arXiv:2601.09875v1 [math.OA] 14 Jan 2026

乘积群中格的张量积非交换因子定理

TATTWAMASI AMRUTAM、YONGLE JIANG 和 SHUOXING ZHOU

Abstract. 我们为与乘积格相关的交叉积建立了中间因子定理的一个非交换版本。给定高秩半单代数群中的不可约格 $\Gamma < G = G_1 \times \cdots \times G_d$，以及保迹不可约作用 $G \curvearrowright (\mathcal{N}, \tau)$，我们证明，介于 $\mathcal{N} \rtimes \Gamma$ 与 $(L^\infty(G/P, \nu_P) \otimes \mathcal{N}) \rtimes \Gamma$ 之间的每个冯·诺伊曼代数都是一个形如 $(L^\infty(G/Q, \nu_Q) \otimes \mathcal{N}) \rtimes \Gamma$ 的交叉积。

1. Introduction

高秩格作用的交叉积包含中的中间冯·诺伊曼子代数结构，构成了边界理论、遍历刚性与算子代数之间的桥梁。许多研究致力于更一般的框架，即在对作用（和/或群）施加假设的条件下研究包含关系，例见 [1–3, 5, 27] 及其中的参考文献。与格作用相关的交叉积冯·诺伊曼代数的分析框架，使人们能够在非交换情境中表达刚性现象，并由此在算子代数背景下产生新的“中间因子定理”（例如参见 [12, 18]）。

在交换情形下，中间因子定理刻画了泊松边界与一个保测度Γ–作用的乘积之间所有的中间 Γ–等变因子，其中该因子映到保测度空间上。其非交换对应问题旨在刻画形如 $L(\Gamma) \subset L^\infty(B, \nu_B) \rtimes \Gamma$的交叉积中的中间冯·诺依曼代数，其中$(B, \nu_B)$是$(\Gamma, \mu)$–泊松边界。Houdayer [18], 和 Boutonnet–Houdayer [12], 近期的研究证明了这一观点卓有成效，他们对一大类交叉积包含中的中间子因子给出了完整刻画。特别是，他们的结果表明，在满足适当的自由性（即“奇异性”，例如参见 [7, 8]）和遍历性假设时，每个中间冯·诺伊曼代数都可再次表示为由某个适当的中间 Γ–空间构成的交叉积。

对于 $1 \le i \le d$，令 k_i 为一个局部域。令 $\mathbf{G}_i$ 为一个单连通的 k_i-各向同性、几乎 k_i-单的线性代数 k_i-群，使得 $\sum_{i=1}^d \mathbf{rk}_{k_i}(\mathbf{G}_i) \ge 2$。记 $G_i = \mathbf{G}_i(k_i)$，并令 $G = \prod_{i=1}^d G_i$。令 $\mathbf{P}_i < \mathbf{G}_i$ 为一个极小抛物 k_i-子群，并记作$P_i = \mathbf{P}_i(k_i)$，且令 $P = \prod_{i=1}^d P_i$。我们的主要结果如下。

日期：2026年1月16日。

定理 1.1。 令 G 和 P 如上。令 $\Gamma < G$ 为一个具有有限中心的不可约格，并记 $\Lambda = \Gamma/Z(\Gamma)$。令 $(\mathcal{N}, \tau)$ 为一个保持迹的 G-冯·诺伊曼代数，其中每个 G_i 都遍历地作用，并且 $Z(\Gamma)$ 平凡作用。则每个满足以下条件的冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$

$$\mathcal{N} \rtimes \Lambda \subset \mathcal{M} \subset (L^\infty(G/P, \nu_P)\overline{\otimes}\mathcal{N}) \rtimes \Lambda$$

是某个 $P < Q < G$ 的如下形式的交叉积：$(L^\infty(G/Q, \nu_Q)\otimes\mathcal{N}) \rtimes \Lambda$

上述定理为乘积格的中间因子定理的非交换类比提供了新的例子，并将 Boutonnet-Houdayer 中得到的刚性结果扩展至 [12] 张量积情形。

证明依赖于四个主要要素，基本沿用了 [12]中采用的相同策略。首先，对于 $d \geq 2$，我们充分运用了G_i–连续元素这一概念；该概念由 [8] 引入并研究，随后又在[12]中进一步探讨。粗略地说，我们证明， G_i-连续元素在与迹冯·诺依曼代数 $(\mathcal{N}, \tau)$ 作张量积后仍保持不变。

定理 1.2。 沿用定理 *1.1*中的记号，假设 $d \geq 2$。那么，对每个 $1 \leq i \leq d$， G_i–连续元素在$(L^\infty(G/P, \nu_P)\otimes\mathcal{N}) \rtimes \Lambda$ 中的冯·诺依曼子代数 $\mathcal{M}_i$ $L^\infty(G_i/P_i, \nu_{P_i})$。

其次，对于 $d = 1$，我们需要一个非交换 Nevo-Zimmer 定理的版本，该定理在 [7,11] 中针对一个 k-单连通代数 k-群（秩为$_k(\mathbf{G}) \geq 2$建立，而这直接推论自 [7, 定理 5。4] （见定理2.9）。

第三，我们将 Suzuki [27] 的分析技术与 Bader–Boutonnet–Houdayer–Peterson [8] 的结构论证结合起来，以获得所需的交叉积刚性。如前所述，我们遵循 Boutonnet–Houdayer [12], 采用的策略，并将其调整为实现我们的目标，即提供 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \rtimes \Lambda$。

最后，中间冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 的分类现在归结为理解 Γ-不变系数子代数 $\mathcal{M}_0$ 的结构。利用 Bader-Shalom [6] 和 Stuck-Nevo-Zimmer 的非交换版本（见定理2.8），我们证明每个这样的中间代数 $\mathcal{M}_0$ 都是一个张量积。事实上，我们有以下更一般的结果，无需对格的中心作任何假设。

定理 1.3。 令 G 和 P 如上。令 $\Gamma < G$ 为一个不可约格。令 $(\mathcal{N}, \tau)$ 为一个保迹的 G-冯·诺伊曼代数，其中每个 G_i 都在 $\mathcal{N}$上遍历地作用。那么，任何 Γ-不变的中间冯·诺伊曼代数

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_0 \subset L^\infty(G/P, \nu_P)\overline{\otimes}\mathcal{N}$$

实际上都是形如 $\mathcal{M}_0 = L^\infty(G/Q, \nu_Q)\otimes\mathcal{N}$ 的 G-不变子代数，其中$P \leq Q < G$。

为方便起见。 在本文中，我们假设所有冯·诺依曼代数都具有可分前对偶。

2. Proof of Main results

2.1. G_i-连续元素。 本小节中我们将使用以下记号。设 $d \geq 2$。对于每个 $1 \leq i \leq d$，令 G_i 为局部紧第二可数群，$\mu_i \in \mathrm{Prob}(G_i)$ 为容许的博雷尔概率测度，(B_i, ν_{B_i}) 为 (G_i, μ_i)–泊松边界。令

$$(B, \nu_B) = \prod_{i=1}^{d} (B_i, \nu_{B_i}).$$

那么（B，ν_B）是（G，μ）–泊松边界 [10, 推论 3。2]此外，对于每个$1 \leq i \leq d$，令

$$p_i : G \to G_i \quad \text{and} \quad \hat{p}_i : G \to \prod_{j \neq i} G_j$$

