arXiv:2601.09860v1 [cs.DS] 14 Jan 2026

公平拟阵子模最大化的改进算法（完整版）

Sepideh Mahabadi微软研究院
smahabadi@microsoft.com

Sherry Sarkar*卡内基梅隆大学
sherrys@andrew.cmu.edu

Jakub Tarnawski微软研究院
jakub.tarnawski@microsoft.com

摘要

带拟阵约束的子模最大化是一个核心问题，在机器学习中有许多应用。随着算法越来越多地用于对具有性别或种族等敏感属性的数据点进行决策，施行公平性以避免偏见和歧视变得至关重要。近期研究探讨了如何为公平拟阵子模最大化设计高效的近似算法。然而，目前已知的最佳算法只能保证满足放宽后的公平性约束，且会损失一个因子 2；也就是说，问题可能要求选取具有给定属性的 ℓ 个元素，但算法只能保证找到 $\lfloor \ell/2 \rfloor$。尤其是，当 $\ell = 1$ 时，无法提供可证明的保证；这对应于完美匹配约束的一个关键特例。

在这项工作中，我们通过一种能够任意接近完全公平性的算法，实现了一种新的权衡。具体而言，对于任意常数 $\varepsilon > 0$，我们针对公平单调拟阵子模最大化给出一种常数因子近似算法，其期望下在公平性下界约束方面仅损失一个因子 $(1 - \varepsilon)$。我们在一套标准真实世界数据集（包括聚类、推荐和覆盖任务）上进行的实证评估表明，我们的方法在实践中有效。

这篇论文的代码可在 https://github.com/dj3500/ fair-matroid-submodular-neurips2025 获取。

1 引言

机器学习日益广泛地应用于高风险决策，引发了人们对自动化系统中偏见与不公平现象扩散的担忧。这些挑战在教育、执法、招聘和信贷等领域尤为突出 [MMD16; Whi22; Eur22]。对此，越来越多的研究致力于开发能够在聚类 [CKLV17], 、数据摘要 [CKSDKV18],、分类 [ZVGG17], 、投票 [CHV18],和排序 [CSV18]等核心问题中纳入公平性约束的算法。

本文研究了拟阵约束下单调子模最大化中的公平性。子模函数体现了边际收益递减原理，是.....

*本研究的部分工作是在微软研究院实习期间完成的。

第 39 届神经信息处理系统会议（NeurIPS 2025）。

机器学习应用的基础，例如推荐系统 [EG11], 特征选择 [DK11], 主动学习 [GK11], 和数据摘要 [LB11]。拟阵为独立性约束建模提供了通用框架，涵盖基数、划分、图连通性和线性独立性约束。

尽管已有许多公平性定义，我们采用一种广泛使用的群体公平模型：将全集划分为互不相交的组，并对所选集合中每个敏感组的代表比例设置上下界。精确定义见第 2.1 节。该模型概括了若干公平性概念，例如比例代表性 [Mon95；BLS17], 多样性约束 [CCRL13；Bid06], 以及统计均等 [DHPRZ12]。该模型已用于子模最大化 [CSV18；CHV18；EMNTT20；EFNTT23；WFM21；TY23；YT23；ETNV24]，也用于许多其他优化问题，例如聚类 [CKLV17；KAM19；JNN20；HMV23], 、投票 [CHV18], 、数据摘要 [CKSDKV18], 、匹配 [CKLV19]或排序[CHV18]。

在没有公平性约束的情况下，带单个拟阵约束的单调子模最大化问题已得到充分研究，并且可以实现紧确的 $(1-1/e) \approx 0.63$-近似 [CCPV11；Fei98]。两个拟阵约束的交集（我们称之为"拟阵交"）存在一个接近 0.5 的近似算法 [LSV10]。公平变体主要是在基数约束下进行研究的 [CHV18], ，其中也已知存在紧确的 $(1-1/e)$-近似算法。在（单遍）流式设置中，非公平拟阵版本有一个 0.3178-近似算法 [FLNSZ22] ；此外，由于基数约束与公平性约束的交集可以归约为单个拟阵约束 [EMNTT20],，因此该问题也能达到相同的近似因子。

然而，拟阵约束与公平性约束的交集似乎难得多，尽管最近已有两项研究分别探讨了流式 [EFNTT23] 和经典离线 [ETNV24] 情境下的这一问题，但我们对此仍知之甚少；我们关注后者。遵循 [EFNTT23], 的做法，我们将该问题称为公平拟阵单调子模最大化（**FMMSM**）。为了体会其难度，可以考虑一个重要的特殊情形——单调子模完美匹配（**MSPM**），即在二分图（V_G, E_G）中所有完美 匹配的集合上最大化单调次模函数。[2] 这一可行集并非向下封闭，因此已知的算法方法无法适用。[3] MSPM目前已知的最佳近似因子是平凡的 $O(|V_G|)$-近似；也可以应用 [GHIM09] 的框架，得到 $\widetilde{O}(\sqrt{|E_G|})$-近似[4], ，对于稀疏图而言，该结果更优。事实上，这甚至可能是紧的，因为它几乎匹配 [ETNV24] 令人意外的下界结果：他们证明，存在一族稀疏图，使标准多线性松弛（子模优化的松弛舍入方法中常用）具有 $\Omega(\sqrt{|E_G|})$ 的整数间隙。 [ETNV24] 将MSPM是否存在常数因子近似列为一个令人振奋的开放问题。

[EFNTT23；ETNV24] 提出的 FMMSM 算法通过放宽下界约束，绕过了由此带来的困难。它们得到了以下两个结果：

定理 1.1（ [EFNTT23]的两遍算法）存在一种 *FMMSM* 多项式时间算法，其违反下界约束的幅度不超过 *2* 倍，并可获得 $\alpha/2$-近似，其中 α 是在拟阵交约束下最大化单调次模函数的算法的近似比。

我们可以让 α 几乎成为 $1/2$ [LSV10] ，从而获得几乎为 $1/4$ 的近似比。（[EFNTT23] 在流式设置中工作，并改用 [GJS21] 的拟阵交流式算法；

[2]要看出 MSPM 是 FMMSM 的一个特例，只需令 E_G 为全集，考虑一个分划拟阵，用以编码左侧每个顶点在解中的度数至多为 1，并设置公平性约束，使右侧每个顶点的度数至少为 1 且至多为 1。[3]当然，完美匹配的真子集不是完美匹配。更重要的是，所有完美匹配的子集（这是向下封闭的）构成的集合族，不属于任何已知能够使近似子模最大化变得易于处理的集合族。具体而言，它既不是拟阵，也不是少数几个拟阵的交，更不是所谓的 p-可扩展集合系统或 p-系统 [CCPV11] （1）。[4]GHIM09] 的工作 [表明，我们可以在多项式时间内得到满足 $e \in E_G$ 的数值 c_e，使得对于任意 $S \subseteq E_G$，函数 $\hat{f}(S) := \sqrt{\sum_{e \in S} c_e}$ 是 $\widetilde{O}(\sqrt{|E_G|})$ 对 $f(S)$ 的近似。最大化 $\hat{f}(S)$ 等价于最大化 $\sum_{e \in S} c_e$，而这就是最大权二分图完美匹配问题，可在多项式时间内求解。

这会在两遍扫描中得到一个 $1/11.66$ 近似解。）这里，违反下界约束的倍数为 2，意味着如果某种颜色的下界为 ℓ，则可以保证解中至少包含 $\lfloor \ell/2 \rfloor$ 个该颜色的元素。注意，在 MSPM 中我们有 $\ell = 1$，因此 $\lfloor \ell/2 \rfloor = 0$。

定理 1.2（[ETNV24]）存在一种用于 *FMMSM* 的多项式时间算法，能够以期望满足下界和上界约束，而非严格满足，并以期望获得（$1-1/e$）近似。

定理 1.2 还保证了对每项公平性约束违反程度的某些双侧尾界，这些界在 ℓ 足够大时适用。这是本文讨论的唯一会违反上界的算法。该算法通过求解多线性松弛并对其进行舍入来实现。

如果我们考虑 MSPM 的一个放宽版本，即不再要求完美匹配，而是要求一个较大匹配，同时具有较高的次模函数值，那么简单的贪心算法可获得 $1/3$-近似（定理 2.6），并构造一个极大匹配，从而达到最大可能规模的 $1/2$。定理 1.1 和定理 1.2 中的结果并未对此有所改进。[5] 虽然可以尝试将这一简单方法推广到 FMMSM，但这会遇到另一个问题，而该问题在公平性动机的背景下尤为突出：尽管至少一半的下界总量会得到满足，但仍可能有一些“运气不佳”的颜色（边缘化群体）从未出现在解中；这正是我们首先寻求公平算法的原因。

1.1 我们的贡献

在这项工作中，我们提出了一种算法，其满足公平性约束的近似因子优于 2，同时还能为每个组分别提供保证（而不是像上文讨论的简单贪心策略那样仅提供总体保证）。为实现前一个目标，我们牺牲部分目标值；为实现后一个目标，我们采用随机化。

定理 1.3（定理 3.4 的非正式版本）对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$，都存在一个用于 *FMMSM* 的多项式时间算法，其输出

- 满足拟阵约束，
- 满足公平性上界约束，
- 对于公平性下界为 ℓ 的组，其期望至少包含$(1-\varepsilon)\ell$ 个该组的元素，
- 的期望规模至少为$(1-\varepsilon)$ 任意可行解最大规模的倍，
- 满足关于规模以及总公平性违反的切尔诺夫型高概率界，
- 的期望次模函数值至少为 $0.499 \cdot \varepsilon \cdot$ 最优值。

我们的方法对次模函数值的界，实际上是相对于一个更强的最优值证明的，即满足拟阵约束和上界约束、但不一定满足下界约束的最优集合。若要与此最优值比较，则值上的 $O(\varepsilon)$ 因子损失不可避免。为说明这一点，考虑图 $P_3 \times N$ 上的 MSPM，其中该图由 N 条长度为 3 的路径不交并而成，线性目标函数为每条路径的边赋值 0， 1，0。大小为 $2N$ 的完美匹配值为 0，而大小为 N 的极大匹配值为 N；两者之间可以平滑插值。

我们注意到，通过实例化 $\varepsilon = 1/2$，我们可以获得几乎 $1/4$-近似，同时以 2 倍的因子违反下界，这与定理 1.1（[EFNTT23]）中的界类似。

[5]定理 1.2（[ETNV24]）的结果仅在期望意义上满足上界，因此，为了获得 MSPM 的可行解（即匹配），需要从解中删除一些违反约束的边，这会损害目标值和解的基数。因此，按目前的表述，该结果无法为 MSPM 提供理论保证。通过深入考察该算法及其证明，可以利用随机交换舍入的界 [CVZ10, 定理 II.3]，得到一个有意义的界： $\mathbb{P}[|S \cap \delta(v)| \geq 1] \geq 1 - e^{-1/2} \approx 0.4$。这意味着，对于一个有 $n + n = 2n$ 个顶点的二分图， $0.4n$ 个右侧顶点可以保证在 S 中有一条关联边；当我们为每个右侧顶点选取一条边时，可以期待得到一个大小为 $0.4n$ 的匹配，并且或许可以对次模值得到类似的界，即 $0.4(1-1/e)$ OPT ≈ 0.25OPT。但简单的贪心算法分别可达到 $0.5n$ 和 OPT$/3$。

作为第二项贡献，我们还运用我们的方法的技术，得到了一个确定性算法。我们可以构造几种不同的变体；这里选择展示拟阵交的一般情形，其中权衡的是大小与目标值。它与公平性的关系在于：若某算法能够找到一个大小最大的解，且该解的目标值达到 α-近似，则可推出一个用于 FMMSM 的 α-近似算法（见 [EFNTT23],命题 C.6）。

定理 1.4（定理 3.6 的非正式表述）对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$，都存在一种确定性多项式时间算法，用于求解在两个拟阵约束下最大化单调次模函数的问题。该算法输出的解，其大小至少为任意可行解最大大小的 $(1-\varepsilon)$ 倍减一，并且对次模函数值达到 $(0.499 \cdot \varepsilon)$近似。

实验结果。我们通过一组标准基准测试，将算法与先前工作和自然基线进行比较，实证展示了我们算法的有效性。我们衡量子模目标值和总公平性违反。我们的方法得到的解，其目标值与最高值基线相当；该基线完全忽略下界约束，因此公平性违反也最高。在三个场景中的两个场景里，我们的方法优于先前工作 [EFNTT23]。最后，我们方法的一项关键优势是具有 ε 所带来的灵活性，使用户能够调整效用与公平性之间的平衡。

我们的方法。 先从完美匹配（MSPM）这一简单情形开始。考虑一个高价值匹配 Y 与一个完美匹配 P 的对称差（其中 Y 可能很小，而 P 可能没有价值）。它可分解为若干个顶点不相交的交替环和增广路径。

一种可行的算法是忽略这些环，并选择若干条增广路径应用于 Y，使其规模至少增至 $(1-\varepsilon)|P|$。我们可以计算 Y 在每条路径中会失去的元素的边际贡献，并选择损失最小的路径；根据子模性，这样在 Y 中损失的价值至多为 $(1-\varepsilon)$ 的比例。

