拟圆与拟共形同胚的图

KATHERINE WILLIAMS BOOTH、ALEXANDER NOLTE 和 YVON VERBERNE

Abstract. 我们给出了亏格至少为 2 的闭合定向曲面 S 上拟共形同胚群的组合刻画。特别地，我们证明，它们恰好是曲面 S 上本质拟圆图中尊重由质量常数诱导的典范粗序的自同构。我们还讨论了该图的粗几何。

arXiv:2601.09892v1 [math.GT] 14 Jan 2026

Bowden–Hensel–Webb 最近证明 [14]，对于亏格为$g \geq 1$的闭合定向曲面 S，微分同胚群 $\mathrm{Diff}_0(S)$ 的单位连通分支 $\mathrm{Diff}_0(S)$（即曲面 S 的微分同胚群的单位连通分支），虽然是简单群[32],，却并非一致完美。这意味着不存在统一的 N，使得任何微分同胚 $h \in \mathrm{Diff}_0(S)$ 都能写成若干个 N 交换子的乘积。这个结果令人意外，因为对于球面以及维数不为 2 或 4 [15, 33, 34]的任意闭流形，类似的结论并不成立。

Bowden–Hensel–Webb 的证明引入并重点分析了 S 的精细曲线图 $\mathcal{C}^\dagger(S)$，其顶点是 S 中拓扑嵌入的本质曲线，边则由不相交性确定。精细曲线图不同于研究较多的曲线图（例如 [3, 5, 6, 20, 26, 27]），因为其中 $\mathcal{C}^\dagger(S)$ 的曲线不按同伦类来考虑，因此 $\mathcal{C}^\dagger(S)$ 的所有顶点都具有不可数度。

这促使人们开始关注精细曲线图，例如 [12, 13, 19, 22, 25]。这里的主要动机是，几何群论中的组合工具或许能够揭示曲面同胚群中原本晦暗不明的某些方面。

作为这一研究计划中颇有希望的一步，Farb–Margalit [17] 以及 Long–Margalit–Pham–Verberne–Yao [25] 证明，原始精细曲线图的自同构群与群 $\mathrm{Homeo}(S)$（即 S 的同胚群）在自然意义下同构。通过这一视角，能在多大程度上研究 $\mathrm{Homeo}(S)$ 的经典子群，则远不那么明朗。

特别地，由具有正则性特征的曲线组成的 $\mathcal{C}^\dagger(S)$ 子图的自同构群令人费解，似乎也不那么规整。例如，Le Roux–Wolff [22] 证明，光滑曲线子图的自同构并非全都由微分同胚诱导；第一作者则证明，C^1 曲线图的自同构群远大于 C^1 微分同胚群 [10]。

本文旨在从这一系列相关思想出发，刻画紧致定向曲面 S 上的拟共形同胚群 $\mathcal{Q}(S)$。拟共形性是共形性的一种弱化形式，长期以来受到广泛研究，并有多种应用，例如用于分析 Teichm¨uller 理论中的复结构变形。

我们指出，本文允许拟共形同胚反转定向；也就是说，若 $\varphi{:}S \to S$ 相对于底空间与目标空间上的某种定向是拟共形的，则称其为拟共形映射。

这是在 $\mathrm{Homeo}(S)$ 之外，首个通过精细曲线图的自同构来刻画的经典研究群。相关的图 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$的顶点是 S 中的本质拟圆，边则由不相交性定义。定义见§2和§3。关于拟圆及其与拟共形同胚之间联系的理论，源自 Ahlfors [1], 的研究，如今已发展为一个成熟而广阔的领域（例如 [8, 9, 18, 31, 37]）。

我们并未证明 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$的每个自同构都由拟共形同胚诱导。至少对于带标点曲面，这一预期存在反例，见例3.7。

然而， $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 具有额外的结构，这种结构来自质量常数 $K \geq 1$ ，它们相对于某个辅助双曲度量衡量拟圆的不规则程度。我们称 $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{QC}^\dagger(S))$ 粗序保持，如果对于所有 $K \geq 1$ ，都存在某个$K' < \infty$，使得任意 K-拟圆在 Φ 作用下的像至多是一个 K'-拟圆。精确定义和更多讨论见第 2 节和第 3 节。需要指出的是，此处选择定义颇为微妙，因为并非所有拟圆的刻画所涉及的质量常数都一致可比。

我们的主要定理如下：

定理 A. 设 S 是亏格为 $g \geq 2$的闭可定向曲面。$\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的任意自同构 Φ 都由 S的一个同胚 φ 诱导。当且仅当 Φ 粗序保持时，同胚 φ 是拟共形的。

特别地，典范映射 $\mathcal{Q}(S) \to \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 是到粗序保持自同构子群 $\mathrm{CAut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$的一个同构。

定理 A 对群 $\mathcal{Q}(S)$ 给出了组合刻画。从精细曲线图的角度来看，定理 A 的主要新意在于引入了一个值得关注的新子群以及粗略排序的概念；从分析学的角度来看，主要新意在于对拟共形映射的刻画具有组合特征。定理 A 的重要意义在于建立这两个领域之间的联系，而该结果是通过结合几何群论中对精细曲线图的研究工具，以及关于拟圆和拟共形映射的分析工具证明的。

这一结果使得可以运用几何群论中的技巧来研究经典群 $\mathcal{Q}(S)$。为展示定理 A 在这一方向上的价值，我们证明：

定理 B. $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 对亏格为 $g \geq 2$ 的闭定向曲面 S 是格罗莫夫双曲的 .

了解 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的双曲性是有益的，因为几何群论的工具特别适合通过群在格罗莫夫双曲空间上的作用来研究群。Bowden–Hensel–Webb [14]利用$\frown\mathcal{C}^\dagger(S)$ 的双曲性，证明 $\mathrm{Diff}_0(S)$ 上无界拟同态构成的空间 $QH(\mathrm{Diff}_0(S))$ 是无限维的，从而证明 $\mathrm{Diff}_0(S)$ 并非一致完美。

根据拟共形性的微分刻画以及 S 的紧致性，任意 C^1 微分同胚都是某个 K 的 K-拟共形映射。因此，利用定理 B，我们可以遵循 [14, 第 4 节及 5] 中的论证，得到：

$\widetilde{\text{}}$推论 C. 对于亏格为 $g \geq 2$ 的闭定向曲面 S，定义在 $\mathcal{Q}(S)$ 上的无界拟同态空间 $QH(\mathcal{Q}(S))$ 是无限维的。

最后我们指出，在闭曲面的情形下，我们尚不清楚粗序保持这一假设是否必要。要回答这个问题，似乎需要理解一般拟共形映射结构中一些微妙的方面，因此我们提出以下问题：

问题：将拟圆映为拟圆的闭曲面上的每个同胚都是拟共形的吗?

1.1. 概述。我们先在 §2 回顾拟圆和拟共形同胚的基础知识，然后在 §3 介绍 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 及其基本结构。

证明各种精细曲线图的自同构由同胚诱导，一般是一个复杂的过程，具体方法在很大程度上取决于所考虑的图。目前还没有已知的一般性结果涵盖 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$,

但我们能够结合连续情形与光滑情形中的方法，证明 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的任意自同构都由同胚诱导 [11, 25]。我们将在 §4-5.2 说明如何将这些方法改编到我们的情形中。随后，我们将在 §5.3 证明，诱导出 $\mathrm{CAut}(\mathcal{QC}^\dagger(S))$ 中某个元素的同胚是拟共形的。最后，我们将在 §6 证明定理 B。

致谢。本项目始于2022年12月举行的 Tech Topology Conference。作者谨向 Dan Margalit 致谢，感谢他对早期稿件提出的宝贵意见。K.W.B. 获得美国国家科学基金会 DMS资助项目第2417920号和第2503473号的支持。A.N. 获得美国国家科学基金会 DMS 资助项目第 1842494 号、第 2502952 号和第 2005551 号的支持。Y.V. 部分获得 NSERC博士后奖学金 以及 NSERC探索研究基金 RGPIN 05587 的支持。

2. 拟共形同胚与拟圆

我们先为曲面中的拟圆给出一些定义。拟圆有许多种刻画方式（例如 [18]），其中一些会产生不可比较的质量常数。对于本文的证明而言，重要的是，我们所采用的刻画基于 M¨obius 几何，而非度量几何。关于这里所需基础材料的标准参考文献是 [23] 和 [24]。

还要回顾一下，如果黎曼曲面上的同胚 φ使环域模数发生的畸变至多为 K 倍，那么它就是 K-拟共形的。拟共形性也可以改述为（例如见 [4]）：要求 φ具有 L^2 广义偏导数，并且这些偏导数几乎处处满足相应的微分关系，使无穷小椭圆的偏心率畸变至多为 K 倍。在K的意义下，拟共形性是一种局部条件；任何闭曲面上的 C^1 微分同胚都是某个 K-拟共形映射，其中 K。

令 $\mathcal{Q}(S)$ 表示闭拓扑曲面 S 上黎曼曲面结构 Σ 的拟共形同胚群。正如记号所示，由于 S 是闭的， $\mathcal{Q}(S)$ 不依赖于黎曼曲面结构的选取。

