arXiv:2601.09840v1 [math.MG] 14 Jan 2026

有限度量空间中的绝对极小延拓

ALBERTO DOMÍNGUEZ CORELLA 和 TRÍ MINH LÊ

摘要。已知在许多无限度量空间中，绝对极小 Lipschitz 扩张（AMLE）都存在，但有限情形尚未得到充分解决。在至多含四个点的度量空间中，任意非空子集上的函数都存在 AMLE；也就是说，在与给定定义域不相交的集合上，Lipschitz 常数无法进一步降低。我们证明，在五点空间中，此类延拓可能不存在。

1. 引言、存在性失败与研究现状

众所周知，在任意度量空间中，定义在某个子集上的 Lipschitz 函数都可以延拓到整个空间，同时保持其 Lipschitz 常数。此类延拓称为最小 Lipschitz 延拓，因为它们在所有 Lipschitz 延拓中达到可能的最小 Lipschitz 常数，参见 [19, 21]。

更确切地说，设 (X, d) 是一个度量空间，$A \subset X$ 是一个闭子集，且 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 是定义在 A 上的 Lipschitz 函数。若函数 $g\colon X \to \mathbb{R}$ 满足 $g|_A = f$ 且 $\mathrm{Lip}\,(f, A) = \mathrm{Lip}\,(g, X)$，则称它为一个 最小 ***Lipschitz*** 延拓，其中 $\mathrm{Lip}(f, A)$ 表示 f 在 A 上的 Lipschitz 常数：

$$\mathrm{Lip}(f, A) := \sup_{\substack{x,y\in A\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

这类延拓有两个自然的候选，即所谓的 McShane–Whitney 延拓

$$m(x) := \sup_{y\in A}\{f(y) - \mathrm{Lip}(f, A)d(y, x)\} \quad \text{and} \quad M(x) := \inf_{y\in A}\{f(y) + \mathrm{Lip}(f, A)d(y, x)\}. \tag{1.1}$$

这些延拓的多重性和不稳定性多少令人不满意；此外，其定义只涉及延拓的全局 Lipschitz 常数，而忽略了局部可能发生的情况。因此，Aronsson [2, 3, 4] 在欧几里得空间中引入了绝对极小 ***Lipschitz*** 扩张 的定义：

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空紧集，且 $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 是一个 ***Lipschitz*** 函数。那么，存在一个 f 的最小 ***Lipschitz*** 延拓 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Lip}(u, V) = \mathrm{Lip}(u, \partial V) \quad \textit{for every open set } V \subset\subset \Omega. \tag{1.2}$$

这样的函数 u 称为 f的绝对极小 ***Lipschitz*** 延拓（***AMLE***）。

已有研究表明，绝对极小 Lipschitz 延拓满足所谓的无穷拉普拉斯方程，并且与拔河博弈密切相关，参见例如 [5, 6, 7, 8, 16, 20]。然而，这一定义无法自然地推广到一般度量空间，因为这类空间的边界可能为空。尽管如此，人们仍为在度量背景下建立适当的绝对极小 Lipschitz 延拓概念做出了诸多努力，例如在完备长度空间和度量测度空间中的相关研究，参见 [10, 11, 15]。

2020 数学学科分类。 26A16, 39B82,05C12。关键词和短语。有限度量空间、绝对极小 Lipschitz 扩张、McShane–Whitney 公式。作者的研究部分得到奥地利科学基金会（FWF）项目 P 36344-N 和 F 100800 的资助。

为解决这一困难，Juutinen [14] 提出了绝对极小 Lipschitz 延拓的另一种定义，该定义不依赖边界。其核心思想是，延拓相对于适当的测试函数应具有局部 Lipschitz 极小性。

定义 1.1。设(X, d) 为一个度量空间，A 是 X 的非空闭子集，且$f\colon A \to \mathbb{R}$ 是一个 ***Lipschitz*** 函数。若 $h\colon X \to \mathbb{R}$ 满足下述条件，我们称其为相对于族 $\mathcal{U} \subset 2^X$ 的绝对极小 ***Lipschitz*** 延拓（***AMLE***）：