虽然这确实能确保得到一个大匹配，但仍有 ε 比例的顶点可能会“运气不好”，最终未被匹配。要确定性地避免这种情况很难（除非彻底求解 MSPM/FMMSM，且不造成公平性违反）；我们的下一个想法是在上述解中随机选择路径。对于 MSPM，这种方法可行，只要我们注意选取数量为 $(1-\varepsilon)$ 比例的 $|P|-|Y|$条增广路径，即使我们已经有 $|Y| \geq (1-\varepsilon)|P|$。这样，每个在 Y 中未被匹配的顶点，在新解中被匹配的概率为 $(1-\varepsilon)$。
然而，将上述方法推广到拟阵和公平性约束时，主要面临两项挑战。首先，公平性界限中存在 $\ell_c < u_c$，意味着 Y 在某些颜色中的元素可能少于 P，但在其他颜色中的元素更多，甚至可能出现 $|Y| = |P|$，同时仍违反许多公平性下界。这意味着我们不仅需要找到并应用增广路径，还需要找到并应用交替路径，以便将过饱和颜色中的一个元素换成欠饱和颜色中的一个元素，同时不增加解的大小。我们证明，只要总公平性违反程度较大，就存在许多这样的互不相交路径，这意味着即使随机应用其中一部分，也仍能保留足够的价值。

第二个更大的障碍源于一般拟阵。我们能够利用拟阵理论中的工具，证明在适当的拟阵交交换图中存在许多互不相交的交替路径或增广路径；该图的顶点对应于 Y 和 P 的元素（在 MSPM 中对应的是边）。我们需要通过非对称捷径化过程谨慎地细化这些路径，以确保应用这些路径后，解在拟阵中仍然独立，同时不会改变未参与交换的颜色中的元素数量。此外，一般来说，拟阵中的多条增广路径无法同时应用。我们通过一种迭代框架来解决这一问题：每次应用一条路径后，重新构建交换图，并找出一组新的、大量的互不相交路径；随后，我们界定每一步造成的价值损失。

论文组织。 我们在第1.2节讨论更多相关工作。在第2节中，我们介绍所有必要的符号、定义和有用事实。在第3节中，我们描述我们的算法并证明其性质。第4节专门介绍实验评估。最后，我们在第5节总结并讨论我们工作的局限性及其更广泛的影响。

1.2 其他相关工作

非单调 公平拟阵子模最大化问题在基数约束下由 [YT23] 进行了研究。对于这样一种特殊情形：对所有颜色 c，都有 $\ell_c/|V_c| = a$ 和 $u_c/|V_c| = b$，其中 $a, b \in [0, 1]$为某些常数，他们取得了0.2005近似结果。随后， [ETNV24]重新得到了并进一步推广了他们的结果。特别地，对于一般拟阵，他们实现了一个$(1-\beta)/(8+\varepsilon)$近似算法；对于权衡参数 $\beta \in [0, 1/2]$，该算法保证每个组 c 中的元素数量介于 $\lfloor \beta \ell_c \rfloor$ 和 u_c 之间。
在本文中，我们考虑颜色组彼此不相交的情形。更一般的情形，即组可能重叠的情况，先前由 [CHV18] 针对带基数约束的 FMMSM 特例进行了研究。他们证明，当元素可以属于三个或更多组时，仅检查可行性就是 NP 难的。不过，通过允许违反公平性约束，尤其是保证满足期望意义下的公平性约束，他们为该问题提出了一种 $(1 - 1/e - o(1))$-近似算法。

文献 [TWRTZ19; TY23; WLBW24], 探讨了子模最大化中的另一种公平性概念，其重点是确保每个组——可能并非局限于底集的子集 V——都能从所选解中获得至少指定数量的价值。在这些表述中，价值由单调次模函数建模。这一研究方向可以归结为一个多目标次模最大化问题 [KMGG08; CVZ10; Udw18]。

2 预备知识

我们将两个集合 X 和 Y 的对称差 $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ 记为 $X \triangle Y$。

子模函数。 我们考虑定义在底集 V 上的函数 $f\colon 2^V \to \mathbb{R}_+$。若对于任意两个集合 $Y \subseteq X \subseteq V$ 以及任意元素 $e \in V \setminus X$，都有 $f(Y \cup \{e\}) - f(Y) \geq f(X \cup \{e\}) - f(X)$，则称 f 为次模 函数。此外，若对于任意两个集合 $Y \subseteq X \subseteq V$，都有 $f(Y) \leq f(X)$，则称 f 为单调 函数。我们假设 f 由一个预言机给出，该预言机可对给定的 $S \subseteq V$ 计算 $f(S)$；我们将该预言机的运行时间视为 $O(1)$。

以下事实是众所周知的。为完整起见，我们给出证明。

事实 2.1 设 f 是一个非负次模函数，且 $X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq X$ 是 X 的互不相交子集。则

$$\sum_{i=1}^{k} f(X \setminus X_i) \geq (k-1) f(X).$$

证明。 我们对 k 使用归纳法。基例 $k = 1$，即 $f(X \setminus X_1) \geq 0$，成立是因为 $f \geq 0$。对于 $k > 1$，我们将归纳假设应用于集合族 $X_1 \cup X_2$、 X_3、 X_4.....、 X_k。我们得到

$$f(X \setminus (X_1 \cup X_2)) + \sum_{i=3}^{k} f(X \setminus X_i) \geq (k-2) f(X).$$

根据子模性,

$$f(X \setminus X_1) + f(X \setminus X_2) - f(X \setminus (X_1 \cup X_2)) \geq f(X).$$

将这两个不等式相加即可得到该结论。 □

拟阵。 拟阵 是一个集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^V$，具有以下性质：

- 向下封闭性：如果 $X \subseteq Y$ 且 $Y \in \mathcal{I}$，则 $X \in \mathcal{I}$；
- 增广性：如果 X， $Y \in \mathcal{I}$ 且 $|X| < |Y|$，则存在 $e \in Y$ 使得 $X + e \in \mathcal{I}$。

我们将 $X \cup \{e\}$ 缩写为 $X + e$，将 $X \setminus \{e\}$ 缩写为 $X - e$。我们假设拟阵由一个预言机给定，对于给定的 $S \subseteq V$，该预言机回答 $S \in \mathcal{I}$ 是否成立；我们将该预言机的运行时间视为 $O(1)$。如果 $S \in \mathcal{I}$，则称集合 $S \subseteq V$ 为独立 。

Ma拟阵交换图。 设 $\mathcal{I}$ 是全集 V 上的一个拟阵，且 Y、 Z 是两个独立集。

Defi定义 2.2 我们将关于 $\mathcal{I}$ 的 Y 和 Z 的交换图定义为二分图

$$(Y \setminus Z, Z \setminus Y, \{(y,z) : Y - y + z \in \mathcal{I}\}).$$

引理 2.3（[Sch03], 推论 39.12a） 如果 $|Y| = |Z|$，则关于 $\mathcal{I}$ 的 Y 和 Z 的交换图包含一个完美匹配。

引理 2.4（[Sch03], 推论 39.13） 设 Y 是一个独立集，并设 $Z \subseteq V$ 满足 $|Z| = |Y|$。如果关于 $\mathcal{I}$ 的 Y 和 Z 的交换图在 $Y \setminus Z$ 和 $Z \setminus Y$ 之间包含唯一的完美匹配，则 Z 也是一个独立集。

2.1 公平拟阵单调子模最大化（FMMSM）

全集 V 被划分为 C 个集合： $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_C$，其中 V_c 表示颜色为 c 的元素。每个元素恰好具有一种颜色。颜色集合记为 $[C] = \{1, 2, ..., C\}$。对于每种颜色 $c \in [C]$，我们都有公平性界限：下界 ℓ_c 和上界 u_c。
这些上界构成一个分划拟阵，我们将其记为 $\mathcal{U}$。也就是说，

$$\mathcal{U} = \{S \subseteq V \mid |S \cap V_c| \leq u_c \ \ \forall c \in [C]\}.$$

众所周知，这样的集合族构成一个拟阵。我们称集合 $S \in \mathcal{U}$ 为上公平。
如果一个集合同时满足下界和上界，我们就称它是公平的。也就是说，我们将公平集族 $\mathcal{C}$ 定义如下:

$$\mathcal{C} = \{S \subseteq V \mid \ell_c \leq |S \cap V_c| \leq u_c \ \ \forall c \in [C]\}.$$

FMMSM问题要求找到一个集合 $S \in \mathcal{I} \cap \mathcal{C}$（即公平且独立的 S），使 $f(S)$ 最大化。我们用 OPT 表示最优值，即 OPT $= \max_{S \in \mathcal{I} \cap \mathcal{C}} f(S)$。假设存在一个公平且独立的集合，即 $\mathcal{I} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$。
如果一个算法输出集合 S，且满足 $f(S) \geq \alpha \cdot \text{OPT}$，我们称该算法为 α-近似算法。
对于任意集合 $S \subseteq V$，我们定义其公平性违反fav$(S) := \sum_c \max\{|S \cap V_c| - u_c, \ell_c - |S \cap V_c|, 0\}$。
注意，如果 S 是上公平的，那么 fav$(S) = \sum_c \max\{\ell_c - |S \cap V_c|, 0\}$。

引理 2.5（[EFNTT23], 附录 C） 当 f 是线性函数时，*FMMSM* 存在一个精确的多项式时间算法。

拟阵交。给定两个拟阵以及定义在 V 上的单调次模函数 f，我们可以类似于 FMMSM，定义受拟阵交约束的次模函数最大化问题。

特别地，如果完全忽略下界，FMMSM 就变成上述针对拟阵 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{U}$ 的拟阵交问题。

定理 2.6（[CCPV11]） 贪心算法为该问题提供一个 $1/3$-近似解 .

定理 2.7（[LSV10]） 对于任意 $\delta > 0$，存在一个多项式时间算法，可为该问题提供一个（$0.5 - \delta$）-近似解。

3 我们的算法

本节将介绍我们的算法：随机算法（定理 3.4）和确定性算法（第 3.1 节，定理 3.6）。另请参阅算法 2 中给出的伪代码。首先，我们需要引入一些概念。

定理 3.4 的证明将首先构造一个最大基数独立公平集 P，并使其在整个执行过程中保持不变。我们还将构造一个具有较高 f 值的独立上公平集 Y。我们将使用 P 作为公平性来源，并迭代地用 Y 的值交换 Y 中欠饱和颜色里的 P 元素。

定义 3.1 给定上述 Y 和 P，如果 $|Y \cap V_c| \lhd |P \cap V_c|$，则称颜色 $c \in [C]$ 为欠饱和；如果 $|Y \cap V_c| > |P \cap V_c|$，则称其为过饱和。

定理 3.4 证明的技术核心是引理 3.3，其中我们证明存在许多不相交结构，每个结构都可用于推进我们的公平性目标。我们将它们称为增广型或交替型，因为它们确实对应于我们在引理 3.3 的证明中所考虑的、以适当方式定义的拟阵交交换图中的此类路径。

定义 3.2 设 Y 是一个独立上公平集，且令 $X \subseteq V$。将 X 应用于 Y 所得到的结果 Y' 定义为对称差 $Y' = Y \triangle X$。如果 X 独立（$Y' \in \mathcal{I}$），且恰好存在一个欠饱和颜色 $c' \in [C]$ 和一个过饱和颜色 $c'' \in [C]$，使得对所有 $c \in [C]$，则称 X 为（相对于 Y）交替型。

$$|Y' \cap V_c| = |Y \cap V_c| + \begin{cases} 1 & \text{for } c = c', \\ -1 & \text{for } c = c'', \\ 0 & \text{for } c \neq c', c''. \end{cases}$$

如果满足上述所有条件，但不存在颜色 c''，则称 X 为增广型。在这两种情况下，我们都称 X 增加 c'。

注意，若 X 是交替型，则有 $|Y'| = |Y|$；若 X 是增广型，则有 $|Y'| = |Y| + 1$。此外，Y' 是上公平集，因为只有颜色 c' 中的元素数量多于 Y，且我们有 $|Y' \cap V_{c'}| = |Y \cap V_{c'}| + 1 < |P \cap V_{c'}| + 1$（并且 P 是公平集）。

引理 3.3 设 Y 和 P 是两个独立上公平集，且满足 $|Y| \leq |P|$。记

$$k = \sum_{c \in [C]} \max(0, |P \cap V_c| - |Y \cap V_c|)\,.$$

那么，我们可以在多项式时间内找到 $Y \cup P$ 的一组两两不相交的子集 $X_1, \ldots, X_k$，其中至少有 $|P| - |Y|$ 个是增广型，其余为交替型。此外，对于每个欠饱和颜色 c，恰好有 $|P \cap V_c| - |Y \cap V_c|$ 条路径会增加 c。

证明。为简化记号，不失一般性，假设 $Y \cap P = \emptyset$。否则，我们可以使用集合 $Y \setminus P$和 $P \setminus Y$进行处理。

考虑关于拟阵 $\mathcal{I}$和 $\mathcal{U}$的 Y和 P的拟阵交交换图。该图定义为一个有向二分图：取关于 $\mathcal{I}$ 的Y和 P的交换图，并将其边定向为从 P指向 Y（从右向左）；再取关于 $\mathcal{U}$的 Y和 P 的交换图，并将其边定向为从 Y指向 P（从左向右）。也就是说，我们有边

$$\{y \to p : Y + p - y \in \mathcal{U}\} \quad \text{and} \quad \{y \leftarrow p : Y + p - y \in \mathcal{I}\}\,.$$

在该图中，我们将仔细构造一个由两个匹配组成的子图：$M_{\rightarrow}$（从左向右定向）和 $M_{\leftarrow}$（从右向左定向）。增广型路径和交替路径将在该子图中找到。