2.1. 黎曼球面中的拟圆。与 K-拟共形性不同， K-拟圆性并非局部条件。这使得我们在讨论亏格曲面上的拟圆性时需要格外谨慎。在 $\mathbb{CP}^1$ 上，我们回顾如下：

定义 2.1. K中的 K-拟圆是圆在 $\mathbb{CP}^1$上的 K-拟共形同胚下的像。

关于 $\mathbb{CP}^1$上拟圆性的条件以及定义 K-拟圆性的质量常数，有许多等价的改写方式。我们回顾一种对我们有用的改写。曲线 $\gamma \in \mathbb{C}$ 满足针对 $c > 0$ 的四点 c有界转弯条件，当且仅当对任意互异且按圆周顺序排列的 p_1、p_2、p_3、$p_4 \in \gamma$，交比 $(p_4, p_1; p_2, p_3)$ 不小于 $1/c$，即

$$\frac{|p_1 - p_2||p_4 - p_3|}{|p_1 - p_3||p_4 - p_2|} \leq c.$$

可以通过一种标准的修改将其推广到黎曼球面 $\mathbb{CP}^1$上。由于交比在莫比乌斯变换下不变，四点 c有界转弯条件在 $\mathbb{CP}^1$的莫比乌斯变换下保持不变。

四点有界转弯条件刻画了拟圆性，且相关常数之间具有一致的依赖关系：

定理 2.2（Ahlfors [1, 定理 1]）。对于每个 $K > 0$，都存在一个 $c(K) < \infty$，使得 $\mathbb{CP}^1$ 中每条 K- 拟圆都满足 4 点 c- 有界转向条件。反之，

对于每个 $c > 0$，都存在一个 $K(c) < \infty$，使得 $\mathbb{CP}^1$ 中每条满足 4 点 c-有界转向条件的 Jordan 曲线都是一个 $K(c)$-拟圆。

与用拟共形映射定义拟圆性这一方向相反，$\mathbb{CP}^1$ 上的拟共形映射可根据它们对圆的扭曲来刻画。

定理2.3（Aseev [2]）。设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个域，且 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 是一个单射。那么，f 是拟共形同胚，当且仅当存在一个 $K \geq 1$，使得对于每个 $z \in \Omega$，都存在一个邻域 U_z，使得其中每个圆 C 的像 $f(C)$ 都是一个 K-拟圆。

需要指出的是，该定理讨论拟共形性时，并未要求保向性。

延拓结果。在构造拟共形映射时，我们会发现 $\mathbb{CP}^1$ 中的延拓结果很有用。特别是，我们将使用以下两个定理。首先，我们将利用 Tukia 的下述结果中的光滑性。

定理 2.4（Tukia [36]）。设 $\gamma \subset \mathbb{CP}^1$ 为拟圆。则存在一个从 $\mathbb{CP}^1$ 到 γ 的拟共形映射，将 $\mathbb{R}$ 映到 γ，且在 γ之外光滑。

这一精确表述可由 [36] 和 [37, 的主要结果及 [36]第 2 页所讨论的定理 4.9], 推出。我们指出，我们所用的光滑性来自 Beurling–Ahlfors延拓 [7]的性质。

其次，我们将使用以下延拓结果。

定理 2.5。设 $L \geq 1$。则存在一个 $K = K(L)$，使得每个关于 $\mathbb{D}$ 上欧几里得度量的 L-双利普希茨嵌入 $f : S^1 \to \mathbb{D}$ 都允许延拓为到圆盘上的 K-拟共形映射。

这是平面 Lipschitz Schoenflies 定理 [35, 定理 A], 的推论，再结合如下观察（例如 [36, §7]）：对每个 $L > 1$，都存在一个 $K(L)$，使得每个L-双利普希茨嵌入 $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 都是 K-拟共形的。

2.2. 亏格曲面。在更高亏格的情形下，选择拟圆的刻画方式时需要格外谨慎，以确保质量常数对本质曲线表现良好。我们采用以下定义：

定义 2.6. 设 S 是一张带有常截面曲率为 0 或 -1 的度量 g 的闭合定向曲面。在 (S, g) 中，一条本质 K-拟圆是 S 中一条简单闭测地线 γ 在 S 上的某个 K-拟共形同胚下的像。

这里，(S, g) 的诱导共形结构下的 K-拟共形性，是指相对于该结构而言。此种刻画适用于莫比乌斯几何，因为这些度量测地线在诱导的 $\mathbb{CP}^1$-结构中是圆弧。定义 2.6 给出了通常的拟圆族（备注 1）。我们指出，按本文定义得到的拟圆常数与度量拟圆性的度量定义中出现的拟圆常数可能有任意大的差异。造成这一差异的原因之一是，简单测地线在沿着 S 的拓扑结构延伸时，可能会折返并贴近自身。

从实际应用的角度来看，定义 2.6 便于处理已知为拟圆的曲线，但要验证一条曲线是否为拟圆，则需要构造一个拟共形映射。

在有时不考虑质量常数时，能够在拟共形性的不同刻画之间切换会对我们有所帮助。为此，我们回顾一下：嵌入曲线是拟圆，当且仅当它满足（两点）度量有界转弯条件：存在一个 $k < \infty$，使得对于任意 x、$y \in \gamma$，$\gamma - \{x, y\}$ 都有一个连通分支，其直径不超过 $kd(x, y)$。

注 1. 可以验证，定义 2.6 等价于度量有界转弯刻画，但对应的拟圆常数可能不可比。

事实上，由于简单闭测地线是度量有界转向拟圆，因此，简单闭测地线在拟共形映射下的任意像都是度量拟圆这一结论便随之成立。反方向如下所述。设 γ 是 S 中的一个度量有界转向拟圆，设 γ_0 是 γ_0 的自由同伦类中的测地线。将 γ 的一个环形邻域共形地识别为 $\mathbb{C}$ 中的一个环域，并将 γ_0 的一个度量 ε-邻域共形地识别为 $\mathbb{C}$ 中的一个环带，其中 γ_0 是圆。根据定理 2.4，存在一个从 γ_0 的邻域到 γ 的邻域的拟共形同胚，将 γ_0 映到 γ，并且在 γ_0 之外光滑。由光滑性，将其拟共形地延拓到 S 的其余部分是经典结论。

以下论证中不涉及质量常数的部分会用到非本质曲线。我们从不对非本质拟圆提及质量常数。具体而言，我们采用如下约定：若 S 上的非本质曲线满足两点度量有界转弯条件，则称其为拟圆。

定义 2.6 在以下意义上与度量的选择无关。

引理 2.7. 设 g 和 g' 是 S 上的局部齐性度量。那么，对于 S 中每个本质简单闭曲线的同伦类 $[\alpha]$，都存在一个 $K(\alpha)$，使得若 $\gamma \in [\alpha]$ 是相对于 g 的 K'-拟圆，则 γ 是相对于 g' 的 $K(\alpha)K'$-拟圆。

利用备注 1 中的论证可以看出引理 2.7，不过，测地线的光滑性使得定理 2.4 成为了一个远比所需结果深刻得多的定理。

最后，我们说明拟圆的度量有界转弯刻画以下述方式实现局部化。所涉及的质量常数并不一致。

引理 2.8（非一致局部化）。设 $\gamma \subset S$ 是一个嵌入圆，并且存在一个由邻域 U_i 构成的开覆盖，使得它在这些邻域上满足质量常数为 k_i 的度量有界转弯条件。那么 γ 是一个拟圆。

证明。取 γ 的有限子覆盖 $U_1, ..., U_n$。该子覆盖存在一个勒贝格数 δ，这意味着对于 γ 上所有 δ-近的点对，度量有界转弯条件对某个 k 成立；而紧致性意味着，对于间距至少为 δ 的点，满足一个 k'-度量有界转弯不等式。□

3. Graphs of Quasicircles

我们考虑的组合对象是精细曲线图 $\mathcal{C}^\dagger(S)$ 的类似物，其中 [14], 的顶点是 S 中的简单闭曲线，边由不相交性给出。以下是我们研究的核心对象：

定义 3.1（拟圆图）。对于带有 $g \geq 2$ 的 $S = S_g$，令 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 为这样一个图：其顶点是 S 中本质拟圆的集合，两个顶点之间的边表示对应的拟圆互不相交。

引理 2.7 表明， $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 是定义良好的图。事实上，还有更多信息在参考数据变更下保持不变。为陈述这一不变性，我们采用以下记号。

定义 3.2. 设 $S = S_g$ with $g \geq 2$。令 $\mathscr{S}$ 表示 S 中本质简单闭曲线的同伦类集合，并令 $[\beta] \in \mathscr{S}$。那么定义 $\mathcal{QC}^\dagger_{[\beta]}(S)$ 为 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中由同伦类 $[\beta]$内的顶点诱导的子图。

我们将在 §5 中证明， $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的所有自同构 Φ 都由 S 的同胚 φ 诱导。我们采用记号 $\Phi([\beta]) = \varphi([\beta])$。无标记划分 $\mathcal{QC}^\dagger(S) = \bigsqcup_{[\beta]\in\mathscr{S}} \mathcal{QC}^\dagger_{[\beta]}(S)$ 在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的自同构作用下保持不变，因此定义良好。