(i) h 是 f的一个最小 ***Lipschitz*** 延拓。(ii) 对于任意 $U \in \mathcal{U}$ 以及满足 $g|_{X\setminus U} = h|_{X\setminus U}$的任意最小延拓 $g\colon X \to \mathbb{R}$ ***of*** f，都有

$$\operatorname{Lip}\big(h, U\big) \leq \operatorname{Lip}\big(g, U\big).$$

对 $\mathcal{U}$ 的不同选择会产生不同版本的 AMLE：

- 若 $\mathcal{U} = 2^X$ 是 X所有子集构成的族，则可得到 Juutinen 的 AMLE 定义 [14]。
- 若 $\mathcal{U} = 2^{X\setminus A}$ 是由包含于 $X \setminus A$的子集构成的族，则可得到 Mazón、Rossi 和 Toledo 为研究特定离散空间中的 AMLE 而考虑的松弛表述 [18] 。
- 若 X 是完备长度空间，且 $\mathcal{U} \subset 2^{X\setminus A}$ 是其闭包包含于 $X \setminus A$的开子集族，那么定义 1.1–（*ii*）等价于：Lip(h, U) =Lip(h, ∂U) 对每个 $U \in \mathcal{U}$均成立，见 [10, 命题 2.6]。

Juutinen 证明，在可分长度空间中，相对于 2^X 的绝对极小 Lipschitz 延拓总是存在。然而，除了给出一个无法延拓的平凡三点例子 [14, 例 2.2]之外，他没有讨论可数度量空间（有限或可数）。他还在该处指出，可以放宽定义，考虑相对于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 Lipschitz 延拓，以确保其例子中的存在性。Mazón、Rossi 和 Toledo 在 [18, 定义 2.1] 中重新探讨了这一做法，以解决离散情形中的问题。

在 Juutinen 的三点例子中，相对于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 Lipschitz 延拓确实存在，但并不唯一。另一方面，对于四点度量空间，仍可验证此类延拓存在。为完整起见，我们简要证明这一事实，因为现有文献中尚未出现相关证明，并在注 2.3 中给出一个非唯一性的例子。

命题 1.2。若 X 由四个点组成且 $A \subset X$ 非空，则任意函数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 都存在相对于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 ***Lipschitz*** 延拓。

这一情形下的存在性结果令人鼓舞；然而，二十多年过去了，关于此事的讨论寥寥无几，尤其是尚未有人探讨有限度量空间中是否存在相对于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 Lipschitz 延拓。

本文的主要结果是给出一种构造，表明当度量空间包含超过四个点时，相对于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 Lipschitz 延拓未必存在。

定理 1.3。存在一个五点度量空间及一个定义在两点子集上的函数，使得相对于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 ***Lipschitz*** 延拓不存在。

最后，我们给出一些评注。

评注 1.4。

(i) 定理 1.3 证明中构造的度量空间可以嵌入 $\mathbb{R}^d$ for every$d \geq 1$。我们还在注 2.5 中给出了一种非欧几里得构造。*(ii)* 通过调整定理 1.3 的证明，可以在任意包含多于五个点的有限度量空间中构造反例。*(iii)* 定理 1.3 证明中给出的构造还表明，Juutinen 意义下的 AMLE（相对于 2^X）[14] 在离散情形中同样不存在。

2. 证明

2.1. 命题 1.2 的证明。 如果 A 有一个、三个或四个点，则结论显然；因此我们假设 A 有两个元素。考虑 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 和 $A = \{x_1, x_2\}$。固定一个函数$f : A \to \mathbb{R}$。定义

$$\mathcal{L}(\{x_3, x_4\}) = \inf \{\mathrm{Lip}(g, \{x_3, x_4\}) : g \text{ is a minimal Lipschitz extension of } f\}. \tag{2.1}$$

设 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 (2.1) 的极小化序列，即每个 $g_n : X \to \mathbb{R}$ 都是 f 的最小 Lipschitz 延拓，并且

$$\mathrm{Lip}(g_n, \{x_3, x_4\}) \longrightarrow \mathcal{L}(\{x_3, x_4\}) \quad \text{as } n \longrightarrow +\infty.$$

