arXiv:2601.09829v1 [physics.comp-ph] 14 Jan 2026

采用有限元法计算双导线的 RLC 参数

Marc Boul´e´蒙特利尔高等技术学院，蒙特利尔，魁北克，
H3C 1K3，加拿大（日期：2026年1月16日）

本文介绍如何使用有限元法计算一对平行导线的直流（或低频）电阻、电感和电容。文中展示了用于静电场和静磁场的三维无限域（开放边界）建模，以及用于导线内部电流流动的电动学公式。还讨论了绝缘层和导线中一种拟议物理缺陷的影响。本文使用开源软件 ONELAB 进行仿真，并提供代码清单。为验证仿真结果，还将仿真结果与解析模型（适用时）及 Altair Flux 软件的结果进行比较。

T本文发表于《加拿大物理学杂志》，第104卷：1–11页（2026年），可下载
p仅供个人使用。 https://doi.org/10.1139/cjp-2025-0170
关键词：有限元法、静电学、静磁学、电容、电感、开放边界。

I. 引言

一对长圆柱形导体具有电阻、电感和电容（RLC），本文假设这些参数均为单位长度值。通常通过静电分析求取电容，此时不涉及电流；相反，低频电感通常通过静磁分析求取，此时施加稳恒电流并忽略集肤效应。对于未绝缘线对（真空中两根无限长且平行的圆柱形导体），这些参数已有精确表达式 [1]。然而，对于绝缘导体或更复杂的几何结构，解析计算很快就会变得难以实现，因此必须采用数值模拟。

本文聚焦于时不变电磁学，旨在展示如何确定绝缘导体线对的 RLC 参数，无论其是否存在物理缺陷（将在下一节介绍）。文中还介绍了二阶单元的使用，以及对无界（无限）定义域的精确建模。线对作为一种极为普遍且基础的电气结构，为开展详细案例研究提供了绝佳机会。仿真采用有限元法（FEM），为支持对缺陷的建模，必须使用三维模型。除非采用更复杂的坐标变换，否则例如对绞合导线通常也需要进行三维仿真 [2], 3。

具有平面或轴对称性的仿真模型可以使用 FEMM [3]和 Agros [4],等二维有限元应用程序；这两者均为开源软件，尤其适用于学术环境中的电磁学研究 [5]。当需要进行三维仿真时，所用工具不可避免地会更加复杂，既包括 Elmer FEM [6], 、FreeFEM [7], 、NGSolve [8] 和 ONELAB [9], 等一系列开源应用程序，也包括 Altair Flux [10],、Ansys Maxwell [11]和 COMSOL Multiphysics [12]等商业求解器。

应用有限元法的一般流程可概括为以下步骤 [13]:

1. 创建 CAD模型并生成网格；2. 声明边界条件、约束和材料属性；3. 为未知场创建必要的函数空间，并建立其控制微分方程；4. 在网格上生成离散化方程的矩阵表示并求解；5. 计算后处理结果，例如辅助场和积分。

尽管以下各节中展示的仿真代码专用于 ONELAB（开放数值工程实验室），但大多数概念也适用于其他有限元应用程序。ONELAB 是一个开源有限元软件包，由两个独立的应用程序组成：Gmsh [14], ，一款有限元网格生成器；以及 GetDP [15], ，一个用于处理离散问题的通用环境。这两个应用程序可以独立运行，但配合使用时能提供许多便利功能，例如可以直接在 Gmsh用户界面中轻松修改仿真参数。

II. 问题建模

仿真的背景是一根 22/2 AWG（美国线规）电缆，由两根实心铜线组成，每根导体外都包覆着聚乙烯绝缘层。为简化起见，省略了将导线固定在一起的绝缘护套。

A. 几何模型

导线的尺寸如图 1所示，其中r_c = 0。322 毫米，δ = 0。41 毫米，且 a = 0。782 毫米。图 2显示了待仿真的线段，该线段位于z = 0 与 z = l之间。几何常数如图3所示，其中一些必须同时对 GetDP 和 Gmsh 可见。仿真的长度为 l = 4 毫米（在代码清单中称为 `ell`）。该模型的代码清单位于 `.geo` 文件中，并见附录A。

还对一种可选的“V”形槽缺陷进行了建模（在图1 和 2 中不可见），以评估其对线对的影响。该缺陷如图 4 所示，具有以下特征：“V”形切口向内深入

图1。线对导体和绝缘体的几何结构及电磁常数。

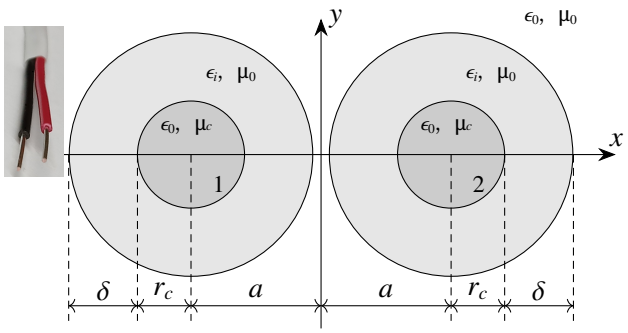
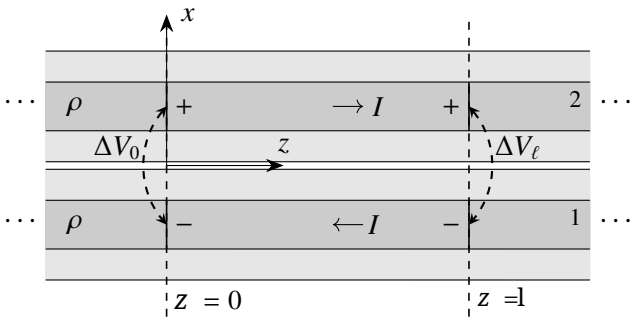


