\right), \tag{4.82}$$

(vi) 对于任意 $\varepsilon \in (0, \pi/2)$，存在 $\eta, R > 0$，使得对于所有满足以下条件的 $z \in \rho(H)$

$$|z| > R \quad and \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \tag{4.83}$$

我们有（其中 κ 如(4.79)所示）

$$\|(z - H)^{-1}\| \geq \exp(\eta |z|^{\frac{1}{\kappa}}). \tag{4.84}$$

证明。(i) 数值域的包含关系 (4.77) 可通过直接估计得出。

(ii) 关于 m-增生性和预解式的紧性，参见第 2.2 小节。通过在 $l = 2b+1$ 的情况下比较 H 与 G_0，利用第 2.2 小节中的 (2.24) 可得估计 (4.78)。

(iii) 结论由 [Shi10b，推论 2.1、2.2] 以及 $m = 2b+1 = 8j-5$、$l = 2j-1$和 [Shi10b，定理 1.2] 推出，因为 H 是 $\mathcal{PT}$-对称的。

(iv) 根据 (4.78) 和 (4.79)，H的预解式对于任意 $\varepsilon > 0$都属于 $\mathcal{S}_{\frac{1}{\kappa}+\varepsilon}$。由于$b \geq 1$，我们有

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b+1} < 1. \tag{4.85}$$

由数值域的包含关系 (4.77) 和预解式界 (2.6)，我们得到对于每个 $\omega \in [\pi/2, 3\pi/2]$

$$\|(re^{\mathrm{i}\omega} - (1+H)^{-1}\| = \mathcal{O}(1), \qquad r \to +\infty. \tag{4.86}$$

关于完备性的结论由命题 2.1 得出，见第 2.1 小节 .

(v) 见 [AS23，定理 3.2，第 7.1] 节；另请参见 [Bor13]。

(vi) 参见 [DSZ04] 或 [Kre+15，第 VII 节定理 1]；证明沿用附录 B 中关于 L 由 (3.1) 得出的论证。□

推论 4.6 得出了关于 H的谱投影的以下结论。注意，限制条件 $b \in 4\mathbb{N} - 3$ 用于表示 λ_n，如 (4.80) 所示。事实上，推论 4.6 可用于任意 $b \in \mathbb{N}$；然而，此时仅将 $\|Q_{\lambda_n}\|$ 与 $\exp(\gamma|\lambda_n|^{1/\kappa})$ 进行比较，而对于一般的 $b \in \mathbb{N}$，λ_n 的行为尚不明确。

定理 4.11。设 H 如(4.76) 所示，其中有 $b = 4j-3$、$j \in \mathbb{N}$，并设 P_n 为与特征值 λ_n、$n > N_0$相关的一维黎斯投影。那么存在$\gamma > 0$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|P_n\|}{\exp(\gamma n)} = \infty. \tag{4.87}$$

证明。证明过程与定理 4.8 的证明类似。这里我们取 $p = 2$ 和$T = H + 1$，因为 $1/\kappa < 1$，见式 (4.85)，且对所有 $r > 0$

$$\|(\mathrm{i}r - T)^{-1}\| \leq 1 \tag{4.88}$$

由（4.77）和（2.6）得出。此处省略更多细节。 □

Re标记 4.12。 在特殊情形 $b=1$ 下，直接分析表明 t

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\|P_n\|}{n}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \tag{4.89}$$

参见 [Hen14b], ，因此在此情形下，(4.87) 中的指数阶 1 是尖锐的，而且断言 (4.87) 实际上以 lim 代替 lim sup 仍然成立。此外，与注 4.9 类似，在所有情形下，(4.87) 中的指数阶 1 都是尖锐的，参见第 5.2 小节。

我们预期，在定理 *4.11* 的所有情形下，(4.87) 中的 $\lim$ 都成立，其他$b\in\mathbb{N}$也同样如此。

4.4. 共轭实非谐振子。 设 G_0 如 (2.25) 中所述，其中 $l=b\geq 2$，并设 $v\in C^2(\mathbb{R})$ 是一个非负奇函数，在 $(0,\infty)$ 上递增，且对于某个 $s\in(0,1)$

$$v(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{2+b}{2}s},\quad x>1. \tag{4.90}$$

有了这个 v，令 H 为 G_0的如下共轭变换

$$H=e^{v}G_0e^{-v}=\left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\mathrm{i}v'\right)^2+|x|^b,\qquad \mathrm{Dom}(H)=\mathrm{Dom}(G_0) \tag{4.91}$$

在 $L^2(\mathbb{R})$ 中。注意， e^v 不是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的有界算子，因此它不会诱导 H 与 G_0之间的（有界）相似变换。尽管如此， G_0 的一些性质仍能在这种无界共轭变换下保持不变。特别地，以下结论已在[MSV17]中得到证明。

命题 4.13。 设 H 如（4.91）中所述，其中 $b\geq 2$ 和 $s\in$ （0，1） 固定。设 μ_n 和 κ 如（2.26）、（2.27）中所述，其中 $l=b$，特别是

$$\kappa=\frac{2b}{b+2}. \tag{4.92}$$

Then

（i）存在 C、 $\alpha_0>0$ ，使得

$$\mathrm{Num}(H+\alpha_0)\subset\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z\geq 1,|\,\mathrm{Im}\,z|\leq C(\mathrm{Re}\,z)^\beta\} \tag{4.93}$$

with

$$\beta=\frac{1}{2}+\max\left\{0,\frac{s}{2}+\frac{s-1}{b}\right\}<1; \tag{4.94}$$

（ii） H 是具有紧预解式的 *m*-扇形算子， $0\in\rho(H)$ ，并且

$$\mathfrak{s}_k(H^{-1})=\mathcal{O}(k^{-\kappa}),\quad k\to\infty; \tag{4.95}$$

（iii） H 和 G_0 的谱相同，即由无穷多个单特征值 $\lambda_n=\mu_n$、 $n\in\mathbb{N}$ 组成；（iv）与特征值 $\lambda_n=\mu_n$、 $n\in\mathbb{N}$ 对应的一维黎斯投影系 $P_n\equiv Q_{\lambda_n}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中完备；（v） P_n 的范数满足（其中 κ 如（4.92）中所述）

$$\|P_n\|=\exp\left(\lambda_n^{\frac{s}{\kappa}}(1+o(1))\right),\quad n\to\infty. \tag{4.96}$$

由于 $\|P_n\|$ 的行为已知，我们可以应用定理 4.3 或推论 4.5，得到 H 的预解式范数上界（参见定理3.6、4.8、4.11，其中利用预解式范数下界得出了关于 P_n范数的结果）。

定理 4.14。 设 H 如（4.91） 所示，其中 $b \geq 2$ 和 $s \in$ 固定，且（0，1）。那么，对每个$\delta > 0$, 存在 $C \equiv C$（δ） > 0 和 $r \equiv r$（δ） > 0，使得对所有满足$|z| > r$且 $|\arg\, z| \leq \pi/4$的 $z \in \rho$（H），

$$\|(z - H)^{-1}\| \leq \frac{C}{\operatorname{dist}(z, \sigma(H))} \exp\left((1+\delta)\cos\left(\frac{s}{\kappa}\arg z\right)|z|^{\frac{s}{\kappa}}\right), \tag{4.97}$$

其中 κ 与(4.92)中相同。

证明。 由于 Num(H) 包含在一个“抛物”区域内（见第 2.1 小节），由推论 4.5 可得结论，其中 $\epsilon_1 = 1/2$、 $p = 2$ 和

$$\varrho = \frac{s}{2\kappa} = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{b}\right) \leq \frac{s}{2} < \frac{1}{2}, \tag{4.98}$$

见命题 4.13。 □

注 4.15。 在特殊情形 $b = 2$ 和 $v(x) = x/2$ （因此 $\kappa = 1$ 和 $s = 1/2$）下，算子 H 写作

$$H = \left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 + x^2. \tag{4.99}$$

它是 （通过傅里叶变换）酉等价于平移后的调和振子 r

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\xi + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2, \tag{4.100}$$

也就是说，对于 (3.15) 中的 L，取 $\alpha_1 = \mathrm{i}$和 $\alpha_0 = -1/4$。因此，(3.19) 表明，在这种情况下，(4.97) 中的指数阶 $s/\kappa = 1/2$ 是尖锐的（另见注 3.8）。

我们认为，定理 *4.14* 中所有其他情况下，(4.97) 中的指数阶 s/κ 也同样是尖锐的。

5. Further remarks

我们对本文的结果及相关猜想作几点注记。

5.1. **关于定理 4.3 的注记**。 与 [Dav00], 一样，可以在巴拿赫空间中表述定理 4.3；证明无需作任何修改。

例如，对于通过保持特征值及其重数的变换（如变量的复伸缩、复平移或 (4.91) 中的共轭变换）由自伴算子得到的（多维）微分算子，代数重数与几何重数相等这一条件是成立的。

注 2.6 指出，规范函数 F 的选择具有灵活性。除了通过加性扰动和缩放对 F 的零点进行可能的修改外，我们还在第 4 节使用了代换 $w = y^p$，例如见 (4.2)。

5.2. **估计的指数阶的尖锐性** $\|P_n\|$。 对于 a 和 b这两个特殊情形，(3.55)、(4.67) 和 (4.87) 中的指数阶是尖锐的；这些情形已在早期研究中直接分析，见注 3.8、4.9 和 4.12。这里我们讨论 (4.57) 和 (4.76) 中 H 的指数阶的尖锐性，以及 (3.1) 中 L 在其他 a， b 下的指数阶尖锐性。

首先，对于 (4.57) 或 (4.76) 中的 H，由 [CS26] 可得

$$\|(z - H)^{-1}\| \leq \frac{\exp(\gamma(1 + |z|^{\frac{1}{\kappa}}))}{\operatorname{dist}(z, \sigma(H))}, \quad z \in \rho(H),\ |z| \geq R, \tag{5.1}$$

其中 $R>0$ 充分大，$\gamma>0$ 仅取决于 b，而 κ 如 (4.60) 或 (4.79) 中所示。因此，取 $\delta_n := \varepsilon n^{\kappa-1}$ 且令 $\varepsilon>0$ 充分小，参见命题 4.7 或 4.10，可得存在 $\gamma'>\gamma$ 和 $\gamma''>\gamma$，使得对所有充分大的 n（从而可在以 λ_n 为中心的 δ_n 圆盘内使用 (5.1)）

$$\begin{aligned}\|P_n\| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|z-\lambda_n|=\delta_n} \|(z-H)^{-1}\|\,|\mathrm{d}z| \le \exp\left(\gamma\left(1+\sup_{|z-\lambda_n|=\delta_n}|z|^{\frac{1}{\kappa}}\right)\right) \\ &\le \exp(\gamma'|\lambda_n|^{\frac{1}{\kappa}}) \le \exp(\gamma'' n).\end{aligned} \tag{5.2}$$

这说明（4.67）和（4.87）中的指数阶 1 是尖锐的。

对于 L，类似（5.1）的界在 κ如（3.7）所示时成立。如上所述，（5.2）的类似结果结合（1.2）表明，对于某个 $\gamma>0$，$\|P_n\| \le \exp(\gamma n)$，$n\in\mathbb{N}$。然而，这并不能得出（3.55）中的指数阶 $\sigma<1$ 是尖锐的。注意，κ 由 L^{-1} 的奇异值的行为决定，而这又源于势函数的首项 x^{2a}，与其虚部无关。

5.3. 在 $\|P_n\|$ 的估计中取一个子序列。 我们预期 (3.55)、(4.67) 和 (4.87)中的 *lim* 会取代 limsup。这在注 3.8、4.9 和 4.12 中讨论的特殊情形下确实成立。