为典范投影。令 $\Gamma < G$ 为一个**不可约格**，即对于每个 i，$\hat{}p_i(\Gamma) < \prod_{j \neq i} G_j$ 是稠密子群。我们回顾 [8, 定义 3.3]中 G_i–连续元素的定义。

定义 2.1。 （G_i–连续元素）令 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 为一个带有正规忠实 Γ-完全正幺映射 $\mathbb{E} : \mathcal{M} \to L^\infty$（$B$，$\nu_B$）的 Γ– 冯 · 诺伊曼代数。令 $\sigma : \Gamma \to \mathrm{Aut}$（$\mathcal{M}$）为自同构作用。若元素 $x \in \mathcal{M}$ 满足：对于任意序列（γ_n）$\subset \Gamma$，只要 p_i（γ_n）$\to e$ 在 G_i中，则有 σ_{γ_n}（x）$\to x$ ⋆在 $\mathcal{M}$中强收敛，则称其为 G_i–连续的。

我们注意到，集合 $\mathcal{M}_i$（由 $\mathcal{M}$ 中所有 G_i 连续元素组成）构成一个 Γ 不变的冯·诺伊曼子代数。此外，作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}_i$ 可扩张为 G_i 在 $\mathcal{M}_i$ 上的连续作用，使得对所有 $j \neq i$，G_j 在 $\mathcal{M}_i$ 上平凡作用（见 [8, 定理 5.5]）。证明和主要结果中使用的一个主要工具，是在与一个保持迹的 Γ 冯·诺伊曼代数作张量积的过程中，G_i 连续元素的不变性（$\mathcal{N}$，τ）。为方便起见，我们也用 $\mathcal{C}_i(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 中 G_i 连续元素构成的子代数。

设 $(\mathcal{N}, \tau)$ 是一个保持迹的 Γ 冯·诺伊曼代数。回忆一下，对于局部紧第二可数群 H，**拟中心** $QZ(H)$ 是由所有满足中心化子 $Z_H(h)$ 在 H 中为开集的元素 $h \in H$ 构成的子群（不一定是闭群）。我们有 $Z(H) < QZ(H)$。

定理 2.2。 假设 Γ 具有有限中心，且 Z（Γ）在 $\mathcal{N}$上平凡作用，并且对于每个 $1 \leq i \leq d$、QZ（G_i）$= Z$（G_i）。令 $\Lambda = \Gamma / Z$（Γ）。则

$$\mathcal{C}_i\left((L^\infty(B, \nu_B) \overline{\otimes} \mathcal{N}) \rtimes \Lambda\right) = \mathcal{C}_i\left(L^\infty(B_i, \nu_{B_i}) \overline{\otimes} \mathcal{N}\right).$$

证明。不失一般性，我们可以假设 $d = 2$ 并考虑 $i = 1$的情形。沿用 [12, 定理 2.1 和推论 2.3], 的证明，我们得到

$$\mathcal{C}_1\left((L^\infty(B, \nu_B) \overline{\otimes} \mathcal{N}) \rtimes \Lambda\right) = \mathcal{C}_1\left(L^\infty(B, \nu_B) \overline{\otimes} \mathcal{N}\right).$$

令 $f \in L^\infty(B_2, L^\infty(B_1)\bar{\otimes}\mathcal{N}) \cong L^\infty(B)\bar{\otimes}\mathcal{N}$ 为一个 G_1-连续元素，且 $y \in L^\infty(B_1)\bar{\otimes}\mathcal{N}$ 为 f的一个本质值。我们只需证明 $\|f - 1 \otimes y\|_{\nu_{B_2}} = 0$。固定 $\epsilon > 0$。令 $E_\epsilon = \{b \in B_2 \mid \|f(b) - y\|_{\nu_{B_1}\otimes\tau} < \epsilon\}$。于是，根据 [12, 引理 2.2],，存在一个序列 $(\gamma_n) \subset \Gamma$，使得 $\nu_{B_2}(p_2(\gamma_n)E_\epsilon) \to 1$ 且 $p_1(\gamma_n) \to e$。

为证明 $\|f - 1 \otimes y\|_{\nu_{B_2}} = 0$，我们将沿用 [8, 引理 5.4] 的证明。首先，我们将证明，通过取 (γ_n) 的某个子序列，我们有 $\|\sigma_{p_1(\gamma_n)}y - y\|_{\nu_{B_1}\otimes\tau} \to 0$。

沿用 [25, 命题 1.14], 的证明，通过取一个子序列，我们可以假设 $\frac{\mathrm{d}p_1(\gamma_n)^{-1}\nu_{B_1}}{\mathrm{d}\nu_{B_1}} \Rightarrow \mathbb{1}_{B_1}$ 在 B_1 上几乎处处逐点成立。由于 $\left(\frac{\mathrm{d}p_1}{(\gamma_n)\nu_{B_1}}^{-1}\nu_{B_1}\right)\mathrm{d}$ 关于 $\|\cdot\|_{L^1(B_1,\nu_{B_1})}$ 一致有界，我们有 $\|\frac{\mathrm{d}p_1}{(\gamma_n)^{-1}\nu_{B_1}\mathrm{d}\nu_{B_1}} - \mathbb{1}_{B_1}\|_{L^1(B_1,\nu_{B_1})} \to 0$。因此，我们还得到泛函范数 $\|(\nu_{B_1} \otimes \tau) \circ \sigma_{\gamma_n} - \nu_{B_1} \otimes \tau\| \to 0$。并且我们有

$$\begin{aligned}
&\nu_{B_2}(E_\epsilon \cap p_2(\gamma_n)E_\epsilon) \cdot \|\sigma_{p_1(\gamma_n)}y - y\|^2_{\nu_{B_1}\otimes\tau} \\
\leq& 3\int_{E_\epsilon\cap p_2(\gamma_n)E_\epsilon} \|\gamma_n f(\gamma_n^{-1}b) - f(b)\|^2_{\nu_{B_1}\otimes\tau}\mathrm{d}\nu_{B_2}(b) \\
&+ 3\int_{E_\epsilon\cap p_2(\gamma_n)E_\epsilon} \|f(b) - y\|^2_{\nu_{B_1}\otimes\tau}\mathrm{d}\nu_{B_2}(b) \\
&+ 3\int_{E_\epsilon\cap p_2(\gamma_n)E_\epsilon} \|\gamma_n f(\gamma_n^{-1}b) - \gamma_n y\|^2_{\nu_{B_1}\otimes\tau}\mathrm{d}\nu_{B_2}(b) \\
:=&3X_n + 3Y_n + 3Z_n.
\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，由于 $\nu_{B_2}(E_\epsilon \cap p_2(\gamma_n)E_\epsilon) \to \nu_{B_2}(E_\epsilon)$，我们有

$$X_n \leq \|\sigma_{\gamma_n}f - f\|^2_{\nu_{B_2}\otimes\nu_{B_1}\otimes\tau} \to 0;$$

$$Y_n \leq \int_{E_\epsilon\cap p_2(\gamma_n)E_\epsilon} \epsilon^2\mathrm{d}\nu_{B_2}(b) \to \epsilon^2 \cdot \nu_{B_2}(E_\epsilon);$$