图2. 待分析的线对线段（位于$z = 0$ 与$z = l$之间）。



导体（在施加 20 µm 圆角之前），并沿导体表面的纵向（z）延伸 0.14 mm。切口向外延伸至绝缘体中，可以大致认为这是由于剥线钳使用不当造成的。包含该缺陷的代码清单见补充材料 [16]。

B. 物理模型

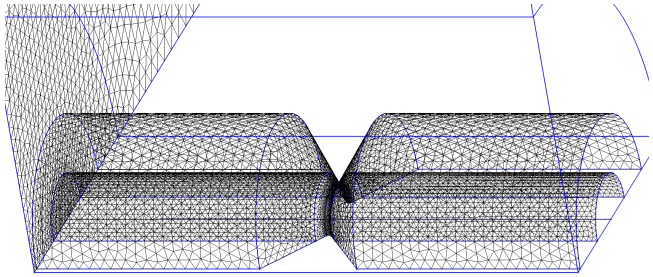
导体的电阻率为 $\rho = 1.7 \cdot 10^{-7}$ Ωm，等效电导率为 $\sigma = 1/\rho$。由于导体内部不会发生介电极化，因此假设其介电常数为 ϵ_0。为便于说明，将其磁导率设定为线性材料；不过，所有模拟均使用 $\mu_c = \mu_0$。

假设绝缘层的磁导率等于 μ_0, , 且其电导率为零。绝缘层始终

图 3. 几何常数（wirepaircommon.pro）。

```
// 几何常数（适用于 Gmsh 和 GetDP）
mm   = 1E-3;                 // 单位
ell  = 4*mm;                 // 线段的 z 向长度
rc   = 0.322*mm;             // 导体半径
ri   = rc   + 0.41*mm;// 绝缘体的外半径
rb   = 2*mm;                 // 内边界半径
re   = 2*rb;                 // 外边界半径
a    = ri + 0.05*mm; // 导线中心的 x 偏移量
```

图4. 带有缺陷的绝缘导线（导线2上半部分，局部二维网格）。



出现在几何描述中；当不需要绝缘层时，其介电常数为 $\epsilon_i = \epsilon_0$ ，而非 $\epsilon_i = 2.25\epsilon_0$。导线周围是真空（$\epsilon_0$, μ_0）。

考虑到相关的对称性，只对一个象限进行建模；这对应于图 1 中导线2的上半部分。左侧导线（导线1）的电荷极性和电流方向与右侧导线相反，因此可将左侧导线替换为 $x = 0$ 处的接地平面，这与镜像法 [17] 一致。势也关于 $y = 0$ 平面对称。如仿真所示，前文提到的几何缺陷每隔长度 l 重复一次。若只需要单个缺陷，可以仿真更长的长度而不失一般性，但代价是增加计算时间和内存。两个导线中的缺陷也隐含地视为相同。

其他仿真参数显示在图 5 的上部和下部，包括该线段两端的电压降及其他电气属性。对于导线2，根据图 2 定义两个电势，使得 $V_{\text{in}} = \Delta V_0/2$ 且 $V_{\text{out}} = \Delta V_\ell/2$。电流有时可以通过全局基函数施加或自动计算 [18]；但本文不作探讨。相反，所得电流是通过体积分计算导线中耗散的功率而得到的。

以下符号用于简化正文中的表述，并基于图中间部分所示的组声明。5：

$$\Omega_c \equiv \texttt{VolCond}; \qquad \Omega_n \equiv \texttt{VolNoCond}; \qquad \Omega = \Omega_c \cup \Omega_n \equiv \texttt{VolAll}. \tag{1}$$

接下来总结 RLC 仿真涉及的三种场制 [13, 19]，所列项目的顺序为：材料属性类型、涉及区域、待求解的未知场、所用微分方程类型、激励源、导出场。

静电： ϵ，Ω_n，标量势 V_n，标量拉普拉斯方程，施加的电势，场 $\mathbf{E}_n$。

电动： σ，Ω_c，标量势 V_c，标量拉普拉斯方程，施加的电势，场 $\mathbf{E}_c$ 和电流密度 $\mathbf{J}$。

静磁：µ，Ω，矢量势**安培**，矢量泊松方程，施加的电流密度，场 $\mathbf{B}$。

在介绍上述各类情况的数学模型之前，先简要说明边界条件的类型，并介绍处理无限域的方法。

图5. 组对象和函数对象（wirepair.pro，第1部分，共7部分）。

```
包含     "wirepaircommon.pro";

// 常数
eps0   = 8.8541878188E-12;// 参考介电常数                    (法/米)
mu0    = 1.25663706127E-6;// 参考磁导率 (H/m)

// 仿真参数
vIn    = 10.0;              // 导线2    z=0 处的电势(V)
vOut   = 9.9999;            // 导线2    pot. 位于 z=ell (V)
西格玛  = 1.0/1.7E-8;// 电导率                    (S/m)
epsRelInsul  = 2.25;        // 相对介电常数（无量纲）
muRelCond      = 1.0;       // 相对磁导率（无量纲）

组 {
  导体体积     =#{100}; // 导体体积
  绝缘体体积   =#{101}; // 绝缘体体积
  内部体积     =#{102}; // 内部真空
  外部体积     = #{103}; // 外部真空（壳层）
  左表面       = #{120}; // x 处的左边界=0
  SurFront     = #{121}; // z 处的前平面=ell
  SurBack      = #{122}; // z 处的后平面=0
  SurExt       =#{123}; // 曲面外边界          r=re 处的边界
  非导体体积   = #{绝缘体体积，内部体积，外部体积};
  总体积       = #{导体体积，非导体体积};
  SurDiricA    =#{左表面      ，外部    ，前侧,后侧};
}

函数 {
    mu[导体体积]    =mu0 * muRelCond;mu[
```