5.4. 不存在基性质 L 具有非整数 a，b。 在定理 3.6 中，我们说明了 L 的特征系统不包含一个基，因为谱投影并非一致有界。势函数的实部和虚部必须满足的关键条件是 $b>a-1$；对于 $b<a-1$，L 的特征系统包含一个 Riesz 基，参见 [MS19a，第 6 定理4]。在临界情形 $b=a-1$ 下，已知 L 的特征系统包含一个由有限维子空间组成的 Riesz 基，参见 [Agr95，定理，情形 (b)]。对于算子 $L=-(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2+x^2+q(x)$，$q\in L^\infty(\mathbb{R})$，A. Shkalikov 的结果和构造 [Shk16; Shk83b; Shk83a] 可能解释了为何可以选取由谱块投影构成的 Riesz 基系 $\{P_j\}$，且其秩一致有界；此外，$\operatorname{rank}(P_j) \le 2\|q\|_{L^\infty}$；[Shk19]。

我们预期，对于非整数 a,b，$b=a-1$ 也是临界情形。作为一个具体例子，考虑 $L^2(\mathbb{R})$ 中的 $L=-(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2+V$，其势函数为 $V\in C^\infty(\mathbb{R})$，并满足

$$V(x)=|x|^{2a}+\mathrm{i}\operatorname{sgn}(x)|x|^b \quad \text{for } |x|>1 \tag{5.3}$$

并假设 $a\ge 1, b\in\mathbb{R}$。

首先，若 $b<a-1$，则 L 的特征系统包含一个 Riesz 基，见 [MS19a，定理 6.4]。我们注意到，对于 $W\in L^p(\mathbb{R})$，$p\in(0,\infty)$，$L+W$ 的特征系统也具有 Riesz基性质；这对某些分布势函数也成立，详情见 [MS19a] 。

其次，假设 $b>a-1$。由 [KS19，定理 3.7，例 3.8] 可知，对于任意固定的 $\beta\in\mathbb{R}$ 和 $N\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得对所有满足$\alpha\ge 1$的 $\alpha+\mathrm{i}\beta\in\rho(L)$，均有

$$\|(\alpha+\mathrm{i}\beta-L)^{-1}\| \ge C\alpha^N. \tag{5.4}$$

我们注意到，对于正则性较低的 V，类似的结论同样成立，因此预解式增长的速率可能更慢，参见 [KS19，定理 3.7，例 3.8]；关于一般曲线上的估计，参见 $\mathbb{C}$ [KS19，第 5] 节。还要记住，对于多项式势，定理 3.3 给出了预解式范数的指数下界。

由于 $\mathrm{Num}(L+t) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon$ 当 t 充分大时，$\mathrm{Re}\ z \geq 0\}$，且 $\mathfrak{s}_k((L+t+1)^{-1}) = \mathcal{O}(k^{-\kappa})$，当 $k \to +\infty$ 时，有

$$\kappa = \frac{2m}{m+2}, \quad m := \max\{2a, b\} \geq 2, \tag{5.5}$$

见第 2.2 小节，由命题 2.1 可知，L 的谱由无穷多个特征值 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 组成，并且谱投影系 Q_λ、$\lambda \in \sigma(L)$（参见带有 $T = L$ 的（2.4））是完备的。我们还注意到，由（2.3）可得，对于某个$c > 0$ 以及所有具有充分大的 $n_0 \in \mathbb{N}$ 的 $n > n_0$，都有 $|\lambda_n| \geq cn^\kappa$。此外，[Agr95，引理 3] 表明，存在 $c' > 0$ 和一个严格递增序列 $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$，使得

$$|\lambda_{j_k+1}| - |\lambda_{j_k}| \geq c' j_k^{\kappa-1}. \tag{5.6}$$

下面我们将证明，L 的特征系统不包含一个基，如果特征值λ_n 最终都是单的。（对于非多项式势，后者尚不知晓。）我们通过反证法进行论证，并假设 L 的特征系统包含一个基。按照命题 3.9 的证明步骤，我们得到

$$\|(z-L)^{-1}\| \leq \frac{C|z|}{\mathrm{dist}(z, \sigma(L))}. \tag{5.7}$$

然而，对于点 $z_k = (|\lambda_{j_k}| + |\lambda_{j_k+1}|)/2$，由估计式 (5.4) 和 (5.7) 可得矛盾，因为 $k \to \infty$。

最后，根据 [Agr95, Theorem, case (b)]，如果 $b = a - 1$，则 L 的特征系统包含有限维子空间构成的 Riesz 基；而如果 $a - 1 < b < 2a$，则包含阶为 $\tau + \varepsilon$ 的有限维不变子空间构成的 Abel 基，其中 τ 取自式 (3.17)，且 $\varepsilon > 0$ 可任意小，见 [Agr95, Theorem, case (c)]，其中 $p = \kappa$ 且 $q = b/(2a)$。

5.5. **定理 4.8 中的临界情形**。对于 $b = 2/3$，H 的特征系统的完备性并非显而易见（这是应用命题 2.1 的一个临界情形）。对于 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中的算子 $H = -(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2 + \mathrm{i}|x|^{\frac{2}{3}}$，在 0 处满足狄利克雷边界条件时，该结论已得到证明，见 [Tum21b; Tum22]，；所给出的证明也可推广到诺伊曼边界条件，并且适用于 $L^2(\mathbb{R})$ 中的 H。

对于 $b = 2/3$，我们有 $1/\kappa = 2$，参见 (4.65)。注意，由于 (5.1) 和 (5.2)，在 (4.47) 中预期会有 $\tau = 1/\kappa = 2$。因此，可以尝试将推论 4.6 应用于 $p = 4$ 和$\tau = p/2 = 2$。在这种情况下，需要验证 (4.6) 中的附加条件 $N < -1 + 1/(2p) = -7/8$（假设 4.1 中其余条件均满足）。然而，无论是像 (4.68) 中那样的旋转和平移，还是 (4.62) 中的（尖锐）速率，都无法用于证明对于这样的 N，(4.6) 成立。

尽管如此，推论 4.6 对任意 $\tau < 2$ 都适用，因此定理 4.8 的陈述对于 $b = 2/3$ 也有类似结论，即

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|P_n\|}{\exp(n^{1-\varepsilon})} = \infty \tag{5.8}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$。

5.6. **定理 4.11 中 $b = 0$ 的情形**。定理 4.11 中的情形 $b = 0$，即 $H = -(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2 + \mathrm{i}x$，未包含在定理 4.11（也未包含在命题 4.10）中。这个 H 的谱为空，因此不存在非平凡的黎斯投影。

Appendix A. Partial fraction decomposition

将亚纯函数分解为简单分式的做法可追溯至 Mittag-Leffler [Mit84], [Mar77, 第 7] 章，历史悠久。M. Krein 的论文 [Kre44; Kre47]以及 H. Hamburger 的论文 [Ham44] 与矩理论相关并受其启发，是第二次世界大战后这一主题发展的最初里程碑，参见 [Akh65; Bak98; Bak09; BP95; BS01; De 59; Koo80; Loy17; Mae02; Mae16; Ost76; She11; She16; She21]。有关一般理论，读者可参阅上文提及的专著和文章。不过，在本文及本附录中，我们关注的是函数 F 和 $1/F$的行为这一狭窄问题，其中 $F(w)$由（2.28）定义，以及 $1/F$的部分分式分解。为方便读者（也为方便我们自己——在第 3 节和第 4 节的证明中），我们在本附录中列出一些文献或学术传承中广为人知的事实和论述。

A.1. 命题 2.3 及其推广。 我们遵循 [Tit27，定理 I，第 199] 页，或 [Tit58，第 8 章64]。

命题 2.3 的证明概要。 首先令 $x \in \mathbb{R}$。在第二步中使用分部求和，得到

$$\begin{aligned}\log F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x}{a_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left[\log\left(1+\frac{x}{a_n}\right) - \log\left(1+\frac{x}{a_{n+1}}\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{x\,\mathrm{d}r}{r(x+r)}.\end{aligned} \tag{A.1}$$

接下来，根据 (2.29) 中 $n(r)$ 的定义，我们有 $n(r) = 0$ 若 $0 \le r < a_1$，从而得到

$$\log F(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{n(r)\,\mathrm{d}r}{r(x+r)} = x \int_0^{\infty} \frac{n(r)\,\mathrm{d}r}{r(x+r)}. \tag{A.2}$$

因此，对于主项（见 (2.29)），我们有

$$\nu x \int_0^{\infty} \frac{r^{\varrho}\,\mathrm{d}r}{r(x+r)} = \nu x^{\varrho} \int_0^{\infty} \frac{t^{\varrho-1}\,\mathrm{d}t}{1+t} = \nu \frac{\pi}{\sin(\pi\varrho)} x^{\varrho} \tag{A.3}$$

由于被积函数为正，我们得到

$$\log F(x) = \nu \frac{\pi}{\sin(\pi\varrho)} x^{\varrho}(1+o(1)), \quad x \to \infty. \tag{A.4}$$

（A.2）中 $\log F$ 的积分表示保证

$$\log F(w) = w \int_0^{\infty} \frac{n(r)\,\mathrm{d}r}{r(w+r)}, \quad w \in G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -a_1] \tag{A.5}$$

这是因为关于 w 的两个函数在 G 中都是解析的，并且在正半轴$[0, +\infty)$上相等。利用柯西公式，我们将积分路径转至 $r = u\exp(\mathrm{i}\arg w)$，得到

$$\nu w \int_0^{\infty} \frac{r^{\varrho}\,\mathrm{d}r}{r(w+r)} = \nu|w| \exp(\mathrm{i}\varrho \arg w) \int_0^{\infty} \frac{u^{\varrho}\,\mathrm{d}u}{u(|w|+u)} = \nu \frac{\pi}{\sin(\pi\varrho)} w^{\varrho}, \tag{A.6}$$

由此得到（2.30）。 □

注 A.1. 对于特殊的 $a_k = k^{\frac{1}{\varrho}}$、 $k \in \mathbb{N}$，可以将 (2.30) 加强为

$$F(x) = \exp\left(\frac{\pi}{\sin(\pi\varrho)} x^{\varrho}\right) \psi(x), \quad x > 0, \tag{A.7}$$

其中

$$\frac{\exp\left(-\frac{1}{\varrho}\right)}{1+x} \le \psi(x) \le \exp\left(-\frac{1}{\varrho}\frac{x}{1+x}\right), \quad x>0. \tag{A.8}$$

事实上，在这种情况下，$n(r)=0$ 当 $r<1$ 且 $n(r)=\lfloor r^{\varrho}\rfloor$，因此

$$r^{\varrho}-1 \le n(r) \le r^{\varrho}, \quad r \ge 1, \tag{A.9}$$

and

$$-x\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r(x+r)} - x\int_0^1 \frac{r^{\varrho}\,\mathrm{d}r}{r(x+r)} \le x\int_0^{\infty}\frac{n(r)\,\mathrm{d}r}{r(x+r)} - \frac{\pi x^{\varrho}}{\sin(\pi\varrho)} \le -x\int_0^1\frac{r^{\varrho}\,\mathrm{d}r}{r(x+r)}. \tag{A.10}$$

最后，我们使用

$$\begin{aligned} x\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r(x+r)} &= \log(1+x),\\ \frac{x}{x+1}\frac{1}{\varrho} \le x\int_0^1\frac{r^{\varrho}\,\mathrm{d}r}{r(x+r)} &\le \frac{1}{\varrho}, \end{aligned} \tag{A.11}$$

由此得到 (A.7)；参见 (A.2)。

A.2. **部分分式分解**。首先，我们给出一组初等恒等式和不等式，使得下面的命题 A.2 适用于我们的情形。

对于任意 $w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$，在 $\mathbb{R}$ 上定义一个周期函数

$$\begin{aligned} h(t) &= \cos wt, \quad t\in[-\pi,\pi],\\ h(t+2k\pi) &= h(t), \quad k\in\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

它的傅里叶级数

$$h(t) = \frac{\sin\pi w}{\pi w} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2w\sin\pi w}{\pi(w^2-k^2)}\cos kt \tag{A.13}$$

由迪尼-利普希茨判别法，级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，因此 $t=0$ 得出恒等式

$$\frac{\pi w}{\sin\pi w} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{w^2}{w^2-k^2}, \qquad w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}, \tag{A.14}$$