设 $f_n = (b \mapsto f(\gamma_n^{-1}b) - y) \in L^\infty(B_2, L^\infty(B_1)\bar{\otimes}\mathcal{N})$。那么，对于 $b \in p_2(\gamma_n)E_\epsilon$，$\|f_n\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ 和 $\|f_n(b)\|_{\nu_{B_1}\otimes\tau} \leq \epsilon$。因此我们有

$$\begin{aligned}
Z_n =& \int_{E_\epsilon\cap p_2(\gamma_n)E_\epsilon} \|\gamma_n(f_n(b))\|^2_{\nu_{B_1}\otimes\tau}\mathrm{d}\nu_{B_2}(b) \\
=& \int_{E_\epsilon\cap p_2(\gamma_n)E_\epsilon} (\nu_{B_1} \otimes \tau)((\gamma_n - 1)(f_n(b)^*f_n(b))) + (\nu_{B_1} \otimes \tau)((f_n(b)^*f_n(b)))\mathrm{d}\nu_{B_2}(b) \\
\leq& \int_{E_\epsilon\cap p_2(\gamma_n)E_\epsilon} \|(\nu_{B_1} \otimes \tau) \circ \sigma_{\gamma_n} - \nu_{B_1} \otimes \tau\| \cdot \|f_n\|^2_\infty + \epsilon^2\mathrm{d}\nu_{B_2}(b) \\
\to& \epsilon^2 \cdot \nu_{B_2}(E_\epsilon).
\end{aligned}$$

因此，

$$\nu_{B_2}(E_\epsilon) \cdot \limsup_n \|\sigma_{p_1(\gamma_n)}y - y\|^2_{\nu_{B_1}\otimes\tau} \leq \limsup_n 3(X_n + Y_n + Z_n) \leq 6\epsilon^2 \cdot \nu_{B_2}(E_\epsilon).$$

由此可得，对任意 $\epsilon > 0$，均有 $\limsup_n \|\sigma_{p_1(\gamma_n)}y - y\|^2_{\nu_{B_1}\otimes\tau} \leq 6\epsilon^2$。因此，我们有$\|\sigma_{p_1(\gamma_n)}y - y\|_{\nu_{B_1}\otimes\tau} \to 0$。

现在沿用 [8, 引理 54], 的相同证明，我们得到 $\|f - 1 \otimes y\|_{\nu_{B_2}} = 0$，由此完成证明。□

如前所述，G_i-连续元素的函子性在与迹冯·诺依曼代数作张量积时表现良好。我们将在下文将其精确表述。

定理 2.3。 $L^\infty(B_i, \nu_{B_i})\bar{\otimes}\mathcal{N} \cong L^\infty(B_i, \mathcal{N})$ 中的 G_i-连续元素构成的子代数是 $L^\infty(B_i, \nu_{B_i})\bar{\otimes}\mathcal{C}_i(\mathcal{N}) \cong L^\infty(B_i, \mathcal{C}_i(\mathcal{N}))$。

证明。不失一般性，我们仍可假设 $d = 2$，并考虑 $i = 1$ 的情形。包含关系 $L^\infty(B_1, \nu_{B_1})\bar{\otimes}\mathcal{C}_1(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}_1(L^\infty(B_1, \nu_{B_1})\bar{\otimes}\mathcal{N})$ 显然成立。

反之，假设 $f \in L^\infty(B_1, \mathcal{N})$ 是一个 G_1-连续元素。取 f 的一个本质值 $y \in \mathcal{N}$。那么我们只需证明 $y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{N})$。对于任意$\epsilon > 0$，令

$$E_\epsilon = \{b \in B_1 \mid \|f(b) - y\|_{\tau,2} < \epsilon\}.$$

那么 $\nu_{B_1}(E_\epsilon) > 0$。取一个序列 $(\gamma_n) \subset \Gamma$，使得 $p_1(\gamma_n) \to e$ 属于 G_1。那么对于 $b \in E_\epsilon \cap \gamma_n E_\epsilon$，我们有

$$\begin{aligned}
&\|\gamma_n y - y\|_{\tau,2}\\
\leq&\|\gamma_n f(\gamma_n^{-1}b) - f(b)\|_{\tau,2} + \|\gamma_n f(\gamma_n^{-1}b) - \gamma_n y\|_{\tau,2} + \|f(b) - y\|_{\tau,2}\\
\leq&\|\gamma_n f(\gamma_n^{-1}b) - f(b)\|_{\tau,2} + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\nu_{B_1}(E_\epsilon \cap \gamma_n E_\epsilon) \cdot \|\gamma_n y - y\|^2_{\tau,2}\\
\leq&8\epsilon^2 \cdot \nu_{B_1}(E_\epsilon \cap \gamma_n E_\epsilon) + 2\int_{E_\epsilon\cap\gamma_n E_\epsilon} \|\gamma_n f(\gamma_n^{-1}b) - f(b)\|^2_{\tau,2} \mathrm{d}\nu_{B_1}(b)\\
\leq&8\epsilon^2 \cdot \nu_{B_1}(E_\epsilon \cap \gamma_n E_\epsilon) + 2\|\sigma_{\gamma_n}(f) - f\|^2_{\nu_{B_1}\otimes\tau,2}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{1}_{E_\omega}$ 和 f 是 G_1-连续的，当 $n \to \infty$ 时，我们有 $\nu_{B_1}(E_\epsilon\cap\gamma_n E_\epsilon) \to \nu_{B_1}(E_\epsilon)$ 且 $\|\sigma_{\gamma_n}(f) - f\|_{\nu_{B_1}\otimes\tau,\ 2} \to 0$。因此，对于任意$\epsilon > 0$，有 $\limsup_n \|\gamma_n y - y\|^2_{\tau,\ 2} \leq 8\epsilon^2$。于是 $y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{N})$ 且 $f \in L^\infty(B_1,\ \mathcal{C}_1(\mathcal{N}))$。□

现在陈述使我们能够得到 $\mathcal{C}_i(\mathcal{N}) = \mathbb{C}$ 的条件。按照[13, 20], ，回顾一下，局部紧第二可数群 H 若其在无原子概率空间上的任意遍历保概率作用必为混合作用，则称其具有 **Howe-Moore 性质**。例如，对于局部域 k，任何单连通的 k-各向异性、几乎 k-单的线性代数 k-群（即使秩为 1）都具有 Howe-Moore 性质 [20]。

定理 2.4。设 $d \geq 2$。假设对于每个 $1 \leq i \leq d$，G_i 都具有 *Howe-Moore* 性质，并且$(\mathcal{N}, \tau)$ 存在一个保迹的 G-作用，它扩张了 Γ-作用。再假设对于每个 $1 \leq i \leq d$，$\mathcal{N}$ 都是 G_i-遍历的。那么

(i) $\mathcal{C}_i(\mathcal{N})=\mathbb{C}$; (ii) 任意 Γ-不变的中间冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{M}_0$，

满足

$$\mathcal{N}\subset\mathcal{M}_0\subset\mathcal{N}\overline{\otimes}L^\infty(B,\nu_B)$$

is of the form $\mathcal{M}_0=\mathcal{N}\overline{\otimes}L^\infty(C,\nu_C)$ *for a* (G,μ)*-boundary* (C,ν_C).