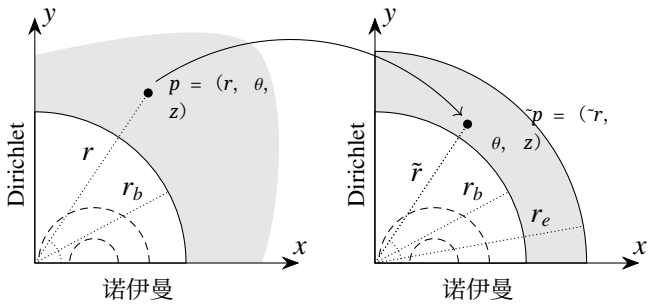
C. 边界条件

当某些边界面上的电标量势已知时，这些值通过所谓的狄利克雷（也称本质）边界条件施加。对于具有恒定电势的狄利克雷面，电场垂直于这些表面。对于磁矢势，狄利克雷型表面通常意味着切向磁场（以及法向矢势），通常不涉及任意给定的矢势 [20]。

相反，当电场与定义域的某些表面相切，或磁场垂直于某些表面时，可以使用齐次诺伊曼（也称自然）边界条件来施加这些条件；对于这种边界条件，定义积分等于 0，正如第 IIE 节中的公式所示。

如果模型具有重复结构，例如电动机的磁极，则可以只处理较大几何体的一部分，从而简化仿真域。这通过周期性边界条件实现：根据给定系数，将某些表面之间的自由度相互链接。有时也会使用“链接”或“自由度映射”（自由度映射）等更通用的术语，而不是“周期性”。此处进行的仿真仅使用狄利克雷和诺伊曼边界条件。

图 6. 将内边界外部的点（左侧）变换到壳层区域（右侧）。图中还显示了某些狄利克雷和诺伊曼边界条件的位置。



D. 处理无限域

在静电学和静磁学中，可以使用许多不同的方法来对无限域进行建模 [21]。壳层变换是一种基于函数的精确方法

$$\tilde{r} = r_e - \frac{r_b(r_e - r_b)}{r}, \tag{2}$$

其中，r_b 是内边界的半径，r_e 是壳层的外半径。如图 6 所示，这种变换具有如下性质：将内边界外的所有点 $r > r_b$ 映射到壳层区域内的点 $r_b < \tilde{r} < r_e$，从而将无限区域映射为有限区域。当 $r_e = 2r_b$ 时，$d\tilde{r}/dr = 1$ 在 $r = r_b$处成立，因此在该边界处实现了平滑连接。$r_e = 0$的情形对应于圆（或球）反演，也称为开尔文变换 [3, 22, 23]，，其映射为 $\tilde{r} = (r_b)^2/r$。

仿真中实际所需的变换方向与式 (2) 和图 6所示方向相反（对应参考文献 $p = 1$ 中的情形 [24]），因此，壳层区域中的有限元会发生变形，以覆盖原本的无限区域。这类变形通过其雅可比矩阵指定，但无需在 GetDP 中显式给出。鉴于所涉及的空间畸变，使用壳层变换时，通常建议至少进行二阶仿真（详见第 IIIC节）。

壳层变换可应用于三维中的球形或圆柱形边界。鉴于线对沿纵向延伸的结构，可使用柱坐标（r，θ，z）来说明该变换（即使仿真本身使用的是笛卡尔坐标）。如果需要在后处理中计算位于内边界之外某点 p处的场量，则应根据图 $\tilde{p}$，在变换后的（壳层）区域中的点 6 及式 (2) 处进行计算。

另一种对无限域建模的方法是权宜渐近边界条件（IABC） [25, 26]。该方法基于一系列材料属性各异的同心薄壳，几乎可用于任何有限元软件。虽然这并非精确方法，但仍可达到很高的精度，正如第IV节将展示的那样。无法获得位于内边界之外各点的正确场值；不过，在整个定义域上都能正确计算体积能量积分。

E. 数学模型

静电学（无自由电荷）和电动学在区域 Ω_n 和 Ω_c 中的微分方程分别为两个标量拉普拉斯方程

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V_n) = 0, \qquad \nabla \cdot (\sigma \nabla V_c) = 0. \tag{3}$$

区域 Ω 中的静磁场状态由矢量泊松方程控制

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}/\mu) = \mathbf{J}. \tag{4}$$

电场可由下式求得：

$$\mathbf{E}_n = -\nabla V_n, \qquad \mathbf{E}_c = -\nabla V_c, \tag{5}$$

而电流密度和磁场为

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_c = -\sigma \nabla V_c, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{6}$$

许多有限元求解器采用加权残量法，其中伽辽金法是一种特殊形式：其特点是基函数和权函数使用相同的函数。每个微分方程还必须采用所谓的弱形式 [19, 20, 27–29], 在这种形式下，解存在于更大的函数空间中。这是一种希尔伯特空间（H），并且对函数的导数施加约束。解函数还必须是平方可积的（场必须具有有限能量）。

对于以弱形式求解的标量势，会用到梯度空间 H(grad)；而对于磁矢势，则使用$\mathbf{H}$(curl)空间。弱解需要乘以标量或矢量形式的权函数（W 或$\mathbf{W}$）。这些函数也属于类似的函数空间，但在狄利克雷边界（Γ_D）上具有特定约束，如下文所示。狄利克雷边界和诺伊曼边界（Γ_N）构成给定体积 Ω 的整个边界 Γ，而$\mathbf{n}$表示相对于 Γ的局部单位法向量（指向外侧）。