另见 [Olv+，式 4.22。5]，给出

$$\cot\pi w = \frac{1}{\pi w} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2w}{\pi}\frac{1}{w^2-k^2}, \qquad w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}, \tag{A.15}$$

另见 [Olv+，式 4.22。3]。

稍后，我们需要了解乘积的导数 $F'(-a_n)$ 的估计或渐近行为

$$F(w) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{w}{a_k}\right). \tag{A.16}$$

让我们先分析这个序列

$$A(n;b) = (-1)^{n-1}\prod_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{\infty}\left(1-\frac{n^b}{k^b}\right), \quad 1<b<\infty. \tag{A.17}$$

A.2.1. 特殊情况 $b = 2$。 如果我们使用欧拉乘积,

$$\frac{\sin \pi w}{\pi w} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{k^2}\right), \tag{A.18}$$

我们发现

$$\begin{aligned} A(n;2) &= (-1)^{n-1} \lim_{w\to n} \frac{\sin \pi w - \sin \pi n}{\pi w \left(1 - \frac{w^2}{n^2}\right)} = (-1)^n \lim_{w\to n} \frac{\sin \pi w - \sin \pi n}{\pi (w-n)} \frac{n^2}{w(n+w)} \\ &= (-1)^n \cos(\pi n) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{A.19}$$

不过，我们来做一个初等而直接的计算，避开欧拉乘积 (A.18)

$$\begin{aligned} A(n;2) &= (-1)^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right) = (-1)^{n-1} \lim_{m\to\infty} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{m} \frac{(k-n)(k+n)}{k^2} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left((n-1)!(m-n)!\right) \left(\frac{(m+n)!}{n!2n}\right) \left(\frac{n.n}{m!m!}\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \frac{(m+1)\dots(m+n)}{m(m-1)\dots(m-n+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

A.2.2. 情形的估计 $b \neq 2$。 我们基本上沿用 [BP95, Ex. 5.5]。由 (A.20),

$$1 = 2A(n;2) = \frac{1}{2A(n;2)} = \frac{1}{2}(-1)^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - n^2}. \tag{A.21}$$

为分析 $A(n;b)$，见 (A.17)，我们通过将 (A.21) 中 1 的因子分解里的相应因子乘到 (A.17) 右侧的因子序列上，对该因子序列进行“改进”。得到

$$A(n;b) = \frac{1}{2} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{k^b - n^b}{k^2 - n^2} \frac{k^2}{k^b} = \frac{1}{2} G \cdot H, \tag{A.22}$$

其中

$$G = \prod_{k=1}^{n-1} r\left(\frac{k}{n}\right), \quad H = \prod_{k=n+1}^{\infty} r\left(\frac{k}{n}\right), \tag{A.23}$$

and

$$r(t) = \frac{1 - v^{\frac{b}{2}}}{1 - v}, \quad 0 < t < \infty; \quad v = \frac{1}{t^2}. \tag{A.24}$$

中值定理表明，若 $b > 2$，则

$$r(t) > \begin{cases} 1, & t > 1, \\ \frac{b}{2}, & 0 < t < 1, \end{cases} \tag{A.25}$$

若 $b < 2$，则

$$r(t) < \begin{cases} 1, & t > 1, \\ \frac{b}{2}, & 0 < t < 1. \end{cases} \tag{A.26}$$

因此，由 (A.22) 和 (A.23),

[1]Leif Mejlbro 提出了这一技巧，并在 [BP95] 中使用该技巧来获得下文的估计（A.27）。

$$A(n;b) > \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{b}\left(\frac{b}{2}\right)^{n} \quad \text{if } b > 2, \tag{A.27}$$

and

$$A(n;b) < \frac{1}{b}\left(\frac{b}{2}\right)^{n} \quad \text{if } b < 2. \tag{A.28}$$

A.2.3. 情形的渐近行为 $b \neq 2$。 估计（A.27）已足以保证在需要时部分分式分解的收敛性。但为了完整起见，让我们证明渐近行为对于 $1 < b < \infty$ 的有效性,

$$A(n;b) = \exp\left(n\pi \cot\frac{\pi}{b} + o(n)\right), \quad n \to \infty. \tag{A.29}$$

该证明由 A. Sedletski 在 [Sed83 的引理 5] 中给出；E. Titchmarsh 在 [Tit27] 中使用了这一渐近行为。

（*A.29*）的证明概要。根据（A.17），

$$\log A(n;b) = \log G_0 + \log G_1, \tag{A.30}$$

其中

$$G_0 = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n^b}{k^b} - 1\right), \qquad G_1 = \prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1 - \frac{n^b}{k^b}\right). \tag{A.31}$$

取 $t_k = k/n$

$$H_0 = \frac{1}{n}G_0 = \sum_{k=1}^{n-1}\log\left(t_k^{-b} - 1\right)\cdot\frac{1}{n}, \quad H_1 = \frac{1}{n}G_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty}\log\left(1 - t_k^{-b}\right)\cdot\frac{1}{n}. \tag{A.32}$$

和式（A.32）是下列积分的黎曼和

$$\mathcal{J}_0 = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \mathcal{J}_1 = \int_1^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t, \tag{A.33}$$

其中

$$g(t) = \log\left|t^{-b} - 1\right|, \quad 0 < t < \infty, \quad t \neq 1. \tag{A.34}$$

我们利用 N. Mercator 分解计算 $\mathcal{J}_0$ 和 $\mathcal{J}_1$

$$\log(1 - v) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v^k}{k}, \quad 0 \le v < 1, \tag{A.35}$$

以及勒贝格控制收敛定理。我们有

$$\mathcal{J}_0 = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{t^b} - 1\right)\,\mathrm{d}t = b\int_0^1 \log\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \log\left(1 - t^b\right)\,\mathrm{d}t = b - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{1}{kb+1}, \tag{A.36}$$

and

$$\mathcal{J}_1 = \int_1^{\infty}\log\left(1 - t^{-b}\right)\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{1}{kb-1}. \tag{A.37}$$

因此，由 (A.15) 可得 $w = 1/b$

$$\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1 = b - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{kb+1} + \frac{1}{kb-1}\right) = b + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{2}{b}}{-k^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \pi\cot\frac{\pi}{b}, \tag{A.38}$$

这就证明了 (A.29)。 □

注意，对将黎曼和 (A.32) 改为积分 (A.36)、(A.37) 时所产生误差进行更精确的分析表明：如果 $1 < b < \infty$ 和 $b + 1 \le n$

$$A(n; b) = \varphi(n) \exp\left(n\pi \cot \frac{\pi}{b}\right), \tag{A.39}$$

其中

$$(en)^{-b} \le \varphi(n) \le e^3 b^{-2} n^2. \tag{A.40}$$

A.2.4. 部分分式分解的收敛性。 在研究构造所有不定矩问题的必要充分条件时，H. Hamburger 在 [Ham44] 中定义了由有限阶整函数 $F(w)$ 构成的类 $\mathfrak{U}$，这些函数满足以下条件：

(i) F 的所有根 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都是单且为实数；(ii) 对所有实数 x， $F(x)$ 都是实数；(iii) 对所有 $w \ne \xi_n$、$n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{F(w)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F'(\xi_k)} \frac{1}{w - \xi_k}; \tag{A.41}$$

(iv) 对所有 $m = 0$, 1、2、.....

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^m \frac{1}{|F'(\xi_k)|} < \infty. \tag{A.42}$$

他在 [Ham44, Thm. 5a] 中证明了以下结论：设 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \to \infty$，且对于 $\nu > 0$ 和 $\varrho \in (0, 1/2)$

$$n(r) = \#\{k : a_k \le r\} = \nu r^{\varrho}(1 + o(1)), \quad r \to +\infty. \tag{A.43}$$

Then

$$F(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{a_k}\right) \in \mathfrak{U}. \tag{A.44}$$

此类陈述后来经历了一系列改进和完善，参见 [Akh65, p. 167], [De 59], [Koo 80]。我们选用 [BP95, Thm. 6.6] 中的陈述作为基本参考。

命题 A.2。 设 F 是一个非常数的最小指数型整函数，并假设 F 的零点 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 全为实数且均为单的。如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|F'(\xi_n)|} < \infty, \tag{A.45}$$

then

$$\frac{1}{F(w)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F'(\xi_n)} \frac{1}{w - \xi_n}, \tag{A.46}$$

对所有 $w \ne \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$。

A.3. **命题 2.4 和 2.5 的证明。** 以下我们有

$$F(w)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{w}{a_k}\right),\quad \text{where}\quad a_k=\left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{1}{\varrho}},\quad k\in\mathbb{N}, \tag{A.47}$$

其中 $\nu>0$ 和 $\varrho\in(0,\ 1)$，并令 $b=1/\varrho$。

命题 *2.4* 的证明。由命题 2.3 可知，(A.47) 中的函数 F 是指数阶 $\varrho<1$，因此是最小指数型。

注意到

$$F'(-a_n)=\frac{1}{a_n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_k}\right)=\frac{\nu^b}{n^b}\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\left(1-\frac{n^b}{k^b}\right)=(-1)^{n-1}\nu^b A(n;b),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{A.48}$$

因此，(2.32) 由 (A.39) 得出；另见 (A.29)。

若 $\varrho<1/2$，即 $b>2$，则较弱的估计 (A.27) 也足以证明假设 (A.45) 成立。因此，命题 A.2 推出 (2.33)。最后，(2.34) 由下式得出

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-w}\left(\frac{1}{F(w)}-\frac{1}{F(z)}\right)&=\frac{1}{z-w}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F'(-a_n)}\left(\frac{1}{w+a_n}-\frac{1}{z+a_n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F'(-a_n)}\frac{1}{(w+a_n)(z+a_n)}\end{aligned} \tag{A.49}$$

对所有 $w\neq z$ 和 $w\neq -a_n$, $n\in\mathbb{N}$。 □

命题 *2.5* 的证明。回想我们有 $\varrho=1/2$，即 $b=2$。为证明 (2.35)，我们使用 (A.14) 和 (A.18)，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{F(w)}&=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{w^2}{\left(\frac{n}{\nu}\right)^2}\right)}=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(\mathrm{i}\nu w)^2}{n^2}\right)}=\frac{\pi\mathrm{i}\nu w}{\sin(\mathrm{i}\nu w)}\\&=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\mathrm{i}\nu w)^2}{(\mathrm{i}\nu w)^2-n^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{w^2}{w^2+\left(\frac{n}{\nu}\right)^2}.\end{aligned} \tag{A.50}$$

因此，(2.36) 可由下式得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-w}\left(\frac{1}{F(w)}-\frac{1}{F(z)}\right)&=\frac{2}{z-w}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{w}{w+a_n}-\frac{z}{z+a_n}\right)\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a_n}{(z+a_n)(w+a_n)},\end{aligned} \tag{A.51}$$

对于满足 $w\neq z$ 和 $w\neq -a_n$ 的所有 w，$n\in\mathbb{N}$。 □

Appendix B. Proof of Theorem 3.3

B.1. **设定与策略**。回顾 $a,\ b\in\mathbb{N}$ 其中

$$a-1<b<2a \tag{B.1}$$

且多项式势为

$$V(x)=x^{2a}+V_1(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{B.2}$$

其中 $\deg \mathrm{Re}\ V_1\le 2a-1$、$\deg \mathrm{Im}\ V_1=b$，且 $\mathrm{Im}\,V_1(x)=c_bx^b+\cdots$，其中 $c_b>0$，参见 (3.1)– (3.3)。$\mathrm{Re}\,V$和 $\mathrm{Im}\ V$中的低阶项将作为扰动处理，使用一个常数 $M>0$，使得

$$\begin{aligned}|V(z)-z^{2a}|&\le M\left(|z|^{2a-1}+1\right),\quad z\in\mathbb{C},\\ |\operatorname{Im}V(x)-c_bx^b|&\le M\left(|x|^{b-1}+1\right),\quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{B.3}$$