证明。(i) 不妨设 $i=1$，并令 $G_1=\prod_{j\neq 1}G_j$。由 [8, 定理 5.6]，我们有 $\mathcal{C}_1(\mathcal{N})\cong\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\mathcal{N})^{G_1}=(L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{N})^{G_1}$。由于 N 已经是一个 G-冯·诺伊曼代数，诱导的 G-作用在 $L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{N}$ 上恰好是对角 G-作用。由于 $\Gamma<G$ 是不可约的，按照 [26, 引理 5.1],的证明，对于每个 j，$G_j\curvearrowright(G/\Gamma,m_\Gamma)$ 都是遍历的，其中 m_Γ 是 G/Γ 上唯一的 G-不变概率测度。此外，由于每个 G_j 都具有 Howe-Moore 性质，$G_j\curvearrowright(G/\Gamma,m_\Gamma)$ 是混合的，因而是弱混合的；对于保概率测度作用，这等价于度量遍历。因此，由 [6, 引理 2.4]，对于每个 j，$G_j\curvearrowright L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{N}$ 是遍历的。并且我们有

$$\mathcal{C}_1(\mathcal{N})\cong(L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{N})^{\hat{G}_1}\subset(L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{N})^{G_2}=\mathbb{C}.$$

(ii) 通过考察诱导的 G-作用，我们得到以下G-冯·诺伊曼代数的包含关系

$$L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{N}\subset L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{M}_0\subset(L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{N})\overline{\otimes}L^\infty(B,\nu_B).$$

如上文所述，我们知道，对于每个 i，$L^\infty(G/\Gamma,\ m_\Gamma)\overline{\otimes}(\mathcal{N},\ \tau)$ 是一个保迹的G-冯·诺伊曼代数，且具有 G_i-遍历性。因此，由 [6, 定理 1.1],可知，存在一个 $(G,\ \mu)$-边界 $(C,\ \nu_C)$，使得

$$L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{M}_0=(L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}\mathcal{N})\overline{\otimes}L^\infty(C,\nu_C). \tag{1}$$

考虑完全正幺映射 $m_\Gamma\otimes\mathrm{id}\colon L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}(\mathcal{N}\overline{\otimes}L^\infty(B,\ \nu_B))\to\mathcal{N}\overline{\otimes}L^\infty(B,\ \nu_B)$分别作用于（1）的两侧，可得

$$\mathcal{M}_0=\mathcal{N}\overline{\otimes}L^\infty(C,\nu_C).$$

注意，上文中，当我们写 m_Γ 时，我们将测度视为通过对 m_Γ 积分所得到的态。□

2.2. **中间子代数作为交叉积**。在本小节中，设Λ 为一个可数离散群，$(B,\ \nu_B)$ 为一个非奇异 Λ-空间，且 $(\mathcal{N},\ \tau)$ 为一个保迹的 Λ-冯·诺伊曼代数。我们用 $\mathbb{E}$ 表示从 $(L^\infty(B,\ \nu_B)\overline{\otimes}\mathcal{N})\rtimes\Lambda$ 到$L^\infty(B,\ \nu_B)\overline{\otimes}\mathcal{N}$ 上的典范条件期望。

我们先介绍以下命题，其内容与 [27,定理3.6]的证明。

命题 2.5. 考虑一个 Λ-冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{M}$，它是 $(L^\infty(B,\nu_B)\overline{\otimes}\mathcal{N})\rtimes\Lambda$的子代数。假设 $\mathcal{M}$ 包含 $L^\infty(Y,\eta)$，其中 (Y,η) 是 (B,ν_B) 的本质自由因子。那么，$\mathbb{E}(\mathcal{M})\subset\mathcal{M}$。

证明. 设 $a \in \mathcal{M}$ 和 $\epsilon > 0$ 已给定。我们可以找到 $f_1, f_2, \ldots, f_k \in L^\infty(B, \nu_B)$,$n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathcal{N}$，以及 $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \Lambda \setminus \{e\}$，使得

$$a \approx_\epsilon \sum_{i=1}^{k} (f_i \otimes n_i)\lambda(s_i) + \mathbb{E}(a).$$

根据我们的假设，作用 $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$ 本质上是自由的。由[27, 定理 3.6], 的证明可知，对于每个 $a \in L^\infty(B, \nu_B) \rtimes_{\text{alg}} \Lambda$，我们可以找到两两正交的投影 $p_1, p_2, \ldots, p_n \in L^\infty(Y, \eta)$，使得 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ 且对所有$i = 1$，2，$\ldots$，n，以及 $j = 1$，2，$\ldots$，k，均有 $p_i(s_j p_i) = 0$。现在我们观察到

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} (p_j \otimes 1_{\mathcal{M}}) \left(\sum_{i=1}^{k} (f_i \otimes n_i)\lambda(s_i) + \mathbb{E}(a) \right) (p_j \otimes 1_{\mathcal{M}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (p_j f_i \otimes n_i)(s_i p_j \otimes 1_{\mathcal{M}})\lambda(s) + \mathbb{E}(a) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (p_j (s_i p_j) f_i \otimes n_i)\lambda(s) + \mathbb{E}(a) \\
&= \mathbb{E}(a).
\end{aligned}$$

现在，利用三角不等式作标准逼近论证可得，$\sum_{j=1}^{n} p_j a p_j$ 逼近 $\mathbb{E}(a)$。由于 $L^\infty(Y, \eta) \subset \mathcal{M}$，因此可得 $\sum_{j=1}^{n} p_j a p_j \in \mathcal{M}$。于是，对所有 $a \in \mathcal{M}$，均有 $\mathbb{E}(a) \in \mathcal{M}$。命题得证。□

我们提炼出以下关于环境交叉积中不变子代数的结构性结果，这使我们能够确定当 $\mathcal{M}$ 是不变子代数时它的位置。令 $\mathbb{E}_\tau \colon L^\infty(B, \nu_B) \bar{\otimes} \mathcal{N} \to L^\infty(B, \nu_B)$ 表示切片映射（它也是一个 Λ-等变条件期望），其定义为将 $f \otimes n \to f\tau(n)$ 送至相应元素。