为构造 $M_{\leftarrow}$，我们首先定义 $T_P := \{p \in P : Y + p \in \mathcal{I}\}$。根据拟阵增广性质反复应用，我们有 $|T_P| \geq |P| - |Y|$。我们将 T_P P-汇点中的元素称为汇点。令 T'_P为 T_P的任意子集，其大小恰好为 $|P| - |Y|$.。随后，我们对关于 $\mathcal{I}$的 Y和 $P \setminus T'_P$的交换图（它是我们的拟阵交交换图的子图）应用引理 2.3。该引理表明，在 Y和 $P \setminus T'_P$之间存在一个完美匹配；由于这样的匹配存在，我们可以在多项式时间内找到一个。通过移除与 $T_P \setminus T'_P$相 incident 的该匹配的边，我们得到匹配 $M_{\leftarrow}$。于是，$M_{\leftarrow}$匹配 $P \setminus T_P$中的每个顶点。

我们通过尽可能多地匹配 Y 和 P 之间颜色相同的元素，手动构造匹配 $M_{\rightarrow}$。也就是说，对于每种颜色 $c \in [C]$，我们添加 $\min(|Y \cap V_c|, |P \cap V_c|)$ 条从 $Y \cap V_c$ 到 $P \cap V_c$ 的边，将其纳入匹配 $M_{\rightarrow}$。

我们将 S 源点 集合定义为 P中在 $M_{\rightarrow}$里未被匹配的所有顶点。注意，它们只属于欠饱和颜色，其数量恰好为 k。（原则上，源点也可能同时是 P-汇点；如果 Y在 $\mathcal{I} \cap \mathcal{U}$中不是极大的，就可能出现这种情况。）

我们还将 T_Y 的 Y-汇点 集合定义为 Y 中在 $M_{\rightarrow}$ 里未被匹配的所有顶点。注意，它们只属于过饱和颜色，其数量恰好为 $k-(|P|-|Y|)$，因为我们有

$$\begin{aligned}|P|-|Y| &= \sum_{c\in[C]} |P\cap V_c|-|Y\cap V_c| \\ &= \sum_{c\text{: undersaturated}} (|P\cap V_c|-|Y\cap V_c|) - \sum_{c\text{: oversaturated}} (|Y\cap V_c|-|P\cap V_c|) \\ &= k-|T_Y|.\end{aligned}$$

回顾一下，我们有 k 源点 S（全部位于 P），$k-(|P|-|Y|)$ 个 Y 汇点 T_Y，以及至少 $|P|-|Y|$ P 个汇点T_P。此外，对于每种欠饱和颜色 c，恰好有 $|P\cap V_c|-|Y\cap V_c|$ 个源点的颜色为 c。

现在我们说明如何在 $M_{\rightarrow}\cup M_{\leftarrow}$ 中构造 k 条顶点不相交的简单路径，使它们从源点（S）出发并到达汇点（$T_Y\cup T_P$）。对于每条路径，我们按如下步骤进行：

- 从一个未使用的源点（位于 P 中）出发，
- 每当到达 P 中的一个顶点时，若该顶点是汇点（位于 T_P 中），就停止；否则，该顶点有一条关联的出边 $M_{\leftarrow}$；沿着这条边前进，
- 每当到达 Y 中的一个顶点时，若该顶点是汇点（位于 T_Y 中），就停止；否则，该顶点有一条关联的出边 $M_{\rightarrow}$；沿着这条边前进。

由于每条路径都必须终止于不同的汇点，因此至少有 $k-(k-(|P|-|Y|)) = |P|-|Y|$ 个 P-汇点会被使用。此外，路径不能重复经过同一个顶点，因为每个顶点的入度至多为 1，且源点没有入边。这意味着所有路径都是简单路径，且彼此顶点不相交。

上述构造的 k 条路径可能还不是拟阵交交换图中的增广路径/交替路径，因为它们可能包含弦；一般来说，只有无弦路径才能保证沿其操作后仍保持独立性。（拟阵交算法通常使用最短路径，因为最短路径没有弦。）我们需要对这些路径进行捷径化；然而，若采用朴素的方法，可能会破坏路径中所有从左到右的边都连接相同颜色元素这一性质，而满足定义 3.2 中的条件需要这一性质。

我们按如下方式进行捷径化。设 $X'=(p_1,\ y_1,\ p_2,\ y_2,\ .....)$ 是 k 条路径之一。只要存在形如 $(p_i,\ y_j)$ 的弦，且满足 $j>i$ （即，有向边 $y_j\leftarrow p_i$ 存在于拟阵交交换图中；等价地，$Y+p_i-y_j\in\mathcal{I}$），就用这条弦替换相应的子路径（即，从序列 X' 中移除顶点 $y_i,\ p_{i+1},\ ...\ ...,\ p_j$）。注意，我们不会使用满足 $j>i$ 的形如 $(y_i,\ p_j)$ 的弦。对每条 k 路径执行此操作后，即得到我们的最终集合 $X_1,\ .....,\ X_k$。

现在我们验证它满足引理的陈述。由于捷径化之前这些路径彼此顶点不相交，之后仍然如此。我们声称，以 P-汇点结尾的路径（回想一下，这样的路径至少有 $|P|-|Y|$ 个）会产生增广集，而以 Y-汇点结尾的路径会产生交替集。考虑一条路径 $X_i=(p_1,\ y_1,\ p_2,\ y_2,\ .....)$。注意 $Y'=Y\triangle X_i=Y\cup\{p_1,p_2,...\}\setminus\{y_1,y_2,...\}$。定义 3.2 的颜色计数条件很容易由以下性质推出：每条从左到右的边 $y_i\to p_{i+1}$ 在 X_i 中都属于 $M_{\rightarrow}$，因此 y_i 和 p_{i+1} 颜色相同。于是我们可以将 c' 取为 p_1的颜色。如果 X_i 的最后一个元素属于 Y（一个 Y-汇点），我们就将 c'' 取为它的颜色。

还需证明 $Y'=Y\triangle X_i\in\mathcal{I}$。该论证与 [Sch03], 定理 41.2 的论证十分相似。我们先考虑 X_i 终止于一个 Y-汇点的情形：$X_i=(p_1,\ y_1,\ p_2,\ y_2,\ .....,\ p_t,\ y_t)$。我们希望对关于 $\mathcal{I}$ 的 Y 和 Y' 的交换图应用引理 2.4。这是一个二分图，左侧为 $\{y_1,...,y_t\}$，右侧为 $\{p_1,...,p_t\}$，且它等于拟阵交交换图中从右向左的边所对应的诱导子图；我们需要证明它包含唯一的完美匹配。我们迭代进行：p_1 不可能与任何满足 $j>1$ 的 y_j 相连，否则就会出现捷径。因此，任何匹配都必须将 p_1 与 y_1 匹配。移除这两个顶点后，我们考察 p_2 的出邻域。同样，p_2 没有通向后续 y_j 的捷径，因此移除 y_1 后，它唯一的出邻点是 y_2。所以，p_2 必须与 y_2 匹配。我们可以继续归纳地构造 $\{y_1,...,y_t\}$ 与 $\{p_1,...,p_t\}$ 之间的唯一匹配。

$X_i = (p_1, y_1, p_2, y_2, \ldots\ldots, p_t, y_t, p_{t+1})$ 终止于一个 P-汇点的情形与此类似，但还需多进行一步。第一种情形表明 $Z = Y \cup \{p_1, \ldots, p_t\} \setminus \{y_1, \ldots, y_t\}$ 是独立的。我们只需证明 $Z + p_{t+1}$ 是独立的。注意到 $p_{t+1} \in T_P$，这意味着 $Y + p_{t+1} \in \mathcal{I}$。根据拟阵增广性质，$Y + p_{t+1}$ 必须包含一个可以添加到 Z 中且仍保持独立性的元素。可能的候选为 $(Y + p_{t+1}) \setminus Z = \{y_1, \ldots, y_t, p_{t+1}\}$。然而，不能添加任何 y_j：由于 $p_1, \ldots\ldots, p_t \notin T_P$，我们知道 $Y \cup \{p_1, \ldots, p_t\}$ 的秩为 $|Y|$；如果 $Z + y_j$ 独立，则 $Z + y_j \subseteq Y \cup \{p_1, \ldots, p_t\}$ 的秩将为 $|Z| + 1 = |Y| + 1$。因此唯一可能的候选是 p_{t+1}，从而可知 $Y' = Z + p_{t+1}$ 是独立的。 □

现在我们可以陈述并证明主要结果了。

定理 3.4 存在一个由$\varepsilon \in (0,1)$ 参数化的 *FMMSM* 随机多项式时间算法，该算法输出一个集合 $S \in \mathcal{I} \cap \mathcal{U}$（即独立且上公平），使得

- $\mathbb{E}[|S|] \geq (1 - \varepsilon) N$ 并满足高概率尾界：对于 $\delta > 0$，$\mathbb{P}[|S| < (1 - \delta) (1 - \varepsilon) N] \leq \exp(-\Omega_\delta (N)$
- $\mathbb{E}[f(S)] \geq 0.499 \cdot \varepsilon \cdot$ 最优值$_{\text{MatInt}}$
- 对于每个 $c \in [C]$，都有 $\mathbb{E}[|S \cap V_c|] \geq (1 - \varepsilon) \ell_c$
- 并且总公平性违反满足高概率尾界：对于 $\delta > 0$，$\mathbb{P}[\text{fav}(S) > (1 + \delta) \varepsilon \sum_c \ell_c] \leq \exp(-\Omega_\delta (\sum_c \ell_c)$

其中，N 是 $\mathcal{I} \cap \mathcal{U}$中集合的最大大小，而最优值$_{\text{MatInt}}$ 是集合在$\mathcal{I} \cap \mathcal{U}$ 中的最大 f-值（显然，由于 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$，我们有最优值$_{\text{MatInt}} \geq$ 最优值 ）。

我们强调，S 以概率 1 满足上公平，而不仅仅是在期望意义下满足。我们还要指出，对于每个单独的 ℓ_c，也可以证明类似的尾界，不过右侧的 $\exp(-\Omega_\delta(\ell_c))$ 只有在 ℓ_c 较大时才可能具有实际意义。另一方面，对于 f-值则无法证明这样的界；在最坏情况下，它可能集中在全集的单个元素上。

第二个要点中的保证 $\mathbb{E}[f(S)] \geq 0.499 \cdot \varepsilon \cdot$ 最优值$_{\text{MatInt}}$ 来自将定理 2.7 的局部搜索算法作为子程序。我们也可以改用定理 2.6 中较为简单的算法，从而获得略差的保证 $\mathbb{E}[f(S)] \geq \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot$ 最优值$_{\text{MatInt}}$；我们在实验评估中采用了这种做法。

定理 *3.4* 的证明。第一步，我们计算一个最大基数公平独立集 P，根据引理 2.5，这可以在多项式时间内完成。我们可以说，$|P| = N$，即独立公平集的最大大小与独立上公平集的最大大小相同。为说明这一点，假设存在一个独立上公平集 F with$|F| > |P|$；那么我们可以将引理 3.3 应用于 $P$and F，从而得到一个增广集 X，而 $P \triangle X$ 将是一个更大的独立公平集，矛盾。

第二步，我们计算一个高价值独立上公平集 Y_0。使用定理 2.7 的算法（[LSV10]）（with $\delta = 10^{-3}$），我们得到

$$f(Y_0) \geq 0.499 \cdot \text{OPT}_{\text{MatInt}} \ . \tag{1}$$

我们记

$$k(Y) = \sum_{c \in [C]} \max(0, |P \cap V_c| - |Y \cap V_c|)$$

对于任意解 Y，以及 $k := k(Y_0)$，以简化记号。

我们将执行 I 次迭代，其期望次数为 $(1 - \varepsilon)k$。更准确地说，我们以 $(1 - \varepsilon)k - \lfloor (1 - \varepsilon)k \rfloor$ 的概率设置 $I = \lceil (1 - \varepsilon)k \rceil$，否则设置 $\lfloor (1 - \varepsilon)k \rfloor$。[6]

我们执行 I 次迭代。在第 i 次迭代中，我们对 Y_{i-1}（以及 P）应用引理 3.3，得到一组增广型或交替型集合 $X_i^1, \ldots\ldots, X^{k(Y_{i-1})}{}_i$。我们从中选择一个，$X_i \in$

[6]理想情况下，我们只需设置 $I = (1 - \varepsilon)k$，但这个数可能是小数；若固定取值为 $\lfloor (1 - \varepsilon)k \rfloor$ 或 $\lceil (1 - \varepsilon)k \rceil$，则会导致目标值、基数或公平性方面的损失。例如，如果 $\ell_c = 1$，那么诸如 $|S \cap V_c| \geq (1 - \varepsilon)\ell_c - 1$ 这样的界就没有意义。

$\{X_i^1, ..., X^{k(Y_{i-1})}{}_i\}$，并从中均匀地随机选择一个，将其应用以获得新的解 $Y_i = Y_{i-1} \triangle X_i$。最后，我们返回 $S := Y_I$。
所有解 $Y_0, ..., Y_I$ 都是独立且上公平的；接下来只需验证定理 3.4 的保证。我们首先指出，

$$k(Y_i) = k - i\,. \tag{2}$$

为此，注意到在算法执行过程中，不会有新的颜色变为欠饱和；根据定义 3.2，Y_i 在颜色 c'' 中的元素数少于 Y_{i-1}，只有当 c'' 在 Y_{i-1}中过饱和时才会发生。另一方面，对于恰好一个欠饱和颜色 c'，Y_i 在 c'中的元素数比 Y_{i-1}多一个。因此，我们有 $k(Y_i) = k(Y_{i-1}) - 1$，于是得到式 (2)。（既非欠饱和也非过饱和的颜色 c 将永远保持原状。）