存在一个 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_K\}_{K\in[1,\infty)}$ $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的过滤，其中 $\mathcal{F}_K$ 是 S 上 K-拟圆的集合。所谓过滤，是指 $\mathcal{F}_K \subset \mathcal{F}_{K'}$ 对任意 $K < K'$ 和 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$，都有 $= \bigcup_{K\geq 1} \mathcal{F}_K$。该过滤 $\mathcal{F}$ 限制在每个子图 $\mathcal{QC}^\dagger_{[\beta]}(S)$ 上，得到过滤 $\mathcal{F}_{[\beta]} = \{\mathcal{F}_{K,[\beta]}\}_{K\in[1,\infty)}$。当然， $\mathcal{F}$ 不会在双曲度量变换或对 S 施加拟共形映射时保持不变。不过，度量变换会以如下弱粗序保持的意义尊重 $\mathcal{F}$ （引理 2.7）：

定义 3.3. 自同构 $\Phi \in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 称为弱粗序保持的，如果对每个 $K \geq 1$ 和 $[\beta] \in \mathscr{S}$，都存在一个 $K' = K'(K,\beta) > 1$，使得 $\Phi\left(\mathcal{F}_{K,\ [\beta]}\right) \subset \mathcal{F}_{K',\ \Phi([\beta])}$。如果常数 $K'(K,\beta)$ 可以取为与 β 无关，我们就称 Φ 粗序保持。令 $\mathrm{CAut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 表示 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的弱粗序保持自同构群。

注意，任意 K-拟共形同胚 φ of S 都会诱导一个图自同构，记作 φ_*，它作用于 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$。进一步注意，根据复合的拟共形常数的标准界， φ_* 是粗序保持的，即 $\varphi_* \in \mathrm{CAut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。这给出了从 $\mathcal{Q}(S)$ 到 $\mathrm{CAut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的一个自然同态。我们将证明：

定理 3.4. 设 $S = S_g$ 满足 $g \geq 2$。则自然映射 $\mathcal{Q}(S) \to \mathrm{CAut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 是一个同构。

注意，定理 3.4 表明， Φ 的粗序保持性与参考双曲度量无关。由于 φ of S 的拟共形同胚会诱导粗序保持的自同构 φ_*，我们得到：

推论 3.5. 自同构 $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{QC}^\dagger(S))$ 是粗序保持的，当且仅当 Φ 弱粗序保持。

定理 A 由推论 3.5 和定理 3.4 立即推出。

注 2。我们在下文中倾向于采用弱粗序保持，有两个原因。首先，它比粗序保持更弱，因此定理 3.4 比仅采用粗序保持时更强。其次，很容易看出改变度量是弱粗序保持的，但涉及的常数 $K'(K,\beta)$ 能否取为与 β 无关，则远不那么明了。因此，弱粗序保持这一概念在我们的情形下具有理想的自然性。

经过上述讨论，接下来需要证明的是：

命题 3.6。设 $S = S_g$，其中 $g \geq 2$，且令 $\Phi \in \mathrm{CAut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。那么存在 $\varphi \in \mathcal{Q}(S)$，使得 $\Phi = \varphi_*$。

命题 3.6 的证明策略与精细曲线图自同构的其他刻画方法类似 [11, 25]。在 §4 中，我们确定能够唯一确定曲面中非本质拟圆的图结构。随后在 §5 中，我们利用这一图结构定义一个映射，将 $\mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 映到一个扩展图的自同构群；该扩展图还包含非本质拟圆对应的顶点。接着，我们利用非本质拟圆确定点，并在曲面上构造所需的映射。

最后我们指出，对于带 puncture 曲面，若不假设弱粗序保持，则定理 3.4 的类似结论不成立：

例3.7。设 $\varphi : (0, 1) \to (0, 1)$ 是一个保向同胚，并设 $F : (\mathbb{C} - \{0\}) \to (\mathbb{D} - \{0\})$ 定义为 $(r, \theta) \mapsto (\varphi(r)\ \theta)$。由 F 的光滑性，$\mathbb{C} - \{0\}$ 中的每个拟圆在 φ 的映射下都变为一个拟圆。

另一方面，内半径为 r 、外半径为 1 的环带 A_r 的模为 $-\log r$，而 $F(A_r)$ 的模为 $-\log \varphi(r)$。因此，对于在 0 处导数衰减得足够快的 φ，映射 F 会无界地扭曲小 r 时的环带 A_r 的模，因此不是拟共形的。

4. Encoding Topological Data Into Graphs

本节将找出可用于识别曲面中非本质拟圆的图结构。我们首先在 §4.1 中识别具有简单交的拟圆对，称为环面对。接着在 §4.2 中，利用环面对识别一种称为双边形对的构造，它唯一确定一个非本质拟圆。然后在 §4.3 中，我们定义共享对，并证明关于它们的若干结果；共享对是共享同一个非本质拟圆的双边形对。最后，我们在 §4.4 中证明相关弧图是连通的，这表明这些非本质拟圆在图的自同构下定义良好。

在本节中，除非另有说明， S 是亏格为 $g \geq 2$ 的闭定向曲面。

4.1. 环面对。本小节中，我们证明 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$的自同构保持非退化横截环面对、非退化非横截环面对和退化环面对这几类集合。此外，该图还能区分这三种不同类型的环面对。

我们先介绍相关定义。多拟圆是 S中有限个两两不相交的本质拟圆构成的集合。这意味着任意多拟圆在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$中都构成一个有限团，即一个完全图。若多拟圆 S 的补集有多个分支，则称其为分离多重拟圆。若两个拟圆 a 和 b 均与分离多重拟圆 m 不相交，且位于同一个补连通分支中，则称它们位于 m的同一侧。若一个图的顶点集可以划分为两个或多个非空集合，并且其中一个集合的每个顶点都通过一条边与其他集合中的每个顶点相连，则称该图为联结。此外，图中顶点集合 A 的链接，是由不属于 A且通过一条边与 A中的每个顶点相连的顶点所张成的子图。

在精细曲线图中，当且仅当一条曲线的链接是一个联结时，该曲线才是分离的。同样，我们有以下结论：

引理 4.1. 设 S 是一个定向曲面。设 $a \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$。那么，当且仅当 link($a$) 是一个联结时， a 才是分离的。同样，若 $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$ 是一个多拟圆，则当且仅当 link(a) 是一个联结时， a 才是分离的。

在 [25], 中，已证明精细曲线图的自同构保持分离曲线的集合、分离多曲线的集合以及分离多曲线的各侧。下面的结果可由引理 4.1 直接推出。

引理 4.2. 设 $\Phi \in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。那么， Φ 保持 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中分离拟圆的集合，也保持 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中分离多重拟圆的集合。此外，Φ 保持分离多重拟圆的各侧；也就是说， a 和 b 位于 m 的同一侧，当且仅当 $\Phi(a)$ 和 $\Phi(b)$ 位于 $\Phi(m)$ 的同一侧。

定义 4.3（拟圆包）。 S 中一族拟圆 $\{\gamma_i\}$的凸包，是这些拟圆的并集，以及 $\cup\gamma_i$ 的补集中的任意拓扑嵌入圆盘分支的并集。

下面的引理表明，凸包在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的自同构下保持不变。此引理的证明沿用 [25], 中引理 2.4 的证明思路，但将曲面中的曲线替换为拟圆。

引理 4.4。设 $\Phi \in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。若 A 是 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的有限顶点集，且顶点d 位于 A 的凸包中，则 $\Phi(d)$ 位于 $\Phi(A)$ 的凸包中。

定义 4.5（环面对）。设 $c, d \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$。若 $c \cap d$是单个区间，且 c 与 d 在该区间相交，则称对 $\{c, d\}$ 为环面对。若 $c \cap d$ 是单个点，则称环面对为退化的；否则称为非退化的。

定义 4.6（非退化横截环面对）。非退化环面对 $\{a, b\}$称为横截的，当且仅当凸包中存在一个拟圆 c，它既不等于 a，也不等于 b。否则，称非退化环面对为非横截的。

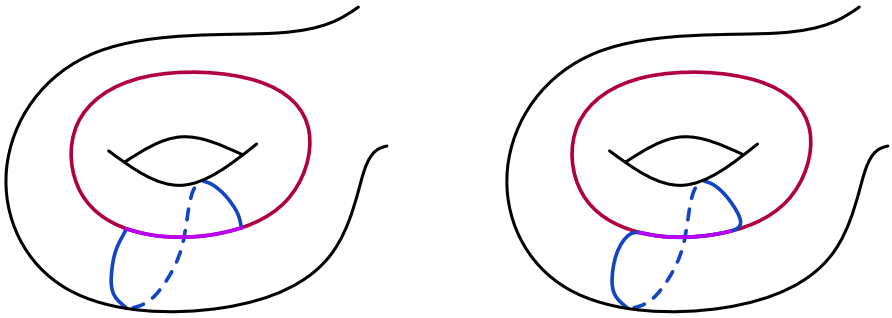

FIGURE 1. 上述蓝色和红色曲线形成了两个非退化环面对。每个环面对中曲线的交集以紫色绘出。左侧的一对是横截的，第三条拟圆是两条曲线的对称差。右侧的一对是非横截的，这是由于对称差中存在尖点。