命题 2.6. 设 $\mathcal{M}$ 是 $(L^\infty(B, \nu_B) \bar{\otimes} \mathcal{N}) \rtimes \Lambda$ 的一个 Λ-不变子代数，且包含 $\mathcal{N}$。假设 $\Phi|_{\mathcal{M}} := \mathbb{E}_\tau \circ \mathbb{E}\big|_{\mathcal{M}}$ 满足 $\Phi(\mathcal{M}) = \mathbb{C}$。那么，$\mathbb{E}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$。

证明。固定 $x \in \mathcal{M}$，并假设 $\mathbb{E}(x) = \int_B^\oplus x_b \in L^\infty(B, \mathcal{N}) \cong L^\infty(B) \bar{\otimes} \mathcal{N}$。取一个弱稠密序列 $(y_n) \subset (\mathcal{N})_1$。由于 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$，对每个 n，都有 $y_n x \in \mathcal{M}$。由于 $\Phi(y_n x) = \int_B^\oplus \tau(y_n x_b) \in \mathbb{C}$，存在 $c_n \in \mathbb{C}$ 以及一个余零测集 $E_n \subset B$，使得对每个 $b \in E_n$，都有 $\tau(y_n x_b) = c_n$。令 $E = \cap_n E_n \subset B$。那么，E 是 B 的一个余零测集。此外，对于任意 $b_1, b_2 \in E$，以及任意 $n \geq 1$，$\tau(y_n x_{b_1}) = \tau(y_n x_{b_2}) = c_n$。由于 $(y_n) \subset (\mathcal{N})_1$ 弱稠密，我们必有 $x_{b_1} = x_{b_2}$。因此，存在 $x_0 \in \mathcal{N}$，使得对任意 $b \in E$，都有 $x_b = x_0$。此外，由于 E 是 B 的一个余零测集。我们有

$$\mathbb{E}(x) = \int_B^\oplus x_b = 1 \otimes x_0 \in \mathcal{N}.$$

因此，由 $x \in \mathcal{M}$ 的任意性，我们有 $\mathbb{E}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$。□

2.3. 张量积与 IFT。设 k 是一个局部域。设 G 是一个连通、单连通的半单代数 k-群，不含 k-各向异性的几乎 k-单子群，且 $\mathrm{rk}_k(\mathrm{G}) \geq 2$。令 $G = \mathrm{G}(k)$。设 P $<$G 是一个极小抛物k-子群，并令 $P = \mathrm{P}(k)$。对于一个 G-冯·诺伊曼代数 M，我们用 Sub(M) 表示 M 的冯·诺伊曼子代数空间，该空间赋有 Effros-Mar´echal 拓扑 [15, 23]。回顾一下，不变随机子代数（IRA）是一个 G-不变的博雷尔概率测度 $\nu \in$Prob(Sub(M)) [4, 28]。

引理 2.7（乘积上的遍历 IRA）。设 ν 是 $\mathrm{Sub}\big(L^\infty(G/P, \nu_P)\big)$ 上的一个 *IRA*，且它是 G-不可约的，也就是说，对于每个非中心正规子群 $H < G$，ν 都是 H-遍历的。则存在一个 G-不变的冯·诺伊曼子代数 $L^\infty(G/Q, \nu_Q) \subset L^\infty(G/P, \nu_P)$，使得

$$\nu = \delta_{L^\infty(G/Q, \nu_Q)}.$$

证明。我们用 E 表示集合 $\mathrm{Sub}\big(L^\infty(G/P, \nu_P)\big)$。考虑以下截面空间的集合。

$$\mathcal{U}^\infty(E[\nu]) := \{ s : E \to L^\infty(G/P, \nu_P) : s \text{ is } \nu\text{-measurable} \},$$
$$S^\infty(E[\nu]) := \{ s \in \mathcal{U}^\infty(E[\nu]) : s(A) \in A \text{ for } \nu\text{-a.e. } A \in E \}.$$

接下来，我们断言

$$L^\infty(E, \nu) \subseteq S^\infty(E[\nu]) \subseteq L^\infty(E, \nu) \bar{\otimes} L^\infty(G/P, \nu_P).$$

事实上，第一个包含关系成立，因为我们可以将 $f \in L^\infty(E, \nu)$ 视为由下式定义的 $s_f : E \to L^\infty(G/P, \nu_P)$：

$$s_f(A) = f(A) \cdot \mathbf{1}_{L^\infty(G/P, \nu_P)},$$

它的像落在 $S^\infty(E[\nu])$ 中。对于第二个包含关系，令

$$\mathcal{U}^\infty(E[\nu]) \cong L^\infty(E \times G/P, \nu \otimes \nu_P) \cong L^\infty(E, \nu) \bar{\otimes} L^\infty(G/P, \nu_P).$$

现在，利用 [22, 定理 1.1]，，存在一个 G-不变子代数 $L^\infty(G/Q, \nu_Q) \subset L^\infty(G/P, \nu_P)$，使得

$$S^\infty(E[\nu]) = L^\infty(E, \nu) \bar{\otimes} L^\infty(G/Q, \nu_Q).$$

因此，ν-几乎处处，$A \in E$ 是 $L^\infty(G/Q, \nu_Q)$ 的子代数。此外，对于任意 $F \in L^\infty(G/Q, \nu_Q)$，常值映射 $A \in E \mapsto F$ 属于 S^∞，也就是说，存在一个 ν-余零子集 $E_F \subset E$，使得对于任意 $A \in E_F$，都有 $F \in A$。取一个弱稠密序列 $(F_n) \subset L^\infty(G/Q, \nu_Q)$，并令 $E_0 = \cap_n E_n$。则 E_0 仍然是 E的一个 ν-余零子集，且对于任意 $A \in E_0$，$L^\infty(G/Q, \nu_Q) = \{F_n\}'' \subset A$。因此，$\nu = \delta_{L^\infty(G/Q, \nu_Q)}$。证明至此完成。□

在确立了对 G-不变张量积的结构性认识后，我们现在转而关注交叉积中的 Γ-不变子代数。刚性论证的一个核心环节是确定中间子代数何时包含一个几何边界的副本。这一结果可视为 Nevo-Stuck-Zimmer 中间因子定理的非交换类比。该结果推广了 [22, 定理 1.1]。

定理 2.8。 设 (N,τ) 是一个保迹的 G-冯·诺伊曼代数，且是 G-不可约的，即对于每个非中心正规子群 $H < G$， N 都是 H-遍历的。考虑一个 G-不变的冯·诺伊曼子代数

$$(N,\tau) \subseteq (M,\tau) \subseteq (N,\tau) \bar{\otimes} L^\infty(G/P,\nu_P),$$

then

$$(M,\tau) = (N,\tau) \bar{\otimes} L^\infty(G/Q,\nu_Q)$$

对于某个 G-不变子代数 $L^\infty(G/Q, \nu_Q) \subseteq L^\infty(G/P, \nu_P)$。

证明。 我们使用与上文相同的技巧。证明分为两个步骤。设

$$Z(N,\tau) = L^\infty(X,\mu).$$

根据我们的假设可知，(X, μ) 是一个不可约的 G-空间，即每个非中心正规子群都在 (X, μ) 上遍历地作用。记

$$M = \int_X^\oplus M_x \,\mathrm{d}\mu(x), \quad N = \int_X^\oplus N_x \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Let

$$Y = \{x \in X \mid N_x = \mathbb{C}\}, \quad Z = \{x \in X \mid N_x \neq \mathbb{C}\}.$$