公平性下界。基于上一段的讨论，我们考虑一个涉及带颜色的球的随机过程，以模拟算法中的情况。令 $U \subseteq [C]$ 为 Y_0中欠饱和颜色的集合。开始时，对于每个 $c \in U$，我们创建 $|P \cap V_c| - |Y_0 \cap V_c|$个颜色为 c的球。（因此，起初总共有 k 个球。）在每次迭代 i 中，恰有一种颜色 c'（即在 Y_{i-1}中欠饱和，因此 $c' \in U$）满足 $|Y_i \cap V_{c'}| = |Y_{i-1} \cap V_{c'}| + 1$；随后，我们随机移除一个颜色为 c'的球。接着，根据定义 3.2（因为 U 中的所有其他颜色都保持其元素数量不变），每种颜色 $c \in U$ 对应的球数都等于 $|P \cap V_c| - |Y_i \cap V_c|$，且球的总数为 $k(Y_i) = k - i$。

现在我们声称，在这一过程中，每次迭代都会移除一个均匀随机的球。这是因为，根据引理 3.3，对于每个 $c \in U$，恰好有 $|P \cap V_c| - |Y_{i-1} \cap V_c|$ 个 $k(Y_{i-1})$ 增广型或交替型集合会增加 c，而我们会在这些集合中随机选择。
因此，最终被移除的 I 个球在所有大小为该数目的子集之间均匀分布。考虑一种颜色 c。如果 $c \notin U$，那么在最后 c 将不会处于欠饱和状态，因此 $|S \cap V_c| \geq |P \cap V_c| \geq \ell_c$。现在固定 $c \in U$，并记 B_c 为被移除的颜色为 c 的球的数量。在对 I 进行条件化后，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|S \cap V_c|] &= \mathbb{E}[|Y_0 \cap V_c| + B_c] \\
&= |Y_0 \cap V_c| + \frac{I}{k}(|P \cap V_c| - |Y_0 \cap V_c|) \\
&\geq \frac{I}{k}|P \cap V_c| \\
&\geq \frac{I}{k}\ell_c
\end{aligned}$$

从而 $\mathbb{E}[|S \cap V_c|] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[|S \cap V_c| \mid I]] \geq \frac{\mathbb{E}[I]}{k}\ell_c = (1-\varepsilon)\ell_c$，如所要求的。

基数。我们的方法证明 $\mathbb{E}[|S|] \geq (1-\varepsilon)|P| = (1-\varepsilon)N$ 与上面针对单一颜色的证明非常相似。我们从 $|P| - |Y_0|$ 个红球和 $k - (|P| - |Y_0|)$ 个非红球（总计 k）开始。在每次迭代 i 中，如果选中了一个增广集（因此 $|Y_i| = |Y_{i-1}| + 1$），我们就移除一个红球；否则移除一个非红球。假设在每次迭代 i 中，$k - i + 1$ 个集合里恰好有 $|P| - |Y_{i-1}|$ 个增广集；那么，最后移除的球集将在所有由 I 个球构成的子集中均匀分布。于是，若 B 表示移除的红球数量，则在给定 I 的条件下，我们有 $\mathbb{E}[B] = \frac{I}{k}(|P| - |Y_0|)$。然而，实际上，每次迭代 i 中，$k - i + 1$ 个集合里至少有 $|P| - |Y_{i-1}|$ 个增广集；因此，B 的分布支配上述均匀球子集分布，这在形式上称为超几何分布（Hypergeometric）$(k,\ |P| - |Y_0|,\ I)$。特别是，这意味着 $\mathbb{E}[B] \geq \frac{I}{k}(|P| - |Y_0|)$。最后，我们得出 $\mathbb{E}[|S|] = |Y_0| + \mathbb{E}[B] \geq |Y_0| + \frac{\mathbb{E}[I]}{k}(|P| - |Y_0|) \geq (1-\varepsilon)|P|$。

基数尾界。回忆一下 $N = |P|$，并且对于任意 $\delta > 0$，我们要证明 $\mathbb{P}[|S| < (1-\delta)(1-\varepsilon)N] \leq \exp(-\Omega_\delta(N))$。已知 [Hoe63]，超几何分布满足与二项分布相同的 Chernoff 型界（因为它对应于负相关而非独立的样本之和）。特别地（对 I进行条件化

贯穿全文），我们有

$$\mathbb{P}\left[B < \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\mu\right] \le \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\mu\right) \le \exp\left(-\Omega_\delta(\mu)\right)$$

$$\text{where } \mu = \mathbb{E}[\text{Hypergeometric}(k, |P|-|Y_0|, I)] = \frac{I}{k}(|P|-|Y_0|).$$

如果 $|Y_0| \ge (1-\delta)(1-\varepsilon)N$，那么 $|S| = |Y_0| + B$ 以概率 1 足够大，因此我们可以假设情况并非如此，即 $|Y_0| < (1-\delta)(1-\varepsilon)N \le (1-\delta)N$。因此

$$k \ge |P| - |Y_0| \ge \delta N > \Omega(1), \tag{3}$$

所以当 N 足够大时，我们有 $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{2}(1-\varepsilon)$，从而 $\frac{I}{k} \ge \frac{\lfloor (1-\varepsilon)k \rfloor}{k} \ge \frac{(1-\varepsilon)k-1}{k} = 1-\varepsilon-\frac{1}{k} \ge \left(1-\frac{\delta}{2}\right)(1-\varepsilon)$。由此以及 (3)，$\mu = \frac{I}{k}(|P|-|Y_0|) \ge \left(1-\frac{\delta}{2}\right)(1-\varepsilon)\delta N \ge \Omega_\delta(N)$，因此 $\exp(-\Omega_\delta(\mu)) = \exp(-\Omega_\delta(N))$。最后，如果好事件 $B \ge \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\mu$ 发生，那么

$$B \ge \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\frac{I}{k}(|P|-|Y_0|) \ge \left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2(1-\varepsilon)(|P|-|Y_0|) \ge (1-\delta)(1-\varepsilon)(|P|-|Y_0|)$$

因此 $|S| = |Y_0| + B \ge (1-\delta)(1-\varepsilon)N$。

总公平性违反尾界。首先说明，算法在每次迭代时都会增加某个未饱和颜色 c'，因此可能会认为 $\mathsf{fav}(S)$ 以概率 1 很小。然而，未饱和是相对于 P 来衡量的，而对于某个 c，我们可能有 $|P \cap V_c| \gg \ell_c$。将某种颜色增加到超过 ℓ_c 个元素，并不能在公平性违反方面取得进展。尽管如此，我们可以用 ℓ_c 给出一个高集中度界。回想一下，对于任意 $\delta > 0$，我们要证明 $\mathbb{P}[\mathsf{fav}(S) > (1+\delta)\varepsilon\sum_c \ell_c] \le \exp(-\Omega_\delta(\sum_c \ell_c))$。

证明与上面类似，但现在球除了具有颜色之外，还可以是条纹的或不是。具体来说，对于每个 $c \in [C]$，我们创建 $\max(0, |P \cap V_c| - |Y_0 \cap V_c|)$ 个颜色为 c 的球，其中 $\max(0, \ell_c - |Y_0 \cap V_c|)$ 个将带有条纹。（总共有 k 个球，其中 $\mathsf{fav}(Y_0)$ 个带有条纹。）同样，在每次迭代中，如果 c' 是算法增加的颜色，我们就随机移除一个颜色为 c' 的球。

令 X 表示截至最后移除的条纹球数量。于是我们有

$$\mathrm{fav}(S) \le \mathrm{fav}(Y_0) - X\,. \tag{4}$$

这是因为，每当我们增加某种元素数量少于 $\ell_{c'}$ 的颜色 c' 时，解的公平性违反就会减少 1；但只有在我们恰好抽到一个条纹 c'色球时，X 才会计入这次减少。由于条纹 c'色球的数量恰好等于颜色 c' 的公平性违反数量，因此最后我们移除的违反数量至少与移除的球数量一样多。

现在我们按照处理基数的方式继续。我们有

$$\mathbb{P}\left[X < \left(1-\frac{\delta\varepsilon}{2}\right)\mu\right] \le \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\varepsilon}{2}\right)^2\mu\right) \le \exp\left(-\Omega_\delta(\mu)\right)$$

$$\text{where } \mu = \mathbb{E}[\text{Hypergeometric}(k, \mathrm{fav}(Y_0), I)] = \frac{I}{k}\,\mathrm{fav}(Y_0).$$

如果 $\mathsf{fav}(Y_0) \le (1+\delta)\varepsilon\sum_c \ell_c$，那么我们就完成了，因此不妨假设情况并非如此。于是

$$k \ge \mathrm{fav}(Y_0) > (1+\delta)\varepsilon\sum \ell_c > \Omega(1), \tag{5}$$

因此，当 $\sum_c \ell_c$ 足够大时，我们有 $\frac{1}{k} < \frac{\delta\varepsilon}{2}(1-\varepsilon)$，进而有 $\frac{I}{k} \ge 1-\varepsilon-\frac{1}{k} \ge \left(1-\frac{\delta\varepsilon}{2}\right)(1-\varepsilon)$。由此以及式 (5)，$\mu = \frac{I}{k}\mathsf{fav}(Y_0) \ge \left(1-\frac{\delta\varepsilon}{2}\right)(1-\varepsilon)(1+\delta)\varepsilon\sum_c \ell_c \ge \Omega(\sum_c \ell_c)$，因此 $\exp(-\Omega_\delta(\mu)) = \exp(-\Omega_\delta(\sum_c \ell_c))$。最后，如果好事件 $X \ge \left(1-\frac{\delta\varepsilon}{2}\right)\mu$ 发生，那么

$$X \ge \left(1-\frac{\delta\varepsilon}{2}\right)\frac{I}{k}\,\mathrm{fav}(Y_0) \ge \left(1-\frac{\delta\varepsilon}{2}\right)^2(1-\varepsilon)\,\mathrm{fav}(Y_0) \ge (1-\delta\varepsilon-\varepsilon)\,\mathrm{fav}(Y_0)$$

因此

$$\mathrm{fav}(S) \overset{(4)}{\le} \mathrm{fav}(Y_0) - X \le \mathrm{fav}(Y_0) - (1-\delta\varepsilon-\varepsilon)\,\mathrm{fav}(Y_0) = (1+\delta)\varepsilon\,\mathrm{fav}(Y_0) \le (1+\delta)\varepsilon\sum_c \ell_c\,.$$

目标值。 直观地说，在每次迭代 i 中，我们从 $k-i+1$ 个互不相交的增广型集或交替集中随机选择一个。即使新添加的元素没有带来任何 f-值，根据子模性，我们也预计当前解的 f-值最多只会损失 $1/(k-i+1)$ 的比例。经过 $I \approx (1-\varepsilon)k$ 次迭代后，我们最终得到一个望远镜乘积，该乘积可化简为 $\frac{\varepsilon k}{k} f(Y_0)$。

现在给出形式化证明。我们对 i 进行归纳，证明

$$\mathbb{E}[f(Y_i)] \geq \frac{k-i}{k} f(Y_0)\,. \tag{6}$$

对于 $i \geq 1$，以 Y_{i-1}为条件。于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(Y_i)] &= \mathbb{E}[f(Y_{i-1} \triangle X_i)] \\
&= \frac{1}{k(Y_{i-1})} \sum_{j=1}^{k(Y_{i-1})} f(Y_{i-1} \triangle X_i^j) \\
&\geq \frac{1}{k-i+1} \sum_{j=1}^{k-i+1} f(Y_{i-1} \setminus (Y_{i-1} \cap X_i^j)) \\
&\geq \frac{k-i}{k-i+1} f(Y_{i-1})\,,
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由单调性得出，第二个不等式则是将事实 2.1 应用于集合族 $Y_{i-1} \cap X_i^1$、……、 $Y_{i-1} \cap X_i^{k-i+1} \subseteq Y_{i-1}$ 得出的。现在对 Y_{i-1} 取期望，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(Y_i)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(Y_i) \mid Y_{i-1}]] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\frac{k-i}{k-i+1} f(Y_{i-1})\right] \\
&\geq \frac{k-i}{k-1+1} \cdot \frac{k-(i-1)}{k} f(Y_0)
\end{aligned}$$

其中我们应用了归纳假设。结合 (1) 和 (6)，可以写为

$$\mathbb{E}[f(S)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(Y_I) \mid I]] \geq \mathbb{E}\left[\frac{k-I}{k} f(Y_0)\right] = \frac{k-(1-\varepsilon)k}{k} f(Y_0) \geq \varepsilon \cdot 0.499 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{MatInt}}\,.$$

□

引理 3.3 的伪代码见算法 1，定理 3.4 的伪代码见算法 2。

3.1 确定性算法

现在我们转向确定性结果，即定理 3.6。我们首先证明一个引理，它是引理 3.3 的一个类似结果。

引理 3.5 对于任意两个拟阵 $\mathcal{I}_1$、$\mathcal{I}_2$，设 Y、$P \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ 是它们交集中的两个集合，且满足 $|Y| \leq |P|$。那么我们可以在多项式时间内找到由 X_1、…、$X_{|P|-|Y|}$ 组成的 $Y \cup P$ 的互不相交子集集合，使得对于每个集合 X_i，都有 $Y \triangle X_i \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ 和 $|Y \triangle X_i| = |Y| + 1$。