下面的引理使我们能够判断一对顶点何时对应于 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中的环面对。我们注意到，正向结论由环面对的定义直接得到，而反向结论则可直接通过将第一作者 [11] 的研究中 C^k-曲线替换为拟圆，并应用 [11,引理 3.14]得到。

引理 4.7. 设 a、b 为非分离、非同伦的拟圆。那么，$\{a, b\}$ 是环面对，当且仅当 $\{a, b\}$ 的凸包至多包含 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中的另一个顶点，并且存在一条分离拟圆 $\gamma \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$，它与 a 和 b 不相交，且 γ的一侧是一个包含 a 和 b的单孔环面子曲面。

引理 4.7与非退化横截环面对的定义立即为两个拟圆构成非退化横截环面对的情形提供了图论解释。

引理 4.8。设 a、$b \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$。当且仅当 $\{a, b\}$ 的凸包恰好包含 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的三个顶点，并且存在一个与 a 和 b 不相交的分离拟圆 $\gamma \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$，使得 γ 的一侧是一个包含 a 和 b 的单孔环面子曲面时，$\{a, b\}$ 是一个非退化横截环面对。

现在我们给出非退化环面对所特有的图结构。注意，将引理 3.15 中证明同一结论时所用的曲线替换为拟圆，该证明对 [11] 仍然成立。

引理 4.9. 设 $\{a, b\}$ 是 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中的一个环面对，其交区间记为 c。那么， $\{a, b\}$ 是非退化环面对，当且仅当存在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中互不相交且同伦的曲线 d_1 和 d_2，使得 $\{a, d_1\}$、$\{a, d_2\}$、$\{b, d_1\}$ 和 $\{b, d_2\}$ 都是环面对，并且对于任意与 d_1 和 d_2 不相交且不同伦的拟圆 $e \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$，$e$ 与 a 相交，当且仅当 e 与 b 相交。

[11] 的引理 3.4 对一般曲线也成立，因此我们知道，对于两个不相交的拟圆 $a, b \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$， a 和 b 同伦，当且仅当 link(a, b) 是一个联结，且其中一部分只包含分离曲线或只包含非分离曲线。

现在我们证明，两个拟圆 $a, b \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$ 同伦，当且仅当在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$中存在一条由互不相交的同伦曲线组成的有限路径。

引理 4.10。设 $a, b \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$。那么， a 和 b 同伦，当且仅当在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中存在一条由同伦曲线组成的有限路径 $a_1, ..., a_n$，其中 $a = a_1, b = a_n$ 和 a_i 对于 $i = 1, ..., n-1$均与 a_{i+1} 不相交。

证明。设 a 与 $b \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$ 同伦，并设 $H\colon S^1 \times [0, 1] \to S$ 是从 a 到 b 的同伦。对于 $t \in [0, 1]$，令 $H_t(a)$ 为 $S^1 \times \{t\}$ 的像，使得 $H_0(a) = a$ 且 $H_1(a) = b$。注意，对于所有 $t \in \in (0, 1)$， $H_t(a)$ 未必是拟圆。对于 $c \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的每个顶点，我们定义：

$$I_c = \{t \in [0, 1] : a_t \text{ 和 } c \text{ 包含在某个环带 } \} \text{的内部}$$

每个 I_c 都是开集，并且由于 $[0, 1]$ 是紧的，我们可以找到一列开区间 I_0、.....、I_k 覆盖 $[0, 1]$，使得每个 I_i 都包含在某个 I_{c_i} 中。令 $t_0 = 0$ 和 $t_{k+1} = 1$。不妨设 $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$，于是令 $t_i \in I_i \cap I_{i+1}$。那么，每一对 $\{H_{t_i}(a)\ H_{t_{i+1}}(a)\}$ 都包含在某个环带内。存在拟圆 a_i、a_{i+1}，满足 $a_0 = a$ 且 $a_{k+1} = b$；它们位于 $\{H_{t_i}(a)\ H_{t_{i+1}}(a)\}$ 的某个足够小的邻域内，也包含在某个环带内。令 d_i 表示这个环带的一个边界分支，并注意到我们还可以再次在该边界的一个足够小的邻域内找到一个拟圆（仍记为 d_i），使其与 a_i 和 a_{i+1} 均不相交。因此，拟圆 d_i 与 a_i 和 a_{i+1} 均不相交且同伦，而序列 $\{a, d_0, a_1, \ldots a_k, d_k, b\}$ 是 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中的一条路径。□

下面的引理用于在拟圆图中区分哪些分离曲线围成单孔环面。证明可由 [11] 的引理 3.10 直接得出。

引理 4.11. 设 $\gamma \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$ 是一条分离曲线。那么， γ 围成一个单孔环面子曲面，当且仅当 $S \setminus \gamma$ 的一个分支中仅包含与 γ 同伦的曲线或非分离曲线。

下面的引理指出，围成单孔环面的拟圆集合在拟圆图的自同构作用下保持不变。下面的引理是 [11], 中引理 3.11 的一个较弱版本，但足以满足我们当前的需要。

引理 4.12. 设 $\Phi \in \text{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。那么， Φ 保持 S 中围成单孔环面的拟圆集合不变。

证明. 引理 4.11 指出，曲线 γ 若分离出单孔环面，则其特征是存在与 γ 同伦的拟圆，或者存在非分离拟圆。根据引理 4.1 和引理 4.10，我们知道 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的自同构保持分离拟圆和同伦拟圆不变，由此得证。□

T本节前面的结果为我们提供了如下命题：

命题 4.13. 设 $\Phi \in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。则 Φ 保持退化环面对、非退化非横截环面对以及非退化横截环面对的集合不变。

4.2. 大弧对。若一对同伦顶点 $c, d \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$ 满足：$c \cap d$ 是一个非平凡闭区间，且 $S \setminus \{c, d\}$ 的圆盘分支的边界在 S中构成一个拟圆，则称它们构成一个大弧对。本节的目标是证明，大弧对在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$的自同构下保持不变。

引理 4.14（大弧对的存在性）。设 γ 是 S 中的一个拟圆，且有互异点$p_1, p_2 \in \gamma$。设 γ_1, γ_2是 $\gamma - \{p_1, p_2\}$的连通分支的闭包。那么存在本质拟圆 η_1, η_2，位于 S 中，使得：

(1) $\eta_i \cap \gamma = \gamma_i$ $(i = 1, 2)$,
(2) $\eta_1 \cap \eta_2 = \eta_1 - int(\gamma_1) = \eta_2 - int(\gamma_2)$.

证明。证明采用了第 2 节备注 1 中使用的相同技巧。取 γ的一个环形邻域 U。于是存在一个包含单位圆 γ_0 的圆环域 A，其中 $\mathbb{C}$，以及一个共形同胚 $\psi : U \to A$。由定理 2.4，可得到一个 $\mathbb{C}$ 的拟共形同胚，使得 $\varphi(\gamma) = \gamma_0$。于是存在一个邻域 $U' \subset U$，使得 $\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi : U' \to S$ 是拟共形的，在 γ 之外光滑，并且使 $\gamma' = \psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi(\gamma)$光滑。之后还可以进一步缩小 U'，将 $\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi$ 延拓为同胚 $h : S \to S$，使其在 γ 之外光滑，因此根据拟共形性的微分刻画，它在 S上是拟共形的。现在可以利用光滑曲线 γ' 顺利完成所需构造，使曲线 η_1', η_2' 除在 $h(p_i)$处的直角转折外均光滑，因而是拟圆。于是 $\eta_i = h^{-1}(\eta_i')$是拟圆，且具有所需性质。□

环带集。假设 (a, b) 是$\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中一对不相交的同伦顶点。根据 $g \geq 2$，在 $S = S_g$ 中存在唯一的环带 A，其边界为 $a \cup b$。令 $\mathcal{QC}^\dagger(a, b)$ 表示 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中包含于 A内的顶点集。我们将 $\mathcal{QC}^\dagger(a, b)$ 称为环带集。如果 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的一对顶点位于某个 $\mathcal{QC}^\dagger(A')$ 中，也就是说，拟圆图限制在某个环带A'上，那么我们称这对顶点为环带对。非分离不相交环带对是指两个曲线均为非分离曲线且彼此没有交叉交集的环带对。在环带集 $\mathcal{QC}^\dagger(a, b)$ 上有一个自然的偏序：如果 c 和 d 不相交，并且 $c \setminus d$ 的每个分支都包含于由 a围成的 $A \setminus d$ 的某个分支中，我们就称 $c \preceq d$。

下面的引理是 [25] 中引理 2.6 的对应版本：

引理 4.15. 设 $\Phi \in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$，且 a,b 是互不相交、同伦的非分离拟圆。则：