由遍历性可知，要么 $\mu(Y) = 0$，要么为 1。假设 $\mu(Y) = 0$。那么对于 μ-几乎处处的 $x \in X$，我们有 $N_x \neq \mathbb{C}$。在这种情况下，根据 [14, 第二部分第 3 章 3.3 节中的定理 4 (ii)] 可得

$$N_x \subseteq M_x \subseteq N_x \bar{\otimes} L^\infty(G/P,\nu_P).$$

由于 N_x 是因子，利用 Ge-Kadison 分裂结果 [16], ，我们可知 t

$$M_x = N_x \bar{\otimes} \mathcal{A}_x,\ \mathcal{A}_x \subseteq L^\infty(G/P,\nu_P).$$

考虑如下定义的 Subalg 映射

$$\mathrm{Subalg} : X \longrightarrow \mathrm{Subalg}\left(L^\infty(G/P,\nu_P)\right),\ x \longmapsto \mathcal{A}_x.$$

命题 1. *Subalg* 是 G-等变且可测的。

命题 *1* 的证明。 注意， G-等变性源于 M 和N 均为 G-不变，因此 $gM_xg^{-1} = M_{gx}$ 和 $gN_xg^{-1} = N_{gx}$ 对 μ-几乎处处成立$x \in X$。

现在，我们只需证明映射 Subalg 是可测的。任取子代数$\mathcal{A} \subseteq L^\infty(G/P, \nu_P)$、有限子集 $F \subset L^\infty(G/P, \nu_P)$，以及 $\varepsilon > 0$。记$E_{\mathcal{A}}\colon L^\infty(G/P, \nu_P) \to \mathcal{A}$ 为典范迹保持条件期望。根据 [17, 注 2。11], 我们只需证明

$$\left\{x \in X \mid \sup_{f\in F} \|E_{\mathcal{A}}(f) - E_{\mathcal{A}_x}(f)\|_2^2 < \varepsilon\right\} \text{ is } \mu\text{-measurable.}$$

只需验证，对于所有 $\xi, \eta \in L^2(G/P,\nu_P)$，映射

$$x \mapsto \langle E_{\mathcal{A}_x}(f)\xi, \eta\rangle$$

是 μ-可测的。注意，

$$E_M(1\otimes f)=\int_X^{\oplus} E_{M_x}(f)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_X^{\oplus} 1\otimes E_{\mathcal{A}_x}(f)d\mu(x).$$

这里，$E_M\colon N\bar{\otimes}L^\infty(G/P,\ \nu_P)\to M$、$E_{M_x}\colon N_x\bar{\otimes}L^\infty(G/P,\ \nu_P)\to M_x$和$E_{\mathcal{A}_x}:L^\infty(G/P,\ \nu_P)\to\mathcal{A}_x$是条件期望。我们看到

$$x\mapsto\langle E_{\mathcal{A}_x}(f)\xi,\eta\rangle=\langle(E_M(1\otimes f))_x(1\otimes\xi),1\otimes\eta\rangle,$$

是 μ-可测，根据间接积分理论，例如由 [14, 第二部分第 2 章 2.1 中的命题 1]。□

因此

$$\mathrm{Subalg}_*\mu\in\mathrm{IRA}(L^\infty(G/P),\nu_P).$$

利用引理2.7，我们看到存在某个 G-不变冯·诺伊曼子代数$L^\infty(G/Q,\ \nu_Q)\subseteq L^\infty(G/P,\ \nu_P)$,

$$\mathrm{Subalg}_*\mu=\delta_{L^\infty(G/Q,\nu_Q)}.$$

因此可得，对于 μ-几乎处处的 $x\in X$,

$$\mathcal{A}_x=L^\infty(G/Q,\nu_Q).$$

因此，我们有

$$M=\int_X^{\oplus} M_x\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_X^{\oplus} N_x\ \bar{\otimes}\ L^\infty(G/Q,\nu_Q)\,\mathrm{d}\mu(x)=N\ \bar{\otimes}\ L^\infty(G/Q,\nu_Q).$$

现在，考虑 $\mu(Y)=1$ 的情形。此时，我们有

$$N=\int_X^{\oplus}\mathbb{C}\,\mathrm{d}\mu(x)=L^\infty(X,\mu),$$

因此，我们归结为以下情形

$$L^\infty(X,\mu)\subseteq M\subseteq L^\infty(X,\mu)\ \bar{\otimes}\ L^\infty(G/P,\nu_P),$$

并且 M 由 [22, 定理 11]分解。□

现在证明 [7, 11] 中为一个 $\mathbf{rk}_k(\mathbf{G})\geq 2$ 的 k-单连通代数 k-群所建立的非交换 Nevo-Zimmer 定理的一个版本。证明可直接由 [7, 定理 5.4] 得出。为完整起见，我们给出证明。

定理 *2.9*。设 k 为局部域。设 G 是一个单连通 k-各向异性几乎k-单线性代数 k-群，满足 $\mathrm{rk}_k(G)\geq 2$，并令 $G=G(k)$。设 $P<G$ 是一个极小抛物 k-子群，并令 $P=P(k)$。设 $\Gamma<G$ 为一个格，且 $(\mathcal{N},\tau)$ 为一个保迹遍历 G-冯·诺伊曼代数，使得 $Z(\Gamma)$ 在 $\mathcal{N}$ 上平凡作用。令 $\Lambda=\Gamma/Z(\Gamma)$，并令 $\Phi:=\mathbb{E}_\tau\circ\mathbb{E}:(L^\infty(G/P,\nu_P)\bar{\otimes}\mathcal{N})\rtimes\Lambda\to L^\infty(G/P,\nu_P)$ 为典范条件期望。那么，对于任意 Γ-不变冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}\subset(L^\infty(G/P,\nu_P)\bar{\otimes}\mathcal{N})\rtimes\Lambda$，以下二分结论成立：

- 或者 Φ 是 Γ-不变的，即 $\Phi(\mathcal{M})=\mathbb{C}1$。

- 或者存在一个真抛物 k-子群 $\mathbf{P} < \mathbf{Q} < \mathbf{G}$ 以及一个 Γ-等变的幺正正规嵌入 $\iota : L^\infty(G/Q) \hookrightarrow \mathcal{M}$，其中 $Q = \mathbf{Q}(k)$ 满足 $\mathbb{E} \circ \iota : L^\infty(G/Q) \hookrightarrow L^\infty(G/P)$ 是规范幺正正规嵌入。特别地，$L^\infty(G/Q) \subset \mathcal{M} \cap L^\infty(G/P)$。