证明。 我们采用与引理 3.3 的证明类似的方法。考虑相对于 $\mathcal{I}_1$ 和 $\mathcal{I}_2$ 的 Y 与 P 的拟阵交交换图，其定义方式与该证明中相同。定义 $T = \{p \in P\colon Y + p \in \mathcal{I}_1\}$ 和 $S = \{p \in P\colon Y + p \in \mathcal{I}_2\}$。我们有 $|T|$，$|S| \geq |P| - |Y|$。令 T'、S' 分别为 T、S 的任意子集，且二者大小均恰好为 $|P| - |Y|$。我们将引理 2.3 应用于 Y 与 $P \setminus T'$ 的交换图，得到 $M_{\leftarrow}$，其为 Y 与 $P \setminus T'$ 之间的完美匹配。类似地，我们得到 $M_{\rightarrow}$，其为 Y 与 $P \setminus S'$ 之间的完美匹配。

现在，我们可以像引理 3.3 的证明中那样构造 $|P| - |Y|$ 路径：从源点（集合S'）出发，沿唯一可能的方式前进，直到到达汇点（T'中的顶点）。（或者，我们

算法 1 生成增广路径 要求：全集 V 上的拟阵 $\mathcal{I}$，以及颜色为 $[C]$、下界为 ℓ_c、上界为 u_c 的公平性约束，其中每种颜色 $c \in [C]$均适用。要求：集合 Y 和 P，其中 Y 和 P 分别是相对于拟阵 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{U}$的独立集，且$|Y| \leq |P|$。确保： Y 与 P之间的一组增广路径和交替路径。1：构建一个初始为空的二分图，其中“左侧顶点”为 Y 中的元素，“右侧顶点”为 P中的元素。2：对于每个（y， p） $\in Y \times P$，执行3 $y \to p \quad Y + p - y \in \mathcal{U}$：若满足 $y \leftarrow p \quad Y + p - y \in \mathcal{I}$ 4 条件，则添加有向边。若满足条件，则添加有向边。5：结束循环。6：定义 P-汇点 T_P：$= \{p \in P$，并令 T'_P为 T_P的任意子集，其大小恰为 $|P| - |Y|$。7：求 Y与 $P \setminus T'_P$之间的一个匹配，并删除与 $T_P \setminus T'_P$相邻的边。将此匹配称为 $M_{\leftarrow}$。8：从 $M_{\rightarrow} = \emptyset$开始。9：对于每种颜色 $c \in [C]$，执行：10：将$|Y \cap V_c|$和 $|P \cap V_c|$中的较小值条边从 $Y \cap V_c$ 连接至 $P \cap V_c$，并加入匹配 $M_{\rightarrow}$。11：结束循环。12：将集合 S 定义为 P中所有未在 $M_{\rightarrow}$中匹配的顶点。13：将集合 T_Y定义为 Y中所有未在 $M_{\rightarrow}$中匹配的 Y-汇点。14：令 $\mathcal{X}$ 为初始为空的路径集合。15：当存在未使用的源点时，执行：16：从一个未使用的源点（在 P中）出发。17：如果位于 P中的一个顶点，则：18：如果该顶点是汇点（在 T_P中），则：19：停止此路径，并将其加入集合 $\mathcal{X}$。20：否则：21：沿 $M_{\leftarrow}$的出边前进。22：结束条件判断。23：否则：24：如果该顶点是汇点（在 T_Y中），则：25：停止此路径，并将其加入集合 $\mathcal{X}$。26：否则：27：沿 $M_{\rightarrow}$的出边前进。28：结束条件判断。29：结束条件判断。30：结束循环。31：对于 $\mathcal{X}$中的每条路径 X，执行：32：沿从右向左的有向边对 X 取捷径（详情参见引理 3.3 的证明）。33：结束循环。34：返回互不相交的增广集／交替集 $\mathcal{X}$。

Alg法 2 随机增　　g广　　g 路径

要求：全集 V 上的拟阵 $\mathcal{I}$、次模函数 $f\colon 2^V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$、颜色为 $[C]$ 且每种颜色 $c \in [C]$ 的下界为 ℓ_c、上界为 u_c 的公平性约束。确保：得到近似公平且价值高的集合 S。1：通过引理 2.5 或任意拟阵交算法，找到公平独立集 P。2：针对拟阵 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{U}$，找到一个 f-价值较高的独立集 Y_0；可使用局部搜索（获得定理 2.7 的保证）或贪心算法（获得定理 2.6 的保证）。3：令 $k(Y)$ 表示将匹配 Y 和 P 输入算法 1 后返回的路径数量。4：令 I 在 $\lfloor(1-\varepsilon)k(Y_0)\rfloor$ 和 $\lceil(1-\varepsilon)k(Y_0)\rceil$ 之间选择：以概率 $\lceil(1-\varepsilon)k(Y_0)\rceil - (1-\varepsilon)k(Y_0)$ 选择前者，否则选择后者。5：对于 $i=1$ 到 I，执行：6：按照引理 3.3 的说明（见算法 1），计算 Y_{i-1} 和 P 之间可行的增广路径/交替路径 $X_i^1, \ldots, X^{k(Y_{i-1})}{}_i$。7：均匀地随机选择一条 $X_i \in \{X_i^1, ..., X^{k(Y_{i-1})}{}_i$ $\}$。8：应用该路径以得到 $Y_i = Y_{i-1} \Delta X_i$。9：结束循环。10：返回 $S := Y_I$

可以注意到，$M_{\leftarrow} \cup M_{\rightarrow}$ 是满足需求的循环流——即流出量减去流入量——在源点处为 $+1$，在汇点处为 -1，并取其环路径分解中的路径。）所有路径均以 P 为起点和终点。

接下来，我们对路径进行捷径化。这里，我们用双向弦替换子路径，而不像引理 3.3 的证明中那样只沿一个方向替换。此外，如果存在一个内部顶点属于 S，我们需要截短路径，使其从该顶点开始；同样，如果存在一个内部顶点属于 T，我们就截短路径，使其在该顶点结束。这些操作只会缩小路径的顶点集，因此会保持其顶点不相交性。

当路径 X_i 是从 S 到 T、经过 $(Y \cup P) \setminus (S \cup T)$ 且不含弦时，我们便结束。引理 3.3 的证明中相同的论证随后表明，X_i 是一条增广型路径，即 $Y \triangle X_i \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$。 □

现在，我们可以给出适用于任意两个拟阵 $\mathcal{I}_1$ 和 $\mathcal{I}_2$的确定性算法。

定理 3.6 存在一种确定性多项式时间算法，用于求解带有拟阵交约束的单调次模函数最大化问题，其参数为$\varepsilon \in (0,1)$，并输出一个集合 $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$，使得

- $|S| > (1-\varepsilon)N - 1$
- $f(S) \geq 0.499 \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{MatInt}}$

其中，N 是 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$中集合的最大基数，最优值$_{\mathrm{MatInt}}$ 是 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$中集合的最大 f-值。

证明。 与定理 3.4 中的算法一样，我们首先计算拟阵交中的一个最大基数集合 P，以及拟阵交中的一个高值集合 Y。我们有 $|P| = N$和 $f(Y_0) \geq 0.499 \cdot$最优值$_{\mathrm{MatInt}}$。

然后，我们执行 $I := \lfloor(1-\varepsilon)(|P| - |Y_0|)\rfloor$ 次迭代。在第 i次迭代中，我们将引理 3.5 应用于 Y_{i-1}（以及 P），得到一组集合 X_i^1，.....，$X_i^{|P|-|Y_{i-1}|}$。我们从中选出一个集合 $X_i \in \{X_i^1, ..., X_i^{|P|-|Y_{i-1}|}\}$；用它得到新的解 $Y_i = Y_{i-1} \triangle X_i$时，$f(Y_i)$最大。最后，我们返回 $S := Y_I$。

所有解 $Y_0, ..., Y_I$ 都属于拟阵交，并且每一步的大小都会增加 1。因此我们有 $|S| = |Y_0| + \lfloor(1-\varepsilon)(|P|-|Y_0|)\rfloor > |Y_0| + (1-\varepsilon)(|P|-|Y_0|) - 1 \geq (1-\varepsilon)|P| - 1 = (1-\varepsilon)N - 1$。

目标值保证的证明与定理 3.4 中的证明相同；在每一步中，由于一个平均集合能保留 $\frac{|P|-|Y_0|-i}{|P|-|Y_0|-i+1}$ 的值，因此最佳集合也能做到这一点。我们最后指出，

由于 $I \le (1-\varepsilon)(|P|-|Y_0|)$,

$$f(S) = f(Y_I) \ge \frac{|P|-|Y_0|-(1-\varepsilon)(|P|-|Y_0|)}{|P|-|Y_0|} f(Y_0) \ge \varepsilon \cdot 0.499 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{MatInt}} \ .$$

□

4 实验评估

我们按照先前工作的实验设置 [EMNTT20; EFNTT23], , 在该领域的标准基准测试套件上，实证评估我们的方法与先前工作及自然基线方法的性能。该套件包含图覆盖、聚类和推荐系统，并涵盖不同的公平性和拟阵约束情境。我们的评估指标是子模目标值 $f(S)$ 和总公平性违反 fav(S)。所有纳入考量的算法返回的集合均为独立且上公平，因此测得的公平性违反均针对下界。我们使用大语言模型辅助编写代码。所有三个基准测试均使用分划拟阵。

我们比较以下算法:

- OUR(ε) – 定理 3.4 中的我们的方法，适用于一系列 $\varepsilon \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ 设置。为计算高价值解 Y，我们运行自然的贪心算法，该算法可获得 a1/3-近似（定理 2.6）；而定理 2.7 中的局部搜索算法虽然运行时间为多项式，但不实用。较大的公平集 P 通过增广路径获得，忽略 f。
- TWOPASS – [EFNTT23] 的算法（定理 1.1）。由于该算法最初是为流式处理场景开发的，为了进行公平比较，我们简化了其中旨在确保低内存使用量的部分（即第一遍）。算法的第一步通过增广路径获得一个公平集（忽略 f）。随后将该集合分成两部分，并通过拟阵交子程序将每一部分扩展为独立且上公平的解。为此，我们采用贪心算法（[EFNTT23] 的原始实现使用交换算法来确保低内存占用和线性运行时间，但得到的值较差）。

- LBMI（下界拟阵交）——一种始终返回公平集的算法，虽然其值没有理论保证，但在实践中表现相当不错（与 [EFNTT23] 中的 GREEDY-FAIR-STREAMING 思路相近）。该算法首先通过增广路径构建一个公平集，忽略 f，然后使用贪心算法将其扩展为极大解。
- UBMI（上界拟阵交）——一种忽略下界约束、仅针对 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{U}$ 求解拟阵交问题的算法（其思路与 [EFNTT23] 中的 MATROID-INTERSECTION 类似）。这里我们同样使用贪心算法。

- RANDOM——一种随机打乱全集，然后逐个添加元素的算法；只有在添加后解仍然独立且满足上公平时，才会添加该元素。

为了公平比较底层核心思想，我们确保所比较的算法，尤其是 OUR 和 TWOPASS，在执行相似任务时使用相同的子程序；在构建大型公平集时，如果实现能通过启发式方法考虑 f 而非忽略 f，或对最终解进行基于局部搜索的后处理，可能会有更好的表现。我们没有与 [ETNV24] 的算法（定理 1.2）进行比较，因为求解多线性扩展会使其不切实际。

我们将随机化算法重复运行 40 次。所有实验都可以在商用硬件上运行（仅使用中央处理器，单线程；我们不报告运行时间），完成这些实验需要数小时。
这篇论文的代码可在 https://github.com/dj3500/ fair-matroid-submodular-neurips2025 获取。

下面概述实验场景。在每个实验中，我们改变解集大小缩放因子 r，它大致对应于拟阵 $\mathcal{I}$ 的秩。我们选择公平性界限 ℓ_c, u_c以确保可行性，要求每个颜色组 V_c 在解集 S 中都按比例得到代表——要么与其在数据集中的占比相匹配（覆盖、电影），要么确保各组规模相近（聚类）。结果见图 1 和图 2，并在第4节.4 中讨论。