(1) 拟圆 $\Phi(a)$ 和 $\Phi(b)$ 是互不相交、同伦的非分离拟圆。(2) $\mathcal{QC}^\dagger(a, b)$ 在 Φ 下的像是 $\mathcal{QC}^\dagger(\Phi(a)\ \Phi(b))$ (3) 若 $c, d \in \mathcal{QC}^\dagger(a, b)$ 不交叉，则 $\Phi(c)$ 和 $\Phi(d)$ 不交叉。(4) 若 $c \preceq d$ 属于 $\mathcal{QC}^\dagger(a, b)$，则 $\Phi(c) \preceq \Phi(d)$ 属于 $\mathcal{QC}^\dagger(\Phi(a)\ \Phi(b))$。

证明。此引理的证明由引理 4.2 和以下两个观察得出。首先，注意到两条互不相交的非分离曲线 a 和 b in S 同伦，当且仅当 a 和 b 都构成分离多重拟圆，并且所有与 a 和 b 均不相交的分离拟圆都位于多重拟圆 $a \cup b$ 的同一侧。其次，不相交的拟圆 $c, d \in \mathcal{QC}^\dagger(a, b)$ 满足 $c \preceq d$，当且仅当 $\mathcal{QC}^\dagger(a, b)$ 中存在一个元素与 a 和 c 相交，但不与 d 相交。于是依次可得这些结论。□

类型1和类型2曲线。设 $\{c,d\}$ 是一个非分离不相交环带对，并设 e 是一个拟圆，使得 $\{c,e\}$ 和 $\{d,e\}$ 是退化环面对。若 $c\cap e$ 和 $d\cap e$ 是同一点，则称 e 是相对于 $\{c,d\}$ 的类型1拟圆。否则，称 e 是相对于 $\{c,d\}$ 的类型2拟圆。

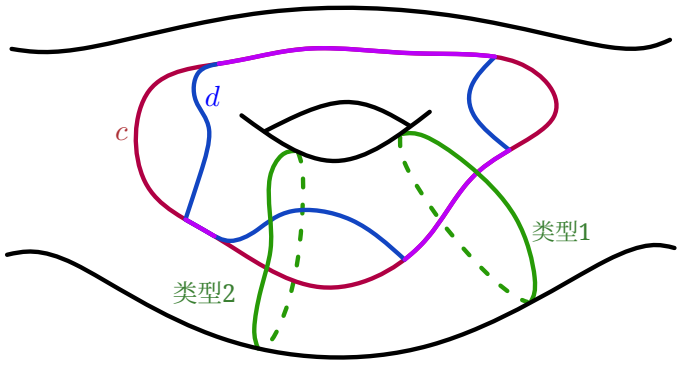

FIGURE 2. 非分离不相交环带对 $\{c,d\}$ 的类型1和类型2拟圆示例。

引理 4.16。设 $\Phi\in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^{\dagger}(S)$。那么 Φ 保持非分离不相交环带对的类型1和类型2拟圆。更准确地说，若 $\{c,d\}$ 是一个非分离不相交环带对，且 e 是 $\{c,d\}$的类型1拟圆，则 $\Phi(e)$ 是非分离不相交环带对 $\{\Phi(c)\ \Phi(d)\}$ 的类型1拟圆；类型2拟圆的情形类似。

证明概要。由于此证明与 [25], 中的引理 2.7 几乎完全相同，这里仅简述论证。首先，若 c 和 d 不相交，则任何满足 $\{c,e\}$ 和 $\{d,e\}$ 为退化环面对的拟圆 e 都必定是类型2曲线。由于 Φ 保持不相交曲线，也保持退化环面对，因此 Φ 保持 e是类型2拟圆这一性质。

现在，如果 $c,d\in\mathcal{QC}^{\dagger}(a,b)$ 不互不相交，那么它们至少有一个交点或交集区间。在这种情况下，对于 $\{c,d\}$ ， e 是类型2拟圆，当且仅当存在一个拟圆 f ，满足以下性质：

(1) f 包含于 $\{c,d,e\}$ 的凸包中；(2) f 不包含于 $\mathcal{QC}^{\dagger}(a,b)$ 中；(3) f 不等于 e。

正向结论可通过在由 $c\cup d$ 围成的开圆盘内将 e 推开而直接证明。对于反向结论，若 e 是类型1，那么任何满足前两个给定性质的拟圆都必须包含整个 e，因此不满足第三个性质。□

现在我们可以证明以下结论：

命题 4.17。设 $\Phi\in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^{\dagger}(S)$。那么 Φ 保持非分离大弓形对的集合。

对应命题在 [25] 中的证明（见 [命题 2.1] ）仅依赖于保持环带集、1 型曲线和 2 型曲线的精细曲线图自同构。由于我们在拟圆情形下也有相应的结果，因此 [25] 中的证明可推广至 $\mathcal{QC}^{\dagger}$（S）。

4.3. 共享对。我们用 S_g^b 表示从 S_g中去除b 个边界为拟圆的互不相交圆盘内部后得到的曲面。若一对双边形对$\{\{a,b\},\{a',b'\}\}$ 的非圆盘 S_g^1分支相同，并且 S_g^1 中的弧 $a\cap b$、$a'\cap b'$ 内部互不相交，且在边界拟圆上有四个不同的端点，则称这对双边形对为共享对。若 $a\cap b$ 的端点在边界上将 $a'\cap b'$ 的端点分隔开，则称该共享对为链接共享对。本节将证明， $\mathcal{QC}^\dagger$（S）的自同构保持链接共享对。

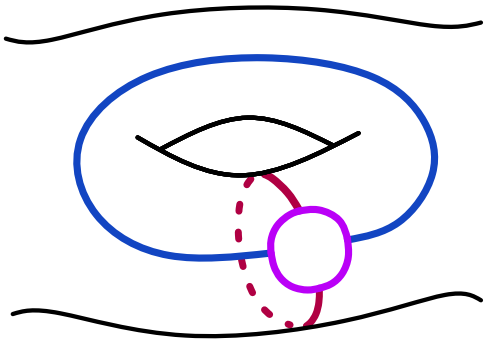

FIGURE 3. 一个链接共享对。

定义 4.18（环面三元组）。若 $\{c,d\}$ 是 S 中的一个非退化横截环面对，则在 $c\cup d$ 中恰有另一个本质拟圆 e；拟圆 e 是 S 中对称差 $c\Delta d$ 的闭包。我们也称 $\{c,d,e\}$ 为环面三元组，因为其中任意两个元素都构成一个环面对，并确定第三个元素。

引理 4.19。设 $\Phi\in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。则 Φ 保持环面三元组的集合。

证明。设 $\{c,d,e\}$ 是一个环面三元组。则 e 是（除 c 和 d 之外）包含在 $\{c,d\}$ 的凸包中的唯一顶点。由引理 4.4， e 是唯一一个其链接包含 $\{c,d\}$ 的链接的拟圆。由于命题 4.13 表明非退化横截环面对在变换下保持不变，因此环面三元组也保持不变。□

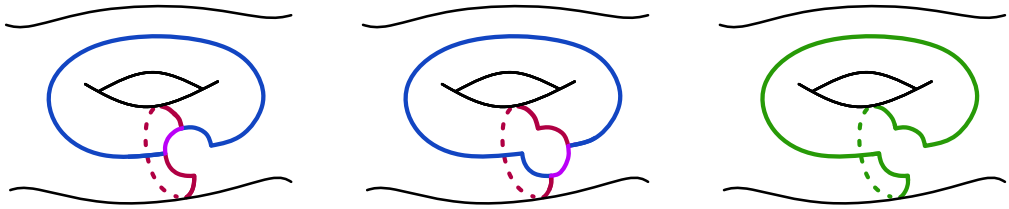

FIGURE 4. 环面对 $\{c,d'\}$ 和 $\{c',d\}$，以及与二者都构成环面三元组的拟圆。

命题 4.20. 设 $\Phi\in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。那么 Φ 保持链接共享对。

证明。我们断言，双边形对 $\{c,d\}$ 和 $\{c',d'\}$ 构成链接共享对，当且仅当满足以下条件：

(1) $\{c,c'\}$、$\{c,d'\}$、$\{c',d\}$ 和 $\{d,d'\}$ 分别构成非退化横截环面对；(2) 存在一个拟圆，与 $\{c,d'\}$ 和 $\{c',d\}$ 分别构成环面三元组；(3) 存在一个拟圆，与 $\{c,c'\}$ 和 $\{d,d'\}$ 分别构成环面三元组。

由该断言、命题 4.17、引理 4.7 和引理 4.19 即可推出该命题。

对于正向，我们可以采用图 4 和图 5 所示的构造。其中，曲线 e（分别为 e'）与 $\{c, d'\}$ 和 $\{c', d\}$（分别与 $\{c, c'\}$ 和 $\{d, d'\}$）构成一个环面三元组。我们注意到，这一点成立是因为 $\{c, d\}$ 和 $\{c', d'\}$（分别为 $\{c, c'\}$ 和 $\{d, d'\}$）在 S 中都构成拟圆；此外，利用局部化引理 2.8，所示的 e（分别为 e'）的构造对于某个质量常数 K（分别为 K'）也构成拟圆。