记 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$，并假设

$$\alpha\ge 1+c_b^{2a},\quad \beta\ge 0, \tag{B.4}$$

并且，对于固定的 $\varepsilon\in(0,c_b)$ 和 $\omega=\gamma\omega_0$，其中 $\gamma\in(0,1)$，参见 (3.20) 和 (3.17)，有

$$0\le\beta\le(c_b-\varepsilon)\alpha^{\frac{b}{2a}}\le c_b\alpha^{\frac{b}{2a}}\quad\text{if } b \text{ is odd} \tag{B.5}$$

and

$$\alpha^{\frac{b}{2(b+1)}+\omega}\le\beta\le(c_b-\varepsilon)\alpha^{\frac{b}{2a}}\quad\text{if } b \text{ is even}. \tag{B.6}$$

因此，当 b 为偶数时，我们有

$$\alpha^{\frac{b}{b+1}\left(\frac12+\gamma\tau\right)}\le\beta\le c_b\alpha^{\frac{b}{2a}}. \tag{B.7}$$

定理 3.3 的结论中，剩余的 b 为奇数且 $\beta<0$ 的情形，其证明类似，故略去。

下文中，假设 $\lambda\in\mathbb{C}$ 始终满足 (B.4)–(B.7)。注意，

$$\alpha\le|\lambda|\le\alpha+c_b\alpha^{\frac{b}{2a}}\le\alpha+c_b\alpha^{1-\frac{1}{2a}}=\alpha\left(1+c_b\alpha^{-\frac{1}{2a}}\right), \tag{B.8}$$

因此由 (B.4) 可得

$$\alpha\le|\lambda|\le 2\alpha. \tag{B.9}$$

还需注意，若 b 为偶数，则 $\beta\to+\infty$；若 b 为奇数，则 β 可以保持有界。

我们将 V 的实部和虚部首项的转向点定义为 $x_\alpha,\ y_\beta\ge 0$：

$$x_\alpha^{2a}=\alpha,\qquad c_by_\beta^b=\beta. \tag{B.10}$$

注意，由于 (B.5)

$$y_\beta=\left(\frac{\beta}{c_b}\right)^{\frac1b}\le\left(1-\frac{\varepsilon}{c_b}\right)^{\frac1b}\alpha^{\frac{1}{2a}}=\left(1-\frac{\varepsilon}{c_b}\right)^{\frac1b}x_\alpha<x_\alpha. \tag{B.11}$$

我们定义

$$\zeta\equiv\zeta(\varepsilon):=\left(1-\frac{\varepsilon}{c_b}\right)^{\frac1b}\in(0,1),\qquad \delta\equiv\delta(\varepsilon):=\frac{1-\zeta}{32}\in(0,\tfrac{1}{32}) \tag{B.12}$$

and

$$\Delta_\lambda:=\begin{cases}\delta x_\alpha & \text{if } b \text{ is odd},\\ \delta y_\beta & \text{if } b \text{ is even}.\end{cases} \tag{B.13}$$

注意，由（B.11）可知，

$$y_\beta\le\frac{\Delta_\lambda}{\delta}, \tag{B.14}$$

因此，在（B.13）的两种情况下，利用（B.7），我们得到

$$K^{\frac{1}{b+1}}\alpha^{\frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{2}+\gamma\tau\right)} \le \Delta_\lambda \le \delta\alpha^{\frac{1}{2a}} \le \alpha^{\frac{1}{2a}}, \tag{B.15}$$

其中

$$K := \delta^{b+1}c_b^{-\frac{b+1}{b}}. \tag{B.16}$$

因此，若 $\alpha \to +\infty$，则 $\Delta_\lambda \to +\infty$。此外，我们定义

$$\mu_\lambda := \frac{\Delta_\lambda^{b+1}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \tag{B.17}$$

并注意到，由 (B.15) 可得

$$K\alpha^{\gamma\tau} \le \mu_\lambda \le \alpha^{\tau}. \tag{B.18}$$

因此，对于 (B.13) 中的任一种情形，若 $\alpha \to +\infty$，则 $\mu_\lambda \to +\infty$。

不等式 (B.15) 和 (B.17) 表明，存在 $\Lambda_1 \ge 1 + c_b^{2a}$，使得对所有 $\alpha \ge \Lambda_1$，都有

$$\Delta_\lambda \ge 4, \quad \mu_\lambda \ge 4, \quad \log\alpha \le k_1 \log\Delta_\lambda \le k_2 \log\mu_\lambda \le k_3 \log\alpha, \tag{B.19}$$

其中常数 k_1，k_2，$k_3 > 0$ 与 α、Δ_μ、μ_λ 无关；Λ_1 可取为

$$\Lambda_1 := \max\left\{1 + c_b^{2a}, \left(\frac{4^{b+1}}{K}\right)^{\frac{1}{\gamma\tau}}\right\}. \tag{B.20}$$

我们的目标是证明存在 $\widetilde{\eta} > 0$，使得对于任意满足 (B.4)–(B.7) 且 α 足够大的 λ，都可以找到一个函数 $u_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$，使其满足不等式

$$\|(\lambda - L)u_\lambda\|_{L^2} \le \exp\left(-\widetilde{\eta}\mu_\lambda\right)\|u_\lambda\|_{L^2}. \tag{B.21}$$

这类函数 u_λ 通常称为伪模。于是，结论 (3.19) 和 (3.22) 中的预解式估计可由 (B.21)、(B.17)、(B.13) 和 (B.10) 推出。事实上，对于满足 (B.4)–(B.7) 且 α 足够大的 $\lambda \in \rho(L)$，以及 $v_\lambda := (\lambda - L)u_\lambda$，我们得到

$$\|(\lambda - L)^{-1}\| \ge \frac{\|(\lambda - L)^{-1}v_\lambda\|_{L^2}}{\|v_\lambda\|_{L^2}} = \frac{\|u_\lambda\|_{L^2}}{\|(\lambda - L)u_\lambda\|_{L^2}} \ge \exp\left(\widetilde{\eta}\mu_\lambda\right). \tag{B.22}$$

我们构造如下形式的伪模 u_λ

$$u_\lambda = \chi_\lambda e^{\mathrm{i}\varphi_\lambda}\sum_{j=0}^{N_\lambda} a_{j,\lambda} \tag{B.23}$$

其中函数 χ_λ、φ_λ、$a_{j,\lambda}$ 以及整数 $N_\lambda \in \mathbb{N}$将在接下来的小节中构造。

B.2. 记号。 为简化记号，以下省略下标 λ。不过，必须牢记对 λ 的（非）依赖性。特别地，我们有

$$\lambda\text{-dependent}: \quad u, \chi, a_j, \varphi, N, \Delta, \mu, r_k, I_j, \tag{B.24}$$

and

$$\lambda\text{-independent}: \quad \delta, \zeta, M, K, K_j, \Lambda_j, k_j. \tag{B.25}$$

对于 $r > 0$ 和定义在 $\mathbb{D}_r$ 上的解析函数 f，我们记作

$$\mathbb{D}_r := B_r(y_\beta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - y_\beta| < r\}, \qquad \|f\|_r := \|f\|_{L^\infty(\mathbb{D}_r)}. \tag{B.26}$$

B.3. 光滑截断函数 χ。 设 $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $0 \le h \le 1$，并且

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin (-2,2); \end{cases} \tag{B.27}$$

通过磨光构造这样的 h是标准做法，参见例如 [EE87，引理 V.19]。在我们的特殊情形下，也可以取

$$h(x) := \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{x} E(\tfrac{3}{2}+t)\,\mathrm{d}t, \quad x \le 0, \quad h(x) := h(-x), \quad x > 0, \tag{B.28}$$

其中

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)\,\mathrm{d}t > 0.22 \tag{B.29}$$

且 E 是隆起函数

$$E(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-4t^2}}, & |t| < \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| \ge \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{B.30}$$

下文使用的截断函数 χ 通过平移与缩放定义

$$\chi(x) := h\left(\frac{1}{\Delta}(x - y_\beta)\right), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{B.31}$$

因此它们满足 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$、$0 \le \chi \le 1$,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [y_\beta - \Delta, y_\beta + \Delta], \\ 0, & x \notin (y_\beta - 2\Delta, y_\beta + 2\Delta), \end{cases} \tag{B.32}$$

and

$$\|\chi'\|_{L^\infty} = \frac{1}{\Delta}\|h'\|_{L^\infty} \le \frac{5}{\Delta}, \quad \|\chi''\|_{L^\infty} = \frac{1}{\Delta^2}\|h''\|_{L^\infty} \le \frac{10}{\Delta^2}. \tag{B.33}$$

B.4. 相位函数 φ。 由 (B.3) 和三角不等式可得

$$\begin{aligned} |V(z)| &\le |z|^{2a} + M\left(|z|^{2a-1} + 1\right) \\ &\le \left(|z - y_\beta| + y_\beta\right)^{2a} + M\left(\left(|z - y_\beta| + y_\beta\right)^{2a-1} + 1\right). \end{aligned} \tag{B.34}$$

因此，回顾 (B.11)、(B.12) 和 (B.13)，我们得到对所有 $z \in \mathbb{D}_{8\Delta}$，

$$\begin{aligned} |V(z)| &\le (8\Delta + y_\beta)^{2a} + M\left((8\Delta + y_\beta)^{2a-1} + 1\right) \\ &\le (8\delta x_\alpha + \zeta x_\alpha)^{2a}\,\alpha + M\left((8\delta x_\alpha + \zeta x_\alpha)^{2a-1} + 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}(1+3\zeta)\right)^{2a}\alpha + M\left(\left(\frac{1}{4}(1+3\zeta)\right)^{2a-1}\alpha^{1-\frac{1}{2a}} + 1\right) \\ &\le \left[\left(\frac{1}{4}(1+3\zeta)\right)^{2a} + M\left(\alpha^{-\frac{1}{2a}} + \alpha^{-1}\right)\right]\alpha. \end{aligned} \tag{B.35}$$

由于 $\zeta \in (0,1)$，因此 $(1+3\zeta)/4 < (1+\zeta)/2 < 1$，存在 $\Lambda_2 \ge \Lambda_1$，使得对于所有 $\alpha \ge \Lambda_2$ 以及所有 $z \in \mathbb{D}_{8\Delta}$

$$|V(z)| \le \left(\frac{1}{2}(1+\zeta)\right)^{2a}\alpha \le (1 - K_1^2)\alpha < \alpha, \tag{B.36}$$

其中

$$K_1 := \left(1 - \left(\frac{1}{2}(1+\zeta)\right)^{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \in (0,1); \tag{B.37}$$

经过直接估计可知， Λ_2 可以取为

$$\Lambda_2 = \max\left\{\Lambda_1, \left[\frac{2M}{\left(\frac{1}{2}(1+\zeta)\right)^{2a} - \left(\frac{1}{4}(1+3\zeta)\right)^{2a}}\right]^{2a}\right\}. \tag{B.38}$$

因此，对于所有的 $\alpha \geq \Lambda_2$ 和所有的 $z \in \mathbb{D}_{8\Delta}$

$$\alpha - |V(z)| \geq K_1^2 \alpha. \tag{B.39}$$

相位函数 φ 定义为

$$\varphi(z) := -\int_{y_\beta}^{z} (\lambda - V(w))^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}w, \qquad z \in \mathbb{D}_{8\Delta}, \tag{B.40}$$

其中使用复平方根的主值，并沿连接 y_β 和 z 的直线路径积分。由 (B.36) 和 $\alpha > 0$, 函数 φ 在 $\mathbb{D}_{8\Delta}$ 上解析，且

$$\varphi'(z) = -(\lambda - V(z))^{\frac{1}{2}}, \qquad z \in \mathbb{D}_{8\Delta}. \tag{B.41}$$

此外，由 (B.36)、(B.9) 和 $\zeta < 1$, 对于所有的 $\alpha \geq \Lambda_2$ 以及所有的 $z \in \mathbb{D}_{8\Delta}$, 可得

$$\begin{aligned} |\varphi'(z)| &\leq \left(1 + \left(\frac{1}{2}(1+\zeta)\right)^{2a}\right)^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{1}{2}} \leq 4\alpha^{\frac{1}{2}}, \\ |\varphi'(z)| &\geq \left(1 - \left(\frac{1}{2}(1+\zeta)\right)^{2a}\right)^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{1}{2}} \geq K_1 \alpha^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{B.42}$$