在非导电区域（Ω_n）中，静电势的弱公式为

$$\int_{\Omega_n} \epsilon \nabla V_n \cdot \nabla W_n \, d\Omega_n - \int_{\Gamma_{nN}} \epsilon \nabla V_n \cdot \mathbf{n} \, W_n \, d\Gamma_{nN} = 0, \tag{7}$$

其中 V_n，$W_n \in H$(梯度，Ω_n)，V_n 施加于 Γ_{nD}，且W_n =在 Γ_{nD}上为 0。

狄利克雷面（Γ_{nD}）是$x = 0$ 平面和导体的侧表面，其电势分别为$V_n = 0$和$V_n = V_{\text{in}}$。诺伊曼边界面（Γ_{nN}）对应于界定 Ω_n 的$y = 0$ 平面和$z = \{0,1\}$ 平面的部分，以及$r = r_e$处的弯曲外边界；电场与所有这些表面相切。因此，上述第二个积分中的点积等于零，该项可直接省略。在非导电区域，静电势弱形式为

$$\int_{\Omega_n} \epsilon \nabla V_n \cdot \nabla W_n \, d\Omega_n = 0. \tag{8}$$

同样，导电区域中的电动学弱形式（不含表面积分项）为

$$\int_{\Omega_c} \sigma \nabla V_c \cdot \nabla W_c \, d\Omega_c = 0, \tag{9}$$

其中 V_c，$W_c \in H$(梯度，Ω_c)，V_c 施加于 Γ_{cD}，且$W_c = 0$施加于 Γ_{cD}。导体在$z = \{0,1\}$处的前侧和后侧表面构成狄利克雷面（Γ_{cD}），其上的电势分别为$V_c = \{V_{\text{in}}、V_{\text{out}}\}$。$\Omega_c$ 中导体边界上的所有其他表面均属于诺伊曼边界面（Γ_{cN}），电场在这些表面上与表面相切。

将式（$\mathbf{J}$ 的替代式代入式（6），磁静态弱公式式（4）为

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu} \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) \, d\Omega + \int_{\Omega_c} (\sigma \nabla V_c) \cdot \mathbf{W} \, d\Omega_c = 0, \tag{10}$$

其中 $\mathbf{安培}$，$\mathbf{W} \in \mathbf{H}$(旋度，$\Omega$) 且 $\mathbf{n} \times \mathbf{安培} = \mathbf{n} \times \mathbf{W} = \mathbf{0}$ 在 Γ_D。诺伊曼边界面为 $y = 0$ 平面，磁场垂直于该表面，而 Ω的所有其他外部表面均为狄利克雷型，磁场与表面相切。式（10）中隐含的表面积分项为

$$\int_{\Gamma_N} (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}/\mu)) \cdot \mathbf{W} \, d\Gamma_N, \tag{11}$$

但这并非必需，因为与$\mathbf{n}$ 的叉积等于零。

方程（8-10）是数值计算中需要求解的方程。一般而言，ϵ、μ 和 σ不应从积分中统一提出，因为它们不一定是常数。与区域有关的符号`eps[]`和`mu[]` 就是两个例子。

F. RLC计算

一旦获得势及其导出场，就可以基于功率和能量积分进行 RLC 计算。导电区域中的耗散功率（P_c）可通过积分计算：

$$P_c = \int_{\Omega_c} \sigma \|\mathbf{E}_c\|^2 \, d\Omega_c, \tag{12}$$

而磁场和电场中的能量，W_B 和W_E，可通过以下积分求得：

$$W_B = \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu} \|\mathbf{B}\|^2 \, d\Omega, \qquad W_E = \int_{\Omega_n} \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{E}_n\|^2 \, d\Omega_n, \tag{13}$$

其中，μ 和 ϵ 分别表示分段常数的磁导率和介电率，如图5底部所定义。

在相应区域内计算出这三个积分后，即可使用以下公式计算电阻、电感和电容。线对的单位长度电阻（R）和电流（I）为

$$R = \frac{2\,(V_{\text{in}} - V_{\text{out}})}{\ell I}, \qquad I = \frac{P_c}{2\,(V_{\text{in}} - V_{\text{out}})}, \tag{14}$$

图 7. 约束对象（wirepair.pro，第 2 部分，共 7 部分）。

```
约束 { { 名称 CstVn; 情况 { { 区域 SurLeft; 值 0; } { 区域
```

而单位长度电感（L）和单位长度电容（C）则通过以下方式获得

$$W_B = \frac{1}{2} L \ell I^2, \qquad W_E = \frac{1}{2} C \ell \, (2V_{\text{in}})^2 \, . \tag{15}$$

只有在$V_{\text{in}} \neq V_{\text{out}}$时，才应计算涉及电流的所有量。相反，上述电容仅在$V_{\text{in}} = V_{\text{out}}$时才相关。

III. 仿真设置

在 GetDP 中，仿真通过十类对象进行定义：组、函数、约束、函数空间、雅可比、积分、公式、求解、后处理和后处理操作，下面将逐一介绍。

A. 组和函数

首先要指定的是 Group 对象（图5中部），其中声明了表面和体积等不同实体。以数字定义的主要实体对应于几何文件（附录 A）中出现的物理实体。

由于 $y = 0$平面是所有势的诺伊曼型边界，因此它不属于 Group 对象中定义的任何表面。图5中也展示了 Function 对象，可用于声明前文提到的不同区域中的分段材料属性（介电常数和磁导率）。

B. 约束

图中 Constraint 对象的作用是7 指定待求解场的不同边界条件。作用于导体内外电势的约束分别为`CstVc`和`CstVn`，而磁矢势的约束为`CstA`。