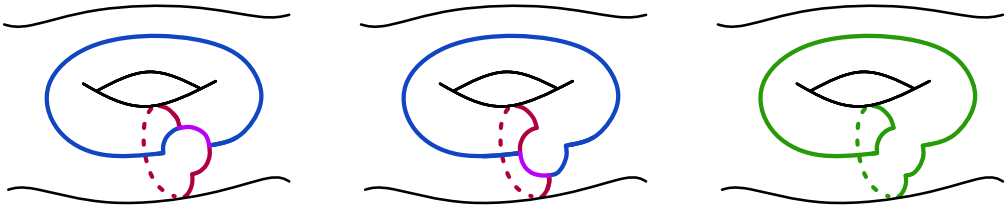

FIGURE 5. 环面对 $\{c, c'\}$ 和 $\{d, d'\}$，以及与两者都构成环面三元组的拟圆。

对于另一个方向，我们可以严格遵循 [25] 中类似命题的证明（见命题 2.2），从而证明任何满足该断言条件的拟圆都会与同一个非本质拟圆构成双边形对。

如果这些构造出的双边形对不是链接共享对，那么条件 (1) 中至少有一对要么彼此不相交，要么相交于多个区间，因此不是非退化横截环面对。□

4.4. 弧图的连通性。我们再次考虑通过沿一组互不相交的拟圆切割 S_g 而得到的带边界曲面 S_g^b。我们的目标是证明下文定义的相连拟弧图 $\mathcal{QA}^\dagger_{Lk}\left(S_g^b\right)$ 对于 $g \geq 1$ 和 $b > 0$ 是连通的。本节中的证明与 [25] 中的类似结果相对应。

准弧图。我们首先定义准弧图，记作 $\mathcal{QA}^\dagger(S)$。该图的顶点是 S_g^b 中相对于边界的简单真弧；沿边界的任一子弧延伸该弧，都会在闭曲面 S 中得到一条本质准弧。若两条弧互不相交，则对应的两个顶点之间有一条边。注意，与引理 4.14 中相同的论证表明，$\mathcal{QA}^\dagger(S)$ 非空。

命题 4.21. 对于任意满足 $g \geq 1$ 和 $b > 0$的 $S = S_g^b$，准弧图 $\mathcal{QA}^\dagger(S)$ 是连通的。

证明。通过取同伦类，可得到从 $\mathcal{QA}^\dagger(S)$ 到弧图 $\mathcal{A}(S)$ 的自然满射。已知当曲面亏格非零时，$\mathcal{A}(S)$ 是连通的，例如，这是因为弧复形是可缩的（参见 [21]）。根据 $\mathcal{A}(S)$ 的定义，我们只需证明 $\mathcal{QA}^\dagger(S)$ 中任意两个同伦顶点 a、b 之间存在一条路径。

存在一个同伦 $H\colon I \times I \to S$，从 a 到 b。设 c 是一条与 a 不相交的准弧。根据同伦延拓性质 [16, 推论 1.4],，我们可以将 H 延拓为整个曲面上的同伦，这意味着 H 也将是一个从 c 到某条弧 d 的同伦，其中 d 不一定是准弧。

注意，对于任意 $t \in I$，弧 $H_t(a)$ 和 $H_t(c)$ 可能不是准弧，但它们必定互不相交。由于 $H_t(a)$ 包含于开集 $S \setminus H_t(c)$ 中，且光滑弧（因而也是准弧）在远离边界处稠密，根据引理 4.14，存在一条准弧 a_t，位于 $H_t(a)$ 的某个小邻域内，并与 $H_t(c)$ 不相交。同理，

我们可以在 $H_t(c)$ 的一个小邻域内找到一条准弧 c_t，它与 a_t 和 $H_t(a)$ 均不相交。

对于任意 $t \in I$，存在 U 的一个邻域 t，使得对于任意 $t' \in U$，曲线 $H_{t'}(a)$ 都与 c_t 不相交。因此，根据紧致性，我们可以将区间 I 划分为有限个片段 $I = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_k = 1\}$，使得 c_{t_i} 与 $H_{t_{i+1}}(a)$ 不相交。于是，准弧 $a_{t_{i+1}}$ 也可以与 c_{t_i} 不相交。

Thus

$$\{a = a_0, c = c_0, a_{t_1}, c_{t_1}, \ldots, a_{t_i}, c_{t_i}, a_{t_{i+1}}, \ldots, c_{t_{k-1}}, a_{t_k} = b\}$$

是 $\mathcal{QA}^\dagger(S)$ 中连接任意两个同伦准弧 a 和 b 的一条路径。因此，$\mathcal{QA}^\dagger(S)$ 是连通的。□

非分离准弧图。我们称曲面 S 中的一个准弧为非分离的，如果它在 S 中的补集是连通的。非分离准弧图记作 $\mathcal{NQA}^\dagger(S)$，是由非分离准弧张成的 $\mathcal{QA}^\dagger(S)$ 的子图。

推论 4.22. 对于任意具有 $g \geq 1$ 和 $b > 0$ 的 $S = S_g^b$，非分离准弧图 $\mathcal{NQA}^\dagger(S)$ 是连通的。

证明. 考虑 $\mathcal{QA}^\dagger(S)$ 中一条连接两个非分离准弧的路径上的任意分离顶点的邻点，即可看出这一点。如果这些邻点位于该分离顶点的不同侧，那么它们必定不相交，因此可以从路径中移除该顶点。反之，如果这些邻点位于同一侧，那么另一侧存在一个与二者都不相交的非分离准弧。因此，可以用一个非分离顶点替换该分离顶点。□

相连拟弧图。令 d_0 为 ∂S 的一个指定分支。若 a、b 的所有端点都位于 d_0 上，且 a 的端点在 d_0 中分离 b 的端点，则称 a、$b \in \mathcal{QA}^\dagger(S)$ 在 d_0 处相连。

我们将相连拟弧图 $\mathcal{QA}^\dagger_{Lk}(S, d_0)$ 定义为这样一个图：其顶点是 S 中两个端点都位于 d_0 的非分离准弧，边连接在 d_0处相连且互不相交的准弧。在方便时，我们会在记号中省略 d_0，写作 $\mathcal{QA}^\dagger_{Lk}(S)$。

推论 4.23. 对任意满足 $g \geq 1$ 且 $b > 0$的 $S = S_g^b$，相连拟弧图$\mathcal{QA}^\dagger_{Lk}(S)$是连通的。

证明. 由推论 4.22 可知 $\mathcal{NQA}^\dagger(S)$ 是连通的，因此我们只需验证：对于任意两个在 d_0处不相连的 $a, b \in \mathcal{QA}^\dagger_{Lk}(S)$，它们之间存在一条路径。由于 a 和b 均为非分离的，因此 $S \setminus \{a \cup b\}$ 至多有两个连通分支。值得注意的是，d_0 中位于 a 的端点之间且不包含 b 端点的连通分支，与 d_0 中位于 b 的端点之间且不包含 a 端点的连通分支，必定属于同一个连通分支。因此，存在一条准弧 c，其端点分别位于 d_0的这两个连通分支中，故它与 a 和 b都相连。□

5. Building the quasiconformal map

本节分为三个部分。首先，我们利用 §4 中的图信息，将原拟圆图的一个自同构扩展为扩展拟圆图的一个自同构。其次，我们利用扩展图的自同构构造曲面的一个同胚。最后，我们证明这个同胚也是一个拟共形映射。

A§4 中的 s，S 是亏格为 $g \geq 2$ 的闭定向曲面，除非另有说明 .

5.1. 从本质到非本质。我们的目标是定义拟圆图的一个扩展版本，将其作为证明拟圆图的自同构群嵌入 Homeo(S) 的工具。

定义 5.1（扩展拟圆图）。令 $\mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 为一个图，其顶点是 S 中的所有拟圆，并在对应于互不相交的拟圆的顶点之间连边。

本小节的目标是证明以下结果：

命题 5.2。设 $\Phi \in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。则存在一个 $\overline{\Phi} \in \mathrm{Aut}\mathcal{EQC}^\dagger(S)$，使得 $\overline{\Phi}$ 在本质顶点上的限制恰为 Φ。

在描述这个扩展自同构之前，我们必须先仅利用 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中的信息来描述 $\mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 的边。下面的引理将完成这一点。

引理 5.3。可以通过以下构造，在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中区分 $\mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 的边：

(1) 两个非本质拟圆 e 和 f 不相交且不嵌套，当且仅当存在分别对应于 e 和 f 的不相交双边形对 $\{c, d\}$ 和 $\{c', d'\}$。(2) 两个非本质拟圆 e 和 f 不相交且嵌套，当且仅当经过重新标记后，对于任意对应于 e 的双边形对 $\{c, d\}$，都存在一个与 c 不相交的、对应于 f 的双边形对 $\{c', d'\}$。(3) 一个本质拟圆 a 与一个非本质拟圆 e 不相交，当且仅当存在一个对应于 e 且与 a 不相交的双边形对 $\{c, d\}$。