由于 McShane–Whitney 界，进行极小化的集合有界；因此，取一个子列后，存在 $\bar{g}$，使得当 $n \to \infty$ 时，$g_n \to \bar{g}$。容易看出，$\mathcal{L}(\{x_3, x_4\}) = \mathrm{Lip}(\bar{g}, \{x_3, x_4\})$，并且 $\bar{g}$ 是 f 的最小 Lipschitz 延拓。由此可得，$\bar{g}$ 是 f 关于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 Lipschitz 延拓。□

注 2.1。采用命题 1.2 证明中的同样推理可知，若 X 是一个 n 点度量空间，且 $A \subset X$ 有 $n-2$ 个点，那么每个函数 $f : A \to \mathbb{R}$ 都存在一个关于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 Lipschitz 延拓。

注2.2。设 X 是一个度量空间，$A \subset X$ 且 $f : A \to \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数。取定 $\lambda \in \in (0, 1)$，并按 (1.1) 定义 m，M。则凸组合

$$f_\lambda(x) := \lambda m(x) + (1-\lambda)M(x), \quad \text{for every } x \in X$$

是从 f 到 X 的最小 Lipschitz 延拓。不过请注意，并非所有介于 m 和 M 之间的函数都是最小 Lipschitz 延拓。例如，设 $X := \{0, 1, 3, 4\} \subset \mathbb{R}$ 且 $A = \{0, 1\}$。考虑由下式定义的 $f : A \to \mathbb{R}$：

$$f(0) = 0 \quad \text{and} \quad f(1) = 1.$$

则 $\mathrm{Lip}(f, A) = 1$。回忆

$$m(x) = \sup_{a\in A}\{f(a) - |x-a|\} \quad \text{and} \quad M(x) = \inf_{a\in A}\{f(a) + |x-a|\}.$$

直接计算可得

$$m(0) = 0,\ m(1) = 1,\ m(3) = -1 \text{ and } m(4) = -2,$$
$$M(0) = 0,\ M(1) = 1,\ M(3) = 3 \text{ and } M(4) = 4.$$

定义 $g : X \to \mathbb{R}$ 如下:

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1, \quad g(3) = -1 \text{ and } g(4) = 4.$$

容易验证，对于每个 $x \in X$，都有 $m(x) \le g(x) \le M(x)$。然而

$$\frac{|g(4) - g(3)|}{|4-3|} = \frac{|4-(-1)|}{1} = 5 > 1 = \mathrm{Lip}(f, A),$$

因此，$\mathrm{Lip}(g, X) > \mathrm{Lip}(f, A)$。所以，尽管 g 介于 m 和 M 之间，但它并不是将 f 延拓到 X 的最小 Lipschitz 延拓。

注记 2.3。不同于欧几里得情形（例如参见 [1, 13]），离散绝对极小 Lipschitz 延拓的唯一性并不成立。下面的例子对此进行了说明。考虑赋予如下图所示度量的 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$。

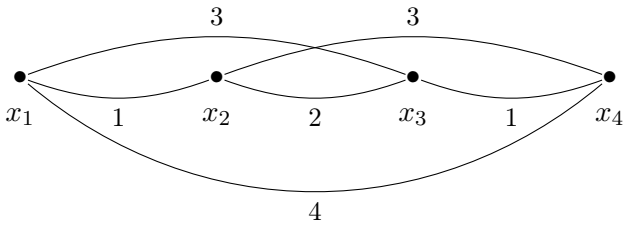


图 1. 一个含有四个节点的图示例。

考虑 $A = \{x_1, x_2\}$，并令 f：由 $f(x_1) = 0$ 和 $f(x_2) = 1$ 定义 $A \to \mathbb{R}$（因此 $\mathrm{Lip}(f, A) = 1$）。对于任意固定的 $t \in [-1, 3]$，定义 $h_t : X \to \mathbb{R}$

$$h_t(x_1) = 0, \quad h_t(x_2) = 1 \quad \text{and} \quad h_t(x_3) = h_t(x_4) = t.$$

直接计算可得

$$\frac{|h_t(x_i) - h_t(x_j)|}{d(x_i, x_j)} \leq 1, \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