两种主要的约束类型是齐次诺伊曼（无需显式声明）和狄利克雷。虽然可以施加周期性边界条件（Link 关键字）来连接前侧和后侧平面，但鉴于此处涉及的对称性，诺伊曼和狄利克雷边界条件已足够（对于磁矢势，计算效率也更高，因为所需的自由度略少）。

原则上，导体的侧表面可同时用于 CstVc（Ω_c）和 CstVn（Ω_n）约束，但这并非必要，因为该表面在 CstVc 中是诺伊曼型边界，而在 CstVn 中，只需将电势 vIn 赋给 VolCond 中的所有节点即可（其中隐含地包含表面节点）。另一项不会影响仿真时间的简化，是在 CstVc 中使用整个前侧和后侧平面，尽管这些平面的大部分表面积位于 Ω_c 之外。

磁矢量势也使用规范约束（CstGaugeA）。尽管使用 **安培** 求得磁场 [27],时并非正式必需，但规范约束可以减少待求未知量的数量，并通过提高求解过程中的数值稳定性，帮助数值过程更快收敛。

规范通常通过在问题公式中施加 $\nabla \cdot \boldsymbol{安培} = 0$（称为库仑规范）来实现，或者将生成树边上的某些自由度强制设为 0 [30]（称为树/余树规范）。本研究采用后一种方法。图 7 中规范约束对应的 子区域 是 `SurDiricA`表面，该表面定义见图5。此子区域对应所有电势受约束的表面，也就是说，本例中仅包括狄利克雷曲面；周期连接涉及的某些表面也必须纳入，但此处不适用。

C. 函数空间

在 GetDP 中，适用于电势的标量场属于`Form0`类型。这是电势所需的空间类型，并用于图 8中的前两个函数空间。磁矢量势则使用旋度相容函数空间。该空间可通过类型`Form1`指定，也是声明的第三个函数空间。

函数空间中函数的导数可能对应不同的微分运算子。在`Form0` 空间中，导数可视为梯度算子；在 `Form1`空间中，导数可视为旋度算子，这与第 IIE节中给出的函数空间一致。因此，建议使用更通用的外微分符号 `d`，而不是 `Grad`和 `Curl`关键字。

每个函数空间的插值函数由一个或多个按层级结构组织的基函数组成 [20,31]。每个基函数都有类型、系数名称以及其定义域（支撑域）；此前声明的约束也应用于该域。对于 Form0 空间，一阶基函数与单元节点处标量场的值相关联（BF_Node）。对于 Form1 空间，一阶基函数与

图 8. 函数空间对象（wirepair.pro，第 3 部分，共 7 部分）。

```
函数空间 { { 名称 HgradVn；类型 Form0；// V 非导体 基函数 { {
```

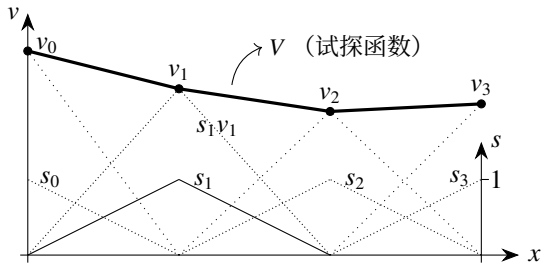
其分量沿着单元的边（边基函数）分布的未知向量场。

对于一维标量问题，一阶插值单元只需要一种基函数，即由一组三角形（帽形）函数组成 [28]。对于图 9 所示的示例，三个线单元需要四个函数（s_n）。这些函数与系数（v_n）相乘，以表示近似解 V（称为试探函数）。在示例图中，解V对应于 $\sum^{3}{}_{n=0}\, s_n v_n$。

为提高解的精度，可以通过添加高阶基函数来实现更高阶插值。例如，包含二阶多项式的一组基函数，可以使图9中的示例解更加平滑。

也可以使用二阶几何阶次的单元（带有曲边）来提高仿真精度。尽管

图 9. 用于在三个线单元上逼近一维标量函数的三角形函数（s_n）和系数（v_n）。



几何阶次和插值阶数是两个不同的概念，但在本文中将二者结合使用，即采用二阶插值和二阶几何元素。对于包含曲面的几何体，通常最好在条件允许时使用二阶几何元素。

在`.geo`文件中指定二阶几何元素时（图A1的最后一行），二阶基函数`BF_Node_2E`会自动添加到 GetDP 中的`Form0`空间。二阶基函数必须在`Form1`空间中显式添加。在磁矢势公式中，只需添加非梯度高阶函数。要为`HcurlA`构造二阶插值空间，需要包含两个面函数`BF_Edge_3F_a`和`BF_Edge_3F_b`（图8）。由于面函数不参与树规范，`CstGaugeA`约束仅施加于单个`BF_Edge`函数。

D. 雅可比与积分

雅可比对象用于对指定区域应用几何变换，适合处理无限域。用于圆柱壳变换的雅可比 [24]，称为`VolCylShell`，应用于外部区域。默认的笛卡尔雅可比称为`Vol`，应用于主区域。`VolSphShell` 雅可比可用于执行球壳变换（或二维平面情况下的圆形变换），但不适用于此处。雅可比的设置见图 10的上半部分。`VolCylShell` 的两个参数分别为壳层的内半径和外半径。

鉴于壳层变换的精确特性，内边界（半径为r_b）可以任意靠近导线，前提是空壳层区域中的网格足够精细。尽管如此，r_b 半径仍扩展至 2 mm，以便无失真地查看导线附近的场。外边界的半径（r_e）选为内边界半径的恰好两倍，以使内边界 [24]处的单元畸变平滑过渡。

图 10 中的 Integration 对象定义了单元中用于数值积分（采用高斯求积法）的插值点。对于前文所述的常规公式，基于单元阶数所需的最少积分点数已足够 [31]。一阶四面体单元只需一个高斯