因此

$$\frac{1}{4\alpha^{\frac{1}{2}}} \leq \left\|\frac{1}{\varphi'}\right\|_{4\Delta} \leq \frac{1}{K_1 \alpha^{\frac{1}{2}}}. \tag{B.43}$$

B.5. **对 Re(iφ(x)) 的估计。** 对于 $t \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta + 2\Delta]$, 由 (B.41) 可得

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(\mathrm{i}\varphi'(t)) &= \operatorname{Im}(\varphi'(t)) \\ &= \frac{\operatorname{Im} V_1(t) - \beta}{2^{\frac{1}{2}}\left(\left[(\alpha - \operatorname{Re} V(t))^2 + (\beta - \operatorname{Im} V_1(t))^2\right]^{\frac{1}{2}} + \alpha - \operatorname{Re} V(t)\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\operatorname{Im} V_1(t) - \beta}{D(t)}, \end{aligned} \tag{B.44}$$

其中

$$D(t) = 2^{\frac{1}{2}}\left(\left[(\alpha - \operatorname{Re} V(t))^2 + (\beta - \operatorname{Im} V_1(t))^2\right]^{\frac{1}{2}} + \alpha - \operatorname{Re} V(t)\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{B.45}$$

回忆一下，由于 (B.39), $\alpha - \operatorname{Re} V(t) > 0$。

首先，我们估计 $D(t)$, 其中 $t \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta + 2\Delta]$。由 (B.39), 对所有 $\alpha \geq \Lambda_2$, 有

$$D(t) \geq 2(\alpha - \operatorname{Re} V(t))^{\frac{1}{2}} \geq 2K_1 \alpha^{\frac{1}{2}}. \tag{B.46}$$

另一方面， $\beta \leq c_b \alpha^{b/(2a)}$ 和 $b \leq 2a-1$, 参见（B.5）、（B.7）和（B.1），得到

$$D(t) \leq 2\big(\alpha + |\operatorname{Re} V(t)| + \beta + |\operatorname{Im} V(t)|\big)^{\frac{1}{2}} \leq 2\left(\alpha\big(1 + c_b \alpha^{-\frac{1}{2a}}\big) + 2|V(t)|\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{B.47}$$

因此，利用（B.36）和（B.4），我们得到对所有 $\alpha \geq \Lambda_2$ 均有

$$D(t) \leq 2\left(2\alpha + 2\alpha\right)^{\frac{1}{2}} = 4\alpha^{\frac{1}{2}}. \tag{B.48}$$

接下来我们考虑 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\varphi)$，即

$$-\operatorname{Re}(\mathrm{i}\varphi(x)) = \int_{y_\beta}^{x} \operatorname{Im}(\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = I_1(x) + I_2(x), \quad x \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta + 2\Delta], \tag{B.49}$$

其中

$$I_1(x) := c_b \int_{y_\beta}^{x} \frac{t^b - y_\beta^b}{D(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad I_2(x) := \int_{y_\beta}^{x} \frac{\operatorname{Im} V_1(t) - c_b t^b}{D(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{B.50}$$

首先注意到

$$I_1(x) \geq 0, \quad x \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta + 2\Delta]. \tag{B.51}$$

事实上，对于所有 $t \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta + 2\Delta]$， $D(t) > 0$，而对于 $x \geq y_\beta$，我们得到

$$I_1(x) = c_b \int_{y_\beta}^{x} \frac{t^b - y_\beta^b}{D(t)}\,\mathrm{d}t \geq 0. \tag{B.52}$$

另一方面，对于 $x \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta]$，我们有

$$I_1(x) = c_b \int_{y_\beta}^{x} \frac{t^b - y_\beta^b}{D(t)}\,\mathrm{d}t = c_b \int_{x}^{y_\beta} \frac{y_\beta^b - t^b}{D(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{B.53}$$

若 b 为奇数，则对于所有 $t \leq y_\beta$， $y_\beta^b - t^b \geq 0$。若 b 为偶数，我们选取了 $\Delta \leq y_\beta$，见 (B.13)，因此对于 $t \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta]$，有 $|t| \leq y_\beta$，从而 $y_\beta^b - t^b \geq y_\beta^b - y_\beta^b = 0$.

其次 我们从下方估计 $I_1(x)$，对所有 $x \in \operatorname{supp}\chi'$ 均成立；由 (B.32) 可得

$$\operatorname{supp}\chi' \subset [y_\beta - 2\Delta, y_\beta - \Delta] \cup [y_\beta + \Delta, y_\beta + 2\Delta]. \tag{B.54}$$

对所有 $x \in [y_\beta + \Delta, y_\beta + 2\Delta]$ 和所有 $\alpha \geq \Lambda_2$，我们得到（回顾 (B.48)、(B.17)）

$$\begin{aligned} I_1(x) &\geq \frac{c_b}{4}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \int_{y_\beta}^{x} (t^b - y_\beta^b)\,\mathrm{d}t \geq \frac{c_b}{4}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \int_{y_\beta + \frac{\Delta}{2}}^{y_\beta + \Delta} (t^b - y_\beta^b)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \frac{c_b}{4}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \left(\left(y_\beta + \frac{\Delta}{2} \right)^b - y_\beta^b \right) \frac{\Delta}{2} \geq \frac{c_b}{8}\frac{1}{2^b}\frac{\Delta^{b+1}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} = \frac{c_b}{8}\frac{1}{2^b}\mu. \end{aligned} \tag{B.55}$$

Sim类似地，对所有 $x \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta - \Delta]$ 和所有 $\alpha \geq \Lambda_2$，我们有（参见 (B.53)、(B.48)）)

$$I_1(x) \geq \frac{c_b}{4}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \int_{y_\beta - \Delta}^{y_\beta - \frac{\Delta}{2}} (y_\beta^b - t^b)\,\mathrm{d}t \geq \frac{c_b}{8}\frac{\Delta}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \left(y_\beta^b - \left(y_\beta - \frac{\Delta}{2} \right)^b \right). \tag{B.56}$$

接下来的步骤中，我们分别分析 $\Delta > 3y_\beta$ 和 $\delta y_\beta \leq \Delta \leq 3y_\beta$ 两种情况； Δ 的下界由 (B.14) 得出。第一种情况仅当 b 为奇数时才可能出现，因为当 b 为偶数时， $\Delta \leq y_\beta$，参见 (B.13)。因此，对于奇数 b 和 $\Delta > 3y_\beta$,

$$y_\beta^b - \left(y_\beta - \frac{\Delta}{2} \right)^b = y_\beta^b + \left(\frac{\Delta}{2} - y_\beta \right)^b \geq \left(\frac{\Delta}{6} + \frac{\Delta}{3} - y_\beta \right)^b \geq \frac{1}{6^b}\Delta^b. \tag{B.57}$$

在第二种情况 $\delta y_\beta \leq \Delta \leq 3y_\beta$ 下，我们得到

$$-\frac{1}{2}y_\beta \leq y_\beta - \frac{\Delta}{2} \leq \left(1 - \frac{\delta}{2} \right) y_\beta. \tag{B.58}$$

由于 $\delta < 1$，我们有

$$\left| y_\beta - \frac{\Delta}{2} \right| \leq \left(1 - \frac{\delta}{2} \right) y_\beta \tag{B.59}$$

因此

$$y_\beta^b - \left(y_\beta - \frac{\Delta}{2}\right)^b \geq y_\beta^b - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^b y_\beta^b \geq \frac{1}{3^b}\left(1 - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^b\right)\Delta^b. \tag{B.60}$$

综合 (B.55)、(B.56) 以及 (B.57) 和 (B.60)，可得对于所有 $x \in \operatorname{supp}\chi'$（参见 (B.54)）以及所有 $\alpha \geq \Lambda_2$

$$I_1(x) \geq K_2\mu, \tag{B.61}$$

其中

$$K_2 := \frac{c_b}{8}\min\left\{\frac{1}{6^b}, \frac{1}{3^b}\left(1 - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^b\right)\right\}. \tag{B.62}$$

接下来，为了从上方估计 $I_1(x)$，其中 $x \in [y_\beta, y_\beta + 2\Delta]$，我们使用 (B.46)、中值定理以及 $y_\beta \leq \delta^{-1}\Delta$（参见 (B.14)），从而对所有 $\alpha \geq \Lambda_2$ 得到

$$\begin{aligned} I_1(x) &\leq \frac{c_b}{2K_1}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\int_{y_\beta}^x (t^b - y_\beta^b)\,\mathrm{d}t \leq \frac{bc_b}{2K_1}\frac{x^{b-1}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\int_{y_\beta}^x (t - y_\beta)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{bc_b}{4K_1}\frac{(y_\beta + 2\Delta)^{b-1}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}(x - y_\beta)^2 \\ &\leq \frac{bc_b(\delta^{-1}+2)^{b-1}}{4K_1}\frac{\Delta^{b-1}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}(x - y_\beta)^2 = \frac{K_3}{2}\frac{\mu}{\Delta^2}(x - y_\beta)^2, \end{aligned} \tag{B.63}$$

其中

$$K_3 := \frac{bc_b(\delta^{-1}+2)^{b-1}}{2K_1}. \tag{B.64}$$

最后，我们从上方估计 I_2，并证明它在 $\operatorname{supp}\chi'$ 上是 I_1 的一个扰动（参见 (B.54)）。为此，回顾 (B.3)、(B.46) 和 $y_\beta \leq \delta^{-1}\Delta$（参见 (B.14)），可得对所有 $x \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta + 2\Delta]$ 以及所有 $\alpha \geq \Lambda_2$，

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\leq \frac{M}{2K_1}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\int_{y_\beta - 2\Delta}^{y_\beta + 2\Delta}(|t|^{b-1} + 1)\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{2K_1}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}4\Delta((y_\beta + 2\Delta)^{b-1} + 1) \\ &\leq \frac{2M}{K_1}\frac{\Delta}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\left((\delta^{-1}+2)^{b-1}\Delta^{b-1} + 1\right) = \frac{2M}{K_1}\mu\left(\frac{(\delta^{-1}+2)^{b-1}}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^b}\right). \end{aligned} \tag{B.65}$$

Hence，存在 $\Lambda_3 \geq \Lambda_2$，使得对所有 $\alpha \geq \Lambda_3$ 和所有 $x \in [y_\beta - 2\Delta, y_\beta + 2\Delta \quad]$

$$|I_2(x)| \leq \frac{4M}{K_1}\frac{\mu}{\Delta} \leq \frac{K_2}{2}\mu; \tag{B.66}$$

利用 (B.15)，Λ_3 可取为

$$\Lambda_3 = \max\left\{\Lambda_2, \frac{(\delta^{-1}+2)^{2(b-1)(b+1)}}{K^2}, \left(\frac{8M}{K_1K_2}\right)^{2(b+1)}\frac{1}{K^2}\right\}. \tag{B.67}$$

总之，利用 (B.61) 和 (B.66)，对于所有 $\alpha \geq \Lambda_3$ 以及所有 $x \in \operatorname{supp}\chi'$，参见 (B.54)，有

$$-\operatorname{Re}(\mathrm{i}\varphi(x)) = I_1(x) + I_2(x) \geq K_2\mu - \frac{K_2}{2}\mu = \frac{K_2}{2}\mu. \tag{B.68}$$

B.6. **函数** a_j。 将 (B.23) 中的算子 $\lambda - L$ 作用于 u，得到

$$(\lambda - L)u = \chi'' e^{\mathrm{i}\varphi} \sum_{j=0}^{N} a_j + 2\chi' e^{\mathrm{i}\varphi} \sum_{j=0}^{N} \left(\mathrm{i}\varphi' a_j + a_j'\right) + \chi(\lambda - L) e^{\mathrm{i}\varphi} \sum_{j=0}^{N} a_j \tag{B.69}$$