证明。由于泊松边界作用 $G \curvearrowright (G/P, \nu_P)$ 是度量遍历的，且度量遍历性可传递到格 [9, 的限制作用（推论 6.7],），我们得知 Γ，因而 Λ，也在 $(G/P, \nu_P)$ 上度量遍历地作用。根据定理 4.1], [24, ，存在一个全支撑测度 $\mu_\Gamma \in$Prob(Γ)，使得 ν_P 是 μ_Γ-平稳的。令 $\pi : \Gamma \to \Lambda$ 为商映射，且 $\mu_\Lambda = \pi_* \mu_\Gamma$。由于 $Z(\Gamma)$ 在 G/P 上平凡作用，我们得知 ν_P 也是 μ_Λ-平稳的。按照 R´emi Boutonnet 在引理 2.16] [21, 和引理 2.4], [6, 中给出的相同证明，由于 Λ 是 ICC（引理 2.6]_ [19,），且 $\nu_P \otimes \tau$ 在 $L^\infty(G/P, \nu_P) \overline{\otimes} \mathcal{N}$ 上是 μ_Λ-平稳的，我们有

$$((L^\infty(G/P, \nu_P) \overline{\otimes} \mathcal{N}) \rtimes \Lambda)^\Lambda = (L^\infty(G/P, \nu_P) \overline{\otimes} \mathcal{N})^\Lambda = \mathcal{N}^\Lambda = \mathcal{N}^\Gamma.$$

根据 [11, 第 2.1]小节，$\Gamma \curvearrowright \mathcal{N}$ 遍历当且仅当诱导作用

$$G \curvearrowright \mathrm{Ind}_\Gamma^G(\mathcal{N}) = L^\infty(G/\Gamma, m_\Gamma) \overline{\otimes} \mathcal{N}$$

是遍历的。注意到 $\mathcal{N}$ 已经是一个 G-冯·诺伊曼代数，因此在 $L^\infty(G/\Gamma, m_\Gamma)$ 上的诱导 G-作用是对角作用。此外，由于 G 具有 Howe–Moore 性质，且 $G \curvearrowright (G/\Gamma, m_\Gamma)$是遍历的，我们有 $G \curvearrowright (G/\Gamma, m_\Gamma)$是混合的，因而是度量遍历的。此外，由于 $\mathcal{N}$ 是 G-遍历的，根据 [6, 引理 2.4], ，我们有 $G \curvearrowright L^\infty(G/\Gamma, m_\Gamma) \overline{\otimes} \mathcal{N}$ 是遍历的，这等价于 $\mathcal{N}^\Gamma = \mathbb{C}$。因此，$\Gamma \curvearrowright (L^\infty(G/P, \nu_P) \overline{\otimes} \mathcal{N}) \rtimes \Lambda$ 是遍历的。特别地，$\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 是遍历的。应用 [7, 定理 5.4], ，证明完成。□

2.4. **代数群主要结果的证明。**

定理 1.2 的证明。沿用 [12, 定理 3.3], 的证明，我们有 $QZ(G_i) = Z(G_i)$，其中 $1 \le i \le d$。因此，由定理 2.2 可知，$(L^\infty(G/P, \nu_P) \overline{\otimes} \mathcal{N}) \rtimes \Lambda$ 中由 G_i–连续元素构成的冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{M}_i$ 恰好是$\mathcal{C}_i(L^\infty(G_i/P_i, \nu_{P_i}) \overline{\otimes} \mathcal{N})$。由定理 2.3 可得

$$\mathcal{C}_i(L^\infty(G_i/P_i, \nu_{P_i}) \overline{\otimes} \mathcal{N}) = L^\infty(G_i/P_i, \nu_{P_i}) \overline{\otimes} \mathcal{C}_i(\mathcal{N}).$$

最后，由定理 2.4 (i) 可得 $\mathcal{C}_i(\mathcal{N}) = \mathbb{C}$。 □

定理 *1.3*的证明。 当 $d \ge 2$时，由定理 2.4 (ii) 可得 .

当 $d = 1$ 时，考虑诱导的 G-作用，我们有以下 G-冯·诺伊曼代数的包含关系

$$L^\infty(G/\Gamma) \overline{\otimes} \mathcal{N} \subset L^\infty(G/\Gamma) \overline{\otimes} \mathcal{M}_0 \subset (L^\infty(G/\Gamma) \overline{\otimes} \mathcal{N}) \overline{\otimes} L^\infty(G/P, \nu_P).$$

我们可以援引定理2.8 得出结论：

$$L^\infty(G/\Gamma) \overline{\otimes} \mathcal{M}_0 = L^\infty(G/\Gamma) \overline{\otimes} \mathcal{N} \overline{\otimes} L^\infty(G/Q, \nu_Q),\ P < Q < G.$$

通过应用完全正幺映射

$$m_\Gamma \otimes \mathrm{id} : L^\infty(G/\Gamma)\overline{\otimes}(\mathcal{N}\overline{\otimes}L^\infty(G/P,\nu_P)) \to \mathcal{N}\overline{\otimes}L^\infty(G/P,\nu_P)$$

在上述等式两边作用，得到

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{N}\overline{\otimes}L^\infty(G/Q,\nu_Q).$$

□

现在我们开始证明定理 1.1。与以往的证明类似，证明分为两种情况。第一种情况是 Γ-等变条件期望 $\mathbb{E}_\tau \circ \mathbb{E}$ 是 Γ-不变的。在这种情况下，我们证明 $\mathcal{M} = \mathcal{N} \rtimes \Lambda$。另一种情况是 $\mathbb{E}_\tau \circ \mathbb{E}$ 不是 Γ-不变的。

定理 *1.1* 的证明。 首先，假设 $\mathbb{E}_\tau \circ \mathbb{E}$ 是 Γ-不变的。由命题 2.6 可知 $\mathbb{E}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$。由于 $\mathcal{M}$ 是一个中间代数，因此$\mathbb{E}(x\lambda(s)^*) \in \mathcal{N}$ 对所有 $x \in \mathcal{M}$ 以及所有 $s \in \Lambda \setminus \{e\}$均成立。因此，由[27,推论 3.4] 可得

$$\mathcal{M} = \mathcal{N} \rtimes \Lambda.$$

现在假设 $\mathbb{E}_\tau \circ \mathbb{E}$ 不是 Γ-不变的。如果 $d = 1$，那么利用定理 2.9，我们得到 $L^\infty(G/Q,\nu_Q) \hookrightarrow \mathcal{M}$。如果 $d \geq 2$，那么存在 $1 \leq i \leq d$ 使得 $\mathcal{M}_i$，由 [7, 定理 5.8]可知，$\mathcal{M}$ 中所有 G_i-连续元素的集合非平凡。定理 1.2 告诉我们 $L^\infty(G_i/P_i,\nu_{P_i}) \hookrightarrow \mathcal{M}$。无论哪种情况，利用命题 2.5，我们得到 $\mathbb{E}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$。由此可知，根据 [27, 推论 3.4] ，$\mathcal{M}$ 是一个形如 $\mathcal{M}_0 \rtimes \Lambda$的交叉积，其中 $\mathcal{M}_0$ 是一个 Γ-冯·诺伊曼代数，并且