图10. 雅可比与积分（wirepair.pro，第4部分，共7部分）。

```
雅可比 {{  名称 J1;  情形{{  区域 外部体积; 雅可比
```

点（此仿真中未使用），而使用二阶基函数在四面体中积分需要四个点 [28, 32]。

E. 公式

弱形式中的积分（以及 GetDP 中的积分）对应于如下形式的内积 [27] $\langle a,b \rangle$。在方程（8-10）的弱形式中，点积的逗号分隔内积中的两项，点积两侧分别是a和b 这两个量。在 GetDP 中，权函数使用与未知场相同的符号（本文中为V 或**A** ）。当V （或**A**）符号出现在内积逗号的右侧时，它隐含地表示与之关联的权函数W （或**W**）。

方程（8-10）在图`FrmVn`、`FrmVc` 和`FrmA` 公式中给出，见图11。所有方程表达式均隐含地等于零。第二个积分中未使用自由度 关键字（自由度），因为`FrmA`中的电势Ω_c 由`FrmVc` 公式预先计算，因此求解`FrmA`时已知。

F. 求解

图中所示的求解对象12 会触发对前文所述三种公式的实际计算。离散化方程以矩阵形式表示（`Generate`关键字），然后使用共轭梯度法迭代求解 [27]。由于矩阵并未在 GetDP 语法中显式出现，因此本文不予讨论。

必须先求解与 FrmVc 关联的电势，然后才能求解 FrmA，以便将其用作 FrmA 中的源项。更高级的 Resolution 命令提供了一种强大的方法，可同步推进多个公式，适用于求解多物理场问题。例如热电问题中，电阻取决于温度，而温度又取决于耗散功率（从而取决于电阻）。

图11. 公式对象（wirepair.pro，第5部分，共7部分）。

```
公式 { { Name FrmVn; Type FemEquation; // V 非导体
```

图12. 求解对象（wirepair.pro，第6部分，共7部分）。

```
求解 { { Name ResAll; System { { Name SVn;
```

G. 后处理与后处理操作

问题求解后，可以通过两个最终对象计算辅助场或后处理积分。由于仿真仅针对定义域的四分之一进行，因此本节中的积分乘以四，以获得线对的真实量。

方程（12）和（13）中的功率和能量计算以积分形式显示在图 13 的上半部分。对于模拟——

图13. 后处理和后处理操作对象（wirepair.pro，第7部分，共7部分）。

```
后处理 {
    { Name PostRLC; 公式名称 FrmA; 物理量 { { Name Pc;

    { Name PostRLC; NameOfPostProcessing PostRLC;
```

在仿真中，这些积分对应于

$$P_c = 4 \int_{\Omega_c} \sigma \|\mathbf{E}_c\|^2 \, d\Omega_c, \tag{16}$$

$$W_B = 4 \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu} \|\mathbf{B}\|^2 \, d\Omega, \qquad W_E = 4 \int_{\Omega_n} \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{E}_n\|^2 \, d\Omega_n. \tag{17}$$

E和**B** 场通过各自势的梯度和旋度计算，如方程（5）和（6所示，使用外微分算子d。积分结果存储在变量中，用于计算最终的后处理量，如后处理操作对象中所示（图13下半部分）。

IV. 仿真结果

未绝缘导线的仿真结果可与已知的解析RLC表达式进行比较，以帮助验证仿真，随后研究绝缘层和缺陷的影响。结果还通过 Altair Flux 软件进行了验证，并采用四阶 IABC 开放边界。所有给出的数值均通过三维仿真获得。

表 I. 未绝缘导线的仿真结果。

	R （毫欧/米）	L （纳亨/米）	C (皮法/米)
解析解	104.3800020	732.1801501	18.12037190
Altair Flux (相对误差)	104.3800493 (0.453 ppm)	732.1763450 (−5.20 ppm)	18.12046880 （5.35 ppm）
ONELAB （相对误差）	104.3800311 （0.279 ppm）	732.1782700 （−2.57 ppm）	18.12051767 （8.04 ppm）

表 II. 图中所示存在缺陷的绝缘导线的仿真结果4。

	R (毫欧/米)	L (纳亨/米)	C (皮法/米)
Altair Flux	107.4599143	736.3836210	27.64998724
ONELAB	107.4590667	736.3354386	27.65036262
（相对差异）	（−7.89 ppm）	（−65.4 ppm）	（13.6 ppm）

未绝缘线对（$\epsilon_i = \epsilon_0$）的低频电阻、电容和电感，按单位长度计，分别为 [1]

$$R = \frac{2\rho}{\pi (r_c)^2}, \qquad C = \frac{\pi \epsilon_0}{\cosh^{-1}(a/r_c)}, \tag{18}$$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln\left(\frac{2a}{r_c}\right) + \frac{1}{4} \right). \tag{19}$$

上述物理量的结果见表格I，其中包括 Altair Flux 和 ONELAB（Gmsh 和 GetDP）应用程序的结果。表格中的相对误差通过计算仿真结果与解析量之间的差值，再除以解析量得到。误差以百万分率（ppm）表示。ff