并利用 (B.41),

$$\begin{aligned}(\lambda - L)\left(e^{\mathrm{i}\varphi} \sum_{j=0}^{N} a_j\right) &= e^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2\mathrm{i}\varphi' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}\varphi'' - \varphi'^2 - V + \lambda\right) \sum_{j=0}^{N} a_j \\ &= e^{\mathrm{i}\varphi} \sum_{j=0}^{N} \left(a_j'' + 2\mathrm{i}\varphi' a_j' + \mathrm{i}\varphi'' a_j\right).\end{aligned} \tag{B.70}$$

函数 a_j 选取为满足方程组

$$\begin{aligned}2\varphi' a_0' + \varphi'' a_0 &= 0, \\ 2\mathrm{i}\varphi' a_j' + \mathrm{i}\varphi'' a_j &= -a_{j-1}'', \quad j \in \mathbb{N},\end{aligned} \tag{B.71}$$

由此得到

$$(\lambda - L) e^{\mathrm{i}\varphi} \sum_{j=0}^{N} a_j = e^{\mathrm{i}\varphi} a_N''. \tag{B.72}$$

对于 $z \in \mathbb{D}_{8\Delta}$，令

$$a_0(z) = \frac{\varphi'(y_\beta)^{\frac{1}{2}}}{\varphi'(z)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\lambda - V(y_\beta))^{\frac{1}{4}}}{(\lambda - V(z))^{\frac{1}{4}}}, \tag{B.73}$$

并通过归纳法

$$a_j(z) = \frac{1}{\varphi'(z)^{\frac{1}{2}}} \int_{y_\beta}^{z} \frac{\mathrm{i}a_{j-1}''(w)}{2\varphi'(w)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{\varphi'(z)^{\frac{1}{2}}} \int_{0}^{z-y_\beta} \frac{\mathrm{i}a_{j-1}''(y_\beta + w)}{2\varphi'(y_\beta + w)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}w, \quad j \in \mathbb{N}; \tag{B.74}$$

积分沿连接端点的直线路径进行。函数 $\varphi'^{-1/2}$ 和 a_j、 $j = 0$，**1**，..... 在 $\mathbb{D}_{8\Delta}$ 上解析。

B.7. 对 a_j 的估计。 首先，由 (B.42) 和 (B.43) 可知，对于所有 $z \in \mathbb{D}_{8\Delta}$ 和所有 $\alpha \geq \Lambda_3$

$$\frac{K_1^{\frac{1}{2}}}{2} \leq |a_0(z)| \leq \frac{2}{K_1^{\frac{1}{2}}}. \tag{B.75}$$

接下来，对定义在 $B_r(y)$ 上的解析有界函数 g 应用柯西估计，其中 $y \in \mathbb{C}$且 $r > 0$，可得

$$|g^{(l)}(y)| \leq \frac{l!}{r^l} \|g\|_{L^\infty(B_r(y))}, \quad l = 1, 2. \tag{B.76}$$

固定 $j \in \mathbb{N}$ 并定义

$$r_k \equiv r_k^{(j)} = \left(4 - \frac{k}{j}\right)\Delta, \quad k = 0, \ldots, j; \tag{B.77}$$

注意到

$$r_{k-1} - r_k = \frac{\Delta}{j}, \quad k = 1, \ldots, j, \tag{B.78}$$

and

$$4\Delta = r_0 > r_1 > \cdots > r_j = 3\Delta. \tag{B.79}$$

令 $z \in \mathbb{D}_{r_k}$，其中 $k \in \{1, \ldots, j\}$。由（B.74）可得

$$|a_k(z)| \le \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \int_0^{|z-y_\beta|} |a''_{k-1}(y_\beta + w)| \, |\mathrm{d}w|. \tag{B.80}$$

由 (B.76)，对圆盘内满足 $y = y_\beta + w$ 和 $r = r_{k-1} - |w|$ 的 a''_{k-1}

$$B_{r_{k-1}-|w|}(y_\beta + w) \subset \mathbb{D}_{r_{k-1}} = B_{r_{k-1}}(y_\beta), \tag{B.81}$$

我们有

$$|a''_{k-1}(y_\beta + w)| \le \frac{2\|a_{k-1}\|_{r_{k-1}}}{(r_{k-1} - |w|)^2}. \tag{B.82}$$

因此，回到 (B.80)，我们得到对所有 $z \in \mathbb{D}_{r_k}$，

$$\begin{aligned} |a_k(z)| &\le \|a_{k-1}\|_{r_{k-1}} \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \int_0^{|z-y_\beta|} \frac{|\mathrm{d}w|}{(r_{k-1} - |w|)^2} \\ &= \|a_{k-1}\|_{r_{k-1}} \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \left(\frac{1}{r_{k-1}} - \frac{1}{r_{k-1} - |z - y_\beta|} \right) \\ &= \|a_{k-1}\|_{r_{k-1}} \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{|z - y_\beta|}{r_{k-1}(r_{k-1} - |z - y_\beta|)}. \end{aligned} \tag{B.83}$$

此外，利用 $r_k < r_{k-1}$ 和 $r_{k-1} - r_k = \Delta/j$，见 (B.79) 和 (B.78)，我们得到

$$\|a_k\|_{r_k} \le \|a_{k-1}\|_{r_{k-1}} \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{r_{k-1}}{r_{k-1}(r_{k-1} - r_k)} = \|a_{k-1}\|_{r_{k-1}} \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{j}{\Delta}, \tag{B.84}$$

对于 $k = 1$、.....、j。

特别地，对 $k = j$，由 (B.83) 可得，对所有 $z \in \mathbb{D}_{r_j}$（回忆 $r_{j-1} > r_j = 3\Delta$）

$$\begin{aligned} |a_j(z)| &\le \|a_{j-1}\|_{r_{j-1}} \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{1}{r_{j-1} - |z - y_\beta|} \frac{|z - y_\beta|}{r_{j-1}} \\ &\le \|a_{j-1}\|_{r_{j-1}} \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{1}{r_{j-1} - r_j} \frac{|z - y_\beta|}{r_j} \\ &= \frac{|z - y_\beta|}{3\Delta} \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{j}{\Delta} \|a_{j-1}\|_{r_{j-1}}. \end{aligned} \tag{B.85}$$

此外，反复应用（B.84）可得，对所有 $z \in \mathbb{D}_{3\Delta}$

$$|a_j(z)| \le \frac{|z - y_\beta|}{3\Delta} \left(\left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{j}{\Delta} \right)^j \|a_0\|_{4\Delta}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{B.86}$$

因此也有

$$\|a_j\|_{3\Delta} \le \left(\left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{j}{\Delta} \right)^j \|a_0\|_{4\Delta}, \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{B.87}$$

最后，根据圆盘 $B_\Delta(z)$ 中的柯西估计，我们对所有 $z \in \mathbb{D}_{2\Delta}$ 得到

$$|a_j^{(l)}(z)| \le \frac{l!}{\Delta^l} \|a_j\|_{3\Delta}, \quad l = 1, 2, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{B.88}$$

B.8. N **的选择及相关估计**。令

$$N := \left\lfloor \left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta}^{-1} \Delta \frac{1}{e} \right\rfloor, \tag{B.89}$$

thus

$$\left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{N}{\Delta} \leq \frac{1}{e} \tag{B.90}$$

并且根据 (B.43)，对所有 $\alpha \geq \Lambda_3$

$$\frac{K_1}{e} \alpha^{\frac{1}{2}} \Delta - 1 \leq N \leq 4\alpha^{\frac{1}{2}} \Delta \frac{1}{e}. \tag{B.91}$$

特别地， $N \to +\infty$ 如果 $\alpha \to +\infty$ 由于 $\Delta \to +\infty$，见 (B.15)。

将 $j = N$ 代入上述估计，即将 (B.88) 与 $l = 2$、(B.87) 一起代入，由 (B.90) 以及根据 (B.75) 对 $\|a_0\|_{4\Delta}$ 的估计，我们得到

$$\|a_N''\|_{2\Delta} \leq \frac{2}{\Delta^2} \|a_N\|_{3\Delta} \leq \frac{2}{\Delta^2} \left(\left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{N}{\Delta} \right)^N \|a_0\|_{4\Delta} \leq \frac{4}{K_1^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta^2} \exp(-N). \tag{B.92}$$

由于根据 (B.13)、(B.17)、(B.11) 以及 $b \leq 2a - 1$

$$\frac{\mu}{\alpha^{\frac{1}{2}} \Delta} = \frac{\Delta^b}{\alpha} \leq \frac{x_\alpha^b}{\alpha} = \alpha^{\frac{b}{2a} - 1} \leq \alpha^{-\frac{1}{2a}}, \tag{B.93}$$

我们有

$$\frac{N}{\mu} \geq \frac{K_1}{e} \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} \Delta}{\mu} - \frac{1}{\mu} \geq \frac{K_1}{e} \alpha^{\frac{1}{2a}} - \frac{1}{\mu} \geq K_2; \tag{B.94}$$

最后一步在 $\alpha \geq \Lambda_4$ 时成立，其中

$$\Lambda_4 := \Lambda_3 + \left(\frac{3}{K_1} (K_2 + 1) \right)^{2a}. \tag{B.95}$$

因此，对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$，我们得到

$$\|a_N''\|_{2\Delta} \leq \frac{4}{K_1^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta^2} \exp\left(-\mu \frac{N}{\mu} \right) \leq \exp\left(-K_2 \mu \right). \tag{B.96}$$

由 (B.87) 和 (B.90)，我们得到对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$，

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N} \|a_j\|_{2\Delta} &\leq \|a_0\|_{4\Delta} \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \left(\left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{j}{\Delta} \right)^j \right) \\ &\leq \|a_0\|_{4\Delta} \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \left(\left\| \frac{1}{\varphi'} \right\|_{4\Delta} \frac{N}{\Delta} \right)^j \right) \\ &\leq \|a_0\|_{4\Delta} \sum_{j=0}^{N} e^{-j} \leq \frac{2}{K_1^{\frac{1}{2}}} \frac{e}{e-1} \leq \frac{4}{K_1^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{B.97}$$

同理，由（B.88）、$l = 1$ 和（B.87），对于所有 $\alpha \geq \Lambda_4$，我们有（最后一步见（B.19））

$$\sum_{j=0}^{N} \|a_j'\|_{2\Delta} \leq \frac{\|a_0\|_{4\Delta}}{\Delta} \sum_{j=0}^{N} e^{-j} \leq \frac{2}{K_1^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta} \frac{e}{e-1} \leq \frac{4}{K_1^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta} \leq \frac{1}{K_1^{\frac{1}{2}}}. \tag{B.98}$$

最后，对于 $s \in (0,1)$，由（B.86），对于所有 $\alpha \geq \Lambda_4$，我们得到

$$\sum_{j=1}^{N} \|a_j\|_{s\Delta} \leq \frac{s}{3}\|a_0\|_{4\delta\Delta} \sum_{j=1}^{N} e^{-j} \leq \frac{s}{3}\frac{2}{K_1^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{e-1} \leq \frac{1}{3}\frac{2}{K_1^{\frac{1}{2}}}s. \tag{B.99}$$

因此，对于

$$s_0 := \frac{K_1}{2} \in (0, \tfrac{1}{2}) \tag{B.100}$$

由 (B.75) 和 (B.99) 可得，对所有 $x \in [y_\beta - s_0\Delta, y_\beta + s_0\Delta]$ 及所有 $\alpha \geq \Lambda_4$

$$|a_0(x)| - \sum_{j=1}^{N} |a_j(x)| \geq \frac{K_1^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{1}{3}\frac{2}{K_1^{\frac{1}{2}}}\frac{K_1}{2} = \frac{K_1^{\frac{1}{2}}}{6}. \tag{B.101}$$