因此，每个 h_t 都是 f的最小 Lipschitz 延拓。此外，由于 $\mathrm{Lip}(h_t, \{x_3, x_4\}) = 0$，每个 h_t 都是相对于 $2^{X\setminus A}$的 f 的绝对极小 Lipschitz 延拓。这表明，在离散情形下，绝对极小 Lipschitz 延拓的唯一性并不成立。

注 2.4。在欧几里得空间中（更一般地，在度量长度空间中），ϵ–争夺游戏的值函数在 $\epsilon \to 0^+$ 时收敛到绝对极小 Lipschitz 延拓；在适当的度量下，这两个概念等价，见 [6, 16, 18, 20]。对于具有有限宽度的一般图，该值函数满足所谓的离散无穷拉普拉斯方程，见 [12]。与经典情形不同，我们将看到，这样的值函数甚至可能不是最小 Lipschitz 延拓。

我们回顾一下图上离散无穷拉普拉斯算子的定义。设 $G = (V, E)$ 是一个图，并设 $A \subset V$。若有一条边连接 x 和 y，则记作 $x \sim y$。对于给定数据 $f : A \to \mathbb{R}$，满足下式的函数 $u : X \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}\left(\max\limits_{y\sim x} u(y) + \min\limits_{y\sim x} u(y)\right), & x \in X \setminus A, \\ u(x) = f(x), & x \in A, \end{cases} \tag{2.2}$$

是离散无穷拉普拉斯方程的一个解。根据 [12, 定理 1.1], , 上述泛函方程存在唯一解。

回到我们的问题，设 X 是一个有限度量空间。考虑图 $G = (V, E)$，其中$V = X$ 且 $E = X \times X$。可以直接验证，方程 (2.2) 的解为

$$u(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \dfrac{1}{2}\left(\max\limits_{a\in A} f(a) + \min\limits_{a\in A} f(a)\right), & x \in X \setminus A \end{cases}.$$

事实上，该解不一定是 f 到整个空间上的最小 Lipschitz 延拓。具体而言，设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 如注 2.3 所述，并令 $A = \{x_1, x_3\}$。考虑满足 $f(x_1) = 0$ 且 $f(x_3) = 1$的 $f : A \to \mathbb{R}$。那么，方程 (2.2) 的解 $u : X \to \mathbb{R}$ 在 A 上为 $u = f$，并且$u(x_2) = u(x_4) = \frac{1}{2}$。显然

$$\mathrm{Lip}(f, A) = \frac{1}{3} \qquad \text{while} \qquad \mathrm{Lip}(u, X) = \frac{1}{2} > \mathrm{Lip}(f, A),$$

因此，u 不是最小 Lipschitz 延拓。

2.2. 定理 1.3 的证明。 考虑 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 和 $A = \{x_2, x_4\}$。度量 d见表 1。

$d(\cdot,\cdot)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	2	3	5	6
x_2	2	0	1	3	4
x_3	3	1	0	2	3
x_4	5	3	2	0	1
x_5	6	4	3	1	0

表 1. 距离矩阵

设 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 由 $f(x_2) = 0$和 $f(x_4) = 1$给出。因此，$\mathrm{Lip}(f, A) = |0-1|/d(x_2, x_4) = 1/3$。回顾一下，(1.1) 中的 McShane–Whitney 延拓 m 和 M 分别是 f的（逐点）最小和最大极小 Lipschitz 延拓。直接计算可得

$$m(x_1) = -\frac{2}{3}, \quad m(x_3) = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad m(x_5) = \frac{2}{3},$$
$$M(x_1) = \frac{2}{3}, \quad M(x_3) = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad M(x_5) = \frac{4}{3}.$$

因此， f 的任意极小 Lipschitz 延拓 $h\colon X \to \mathbb{R}$ 都必须满足 $\mathrm{Lip}(h, X) = 1/3$，并且

$$h(x_1) \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad h(x_3) = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad h(x_5) \in \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