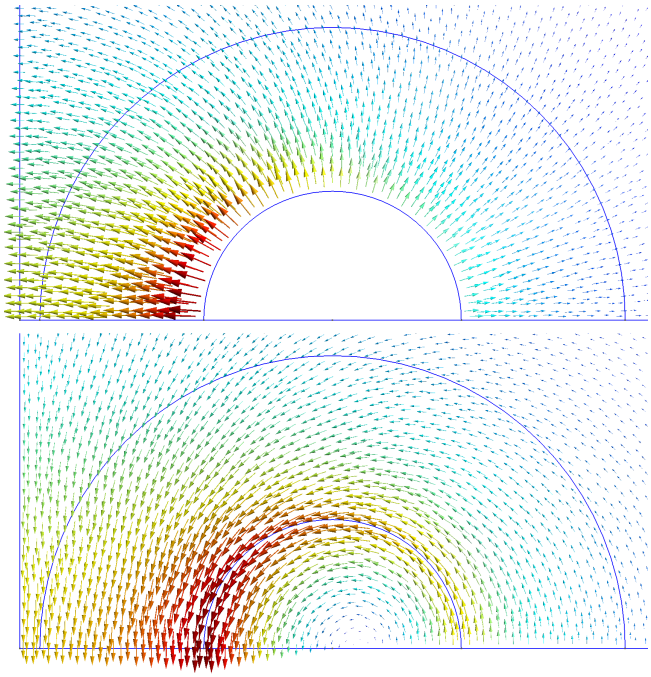
电场和磁场如图所示 14。最大场值为 32 kV/m 和 0.375 mT，出现在导体最左侧的点。电场从导体向外指向，磁场按预期呈逆时针方向（针对右侧导线，即导线 2）。导线中的电流为 0.4790188264 安培。

添加绝缘体后（通过设置 $\epsilon_i = 2.25\epsilon_0$），电容变为 28.71658404 皮法/米，较裸线增加了 58.5%。与使用 Altair Flux 得到的结果（28.71648756 皮法/米）相比，这也代表着 3.36 ppm 的相对差异。

下一次仿真是评估绝缘导线中是否存在缺陷（如图所示 4）。表格II 显示，缺陷会增加电阻和电感，但由于部分绝缘层被移除，电容会降低。

移除整个绝缘层，但保留金属中的缺陷后，与未受损的裸金属相比，电容略微下降至 18.09625476 皮法/米（−0.134%）。使用

图14. 未绝缘情形下非导电区域（顶部）和磁场（底部）中的电场（二维）。

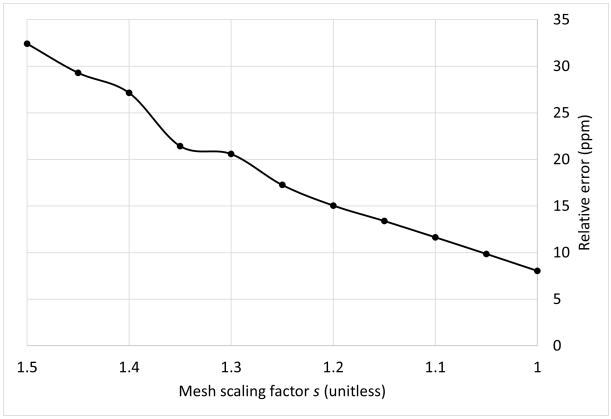


IABC开放边界方法得到的 ONELAB 仿真结果与上述结果相似，但为简洁起见，此处省略；这些仿真文件可在补充材料中获取 [16]。

为了了解仿真结果可能达到的精度，可以绘制网格细化图。该图显示了随着网格逐步细化而变化的相对误差，从而可以评估收敛性。图15显示了表格I中 ONELAB 电容仿真随着网格逐步细化而变化的相对误差。水平轴从左到右表示从粗网格（s = 1.5）到细网格（s = 1），其中s 是 `.geo` 文件末尾附近显示的网格缩放参数（附录A）。随着网格变细，相对误差逐渐减小；由此图可以预期，继续细化网格将使相对误差进一步降低。当无法计算相对误差时（即不存在解析参考值时），可以直接绘制后处理结果本身来评估收敛性（例如R、L 或 C）。

实验说明：最大的 ONELAB 仿真包含约 140 万个未知量，网格约有 32 万个节点和 23.5 万个单元；在配备 Intel Core i7-8700 处理器（12 个逻辑处理器，3.2 GHz）和 32 GB 内存的 Windows 系统上，内存使用量约为 27 GB，仿真耗时约 9 分钟；使用不支持复数的 GetDP 纯实数版本时，则约为 17 GB 和 3 分钟。Altair Flux 仿真的运行时间和内存使用量与 ONELAB 大致相当，因此未列出。两种工具的网格划分尽可能保持相似，仅外部区域有所不同。所用软件版本为：GetDP 3.5.0、Gmsh 4.14.1、Altair Flux 2025.1.1。

图15. ONELABC 表格 I的结果。



V. 结论

有限元法是一种重要的计算工具，可用于求解涉及偏微分方程的诸多物理学和工程问题。通过三维仿真计算了一对平行导线的直流（或低频）RLC 参数，以支持所提出的缺陷。文中详细介绍了如何使用开源软件包对开放边界问题进行建模。仿真结果与解析计算以及 Altair Flux 求解器所得结果吻合良好。

本文还简要概述了许多有限元概念，例如边界条件和弱形式。文中给出了静电学、静磁学和电动学的三维建模，可用于模拟许多涉及导体和电介质的其他静场构型。本教程为进一步探索球形或盒形变换，以及二维平面或轴对称问题奠定了坚实基础。本教程未涉及的其他主题包括永磁体建模、力计算和高频应用。

尽管仿真使用特定的有限元软件包完成，但大多数概念也适用于其他仿真工具。在某些情况下，公式和/或基函数隐藏在软件前端之后；然而，了解这些概念对于深入学习有限元法非常有用。

致谢

作者谨向 Danielle Bouthot、Genevi`eve Savard、Guillaume Roy-Fortin、Alain H´enault以及匿名审稿人致谢，感谢他们提出的诸多建议并参与讨论，帮助改进了本文。