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_0 \subset L^\infty(G/P,\nu_P)\overline{\otimes}\mathcal{N}.$$

Now 我们可以利用定理 1.3 完成证明，因为每个 G_i 都以遍历方式作用 y. □

我们以一个具体例子结束本节。

例 2.10. 设 $\Gamma < G$ 如上，并考虑非交换伯努利移位。设 (M_0,τ_0) 是一个非平凡的迹冯·诺依曼代数，且它是一个可约因子（例如， $M_2(\mathbb{C})$）。设

$$\mathcal{N} = \bar{\otimes}_{g\in G}(M_0,\tau_0)_g$$

是以群 G为指标的无限张量积，并赋予平移作用。由于 G 非紧，且该作用是混合的，因此此作用限制在任意非紧因子 G_i 上都是遍历的（事实上是混合的）。在此情形下，$\mathcal{N}$ 是超有限 II_1 因子。现在应用定理*1.1* ，可得交叉积 $\mathcal{N} \rtimes \Gamma$ 与边界扩张$(L^\infty(G/P)\overline{\otimes}\mathcal{N}) \rtimes \Gamma$ 之间的所有中间子代数$(L^\infty(G/Q)\overline{\otimes}\mathcal{N}) \rtimes \Gamma$都是如下形式的交叉积。

Acknowledgements

本研究是在 S.Z. 访问华沙的波兰科学院数学研究所期间开展的，部分经费由第7/2023号条例资助；该条例从 IMPAN 的法定经费中共同资助小型科学会议。Y.J. 获得了中国国家自然科学基金（项目编号：12471118）的部分资助。我们感谢 Cyril Houdayer 抽出时间审阅早期稿件，并提出了若干有益建议。

References

[1] Tattwamasi Amrutam，《C*-单群作用的中间子代数》，《国际数学研究通知》2021（2021），第21期，16193–16204页。[2] Tattwamasi Amrutam、Eli Glasner 和 Yair Glasner，《动力系统的交叉积：刚性与强近端性》，arXiv 预印本 arXiv:2404.09803（2024）。[3] _____,《 $\mathbb{Z}$ 及其他非C*-单群作用的非阿贝尔因子》，《泛函分析杂志》287（2024），第2期，110456。[4] Tattwamasi Amrutam、Yair Hartman 和 Hanna Oppelmayer，《群冯·诺依曼代数的可 amenable 子代数》，《泛函分析杂志》288（2025），第2期，110718。[5] Tattwamasi Amrutam、Ilan Hirshberg 和 Apurva Seth，《中间交叉积C*-代数》，arXiv 预印本 arXiv:2311.01524（2023）。[6] Tattwamasi Amrutam、Yongle Jiang 和 Shuoxing Zhou，《与乘积群W*-动力学相关的非交换中间因子定理》，arXiv 预印本 arXiv:2508.18978（2025）。[7] Uri Bader、R´emi Boutonnet 和 Cyril Houdayer，《高秩算术群的特征可 amenability》，《亨利·勒贝格年刊》6（2023），297–330页。[8] Uri Bader、R´emi Boutonnet、Cyril Houdayer 和 Jesse Peterson，《乘积型算术群的特征可 amenability》，《数学新进展》229（2022），第3期，929–985页。[9] Uri Bader 和 Tsachik Gelander，《半单群的等度连续作用》，Groups Geom. Dyn. 11（2017），第3期，1003–1039页。MR3692904[10] Uri Bader 和 Yehuda Shalom，《乘积群中格的因子定理与正规子群定理》，《数学新进展》163（2006），415–454页。[11]R´emi Boutonnet 和 Cyril Houdayer，《半单李群格上的平稳特征》，Publications math´ematiques de l'IH´ES 133（2021），第1期，1–46页。[12] _____,《乘积群中格的非交换因子定理》，Journal de l'´Ecole polytechnique—Math´ematiques 10（2023），513–524页。[13]Raf Cluckers、Yves Cornulier、Nicolas Louvet、Romain Tessera 和 Alain Valette，《实群和 p-进群的Howe-Moore 性质》，Math. Scand. 109（2011），第2期，201–224页。MR2854688[14] Jacques Dixmier，《冯·诺伊曼代数》，北荷兰数学丛书，第27卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹—纽约，1981年。[15] Edward G. Effros，《可分希尔伯特空间上冯·诺依曼代数的博雷尔空间》，Pacific J. Math. 15（1965），1153–1164页。MR185456[16] Liming Ge 和 Richard Kadison，《关于冯·诺依曼代数的张量积》，《数学新进展》123（1996），第3期，453–466页。[17] Uffe Haagerup 和 Carl Winsløw，《冯·诺依曼代数空间中的Effros-Mar´echal拓扑》，《美国数学杂志》120（1998），第3期，567–617页。[18] Cyril Houdayer，《高秩格的非交换遍历理论》，ICM——国际数学家大会。第4卷，第5–8, [2023]©2023节，3202–3223页。MR4680358

[19] Cyril Houdayer 和 Adrian Ioana，冯·诺依曼代数的魏尔群与刚性，2025年。[20] Roger E. Howe 和 Calvin C. Moore，酉表示的渐近性质，《函数分析杂志》**32** （1979年），第1期，72–96页。MR533220[21] Mehrdad Kalantar 和 Nikolaos Panagopoulos，群与冯·诺依曼代数的不变子代数，《遍历理论与动力系统》**43** （2023年），第10期，3341–3353页。[22] Arie Levit，局部域上的*Nevo–Zimmer*中间因子定理，Geometriae Ded- icata**186** （2017年），第1期，149–171页。[23] Odile Mar´echal，博雷尔集合上的拓扑与结构 ´冯·诺依曼代数的 `集合，《巴黎科学院报告》S´er. A-B **276** （1973年），A847–A850。MR317063[24] G. A. Margulis，《半单李群的离散子群》，《数学及其边界领域成果》（3） [《数学及其相关领域成果》（3）], 第17卷，Springer-Verlag，柏林，1991年。MR1090825[25] Amos Nevo 和 Robert J. Zimmer，半单李群作用的*Furstenberg*熵刚性，Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.（4）**33** （2000年），第3期，321–343页。MR1775184[26]Jesse Peterson，高秩群中格的特征刚性，2014年。未发表预印本。[27] Yuhei Suzuki，通过动力系统的中间扩张完整刻画中间算子代数，《数学物理通讯》**375** （2020年），第2期，1273–1297页。[28] Shuoxing Zhou，非交换拓扑边界与可 *amenable* 的不变随机中间子代数，arXiv 预印本 arXiv:2407.10905（2024年）。

Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, ul. Sniadeckich 8, 00-656, Warszawa, Poland电子邮箱地址: tattwamasiamrutam@gmail.com

School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, China电子邮箱地址: yonglejiang@dlut.edu.cn

École Normale Supérieure, Département de mathématiques et applications, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, FRANCE电子邮箱地址: shuoxing.zhou@ens.psl.eu