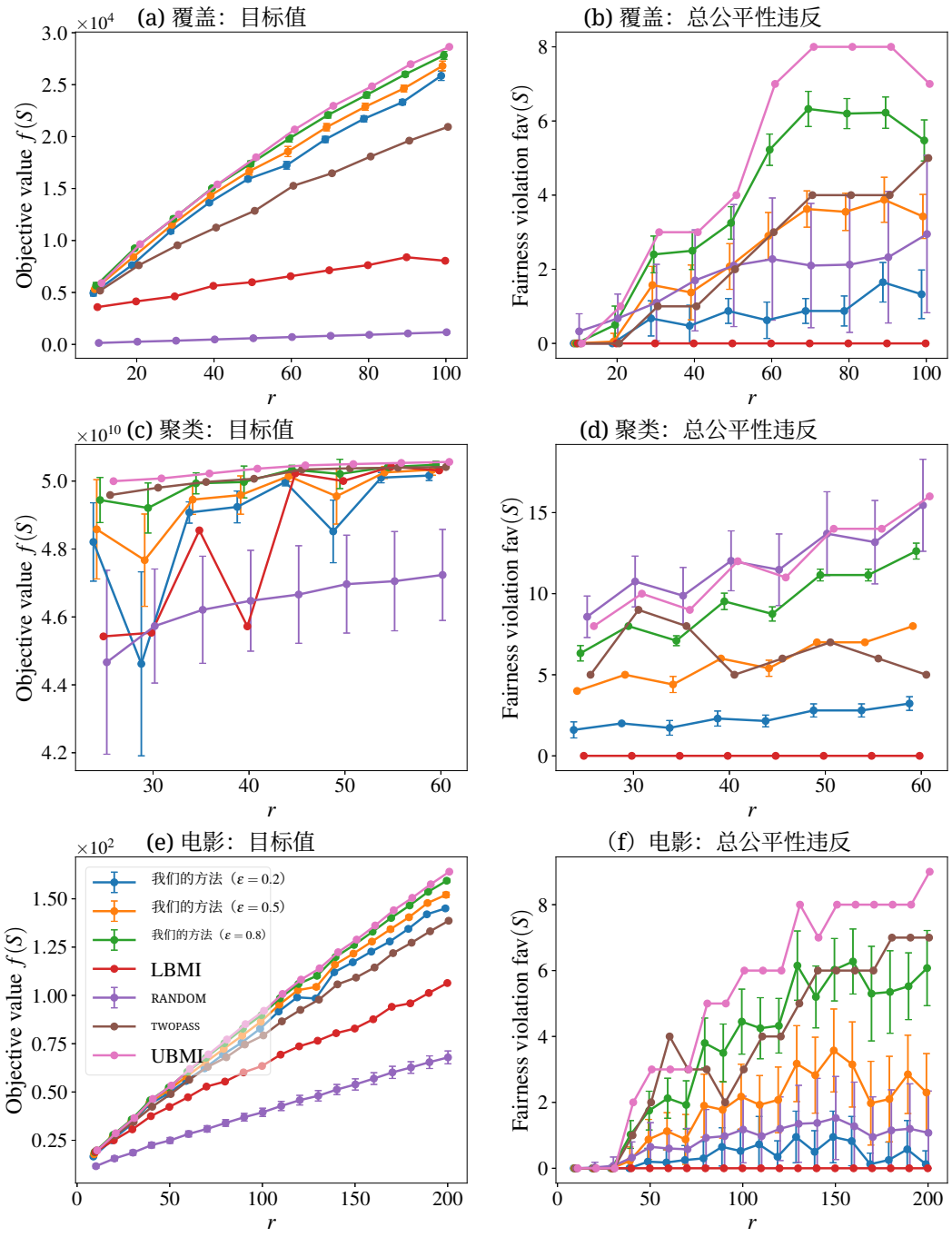

图 1：我们的实验结果。每一行对应一个实验；左图显示在一系列解的缩放因子 r 下各算法的目标值，右图显示公平性违反。对于随机化算法，我们报告平均值，误差棒对应样本标准差。

计算复杂度。 我们首先分析定理 3.4 中一般随机化算法的计算复杂度。首先，通过增广路径构造 P（最大基数公平独立集）的运行时间为 $O(N^{1.5}|V|)$（参见 [Sch03], 第 41.2 章注释）。为了构造 Y（具有较高 f值的上公平独立集），我们使用贪心算法，耗时 $O(N|V|)$。

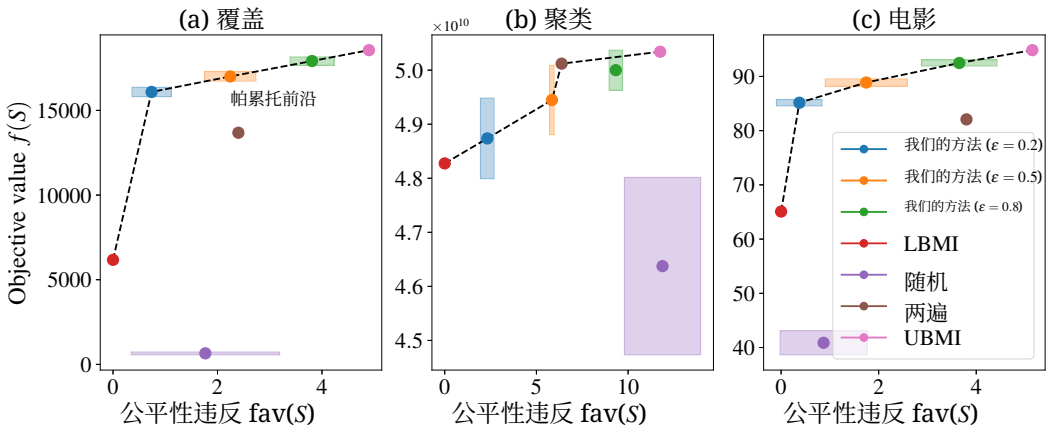

图 2：对于每个实验和算法，我们对所有 r 个值的目标值和公平性违反取平均值，并将其绘制为一个点。对于随机化算法，彩色矩形表示标准差。虚线表示目标值与公平性违反之间权衡的帕累托前沿。

接下来，在每次 I 迭代中，我们必须：(1) 重新计算 Y_i 与 P 之间的交换图；(2) 找到作为目标子图的 $M_{\leftarrow}$ 和 $M_{\rightarrow}$；(3) 将 $M_{\leftarrow} \cup M_{\rightarrow}$ 分解为路径；(4) 对这些路径进行捷径化。步骤 (1) 需要 $O(N^2)$ 时间，因为我们会针对所有 $y \in Y$ 和 $p \in P$ 查询 y 与 p 之间是否存在有向边。步骤 (2) 中寻找完美匹配最多需要 $O(N^3)$ 时间（在实际实现中，我们可以使用 Hopcroft-Karp 算法）。将得到的子图分解为路径最多需要 $O(N)$ 时间。最后，再次对这些路径进行捷径化最多需要 $O(N^2)$ 时间。由于 I 可以是 $\Theta(N)$，总运行时间最多为 $O(N^4)$。

如果 $\mathcal{I}$ 是分划拟阵，则可以采用更高效的实现方式。两个分划拟阵的交可以自然地解释为一个二部多重图（颜色，即 $\mathcal{U}$ 的各个部分构成一侧，$\mathcal{I}$ 的各个部分构成另一侧，而一个元素对应于连接其所属两个部分的一条边）。在这种情况下，我们可以考察以下交换图：将 Y 的边从左向右定向，将 P 的边从右向左定向。这个有向图可以分解为若干路径。这些路径同时满足可行性，因此我们无需在每一步（或采用捷径时）重新计算交换图。由于该图有 $O(N)$ 条边，分解这个有向图的运行时间为 $O(N)$。经过 I 次迭代，总运行时间至多为 $O(N^2)$。

4.1 图覆盖

我们的方法使用 Pokec 社交网络 [LK14]。给定一个由用户及其好友关系构成的有向图 $G = (V, E)$，我们选择一个子集 $S \subseteq V$ 以最大化覆盖，其定义为 $f(S) = \left|\bigcup_{v \in S} N(v)\right|$，其中 $N(v)$ 是 v 的邻域。用户资料包括年龄、性别、身高和体重。我们对体重指数（BMI）施加分划拟阵约束。移除缺失身高或体重信息、或数据不合理的资料后，得到一个包含582,289个节点和5,834,695条边的图。用户被划分为四个体重指数类别（体重过轻、正常体重、超重、肥胖），每个组的上界为 $\lceil \frac{|V_i|}{|V|} r \rceil$ V_i。我们还按年龄实施公平性约束，共分为7组：$[1, 10]$，$[11, 17]$，$[18, 25]$，$[26, 35]$，$[36, 45]$，$[46+]$，无年龄信息。我们设置 $\ell_c = \lfloor 0.9 \frac{|V_c|}{|V|} r \rfloor$ 和 $u_c = \lceil 1.5 \frac{|V_c|}{|V|} r \rceil$。我们使用范围为10到200的 r。

4.2 基于代表点的聚类

我们使用来自葡萄牙银行营销活动 [MCR14]的 4521 个电话通话数据集。目标是选取一个有代表性的子集 $S \subseteq V$ 用于服务质量评估。每条记录 $e \in V$ 由 $x_e \in \mathbb{R}^7$ 表示，包含 7 个数值特征，包括年龄和账户余额。我们针对账户余额设置了一个分划拟阵，分为 5 组：$(-\infty, 0), [0, 2000), [2000, 4000), [4000, 6000)$ $[6000, \infty)$。每组 V_i 的上界为 $r/5$。公平性通过年龄约束实现，分为 6 组：$[0, 29]$，$[30, 39]$，$[40, 49]$，$[50, 59]$，$[60, 69]$，$[70+]$，其界限为

$\ell_c = 0.1r + 2$, $u_c = 0.4r$ 对于每个 c。我们最大化单调次模函数 [GK10]: $f(S) = \sum_{e' \in V} \left(d(e',\ 0) - \min_{e \in S \cup \{0\}} d(e',\ e) \right)$ 其中 $d(e',\ e) = \|x_{e'} - x_e\|_2^2$，且 x_0 为原点。我们使用 r，取值范围为 30 到 60。

4.3 推荐系统

我们使用 Movielens 1M 数据集 [HK16], 模拟电影推荐系统，该数据集包含 6040 位用户对 3900 部电影的大约一百万条评分。与先前工作 [MBNTC17; NTMZMS18; EM- NTT20; EFNTT23], 一样，我们计算用户-电影矩阵 [TCSBHTBA01], 的低秩补全，得到每位用户 u 的 $w_u \in \mathbb{R}^{20}$ 和每部电影 m的 $v_m \in \mathbb{R}^{20}$。乘积 $w_u^\top v_m$ 用于估计用户 u对电影 m的评分。对于用户 u，电影集合 S的单调次模效用为 $f(S) = \alpha \cdot \sum_{m' \in M} \max\left(\max_{m \in S}\left(v_m^\top v_{m'}\right),\ 0\right) + (1-\alpha) \cdot \sum_{m \in S} w_u^\top v_m$，其中参数 $\alpha = 0.85$用于平衡覆盖和个性化用户评分。我们使用分划拟阵，按上映日期对电影实施比例代表性约束，将其分为 9 个十年分组（1911–2000），并为每个十年 V_d设置上界$\lceil 1.2 \frac{|V_d|}{|V|} r \rceil$。此外，电影还按类型 c（颜色）划分为 18 组，并设置公平性界限 $\ell_c = \lfloor 0.8 \frac{|V_c|}{|V|} r \rfloor$ 和 $u_c = \lceil 1.4 \frac{|V_c|}{|V|} r \rceil$。我们使用从 10 到 200 的 r。

4.4 结果与讨论

我们的结果如图 1 和图 2 所示。与先前工作类似，我们观察到，施加公平性确实会带来一定的效用值损失，而且算法在实践中的效用值远优于理论下界所能保证的水平。

在全部三项实验中，我们的算法得出的解，其值与 UBMI 相比具有较强竞争力；UBMI 完全忽略下界约束，因此公平性违反程度最高。在三个情境中的两个（覆盖和电影）中，所有 OUR 算法的 f 值都高于其他所有基线方法（RANDOM、LBMI 和 TWOPASS）；尤其是，就这两项指标而言，TWOPASS 都不如 OUR(0。2)和 OUR(0。5)。对于聚类，情况不太明朗，但 TWOPASS 通常表现更好。就违反公平性下界约束而言，正如预期，我们对 ε 采用不同设置，能实现平滑的权衡。能够保证不发生公平性违反的基线方法 LBMI，其 f 值表现相对较差。

ε 的可调性是我们方法的一项关键优势，使用户能够选择最符合其对效用与公平性平衡的具体要求的运行点。

5 结论、局限性、更广泛的影响与未来工作

在这项工作中，我们为 FMMSM 提出了一种改进算法。对于任意 $\varepsilon > 0$，该算法都会返回一个近似解，该解满足每项公平性下界的期望 $(1 - \varepsilon)$ 比例，同时严格满足拟阵约束和公平性上界约束；此外，返回的解规模较大，并具有高集中度保证。

近期研究表明，用于决策的自动化算法可能引入偏见和歧视。我们致力于缓解此类问题，在可表述为拟阵约束下子模最大化的问题上取得进展。这类问题与多种应用相关，例如组建代表性委员会或为新闻推送筛选内容。我们通过若干现实任务的实证结果展示了算法的出色表现。与先前工作一样，我们观察到公平性与效用值之间确实存在平衡；然而，不应将这种“公平性代价”解读为公平性会导致较差的结果，而应将其视为两项有价值指标之间的权衡。我们算法的参数化特性（可调的 ε 参数）提供了一种新工具，有助于在这种平衡中做出取舍。

我们的工作留下了一个令人振奋的开放问题：FMMSM（不违反公平性约束）和 MSPM 的可近似性。MSPM 是否存在常数因子近似算法？或者，FMMSM 是否存在超常数近似困难性？（正如 [ETNV24], 所指出的 [Von13]，后一项结果将对 Vondrák 提出的一个基本问题给出否定答案。）此外，我们的工作也未考虑非单调目标函数或流式设置。