参考文献

[1] H. P. Neff, 《电磁学导论》（John Wiley & Sons，纽约州纽约，1991 年），第 300 页。

[2] K. Hazim、G. Parent、S. Duchesne、A. Nicolet 和 C. Geuzaine，“双绞线对的二维静电建模”，《电气与电子工程计算与数学国际期刊》41(1)，48-63（2022）。[3] D. C. Meeker，《用户手册：有限元法磁学，第 4.2 版》，https://www.femm.info。[4] P. Karban、D. P´anek 和 J. Kaska，“物理场仿真的开源平台：Agros”，《计算与应用数学杂志》465，116589（2025）。[5] M. Boul´e，“有限元法软件在电磁学教学中的作用”，第四届跨学科工程设计教育会议，44-51（2014）。[6] https://www.elmerfem.org [7] https://freefem.org [8] https://ngsolve.org [9] https://onelab.info [10] https://altair.com/flux [11] htt ps://www.ansys.com/products/electronics/ansys-maxwell [12] https://www.comsol.com [13] D. Ioan、G. Ciuprina 和 W. Schilders，“第 5 章：电磁系统的复杂度降低”，载于《模型阶次约简》第 3 卷：应用，P. Benner、S. Grivet-Talocia、A. Quarteroni、G. Rozza、W. Schilders 和 L. Miguel Silveira 编（De Gruyter，柏林、波士顿，2021 年），第 145-200 页。[14] C. Geuzaine 和 J.-F. Remacle，“Gmsh参考手册：Gmsh 文档，一种内置前处理和后处理功能的有限元网格生成器”，https://gmsh.info。[15] P. Dular 和 C. Geuzaine，“GetDP参考手册：GetDP 文档，离散问题处理通用环境”，https://getdp.info。[16] 仿真源代码文件可在 https://github.com/MarcBoule/OnelabModels/tree/main/WirepairRLC 获取。[17] C. R. Paul，《多导体传输线分析》，第 2 版（Wiley-Interscience，霍博肯，新泽西州，2008 年），第 4.2.1.1 节。[18] P. Dular、W. Legros 和 A. Nicolet，“各种有限元公式中局部量与全局量的耦合及其在静电学、静磁学和磁动力学中的应用”，《IEEE磁学汇刊》34(5)，3078-3081（1998）。[19] F. Piriou 和 S. Cl´enet，《低频电磁系统有限元法建模》（John Wiley & Sons, Inc.，霍博肯，新泽西州，2024 年）。[20] Y. Zhu 和 A. C. Cangellaris，《电磁场建模的多重网格有限元法》，第 5 版（Wiley-IEEE Press，皮斯卡特维，新泽西州，2006 年），第 2.5、3.1、3.2 节。[21] Q. Chen 和 A. Konrad，“静态和准静态电磁场问题的有限元开放边界技术综述”，《IEEE磁学汇刊》33(1)，663-676（1997）。[22] M. S. Nabizadeh、R. Ramamoorthi 和 A. Chern，“无限域仿真的 Kelvin 变换”，《ACM图形学汇刊》40(4)，文章 97（2021）。[23] J.F. Remacle、A. Nicolet、A. Genon 和 W. Legros，“开放磁场问题中边界元与变换有限元的比较”，《WIT建模与仿真汇刊》7，8 页（1994）。[24] F. Henrotte、B. Meys、H. Hedia、P. Dular 和 W. Legros，“采用变换技术的有限元建模”，《IEEE磁学汇刊》35(3)，1434-1437（1999）。[25] D. Meeker，“用于静电有限元的临时渐近边界条件”，《IEEE磁学汇刊》50(6)，7400609（2014）。[26] D. Meeker，“用于磁场有限元的临时开放边界条件”，《IEEE磁学汇刊》，**49**(10)，5243-5247 (2013)。[27] J.-M. Jin，电磁学中的有限元法，第3版（John Wiley & Sons Inc.，美国新泽西州霍博肯，2014），第4、5、5、3、7、4、6、3、14、3、1、15、2节。[28] J. P. A. Bastos 和 N. Sadowski，磁性材料与三维有限元建模（Taylor & Francis Group，美国佛罗里达州博卡拉顿，2014），第5章。[29] O. Biro、K. Preis 和 C. Paul，“采用约化矢量势 Ar 公式计算铁磁材料引起的场误差”，第一届国际 *ROXIE* 用户会议研讨会论文集，31-46（1998）。[30] E. Creus´e、P. Dular 和 S. Nicaise，“关于有限元静磁问题中出现的规范条件”，计算机& 应用数学**77**(6)，1563-1582（2019）。[31] C. Geuzaine，考虑薄结构和全局量的麦克斯韦方程组高阶混合有限元格式，比利时列日大学博士论文，2001。[32] G. Dhatt、G. Touzot 和 E. Lefranc¸ois，有限元法（ISTE Ltd 和 John Wiley & Sons，英国伦敦及美国新泽西州霍博肯，2012），第2.5、5.1节。

附录 A：几何规格

几何模型的代码清单（不含缺陷）如图 A1所示。首先声明几何结构元素（`Cylinder`），以及`BooleanFragments`运算符，该运算符将相交体和表面划分为不同区域。随后，根据在 Gmsh 的可见性对话框中分析不同基本实体所获得的编号，声明物理体和表面。

几何文件的最后一节涉及网格划分。

图 A1。三维模型（wirepair.geo）。出于篇幅原因，带有缺陷（“V”形凹槽）的版本未显示，但可在线获取 [16]。

```
包含 "wirepaircommon.pro";

Cylinder(1)  = {a,0,0, 0,0,ell , rc,Pi}; // 导体。 Cylinder(2)  =
```

参数。在本例中，导体附近采用更密的网格可以提高仿真精度，因为电场在此处的幅值最大、变化也最为显著（见图14）。正如预期，网格密度、仿真精度与计算时间/内存彼此相关。