假设 h 是相对于 $2^{X\setminus A}$的绝对极小 Lipschitz 延拓。我们分两种情况讨论，并证明两者都会导致矛盾。

情况 1： $h(x_1) \neq h(x_5)$。考虑 $U_{15} := \{x_1, x_5\} \subseteq X \setminus A$，并定义 $g\colon X \to \mathbb{R}$ 如下

$$g(x) = h(x) \quad \text{for every } x \in \{x_2, x_3, x_4\} \quad \text{and} \quad g(x_1) = g(x_5) = \frac{2}{3}.$$

注意，$\mathrm{Lip}(g, U_{15}) = 0$ 且 $\mathrm{Lip}(g, X \setminus U_{15}) = \mathrm{Lip}(h, X \setminus U_{15}) \leq 1/3$。此外，直接计算可得：

$$\frac{|g(x_1)-g(x_2)|}{d(x_1,x_2)} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{|g(x_5)-g(x_2)|}{d(x_5,x_2)} = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{3},$$
$$\frac{|g(x_1)-g(x_3)|}{d(x_1,x_3)} = \frac{1}{9} \leq \frac{1}{3}, \qquad \frac{|g(x_5)-g(x_3)|}{d(x_5,x_3)} = \frac{1}{9} \leq \frac{1}{3},$$
$$\frac{|g(x_1)-g(x_4)|}{d(x_1,x_4)} = \frac{1}{15} \leq \frac{1}{3}, \qquad \frac{|g(x_5)-g(x_4)|}{d(x_5,x_4)} = \frac{1}{3}.$$

因此 $\mathrm{Lip}(g, X) = 1/3$，由此可推出 g 是 f 和 $g\big|_{X\setminus U_{15}} = h\big|_{X\setminus U_{15}}$的最小 Lipschitz 延拓。然而，由于 $h(x_1) \neq h(x_5)$，我们有

$$\mathrm{Lip}(g, U_{15}) = 0 < \frac{|h(x_1)-h(x_5)|}{d(x_1,x_5)} = \mathrm{Lip}(h, U_{15}),$$

这与定义 1.1 的条件 *(ii)* 矛盾。

情形 2： $h(x_1) = h(x_5)$。由于我们有

$$h(x_1) \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \quad \text{and } h(x_5) \in \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right],$$

等式迫使 $h(x_1) = h(x_5) = 2/3$。考虑 $U_{13} := \{x_1, x_3\}$ 并定义 $g\colon X \to \mathbb{R}$ 为

$$g(x) = h(x) \quad \text{for every } x \in \{x_2, x_4, x_5\}, \quad g(x_1) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad g(x_3) = \frac{1}{3}.$$

注意，$\operatorname{Lip}(g, U_{13}) = 1/18 \leq 1/3$ 且 $\operatorname{Lip}(g, X \setminus U_{13}) = \operatorname{Lip}(h, X \setminus U_{13}) \leq 1/3$。此外，直接计算可得：

$$\begin{aligned}
\frac{|g(x_1) - g(x_2)|}{d(x_1, x_2)} &= \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}, & \frac{|g(x_3) - g(x_2)|}{d(x_3, x_2)} &= \frac{1}{3},\\
\frac{|g(x_1) - g(x_4)|}{d(x_1, x_4)} &= \frac{1}{10} \leq \frac{1}{3}, & \frac{|g(x_3) - g(x_4)|}{d(x_3, x_4)} &= \frac{1}{3},\\
\frac{|g(x_1) - g(x_5)|}{d(x_1, x_5)} &= \frac{1}{36} \leq \frac{1}{3}, & \frac{|g(x_3) - g(x_5)|}{d(x_3, x_5)} &= \frac{1}{9} \leq \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

因此，$\operatorname{Lip}(g, X) = 1/3$，于是我们再次推得 g 是 f 和 $g\big|_{X\setminus U_{13}} = h\big|_{X\setminus U_{13}}$ 的最小 Lipschitz 延拓。然而，我们有

$$\operatorname{Lip}(g, U_{13}) = \frac{1}{18} < \frac{1}{9} = \operatorname{Lip}(h, U_{13}),$$