证明。设 e、$f \in \mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 是两个不相交的非本质拟圆。如果 e、f 不嵌套，那么 e 包含于 $S \setminus f$ 的 S_g^1 分支中。因此，在该分支中存在一个对应于 e 的双边形对 $\{c, d\}$，它与 f 不相交。此外，由于双边形对由非分离拟圆组成，并且是 S 的闭子集，因此在 $S \setminus \{c \cup d\}$ 上存在一个对应于 f 的双边形对 $\{c', d'\}$。反向显然成立。由于 $S \setminus e$ 或 $S \setminus f$ 的圆盘分支中不存在任何双边形对，因此不相交双边形对的存在排除了任何嵌套关系。

现在假设 e 和 f 是嵌套的。经过适当重新标记后，我们可以进一步假设 f 嵌套于 $S \setminus e$ 的圆盘分支中。令 $\{c, d\}$ 为 e 的任意一个大弧对。由于 c 是一条非分离曲线，且 $S \setminus c$ 是包含 f 的 S 的开子集，因此存在一个与 c 不相交的 f 的大弧对 $\{c', d'\}$。反之，需要考虑两种情形。当 e 与 f 相交，或虽不相交但并非嵌套时，存在 e 的一个大弧对 $\{c, d\}$，使得 c 和 d 都与 f 相交，交于 e 上或 e 外部。在这两种情况下，都不可能找到一个与 c 不相交的 f 的大弧对。

最后，我们讨论本质拟圆 a 和非本质拟圆 e 的情形。假设它们不相交。由于 a 是本质的，因此 $S \setminus a$ 的分支中包含 e 的部分具有足够的拓扑结构，可以容纳 e 的某个大弧对 $\{c, d\}$。反方向则由 e 是其大弧对的子集这一事实得到。□

命题 5.2 的证明。设 $\Phi \in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。我们将通过以下两条规则定义映射 $\overline{\Phi} \in \mathrm{Aut}\mathcal{EQC}^\dagger(S)$：

(1) 若 $a \in \mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 是本质拟圆，则 $\overline{\Phi}(a) = \Phi(a)$。(2) 若 $e \in \mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 是非本质拟圆，则令 $\{c, d\}$ 为 e 的一个大弧对。定义 $\overline{\Phi}(e)$ 为由 $\{\Phi(c)\ \Phi(d)\}$ 确定的非本质拟圆。

直接由此定义可知，将 $\overline{\Phi}$ 限制在本质顶点上的作用恰好是 Φ。

由 $\{\Phi(c)\ \Phi(d)\}$ 确定的非本质曲线与双边形对的选择无关，因为推论 4.23 表明，从 $\{c,d\}$ 到任意其他双边形对都存在一条由双边形对组成的路径。此外，这条路径中的每一对相邻双边形对都构成一个链接共享对，而根据命题 4.20，链接共享对在作用下保持不变。因此，$\overline{\Phi}$ 是良定义的。

此外，引理 5.3 表明，对于任意两个顶点 $a,b \in \mathcal{EQC}^\dagger(S)$，$a$与 b 之间存在一条边，当且仅当 $\overline{\Phi}(a)$与 $\overline{\Phi}(b)$之间存在一条边。

最后，$\overline{\Phi^{-1}}$ 诱导的恰好是 $\overline{\Phi}$的逆作用，即

$$\overline{\Phi^{-1}}(\overline{\Phi}(a)) = a \qquad \text{and} \qquad \overline{\Phi^{-1}}(\overline{\Phi}(e)) = e$$

因为 $\{\Phi(c)\ \Phi(d)\}$ 是 $\overline{\Phi}(e)$与 $\{\Phi^{-1}(\Phi(c))\ \Phi^{-1}(\Phi(d))\} = \{c,d\}$构成的大弧对，而后者是 e 的大弧对。因此，$\overline{\Phi}$ 可逆，且是 $\mathcal{EQC}^\dagger(S)$的图自同构，正如所需。□

5.2. 构造同胚。虽然前几节遵循了[25], 的工作，但他们从扩展图的自同构到曲面同胚的映射无法直接推广到拟圆。这里的根本障碍在于，根据 Denjoy–Riesz 定理，任意一列互不相同且收敛的点都位于某条 Jordan 曲线上，[28], 但不一定位于更规整的曲线上。具体而言，[25,引理 4.1]利用无限型曲面的分类 [30, 定理 1] 证明了这一事实，而该结论只在同胚意义下成立。

幸运的是，对于 [11] 中的光滑曲线，这一障碍已经得到克服。我们将概述这一论证，以证明以下命题：

命题 5.4. 设 $\Phi \in \mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。那么 $\Phi = \varphi_*$，其中某个 $\varphi \in \mathrm{Homeo}(S)$，且$\varphi_*$ 是由 φ 诱导的 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 的自同构。

我们首先在扩展图中确定一种图结构，它与非扩展图中的图结构相同。

引理 5.5. 设 S 是一个定向曲面。设 $a \in \mathcal{EQC}^\dagger(S)$。那么 a 是分离的，当且仅当 $link(a)$ 是一个联结。

这个引理的证明直接来自引理 4.1 的证明。接下来，我们将定义并确定一种构造，以便确定曲面的同胚。

定义 5.6（嵌套序列）。曲面 S 上的曲线序列（c_i）称为嵌套的，如果每个 c_i 都是分离的，并且存在 $S \setminus c_i$ 的一个分支 C_i，使得对于所有 $j > i$，都有 $c_j \subset C_i$。

引理 5.7. 设 $\Psi \in \mathrm{Aut}\mathcal{EQC}^\dagger(S)$。若 $(c_i) \in \mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 是一个嵌套曲线序列，则序列 $(\Psi(c_i))$ 也是嵌套的。

引理 5.7 的证明可直接由引理 5.5 得出。我们省略此证明，因为关于光滑曲线的同一结果的详细证明可见于 [11, 引理 2.3]。

定义 5.8（收敛序列）。若曲线序列 (c_i) 在 S 中收敛到集合 P，则称其在豪斯多夫拓扑下收敛到 P。若一条曲线与序列 (c_i) 的尾部中的无穷多条 c_i 相交，则称该曲线与此序列的尾部相交。

引理 5.9. 嵌套曲线序列 $(c_i) \in \mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 收敛到一点 $x \in S$，当且仅当以下两条均成立：

（i）存在一条曲线 $a \in \mathcal{EQC}^\dagger$（$S$），它与（$c_i$）的尾部相交；（$ii$）任意两条与（$c_i$）的尾部相交的曲线 a、$b \in \mathcal{EQC}^\dagger$（$S$）都必定彼此相交。

同样，这个引理的证明与 [11, 引理 2.4] 中的光滑版本完全相同，此处从略（参见 [17]，其中给出了该结果及引理 5.10 的连续情形）。由于上述两个条件都能在图中辨识，这表明嵌套收敛序列在 $\mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 的自同构作用下保持不变。

引理 5.10. 每个 $\Psi \in \mathrm{Aut}\mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 都诱导一个同胚 φ_Ψ，使得 φ_Ψ 在 $\mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 上的作用由 Ψ 给出。

我们仅概要说明这一证明，让读者了解如何构造此映射，以及为何它是一个同胚。完整细节可参见光滑情形的证明，见 [11, 引理 2.5]。

证明概要。为定义所需的映射，我们首先取一个收敛于点 $x \in S$ 的嵌套收敛序列 (c_i)。由于 Ψ 保持嵌套收敛序列，像序列 $(\Psi(c_i))$ 也必定是嵌套收敛序列。我们将 $\varphi_\Psi(x)$ 定义为该像序列的收敛点。

通过交错取出收敛于同一点的嵌套序列的子序列，可以证明此映射定义良好。再对像序列作类似的交错取子序列，即可证明此映射是单射。利用嵌套收敛序列的一个原像，以及 Ψ^{-1} 也是该图的自同构这一事实，可以直接推出满射性。

为证明连续性，我们构造一列嵌套序列，使其收敛到一列收敛于 x的点 $\{x_n\}$ 中的各点。随后利用一个对角序列证明，点 $\{\varphi_\Psi(x_n)\}$ 收敛到 $\varphi_\Psi(x)$。由$\varphi_\Psi^{-1} = \varphi_{\Psi^{-1}}$这一事实可立即得到逆映射的连续性。

最后，我们证明 φ_Ψ 在 $\mathcal{EQC}^\dagger(S)$上的作用恰好是 Ψ。为此，我们为曲线 c上的每个点定义嵌套收敛序列。由于 c与该收敛序列的尾部相交，因此 $\Psi(c)$也与像序列的尾部相交。由此，根据紧致性， $\Psi(c)$包含 $\varphi_\Psi(c)$中的所有点。□

现在给出本小节的最后一个证明。

命题 5.4 的证明。根据命题 5.2，$\mathrm{Aut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$中的每个元素 Φ 都对应于$\mathrm{Aut}\mathcal{EQC}^\dagger(S)$中的一个元素 $\overline{\Phi}$，使得 $\overline{\Phi}$ 在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$上的限制恰好为 Φ。根据引理 5.10，存在一个同胚 $\varphi_{\overline{\Phi}}$，使得 $\varphi_{\overline{\Phi}}$ 在扩展图上的作用恰好为$\overline{\Phi}$。因此，$\varphi_{\overline{\Phi}}$ 在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$上的作用恰好为 Φ，这正是所要证明的。□