最后需要指出的是，我们采用的公平性概念虽然标准且通用，但并未涵盖文献中讨论的某些公平性概念（例如，参见 [CR18；TWRTZ19]）。目前尚无

普适的公平性定义；采用哪种定义取决于具体应用，这也是一个活跃的研究领域。

参考文献

[Bid06] Dan Biddle。《不利影响与测试验证：有效且可辩护的就业测试实务指南》。Gower Publishing, Ltd., 2006年。[BLS17] Markus Brill、Jean-François Laslier 和 Piotr Skowron。“作为席位分配方法的多赢家批准规则”。载于：AAAI。AAAI Press, 2017年，第414–420页。[CCPV11] Gruia Calinescu、Chandra Chekuri、Martin Pál 和 Jan Vondrák。“在拟阵约束下最大化单调次模函数”。载于：《SIAM计算杂志》40.6（2011年），第1740–1766页。DOI：10.1137/080733991。[CCRL13] Joanne McGrath Cohoon、James P. Cohoon、Seth Reichelson 和 Selwyn Lawrence。“有效的多样性招聘”。载于：FIE。IEEE计算机学会，2013年，第1123–1124页。[CHV18] L. Elisa Celis、Lingxiao Huang 和 Nisheeth K. Vishnoi。“具有公平性约束的多赢家投票”。载于：IJCAI。ijcai.org，2018年，第144–151页。[CKLV17] Flavio Chierichetti、Ravi Kumar、Silvio Lattanzi 和 Sergei Vassilvitskii。“通过公平子集实现公平聚类”。载于：NIPS。2017年，第5029–5037页。[CKLV19] Flavio Chierichetti、Ravi Kumar、Silvio Lattanzi 和 Sergei Vassilvitskii。“拟阵、匹配与公平性”。载于：AISTATS。第89卷。《机器学习研究论文集》。PMLR，2019年，第2212–2220页。[CKSDKV18] L. Elisa Celis、Vijay Keswani、Damian Straszak、Amit Deshpande、Tarun Kathuria 和 Nisheeth K. Vishnoi。“公平且多样化的基于DPP的数据摘要”。载于：ICML。第80卷。《机器学习研究论文集》。PMLR，2018年，第715–724页。[CR18] Alexandra Chouldechova 和 Aaron Roth。“机器学习公平性的前沿”。载于：arXiv 预印本 arXiv:1810.08810（2018年）。[CSV18] L. Elisa Celis、Damian Straszak 和 Nisheeth K. Vishnoi。“具有公平性约束的排序”。载于：ICALP。第107卷。LIPIcs。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2018年，28:1–28:15。[CVZ10] Chandra Chekuri、Jan Vondrák 和 Rico Zenklusen。“通过组合结构的交换性质进行相关随机舍入”。载于：FOCS。IEEE计算机学会，2010年，第575–584页。[DHPRZ12] Cynthia Dwork、Moritz Hardt、Toniann Pitassi、Omer Reingold 和 Richard Zemel。“基于认知的公平性”。载于：第三届理论计算机科学创新会议论文集。2012年，第214–226页。[DK11] Abhimanyu Das 和 David Kempe。“子模与谱：用于子集选择、稀疏近似和字典选择的贪心算法”。载于：ICML。Omnipress，2011年，第1057–1064页。[EFNTT23] Marwa El Halabi、Federico Fusco、Ashkan Norouzi-Fard、Jakab Tardos 和 Jakub Tarnawski。“拟阵约束下流式子模最大化的公平性”。载于：国际机器学习会议。PMLR。2023年，第9150–9171页。[EG11] Khalid El-Arini 和 Carlos Guestrin。“超越关键词搜索：发现相关科学文献”。载于：KDD。ACM，2011年，第439–447页。[EMNTT20] Marwa El Halabi、Slobodan Mitrovic、Ashkan Norouzi-Fard、Jakab Tardos 和 Jakub Tarnawski。“流式子模最大化中的公平性：算法与困难性”。载于：NeurIPS。2020年。[ETNV24] Marwa El Halabi、Jakub Tarnawski、Ashkan Norouzi-Fard 和 Thuy-Duong Vuong。“拟阵约束下子模最大化中的公平性”。载于：国际人工智能与统计会议，2024年5月2日至4日，西班牙瓦伦西亚会议宫。编者：Sanjoy Dasgupta、Stephan Mandt 和 Yingzhen Li。第238卷。《机器学习研究论文集》。PMLR，2024年，第1027–1035页。网址：https://proceedings.mlr.press/v238/el- halabi24a.html。

[Eur22] 欧盟基本权利局。《算法中的偏见——人工智能与歧视》。卢森堡：欧盟基本权利局。欧盟出版局，2022年。[Fei98] Uriel Feige。“近似集合覆盖的 ln n 阈值”。载于：《ACM学报》45.4（1998年），第634–652页。[FLNSZ22] Moran Feldman、Paul Liu、Ashkan Norouzi-Fard、Ola Svensson 和 Rico Zenklusen。“拟阵约束下的流式子模最大化”。载于：ICALP。第229卷。LIPIcs。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2022年，59:1–59:20。[GHIM09] Michel X. Goemans、Nicholas J. A. Harvey、Satoru Iwata 和 Vahab S. Mirrokni。“处处近似子模函数”。载于：第二十届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，SODA 2009，美国纽约州纽约市，2009年1月4日至6日。编者：Claire Mathieu。工业与应用数学学会，2009年，第535–544页。DOI：10 .1137 / 1 . 9781611973068 . 59。网址：https : //doi.org/10.1137/1.9781611973068.59。[GJS21] Paritosh Garg、Linus Jordan 和 Ola Svensson。“子模拟阵交的半流式算法”。载于：整数规划与组合优化会议。第12707卷。《计算机科学讲义》。施普林格，2021年，第208–222页。[GK10] Ryan Gomes 和 Andreas Krause。“数据流中的预算非参数学习”。载于：ICML。Omnipress，2010年，第391–398页。[GK11] Daniel Golovin 和 Andreas Krause。“自适应子模性：主动学习与随机优化中的理论和应用”。载于：《人工智能研究杂志》42（2011年），第427–486页。[HK16] F Maxwell Harper 和 Joseph A Konstan。“MovieLens 数据集：历史与背景”。载于：《ACM交互式智能系统汇刊》(TiiS) 5.4（2016年），第19页。[HMV23] Sedjro Salomon Hotegni、Sepideh Mahabadi 和 Ali Vakilian。“公平范围聚类的近似算法”。载于：第40届国际机器学习会议论文集。编者：Andreas Krause、Emma Brunskill、Kyunghyun Cho、Barbara Engelhardt、Sivan Sabato 和 Jonathan Scarlett。第202卷。《机器学习研究论文集》。PMLR，2023年7月23日至29日，第13270–13284页。网址：https://proceedings.mlr.press/v202/hotegni23a.html。[Hoe63] Wassily Hoeffding。“有界随机变量和的概率不等式”。载于：《美国统计学会杂志》58.301（1963年），第13–30页。DOI：10.1080/01621459.1963.10500830。网址：https://doi.org/10.1080/01621459.1963.10500830。[JNN20] Matthew Jones、Huy Nguyen 和 Thy Nguyen。“通过最大匹配实现公平 k 中心”。载于：第37届国际机器学习会议论文集。编者：Hal Daumé III 和 Aarti Singh。第119卷。《机器学习研究论文集》。PMLR，2020年7月13日至18日，第4940–4949页。网址：https://proceedings.mlr.press/v119/jones20a.html。[KAM19] Matthäus Kleindessner、Pranjal Awasthi 和 Jamie Morgenstern。“用于数据摘要的公平 k 中心聚类”。载于：第36届国际机器学习会议论文集，ICML 2019，2019年6月9日至15日，美国加利福尼亚州长滩。编者：Kamalika Chaudhuri 和 Ruslan Salakhutdinov。第97卷。《机器学习研究论文集》。PMLR，2019年，第3448–3457页。网址：http://proceedings.mlr.press/v97/kleindessner19a.html。[KMGG08] Andreas Krause、H Brendan McMahan、Carlos Guestrin 和 Anupam Gupta。“鲁棒子模观测选择”。载于：《机器学习研究杂志》9.Dec（2008年），第2761–2801页。[LB11] Hui Lin 和 Jeff A. Bilmes。“用于文档摘要的一类子模函数”。载于：计算语言学协会年会。计算语言学协会，2011年，第510–520页。[LK14] Jure Leskovec 和 Andrej Krevl。SNAP 数据集：斯坦福大型网络数据集集合。http://snap.stanford.edu/data。2014年6月。

[LSV10] Jon Lee、Maxim Sviridenko 和 Jan Vondrák。“通过广义交换性质在多个拟阵上进行子模最大化”。载于：《运筹学数学》35.4（2010年），第795–806页。[MBNTC17] Slobodan Mitrovi´c、Ilija Bogunovi´c、Ashkan Norouzi-Fard、Jakub Tarnawski 和 Volkan Cevher。“流式鲁棒次模最大化：分区阈值法”。载于：《神经信息处理系统进展》。2017年。[MCR14] Sérgio Moro、Paulo Cortez 和 Paulo Rita。“一种数据驱动的银行电话营销成功率预测方法”。载于：Decis. Support Syst. 62（2014年），第22–31页。[MMD16] Cecilia Munoz、Smith Megan 和 DJ Patil。《大数据：关于算法系统、机遇与公民权利的报告》。华盛顿特区：总统行政办公室。白宫，2016年。[Mon95] Burt L Monroe。“完全比例代表制”。载于：American Political Science Review 89.4（1995年），第925–940页。[NTMZMS18] Ashkan Norouzi-Fard、Jakub Tarnawski、Slobodan Mitrovi´c、Amir Zandieh、Aida Mousavifar 和 Ola Svensson。“在海量数据流上进行超越 1/2-近似的子模最大化”。载于：ICML（2018年）。[Sch03] Alexander Schrijver。《组合优化：多面体与效率》。B卷。2003年1月。[TCSBHTBA01] Olga Troyanskaya、Michael Cantor、Gavin Sherlock、Pat Brown、Trevor Hastie、Robert Tibshirani、David Botstein 和 Russ B Altman。“DNA微阵列的缺失值估计方法”。载于：《生物信息学》17.6（2001年），第520–525页。[TWRTZ19] Alan Tsang、Bryan Wilder、Eric Rice、Milind Tambe 和 Yair Zick。“影响力最大化中的群体公平性”。载于：第二十八届国际人工智能联合会议论文集（IJCAI-19）。国际人工智能联合会议组织，2019年7月，第5997–6005页。DOI：10.24963/ijcai.2019/831。网址：https://doi.org/10.24963/ijcai.2019/831。[TY23] Shaojie Tang 和 Jing Yuan。“超越次模性：具有群体公平约束的随机化集合选择统一框架”。载于：《组合优化杂志》45.4（2023年），第102页。[Udw18] Rajan Udwani。“具有基数约束的单调次模函数多目标最大化”。载于：《神经信息处理系统进展》31（2018年）。[Von13] Jan Vondrák。《次模函数及其应用》。在2013年ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）上的大会报告。2013年。网址：https : / / theory . stanford . edu / ~jvondrak / data / SODA - plenary - talk.pdf。[WFM21] Yanhao Wang、Francesco Fabbri 和 Michael Mathioudakis。“从数据流中选择公平且有代表性的子集”。载于：2021年万维网大会论文集。WWW ’21。斯洛文尼亚卢布尔雅那：计算机协会，2021年，第1340–1350页。ISBN：9781450383127。DOI：10.1145/3442381.3449799。网址：https://doi.org/10.1145/3442381.3449799。[Whi22] 白宫科技政策办公室。《人工智能权利法案蓝图》。华盛顿特区：白宫科学技术政策办公室，2022年。[WLBW24] Yanhao Wang、Yuchen Li、Francesco Bonchi 和 Ying Wang。“次模最大化中的效用与公平性平衡”。载于：第27届扩展数据库技术国际会议论文集（EDBT）。2024年，第1–14页。[YT23] Jing Yuan 和 Shaojie Tang。“非单调次模最大化中的群体公平性”。载于：《组合优化杂志》45.3（2023年），第88页。[ZVGG17] Muhammad Bilal Zafar、Isabel Valera、Manuel Gomez-Rodriguez 和 Krishna P. Gummadi。“公平性约束：公平分类机制”。载于：AISTATS。第54卷。《机器学习研究论文集》。PMLR，2017年，第962–970页。

NeurIPS 论文检查清单

1. **主张**

   问题：摘要和引言中提出的主要主张是否准确反映了论文的贡献和范围?

   回答： [是]

   指南：

   • 回答“不适用”意味着摘要和引言中未包含论文所提出的主张。

   • 摘要和/或引言应清晰陈述论文所提出的主张，包括论文的贡献以及重要的假设和局限性。对该问题回答“否”或“不适用”会给审稿人留下不好的印象。

   • 所提出的主张应与理论和实验结果相符，并反映这些结果有望在多大程度上推广到其他情境。

   • 将愿景目标作为动机是可以的，只要明确说明论文并未实现这些目标。

2. **局限性**

   问题：论文是否讨论了作者所开展工作的局限性?

   回答： [是]

   理由：是，尤其是在第5节。

   指南：

   • “不适用”表示论文没有局限性，而回答“否”表示论文存在局限性，但论文未对此进行讨论。

   • 鼓励作者在论文中单独设置“局限性”部分。

   • 论文应指出任何强假设，并说明结果对于违反这些假设的情况有多稳健（例如，独立性假设、无噪声设定、模型设定正确，以及渐近近似仅在局部成立）。作者应反思这些假设在实践中可能如何被违反，以及这将产生什么影响。

   • 作者应反思其主张范围，例如，该方法是否仅在少数数据集上或仅运行少数几次进行测试。一般而言，实证结果往往依赖于隐含假设，而这些假设应予以明确说明。

   • 作者应反思影响该方法性能的因素。例如，当图像分辨率较低或图像是在低照度条件下拍摄时，人脸识别算法的表现可能较差。又或者，语音转文字系统可能无法可靠地用于为在线讲座提供隐藏式字幕，因为它无法处理专业术语。

   • 作者应讨论所提出算法的计算效率，以及它们如何随数据集规模的增长而扩展。

   • 如适用，作者应讨论其方法在解决隐私和公平性问题方面可能存在的局限性。

   • 作者可能担心，对局限性完全坦诚会被审稿人作为拒稿理由，但更糟糕的结果可能是，审稿人发现了论文中未被承认的局限性。作者应自行做出最佳判断，并认识到，个人为透明度所采取的行动对于制定维护学术共同体诚信的规范发挥着重要作用。审稿人将被明确要求，不因作者对局限性的坦诚而予以惩罚。

3. **理论假设与证明**

   问题：对于每个理论结果，论文是否提供了完整的假设集合以及完整（且正确）的证明?