这与定义 1.1 的*(ii)* 条件矛盾。

因此，不存在相对于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 Lipschitz 延拓。 □

注2.5。

在非欧几里得情形下也可以构造一个反例。下面的例子对此作了说明。

考虑 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 和 $A = \{x_1, x_2\}$。度量 d 见表 2。

$d(\cdot,\ \cdot)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	2.0	0.6	1.1	1.7
x_2	2.0	0	1.6	1.1	0.5
x_3	0.6	1.6	0	1.6	2.0
x_4	1.1	1.1	1.6	0	1.6
x_5	1.7	0.5	2.0	1.6	0

表 2。距离矩阵

设 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 由 $f(x_1) = 0, f(x_2) = 2$ 给定。因此 $\operatorname{Lip}(f, A) = 1$。根据 McShane–Whitney 界，任何最小 Lipschitz 延拓 $h : X \to \mathbb{R}$ 都必须满足

$$h(x_3) \in [0.4, 0.6], \quad h(x_4) \in [0.9, 1.1] \quad \text{and} \quad h(x_5) \in [1.5, 1.7].$$

由此很容易得到

$$|h(x_3)-h(x_4)|\le 0.7<1.6,\quad |h(x_4)-h(x_5)|\le 0.8<1.6\quad\text{and}\quad |h(x_3)-h(x_5)|\le 1.3<2.$$

假设 h 是相对于 $2^{X\setminus A}$ 的绝对极小 Lipschitz 延拓。根据 $h(x_4)$ 的取值，我们分两种情况讨论，并证明两种情况都会导致矛盾。

情形 1 ： $h(x_4)\in(0.9,\ 1.1]$。考虑 $U_{34}=\{x_3,\,x_4\}\subseteq X\setminus A$ 并定义 $g\colon\ X\to\mathbb{R}$ by

$$g(x)=h(x)\quad\text{for every } x\in\{x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_5\}\quad\text{and}\quad g(x_4)=0.9.$$

直接验证可知，g 是 1-Lipschitz 的。此外，我们有

$$\mathrm{Lip}(g,U_{34})=\frac{|h(x_3)-0.9|}{1.6}<\frac{|h(x_3)-h(x_4)|}{1.6}=\mathrm{Lip}(h,U_{34}),$$

因为 $h(x_4)>0.9$。这与定义 1.1 的条件（*ii*）相矛盾。

情形 2： $h(x_4)=0.9$。考虑 $U_{45}=\{x_4,\,x_5\}\subseteq X\setminus A$ 并定义 $g\colon\ X\to\mathbb{R}$，使得

$$g(x)=h(x)\quad\text{for every } x\in\{x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_5\},\quad\text{and}\quad g(x_4)=1.1.$$

同样可以验证，g 是 1-Lipschitz。此外，

$$\mathrm{Lip}(g,U_{45})=\frac{|1.1-h(x_5)|}{1.6}<\frac{|0.9-h(x_5)|}{1.6}=\mathrm{Lip}(h,U_{45}),$$