B.9. 的上界$\lambda - Lu\|_\circ$ 我们估计 (B.69) 和 (B.72) 中的各项。回顾 (B.32)、(B.33) 以及

$$\operatorname{supp}\chi'' \subset \operatorname{supp}\chi' \subset [y_\beta - 2\Delta, y_\beta - \Delta] \cup [y_\beta + \Delta, y_\beta + 2\Delta]. \tag{B.102}$$

此外，在 $\operatorname{supp}\chi'$ 上，我们有 (B.68) 中 $\operatorname{Re}(\mathrm{i}\varphi)$ 的估计，以及 (B.97) 中对 $\|a_j\|_{2\Delta}$ 的估计。因此，对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$,

$$\begin{aligned}
\left\|\chi'' e^{\mathrm{i}\varphi}\sum_{j=0}^{N} a_j\right\|_{L^2}^2 &\leq \int\limits_{\operatorname{supp}\chi''} \|\chi''\|_{L^\infty}^2 \exp\left(2\operatorname{Re}(\mathrm{i}\varphi(x))\right)\left(\sum_{j=0}^{N}\|a_j\|_{2\Delta}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{100}{\Delta^4}\int\limits_{\operatorname{supp}\chi''} \exp\left(-K_2\mu\right)\frac{16}{K_1}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1600}{K_1\Delta^4}\exp\left(-K_2\mu\right)2\Delta \leq \frac{50}{K_1}\exp\left(-K_2\mu\right),
\end{aligned} \tag{B.103}$$

最后一步，回顾由 (B.19) 可知 $\Delta \geq 4$。

类似地，利用 (B.97)、(B.98)、(B.42) 和 (B.33)，对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$ 可得

$$\begin{aligned}
\left\|2\chi' e^{\mathrm{i}\varphi}\sum_{j=0}^{N}\left(\mathrm{i}\varphi' a_j + a_j'\right)\right\|_{L^2}^2 &\leq 4\|\chi'\|_{L^\infty}^2 2\left(16\alpha\frac{16}{K_1} + \frac{1}{K_1}\right)\int\limits_{\operatorname{supp}\chi'} \exp\left(-K_2\mu\right)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{16^5}{K_1}\alpha\exp\left(-K_2\mu\right).
\end{aligned} \tag{B.104}$$

最后，我们估计由（B.72）得到的项，即 $\chi e^{\mathrm{i}\varphi}a_N''\|_\circ$ 为此，首先应用（B.96）和（B.50），并得到对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$

$$\begin{aligned}
\left\|\chi e^{\mathrm{i}\varphi}a_N''\right\|_{L^2}^2 &\leq \int_{y_\beta-2\Delta}^{y_\beta+2\Delta} \exp(2\operatorname{Re}(\mathrm{i}\varphi(x)))\exp\left(-2K_2\mu\right)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{y_\beta-2\Delta}^{y_\beta+2\Delta} \exp(-2I_1(x))\exp(2|I_2(x)|)\exp\left(-2K_2\mu\right)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{B.105}$$

接下来，由（B.51）和（B.66），可得对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$

$$\left\|\chi e^{\mathrm{i}\varphi}a_N''\right\|_{L^2}^2 \leq \int_{y_\beta-2\Delta}^{y_\beta+2\Delta} \exp\left(-2K_2\mu + K_2\mu\right)\,\mathrm{d}x = 4\Delta\exp\left(-K_2\mu\right). \tag{B.106}$$

综合（B.103）、（B.104）、（B.106）以及（B.69）、（B.72），可得

$$\|(\lambda - L)u\|_{L^2}^2 \leq 4\left(\frac{50}{K_1} + \frac{16^5}{K_1}\alpha + 4\Delta\right)\exp\left(-K_2\mu\right) \leq \frac{16^6}{K_1}\alpha\exp\left(-K_2\mu\right). \tag{B.107}$$

对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$；在第二步中，我们使用了 (B.4)、(B.15) 和 (B.37)。

B.10. 的下界 $\|u\|$。令 $s_0 \in (0,\ 1/2)$ 如 (B.100) 所示。由 (B.32) 和 (B.50) 可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2}^2 &\geq \int_{y_\beta}^{y_\beta+s_0\Delta} |\chi(x)|^2 \exp\left(2\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}\varphi(x))\right)\left|\sum_{j=0}^{N} a_j(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\geq \int_{y_\beta}^{y_\beta+s_0\Delta} \exp\left(-2I_1(x) - 2|I_2(x)|\right)\left(|a_0(x)| - \sum_{j=1}^{N}|a_j(x)|\right)^2 \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{B.108}$$

接下来，利用 (B.63)、(B.66)、(B.101)，并在第二步中改变积分变量，可得对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2}^2 &\geq \exp\left(-\frac{8M}{K_1}\frac{\mu}{\Delta}\right)\int_{y_\beta}^{y_\beta+s_0\Delta} \exp\left(-K_3\frac{\mu}{\Delta^2}(x-y_\beta)^2\right)\frac{K_1}{36}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{K_1}{36}\exp\left(-\frac{8M}{K_1}\frac{\mu}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{\mu^{\frac{1}{2}}}\int_0^{s_0\mu^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-K_3y^2\right)\,\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{B.109}$$

因此，若 $\mu \geq 1/s_0^2$，则对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$ （回忆由 (B.19) 可知 $\Delta \geq 4$ ）

$$\|u\|_{L^2}^2 \geq \frac{K_1}{9}\exp\left(-\frac{8M}{K_1}\frac{\mu}{\Delta}\right)\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}\exp(-K_3). \tag{B.110}$$

B.11. 预解式范数的下界。最后，结合 (B.107) 和 (B.110)，对所有 $\alpha \geq \Lambda_4$，有（若 $\mu \geq 1/s_0^2$）

$$\frac{\|(\lambda - L)u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2} \leq \exp\left(-K_2\mu + \log\alpha + \frac{8M}{K_1}\frac{\mu}{\Delta} + \frac{1}{2}\log\mu + \log\frac{9.16^6}{K_1^2} + K_3\right). \tag{B.111}$$

回忆 (B.19)，可得存在 $\Lambda_5 \geq \Lambda_4$，使得对所有 $\alpha \geq \Lambda_5$，有 $\mu \geq 1/s_0^2$ 并且

$$\frac{\|(\lambda - L)u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2} \leq \exp\left(-\frac{K_2}{2}\mu\right); \tag{B.112}$$

因此，(B.21) 以及由此得到的 (B.22) 均可由 $\widetilde{\eta} = K_2/4$ 推出。 □

References

[AM12a] J. Adduci 和 B. Mityagin。受 L^2 扰动的调和振子的特征系统是无条件基。中欧数学杂志 10 (2012), 569–589。 DOI:10.2478/s11533-011-0139-3。arXiv: 0912.2722。

[AM12b] J. Adduci 和 B. Mityagin。具有离散谱的自伴算子扰动的根系。积分方程与算子理论 73 (2012), 153–175。 DOI: 10.1007/s00020-012-1967-7。arXiv: 1104.0915。

[Agr95] M. S. Agranovich. 关于具有对称主部的形式所关联算子的根向量级数。《泛函分析及其应用》28（1995年），151–167（译自《功能分析及其应用》28，1–21（1994年））。DOI: 10.1007/bf01078449。

[Akh65] N. I. Akhiezer.《经典矩问题及分析中的若干相关问题》。Oliver & Boyd, 爱丁堡，1965年。 DOI: 10.1137/1.9781611976397。[AH15] Y. Almog 和 B. Helffer. 关于具有紧预解式的非自伴 Schr¨odinger 算子的谱。《偏微分方程通讯》40（2015年），1441–1466。 DOI: 10.1080/03605302.2015.1025978。arXiv: 1410.5122。[AS23] A. Arnal 和 P. Siegl. 一维复势 Schr¨odinger 算子的预解式估计。《泛函分析杂志》284（2023年），109856。 DOI:10.1016/j.jfa.2023.109856。arXiv: 2203.15938。[Bak98] A. G. Bakan. $L_p(R, d\mu)$ 中的多项式逼近。I. 1998年。arXiv: math/9810104。[Bak09] A. G. Bakan. 整函数逆量的部分分式展开。《乌克兰国家科学院学报》（2009年），11–13。[BB98] C. M. Bender 和 S. Boettcher. 具有 $\mathcal{PT}$对称性的非厄米哈密顿量的实谱。《物理评论快报》80（1998年），5243–5246。 DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.5243。arXiv: physics/9712001。[BP95] C. Berg 和 H. L. Pedersen. 整函数的 Nevanlinna 矩阵。《数学新闻》171（1995年），29–52。 DOI: 10.1002/mana.19951710104。[BST17] S. B¨ogli、P. Siegl 和 C. Tretter. $\mathbb{R}^d$ 上具有复势的 Schr¨odinger 算子的谱逼近。《偏微分方程通讯》42（2017年），1001–1041。 DOI: 10.1080/03605302.2017.1330342。arXiv: 1512.01826。[Bor13] W. Bordeaux Montrieux. 预解式估计及伪谱边缘附近准模的构造。2013年。arXiv: 1301.3102v1。[BS01] A. Borichev 和 M. Sodin. Krein整函数与 Bernstein 逼近问题。《伊利诺伊数学杂志》45（2001年）。 DOI: 10.1215/ijm/1258138261。arXiv: math/0007008。[Bou02] L. Boulton. 非自伴谐振子、紧半群与伪谱。《算子理论杂志》47（2002年），413–429。 URL: http://www.mathjournals.org/jot/2002-047-002/2002-047-002-009.html。[BKS] L. Boulton、D. Krejčiřík 和 P. Siegl 编。非自伴门户：开放问题。 URL: https://nsa.fjfi.cvut.cz/problems.html。[CCG06] E. Caliceti、F. Cannata 和 S. Graffi. $\mathcal{PT}$-对称哈密顿量的微扰理论。《物理学杂志 A：数学与理论》39（2006年），10019。 DOI: 10.1088/0305-4470/39/32/S06。arXiv: math-ph/0607039。[CG14] E. Caliceti 和 S. Graffi. $\mathcal{PT}$-对称相变的存在性判据。《离散连续动力系统 B辑》19（2014年），1955–1967。 DOI:10.3934/dcdsb.2014.19.1955。[CS26] J.-C. Cuenin 和 P. Siegl. 具有弱 Schatten 类预解式的算子的预解式估计。准备中。2026年。[Dav99] E. B. Davies. 非自伴 Schr¨odinger 算子的半经典态。《数学物理通讯》200（1999年），35–41。 DOI: 10.1007/s002200050521。arXiv: math/9803129。[Dav00] E. B. Davies. 非谐振子的野性谱行为。《伦敦数学学会通报》32（2000年），432–438。 DOI: 10.1112/S0024609300007050。[DK04] E. B. Davies 和 A. B. J. Kuijlaars. 非自伴谐振子的谱渐近行为。《伦敦数学学会杂志》70（2004年），420–426。 DOI:10.1112/S0024610704005381。