   回答： [是]

   指南：

• 答案“不适用”表示论文不包含理论结果。
• 论文中的所有定理、公式和证明都应编号并相互引用。

• 所有假设都应明确说明，或在任何定理的陈述中加以引用。
• 证明可以放在论文正文中，也可以放在补充材料中；但如果放在补充材料中，建议作者提供简短的证明概要，以帮助读者理解直觉。

• 反过来，论文正文中提供的任何非形式化证明，都应辅以附录或补充材料中的形式化证明。
• 证明所依赖的定理和引理都应恰当引用。

4. **实验结果可复现性**

问题：论文是否充分披露了复现论文主要实验结果所需的全部信息，以确保能够复现影响论文主要主张和/或结论的结果（无论是否提供代码和数据）？

回答： [是]

理由：是，我们在补充材料中提供了完整的源代码，并与所有相关数据集打包在一起，以便于执行。我们还将在最终定稿版本中一并公开发布代码。

指南：

• 回答“不适用”表示论文不包含实验。
• 如果论文包含实验，对此问题回答“否”会给审稿人留下不好的印象：无论是否提供代码和数据，使论文具有可复现性都很重要。

• 如果贡献是数据集和/或模型，作者应说明为确保结果可复现或可验证而采取的步骤。

• 根据贡献的不同，可通过多种方式实现可复现性。例如，如果贡献是新颖架构，完整描述该架构或许就足够了；如果贡献是特定模型及其实证评估，则可能需要让其他人能够使用相同的数据集复现该模型，或提供模型访问权限。一般而言，发布代码和数据通常是实现这一目标的一种有效方式；此外，也可以通过提供复现结果的详细说明、开放托管模型的访问权限（例如大语言模型）、发布模型检查点，或采用其他适合所开展研究的方式来确保可复现性。

• NeurIPS 不要求发布代码，但会议要求所有投稿都提供合理的可复现途径，具体方式可能取决于贡献的性质。例如：(a) 如果贡献主要是一种新算法，论文应明确说明如何复现该算法。(b) 如果贡献主要是一种新模型架构，论文应清晰、完整地描述该架构。(c) 如果贡献是一种新模型（例如大语言模型），则应提供访问该模型以复现结果的途径，或提供复现该模型的方法（例如，使用开源数据集或说明如何构建数据集）。(d) 我们理解，在某些情况下实现可复现性可能颇具挑战；在这种情况下，欢迎作者说明其确保可复现性的具体方式。对于闭源模型，模型访问权限可能受到某些限制（例如，仅限注册用户），但其他研究人员应当能够通过某种途径复现或验证结果。

5. **数据和代码的开放访问**

问题：如补充材料中所述，论文是否公开提供数据和代码，并附有足够的说明，以便忠实地复现主要实验结果？

答案： [是]

理由：是的，我们在补充材料中提供了完整的源代码，并将所有相关数据集压缩打包，以便执行。我们还将在最终定稿版本发布时，将代码以开源形式发布。

指南：

- 答案“不适用”表示论文不包含需要代码的实验。
- 详情请参阅 NeurIPS 代码与数据提交指南（https://nips.cc/public/guides/CodeSubmissionPolicy）。
- 虽然我们的方法鼓励发布代码与数据，但我们理解这可能无法实现，因此回答“否”是可以接受的。论文不会仅仅因为未包含代码而被拒稿，除非代码是贡献的核心部分（例如，新的开源基准）。
- 说明应包含运行所需的确切命令和环境，以便复现结果。详情请参阅 NeurIPS 代码与数据提交指南（https: //nips.cc/public/guides/CodeSubmissionPolicy）。
- 作者应提供数据访问和准备说明，包括如何获取原始数据、预处理数据、中间数据和生成数据等。
- 作者应提供脚本，以复现所提新方法和基线方法的所有实验结果。如果只有部分实验可以复现，则应说明脚本未涵盖哪些实验以及原因。
- 提交时，为了保护匿名性，作者应发布匿名版本（如适用）。
- 建议在补充材料（附于论文之后）中尽可能提供详细信息，但允许提供数据和代码的网址。

6. **实验设置/细节**

问题：论文是否说明了理解实验结果所必需的所有训练和测试细节（例如，数据划分、超参数及其选择方式、优化器类型等）？

回答： [是]

指南：

- 答案为“不适用”表示论文未包含实验。
- 实验设置应在论文正文中说明，详细程度应足以帮助读者理解并评估结果。
- 完整细节可通过代码、附录或补充材料提供。

7. **实验统计显著性**

问题：论文是否恰当地报告了定义正确的误差棒，或关于实验统计显著性的其他适当信息？

回答： [是]

理由：是，我们在图表中报告了样本标准差误差棒（也在补充材料的结果文件中报告）。这些误差棒对应于算法所用的随机性。

指南：

- “不适用”表示论文不包含实验。
- 如果论文的结果附有误差棒、置信区间或统计显著性检验，作者应回答“是”；至少，支持论文主要主张的实验应提供这些信息。
- 应明确说明误差棒所反映的变异因素（例如训练/测试集划分、初始化、某个参数的随机抽取，或在给定实验条件下的整体运行结果）。
- 应说明误差棒的计算方法（闭式公式、调用库函数、自助法等）。

- 应列出所作的假设（例如，正态分布误差）。
- 应明确误差线表示的是标准差还是均值标准误。

- 报告1σ误差线是可以的，但应予以说明。如果误差正态性这一假设未经验证，作者最好报告2σ误差线，而不是声称其具有96%的置信区间（CI）。

- 对于非对称分布，作者应注意不要在表格或图中显示对称误差棒，以免产生超出合理范围的结果（例如负的错误率）。

- 如果在表格或图中报告了误差线，作者应在正文中解释其计算方式，并在正文中引用相应的图或表。

8. **实验计算资源**

   问题：对于每项实验，论文是否提供了足够的信息，说明重现实验所需的计算机资源（计算工作节点的类型、内存、执行时间）？

   回答： [是]

   理由：实验可以在商用硬件上运行（仅使用中央处理器，单线程），需要数小时才能完成。我们在第4节中提到了这一点。

   指南：
   - “不适用”表示论文未包含实验。
   - 论文应说明计算工作节点的类型（中央处理器或图形处理器、内部集群或云服务提供商），并列出相关的内存和存储信息。
   - 论文应提供每项实验运行所需的计算资源，并估算所需的总计算资源。

   - 论文应披露，整个研究项目所需的计算资源是否超过了论文中报告的实验所用资源（例如，未纳入论文的初步实验或失败实验）。

9. **伦理准则**

   问题：论文中的研究是否在所有方面均遵守 NeurIPS 道德准则 https://neurips.cc/public/EthicsGuidelines?

   回答： [是]

   指南：
   - 回答“不适用”意味着作者尚未审阅 NeurIPS 道德准则。
   - 如果作者回答“否”，应说明需要偏离《伦理准则》的特殊情况。

   - 作者应确保保持匿名性（例如，如果其司法管辖区的法律或法规要求特别考虑）。

10. **更广泛影响**

    问题：论文是否讨论了所开展工作可能产生的积极和消极社会影响?

    回答： [是]

    理由：是，在第5节中。

    指南：
    - 答案为“不适用”表示所开展的工作没有社会影响。
    - 如果作者回答“不适用”或“否”，应说明其工作为何没有社会影响，或论文为何未涉及社会影响。
    - 负面社会影响的例子包括潜在的恶意或意外用途（例如传播虚假信息、生成虚假档案、监控）、公平性考量（例如部署可能做出不公平地影响特定群体的决策的技术）、隐私考量和安全考量。

• 会议预计，许多论文将属于基础研究，与特定应用无关，更不用说技术部署了。不过，如果存在通向任何负面应用的直接路径，作者应当指出这一点。例如，指出生成模型质量的提升可能被用于生成深度伪造内容以传播虚假信息，是合理的。另一方面，则没有必要指出，优化神经网络的通用算法可能使人们能够更快地训练生成深度伪造内容的模型。

• 作者应考虑以下可能产生的危害：技术按预期使用且运行正常时可能造成的危害；技术按预期使用但产生错误结果时可能造成的危害；以及因（有意或无意）滥用技术而产生的危害。

• 如果存在负面社会影响，作者也可以讨论可能的缓解策略（例如，受控发布模型、在提供攻击方法的同时提供防御措施、建立滥用监测机制、建立监测系统如何随着时间推移从反馈中学习的机制，以及提高机器学习的效率和可及性）。

11. **安全保障措施**

问题：论文是否描述了为负责任地发布存在高滥用风险的数据或模型而采取的安全保障措施（例如，预训练语言模型、图像生成器或爬取数据集）？

回答： [不适用]

指南：

• 答案“不适用”表示该论文不存在此类风险。

• 发布存在较高滥用或双重用途风险的模型时，应采取必要的安全保障措施，以便对模型的使用进行管控，例如要求用户遵守使用指南，或限制模型的访问权限，或实施安全过滤器。

• 从互联网上抓取的数据集可能带来安全风险。作者应说明他们如何避免发布不安全图像。

• 我们认识到，提供有效的安全保障措施颇具挑战，而且许多论文并不要求采取此类措施，但我们鼓励作者考虑这一点，并尽最大努力妥善处理。

12. **现有资产的许可**

问题：论文中使用的资产（例如代码、数据、模型）的创作者或原始所有者是否得到了恰当署名？许可证和使用条款是否得到了明确说明并妥善遵守？

回答： [是]

指南：

• 答案“不适用”表示论文未使用现有资产。

• 作者应引用生成该代码包或数据集的原始论文。

• 作者应说明所使用资产的版本，并尽可能提供网址。

• 每项资产都应注明其许可证名称（例如 CC-BY 4.0）。

• 对于从特定源点（例如网站）抓取的数据，应提供该源点的版权信息和服务条款。

• 如果发布了资产，应提供软件包中的许可证、版权信息和使用条款。对于热门数据集，paperswithcode.com/datasets 为部分数据集整理了许可证。其许可指南可帮助确定数据集的许可证。

• 对于重新打包的现有数据集，应提供原始许可证以及衍生资产的许可证（如果发生了变化）。

• 如果无法在线获取此信息，鼓励作者联系资产创建者。

13. **新资产**

问题：论文中引入的新资产是否有完善的文档，且是否随资产一并提供文档?

回答： [不适用]

理由：我们没有发布任何新资产（代码除外，代码将在其他地方讨论）。

指南：

- 答案“不适用”表示论文没有发布新资产。
- 研究人员应通过结构化模板，在投稿中说明数据集/代码/模型的详细信息，包括训练、许可证、局限性等方面的细节。
- 论文应讨论是否以及如何获得了使用其资产的相关人员的知情同意。
- 提交时，请记得将你的资产匿名化（如适用）。你可以创建一个匿名化网址，或附上一个匿名化 ZIP 文件。

14. **众包和涉及人类受试者的研究**

问题：对于众包实验和涉及人类受试者的研究，论文是否包含提供给参与者的完整说明文本（如适用，还包括屏幕截图），以及报酬（如有）的详细信息?

回答： [不适用]

指南：

- 回答“不适用”表示论文不涉及众包，也不涉及人类受试者研究。
- 将此信息纳入补充材料是可以的，但如果论文的主要贡献涉及人类受试者，则应尽可能在论文正文中提供详细信息。
- 根据 NeurIPS 道德准则，参与数据收集、数据整理或其他劳动的工作人员，至少应获得数据收集者所在国家规定的最低工资。

15. **涉及人类受试者的研究所需的机构审查委员会（IRB）批准或同等审批**

问题：论文是否描述了研究参与者可能面临的风险、是否向受试者披露了这些风险，以及是否获得了机构审查委员会（IRB）的批准（或根据所在国家或机构的要求获得同等的批准/审查）？

答案： [不适用]

指南：

- 答案“不适用”表示论文不涉及众包或涉及人类受试者的研究。
- 根据开展研究所在的国家/地区，任何涉及人类受试者的研究都可能需要获得机构审查委员会批准（或同等批准）。如果您已获得机构审查委员会批准，应在论文中明确说明。
- 我们认识到，相关程序在不同机构和地区之间可能存在显著差异，并希望作者遵守 NeurIPS 道德准则以及所在机构的指南。
- 对于初次投稿，请勿包含任何可能破坏匿名性（如适用）的信息，例如负责审查的机构。

16. **大语言模型使用声明**

问题：如果大语言模型是本研究核心方法中的重要、原创或非标准组成部分，论文是否描述了其使用情况？请注意，如果大语言模型仅用于写作、编辑或排版，且不会影响研究的核心方法论、科学严谨性或原创性，则无需声明。

答案： [不适用]

指南：

• 答案为“不适用”表示，本研究的核心方法开发并未将大语言模型作为任何重要、原创或非标准的组成部分。
• 关于哪些内容应当或不应当描述，请参阅我们的大语言模型政策（https://neurips.cc/Conferences/2025/LLM）。