因为 $h(x_5)\in[1.5,1.7]$。这也与定义 1.1 的条件*(ii)* 相矛盾。

因此，不存在相对于 $2^{X\setminus A}$ 的此类绝对极小 Lipschitz 延拓。

参考文献

[1] *S. N. Armstrong* 和 *C. K. Smart*，《关于无穷调和函数唯一性的 *Jensen* 定理的简易证明》，《微积分变分与偏微分方程》，*37*（*2010*年），第 *381–384* 页。[2] *G. Aronsson*，《泛函 $\sup_x F(x,\,f(x)\ f'(x))$ 的极小化问题》，《*Arkiv för Matematik*》，*6*（*1965*年），第 *33–53* 页。[3] ，《泛函 $\sup_x F(x,f(x)\ f'(x))$ 的极小化问题》，第二部分，《*Arkiv för Matematik*》，*6*（*1966*年），第 *409–431* 页。[4] ，《满足 *Lipschitz* 条件的函数的延拓》，《*Arkiv för Matematik*》，*6*（*1967*年），第 *551–561* 页。[5] *G. Aronsson*、*M. G. Crandall* 和 *P. Juutinen*，《绝对极小函数理论概述》，《美国数学会通报（新辑）》，*41*（*2004*年），第 *439–505* 页。[6] *L. Bungert*、*J. Calder* 和 *T. Roith*，《图上 *Lipschitz* 学习的统一收敛速率》，《*IMA* 数值分析杂志》，*43*（*2023*年），第 *2445–2495* 页。[7] *J. Calder*，《无限无标签数据与有限有标签数据下 *Lipschitz* 学习的一致性》，《*SIAM* 数学与数据科学杂志》，*1*（*2019*年），第 *780–812* 页。[8] *T. Champion* 和 *L. De Pascale*，《绝对极小解与距离函数比较的原理》，《凸分析杂志》，*14*（*2007*年），第 *515–541* 页。[9] *M. G. Crandall*、*L. C. Evans* 和 *R. F. Gariepy*，《最优 *Lipschitz* 延拓与无穷拉普拉斯算子》，《微积分变分与偏微分方程》，*13*（*2001*年），第 *123–139* 页。[10] *A. Daniilidis*、*M. T. Lê* 和 *F. Venegas*，《绝对极小半 *Lipschitz* 延拓》，《微积分变分与偏微分方程》，*64*（*2025*年）。[11] *E. Durand-Cartagena*、*J. A. Jaramillo* 和 *N. Shanmugalingam*，《在满足 ∞-*Poincaré* 不等式的假设下 ∞-调和函数的存在性与唯一性》，《数学年刊》，*374*（*2019*年），第 *881–906* 页。[12] *F. Han* 和 *T. Wang*，《图上的离散无穷拉普拉斯方程与拔河博弈》，《微积分变分与偏微分方程》，*64*（*2025*年），论文编号 *40*。[13] *R. Jensen*，《*Lipschitz* 延拓的唯一性：梯度上确界范数的极小化》，《理性力学与分析文档》，*123*（*1993*年），第 *51–74* 页。[14] *P. Juutinen*，《度量空间上的绝对极小 *Lipschitz* 延拓》，《芬兰科学院数学年刊》，*27*（*2002*年），第 *57–67* 页。[15] *P. J uutinen* 和 *N. Shanmugalingam*，《度量测度空间中 *AMLE*、强绝对极小 *Lipschitz* 延拓与与锥比较的等价性》，《数学消息》，*279*（*2006*年），第 *1083–1098* 页。[16] *E. Le Gruyer*，《关于绝对极小 *Lipschitz* 延拓与偏微分方程 $\Delta_\infty(u)=0$》，《非线性微分方程及其应用》，*14*（*2007*年），第 *29–55* 页。

[17] J. J. Manfredi、M. Parviainen 和 J. D. Rossi，对 p-调和函数的渐近平均值刻画，《美国数学会会刊》，138（2010年），第 881–889 页。[18] J. M. Mazón、J. D. Rossi 和 J. Toledo，关于离散距离的最佳 *Lipschitz* 延拓问题与离散 ∞-拉普拉斯算子，《纯粹与应用数学杂志》（第九辑），97（2012年），第 98–119 页。[19] E. J. McShane，函数值域的延拓，《美国数学会通报》，40（1934年），第 837–842 页。[20] Y. Peres、O. Schramm、S. Sheffield 和 D. B. Wilson，拔河博弈与无穷拉普拉斯算子，《美国数学会杂志》，22（2009年），第 167–210 页。[21] H. Whitney，定义在闭集上的可微函数的解析延拓，《美国数学会汇刊》，36（1934年），第 63–89 页。

（Alberto Domínguez Corella）数学与科学计算研究所，格拉茨大学，Heinrichstrasse 36，8010 格拉茨，奥地利；随机学与经济数学研究所，维也纳工业大学，Wiedner Hauptstrasse 8，VADOR E105-04，1040 维也纳，奥地利电子邮箱：alberto.of.sonora@gmail.com网址：https://sites.google.com/view/alberto-of-sonora（Trí Minh Lê）随机学与经济数学研究所，维也纳工业大学，Wiedner Hauptstrasse 8，VADOR E105-04，1040 维也纳，奥地利电子邮箱：minh.le@tuwien.ac.at网址：https://sites.google.com/view/tri-minh-le