[De 59] L. De Branges. 伯恩斯坦问题。《Proc. Amer. Math. Soc.》10 (1959), 825. DOI: 10.2307/2033482.[DSZ04] N. Dencker、J. Sj¨ostrand 和 M. Zworski。半经典（伪）微分算子的赝谱。《Commun. Pure Appl. Math.》57 (2004), 384– 415. DOI: 10.1002/cpa.20004. arXiv: math/0301242.[DS99] M. Dimassi 和 J. Sjostrand。半经典极限中的谱渐近。剑桥大学出版社，1999。 DOI: 10.1017/cbo9780511662195.[DM10] P. Djakov 和 B. Mityagin。一维周期Dirac算子的黎斯投影的Bari–Markus性质。《Math. Nachr.》283 (2010), 443–462. DOI: 10.1002/mana.200910003. arXiv: 0901.0856.[DM11] P. Djakov 和 B. Mityagin。具有三角多项式势的Hill算子的谱分解收敛性。《Math. Ann.》351 (2011), 509–540. DOI: 10.1007/s00208-010-0612-5. arXiv: 0911.3218.[DM12] P. Djakov 和 B. Mityagin。Hill算子和一维Dirac算子的根函数构成Riesz基的存在性判据。《J. Funct. Anal.》263 (2012), 2300–2332. DOI: 10.1016/j.jfa.2012.07.003. arXiv: 1106.5774.[DDT01] P. Dorey、C. Dunning 和 R. Tateo。 $\mathcal{PT}$对称量子力学中的谱等价、Bethe Ansatz方程与实性。《J. Phys. A: Math. Gen.》34 (2001), 5679. DOI: 10.1088/0305-4470/34/28/102. arXiv: hep-th/0103051.[DS88] N. Dunford 和 J. T. Schwartz。《线性算子》，第2部分。纽约：John Wiley & Sons, Inc.，1988。[EE87] D. E. Edmunds 和 W. D. Evans。《谱理论与微分算子》。纽约：牛津大学出版社，1987。[GG15] I. Giordanelli 和 G. M. Graf。虚三次振子的实谱：一项阐释性证明。《Ann. Henri Poincar´e》16 (2015), 99–112. DOI: 10.1007/s00023-014-0325-5. arXiv: 1310.7767.[GK69] I. C. Gohberg 和 M. G. Krein。《希尔伯特空间中线性非自伴算子理论导论》。美国数学学会，普罗维登斯，1969。 DOI: 10.1090/mmono/018.[Ham44] H. L. Hamburger。亏指数为(1, 1)的厄米变换、雅可比矩阵与不定矩问题。《Amer. J. Math.》66 (1944), 489. DOI: 10.2307/2371763.[Hen12] R. Henry。某些非自伴非谐振子的谱不稳定性。《C. R. Math. Acad. Sci. Paris》350 (2012), 1043–1046. DOI: 10.1016/j.crma.2012.11.011. arXiv: 1301.5192.[Hen14a] R. Henry。偶次非自伴非谐振子的谱不稳定性。《J. Spec. Theory》4 (2014), 349–364. DOI: 10.4171/JST/72. arXiv: 1301.5327.[Hen14b] R. Henry。复三次振子的谱投影。《Ann. Henri Poincar´e》15 (2014), 2025–2043. DOI: 10.1007/s00023-013-0292-2. arXiv: 1310.4629.[Kat95] T. Kato。《线性算子微扰理论》。1980年版重印。柏林：Springer-Verlag，1995。 DOI: 10.1007/978-3-642-66282-9.[Koo80] P. Koosis。《 H_p 空间导论》。剑桥大学出版社，1980。[Kre44] M. G. Krein。论一类特殊的厄米算子。《Dokl. Akad. Nauk SSSR》44 (1944), 191–195.[Kre47] M. G. Krein。对指数型整函数理论的贡献。《Izvestia Akad. Nauk SSSR》11 (1947), 309–326。

[Kre+17] D. Krejčiřík、N. Raymond、J. Royer 和 P. Siegl。非耗散Schrödinger算子及其特征函数的指数衰减。《以色列数学杂志》221 (2017), 779–802. DOI: 10.1007/s11856-017-1574-z. arXiv: 1605.02437.[KS19] D. Krejčiřík 和 P. Siegl。复势Schrödinger算子的伪模。《泛函分析杂志》276 (2019), 2856–2900. DOI: 10.1016/j.jfa.2018.10.004. arXiv: 1705.01894.[Kre+15] D. Krejčiřík、P. Siegl、M. Tater 和 J. Viola。非厄米量子力学中的赝谱。《数学物理杂志》56 (2015), 103513. DOI: 10.1063/1.4934378. arXiv: 1402.1082.[Loy17] P. Loya。《分析学的奇妙与美学方面》。Springer New York, 2017。DOI: 10.1007/978-1-4939-6795-7.[Mae02] L. S. Maergoiz。关于亚纯函数的部分分式展开。《数学、物理、分析与几何》9 (2002), 487–492.[Mae16] L. S. Maergoiz。关于亚纯函数的部分分式展开。《乌法数学杂志》8 (2016), 104–111. DOI: 10.13108/2016-8-2-104.[Mar88] A. S. Markus。《多项式算子束谱理论导论》。美国数学学会, 1988。 DOI: 10.1090/mmono/071.[Mar77] A. I. Markushevich。《复变函数论》。R. A. Silverman 编。AMS Chelsea Publishing, 1977。[Mit84] G. Mittag-Leffler。论单值解析函数的解析表示：关于一个自变量。《数学学报》4 (1884), 1–79. DOI: 10.1007/bf02418410.[MS16] B. Mityagin 和 P. Siegl。谐振子型算子的奇异扰动根系。《数学物理通讯》106 (2016), 147–167. DOI: 10.1007/s11005-015-0805-7. arXiv: 1307.6245.[MS19a] B. Mityagin 和 P. Siegl。局部形式从属条件与根系的Riesz基性质。《数学分析杂志》139 (2019), 83–119. DOI: 10.1007/s11854-019-0053-3. arXiv: 1608.00224.[MSV17] B. Mityagin、P. Siegl 和 J. Viola。允许谱投影以不同速率增长的微分算子。《泛函分析杂志》 272 (2017), 3129–3175.DOI: 10.1016/j.jfa.2016.12.007. arXiv: 1309.3751.[MSV21] B. Mityagin、P. Siegl 和 J. Viola。圆上的平移谐振子与次椭圆拉普拉斯算子。《Ann. Henri Poincaré》22 (2021), 3311– 3355. DOI: 10.1007/s00023-021-01053-0. arXiv: 2011.12027.[MS17] A.K.Motovilov和A. A.Shkalikov。与自伴算子的非自伴扰动相关的子空间无条件基。《欧亚数学杂志》8 (2017), 119–127. arXiv: 1701.06296.[MS19b] A. K. Motovilov 和 A. A. Shkalikov。自伴算子的非自伴扰动下无条件基性质的保持。《泛函分析及其应用》53 (2019), 192–204. DOI: 10.1134/s0016266319030043. arXiv: 1801.09789.[Olv+] F. W. J. Olver 等编。NIST数学函数数字图书馆。2025-03-15发布的1.2.4版。 URL: https://dlmf.nist.gov.[Ost76] I. V. Ostrovskii。某类整函数。《Dokl. Akad. Nauk SSSR》229 (1976), 39–41.[Pra06] K. Pravda-Starov。旋转谐振子赝谱的完整研究。《伦敦数学学会杂志》73 (2006), 745–761. DOI: 10.1112/S0024610706022952。

[RS78] M. Reed 和 B. Simon。《现代数学物理方法》第4卷：算子分析。Academic Press，纽约-伦敦，1978年。[Sed83] A. M. Sedletskii。可消去三角系统。Math. Notes 34 (1983), 601–608。 DOI: 10.1007/bf01141776.[SS22] I. Semor´adov´a 和 P. Siegl。复势薛定谔算子的区域截断中发散的特征值。SIAM J. Math. Anal. 54 (2022)。 DOI: 10.1137/21M1439699. arXiv: 2107.10557.[She11] V. B. Sherstyukov。将条带内有零点的整函数的倒数展开为克莱因级数。Sb. Math. 202 (2011), 1853–1871。 DOI: 10.1070/sm2011v202n12abeh004210.[She16] V. B. Sherstyukov。根位于某个角域内的整函数的渐近性质［（俄文）］。博士论文，莫斯科国立大学，莫斯科。2016年。[She21] V. B. Sherstyukov。具有给定零点分布规律的整函数的渐近性质。《J. Math. Sci.》257 (2021), 246–272。 DOI: 10.1007/s10958-021-05480-6.[Shi02] K. C. Shin。关于一类 $\mathcal{PT}$-对称振子特征值的实性。Comm. Math. Phys. 229 (2002), 543–564。 DOI: 10.1007/s00220-002-0706-3. arXiv: math-ph/0201013.[Shi05] K. C. Shin。具有多项式势的 $\mathcal{PT}$-对称振子的特征值。J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005), 6147。 DOI: 10.1088/0305-4470/38/27/005. arXiv: math/0407018.[Shi10a] K. C. Shin。具有无穷多个实特征值的非谐振子与PT对称性。SIGMA 6 (2010), 015 (9页) DOI: 10.3842/SIGMA.2010.015. arXiv: 1002.0798.[Shi10b] K. C. Shin。复平面中的非谐振子、 $\mathcal{PT}$ -对称性与实特征值。Potential Anal. 35 (2010), 145–174。 DOI: 10.1007/s11118-010-9208-7. arXiv: 1008.0905.[Shk83a] A. Shkalikov。边界条件中含参数的常微分方程边值问题。Trudy Sem. Petrovsk. (1983), 190–229（英文译本见：J. Soviet Math. 33 (1986), 1311–1342）。[Shk83b] A. Shkalikov。关于亚纯函数的估计及非自伴算子根向量级数的求和。Dokl. Akad. Nauk SSSR 268 (1983), 1310–1314。 URL: https://www.mathnet.ru/eng/dan45940.[Shk10] A. Shkalikov。自伴算子受扰动后的根向量基性质。Proc. Steklov Inst. Math. 269 (2010), 284–298。 DOI: 10.1134/S0081543810020240.[Shk16] A. Shkalikov。具有离散谱的自伴算子和正规算子的扰动。Russian Math. Surveys 71 (2016), 907。 DOI: 10.1070/RM9740.[Shk19] A. Shkalikov。私人通信（2019年6月）。[Sib75] Y. Sibuya。具有多项式系数的二阶线性常微分方程的整体理论。阿姆斯特丹：North-Holland Publishing Co.，1975年。[SK12] P. Siegl 和 D. Krejčiřík。关于虚三次振子的度量算子。Phys. Rev. D 86 (2012), 121702(R)。 DOI: 10.1103/PhysRevD.86.121702。arXiv: 1208.1866。[Tit27] E. C. Titchmarsh。关于具有负实零点的整函数。Proc. London Math. Soc. s2-26 (1927), 185–200。 DOI: 10.1112/plms/s2-26.1.185。

[Tit58] E. C. Titchmarsh。《函数论》。1939年第二版重印本。牛津大学出版社，牛津，1958年，x +454.[Tit62] E. C. Titchmarsh。与二阶微分方程相关的特征函数展开。第一部分。牛津：克拉伦登出版社，1962年，vi+203.[Tum21a] S. Tumanov。复薛定谔算子特征函数系的完备性定理，其势函数为 $q(x) = cx^{\alpha}$。Math. Notes 109 (2021), 836–839。 DOI: 10.1134/s0001434621050163. arXiv: 2101.01680.[Tum21b] S. Tumanov。复薛定谔算子 $\mathcal{L}_c = -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + cx^{2/3}$特征函数系的完备性定理。J. Funct. Anal. 280 (2021), 108820。 DOI: 10.1016/j.jfa.2020.108820. arXiv: 1903.10594.[Tum22] S. Tumanov。复薛定谔算子$\mathcal{L}_{c,\alpha} = -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + cx^{\alpha}$特征函数系的完备性定理。J. Differential Equations 319 (2022), 80–99。 DOI: 10.1016/j.jde.2022.02.010. arXiv: 2101.01680v2.[Tum24] S. Tumanov。非自伴斯图姆-刘维尔算子的预解式紧性的莫尔恰诺夫判据。Sb. Math. 215 (2024), 1249–1268。DOI: 10.4213/sm10066e. arXiv: 2402.10577.[Vio13] J. Viola。部分椭圆二次微分算子的谱投影与预解式界。J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 4 (2013), 145–221。DOI: 10.1007/s11868-013-0066-0. arXiv: 1206.3767.[Wys10] C. Wyss。正规算子的 p-从属扰动的Riesz基。J. Funct. Anal. 258 (2010), 208–240。 DOI: 10.1016/j.jfa.2009.09.001. arXiv: 0906.2631。（Boris Mityagin） Department of Mathematics, The Ohio State University, 231 West 18thAve, Columbus, OH 43210, USA电子邮箱：mityagin.1@osu.edu, boris.mityagin@gmail.com（Petr Siegl） Institute of Applied Mathematics, Graz University of Technology, Steyr-ergasse 30, 8010 Graz, Austria电子邮箱：siegl@tugraz.at