5.3. 拟共形性。现在我们转而考察诱导 $\mathcal{EQC}^\dagger(S)$ 自同构的同胚的拟共形性。我们的论证思路是：先根据四点有界转弯条件，对 S 中充分小的圆的像的拟圆常数加以限制，再应用 Aseev 定理。

下面的观察将帮助我们把关于本质曲线的信息转化为关于小圆的信息。

引理 5.11。设 (S, g) 是一个双曲曲面。那么存在一个由简单闭曲线同伦类组成的有限族 F，以及 K、$\varepsilon > 0$，使得对于 S 上直径小于 ε 的任意圆 C，以及 C 中的任意循环有序四元组 $q = (x_1, x_2, x_3, x_4)$，都存在 C 的一条弧 $\mathcal{A}$，其中包含 q；并存在一个本质的 K-拟圆 γ，其同伦类属于 F 且包含 $\mathcal{A}$。

这里仅使用度量圆就足以满足我们的需求，因为 Aseev 定理 2.3 只要求验证圆在映射下成为拟圆。

证明。令 ε 相对于 (S, g) 的单射半径足够小，并令 C 为直径小于 ε 的圆。那么存在一条 $(3/4)$-圆弧 $\mathcal{A}_q$，它属于 C 且包含 q：这是关键所在。

现在将 $\mathcal{A}_q$ 延伸为弧 α_q，使其直径为单射半径的一个确定但较小的比例；具体做法是用垂直于圆边界的测地线段延伸每一侧。令 B_q 为包含 α_q 的球，并使 α_q 的端点包含在 ∂B_q 中且与之垂直。最后，通过用一条弧连接两侧来得到 γ；该弧只在端点处与 B_q 相交，并属于有限个同伦类 F 之一。

最后我们指出，这一过程可以得到具有一致受控拟圆性常数 K 的 γ。由于曲线 γ 十分规整且受到良好控制，这一点相当标准；为方便读者，我们给出一个详尽的证明。

令 ν 为 γ 的同伦类中的测地线。我们的任务是找到一个拟共形映射 $\varphi\colon (S,g) \to (S,g)$，将 ν 映到 γ，并对 $K(\varphi)$ 施加一致控制。上述过程使我们能够选择满足以下控制条件的 γ。首先，我们安排使 γ 在 $\mathcal{A}_q$ 之外分段光滑且分段测地，并一致控制测地线段的数量及线段之间的夹角。接下来，我们确保 γ 不会过于紧密地绕回自身，其含义是：对于某个一致的 $\varepsilon > 0$，在相应的环形覆盖中，γ 的本质提升的 ε-邻域通过覆盖映射等距嵌入到 (S,g) 中。

为了延拓到 S的其余部分，我们先在 S 上定义一个度量图映射，其补区域都是圆盘（例如拓扑三角剖分），然后应用延拓结果，在剩余的圆盘上定义该映射。由于我们的构造具有一致性，我们可以取 S 中的两个嵌入图 G_1、G_2，它们的边分段光滑，并满足以下条件：

(1) ν 和 γ 是 G_i 中长度相同的环 C_i 的并集。(2) G_i 的所有补连通分支 P_j^i 都是圆盘（$i = 1$、2、 $j = 1$、.....、n），且在其诱导度量下直径一致有界；(3) 存在一个同胚 ψ，它与恒等映射 S 同伦，并将 G_1 映到 G_2。用 Φ表示诱导的图同构。(4) 存在一个同胚 ψ'：$G_1 \to G_2$，它诱导图同构 Φ，且对于某个一致的 $L > 1$，ψ' 在每个胞腔 P_j^i 的边界上的限制相对于由 S上的度量所诱导的 P_j^i 上的度量是 L-双利普希茨的。

于是，由于提升到 $\mathbb{H}^2$，结合 P_j^i 上直径界所得到的双曲度量与欧几里得度量的比较，并应用定理 2.5，可知存在一个统一的 $K < \infty$，使得存在 K-拟共形同胚 $P_j^1 \to P_j^2$，其在 ∂P_j^i 上的限制为 ψ'。由此得出，ψ' 可延拓为 S 的一个同胚 ψ''，它将 ν 映到 γ，并且在 G 的补集上是 K-拟共形的。由于图形 G_i 的测度为 0，映射 ψ'' 因而是 K-拟共形的。□

现在证明命题 3.6。

证明。设 $S = S_g$ 满足 $g \geq 2$，并令 $\Phi \in \in \mathsf{CAut}\mathcal{QC}^\dagger(S)$。根据命题 5.4，$\Phi$ 是由 S 的一个同胚 φ 所诱导的。

由于 K-拟共形性是局部条件，只需对每个点 $p \in S$，找到 p 的一个邻域 U，使得 φ 在 U 上的限制是 K-拟共形的。

令 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小，使得对于某个 K_0 和由简单闭曲线同伦类构成的有限集$F \subset \mathscr{S}$，引理 5.11 成立。由于 Φ 是弱粗序保持的，且 F 是有限的，因此存在一个 K_1，使得 $\varphi(\gamma)$ 对每个 K_0-拟圆 γ 都是一个 K_1-拟圆。

将 S,g 共形化，使得 S 的万能覆盖与庞加莱圆盘模型中的双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 相对应。我们可以将 φ 提升为 $\mathbb{H}^2$ 的等变同胚 $\widetilde{\varphi}$。要验证 f 在 p 附近的拟共形性，只需验证 $\widetilde{\varphi}$ 在 p 的某个提升附近的拟共形性。

现在，设 C 是 U 内的一个圆，设 q 是 C 中点的一个有序四元组，并设 α 是引理 5.11 给出的曲线。根据 K-拟圆的定义，存在一个 K_1-拟共形同胚 $\eta\colon S \to S$，以及一条测地线 $\gamma \in F$，使得 $\eta(\gamma) = \varphi(\alpha)$。注意，$\eta$ 可提升为 $\mathbb{H}^2$ 的一个 K_1- 拟共形同胚，因此可延拓为 $\mathbb{CP}^1$ 的一个 K_1^2-拟共形同胚；并且 η 的延拓将 $\mathbb{CP}^1$ 中的一个圆映为包含 $\widetilde{\alpha}$ 的一个 K_1^2-拟圆。由此可得，对于 α 在 $\mathbb{H}^2$ 中的任意提升 $\widetilde{\alpha}$，$\widetilde{\varphi}(\widetilde{\alpha})$ 都满足 $c(K_1^2)$-四点有界转弯条件；特别地，对于我们在 C 中的点四元组的提升，$c(K_1^2)$-四点有界转弯条件成立。

由于这对 C 中任意四个点都成立，我们得出 $\widetilde{\varphi}(C)$ 是 $\mathbb{CP}^1$ 中的一个 $K(c(K_1^2))$-拟圆。根据 Aseev 定理，$\widetilde{\varphi}$ 在 p 的某个邻域内是拟共形的，其质量常数与 p 无关，正如所需。□

6. 双曲性

本节中，我们将证明拟圆图是双曲的（定理 B）。这是几何群论应用中由群作用的图所具有的一项基本性质。证明大体遵循 Bowden–Hensel–Webb 对精细曲线图双曲性的证明 [14], 不过，在处理拟圆时需要做一些小的改动。

我们将通过四点条件来定义双曲性：对于度量空间 (X, d) 中的点 x、y、w，Gromov 积定义为

$$\langle x, y\rangle_w = \frac{1}{2}(d(w,x) + d(w,y) - d(x,y)).$$

若对所有 w、x、y、$z \in X$，空间 X 满足……，则称其为 δ-双曲的。

$$\langle x, z\rangle_w \geq \min\{\langle x, y\rangle_w, \langle y, z\rangle_w\} - \delta.$$

我们将每条边的长度设为 1，从而赋予所有图度量。

在本节中，令 S 表示亏格为 $g \geq 2$ 的闭定向曲面。首先，我们证明拟圆图是道路连通的。

命题 6.1. $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 是道路连通的。

证明. 注意，存在一个单纯映射 $\mathcal{QC}^\dagger(S) \to \mathcal{C}(S)$，它由取同伦类给出。因此，只需证明，对于 $\mathcal{C}(S)$ 的任意顶点，其原像在 $\mathcal{QC}^\dagger(S)$ 中张成的子图是连通的。这直接来自引理 4.10 中同伦拟圆之间存在路径这一事实。我们注意到，这条路径上各顶点的质量常数可能大于其端点的质量常数。□

现在我们引入存活曲线图，它是曲线图的一个子图。存活曲线图中的距离刻画了拟圆图中的距离，这有助于我们证明拟圆图是双曲的。

定义 6.2（存活曲线图）。设 $n \geq 0$ 和 Σ 是亏格为 $g \geq 1$、有 n 个穿孔的曲面。曲面 Σ的存活曲线图记为 $\mathcal{C}^s(\Sigma)$，它是 $\mathcal{C}(\Sigma)$ 的子图，由所有对应于这样的曲线的顶点所张成：这些曲线在填补 Σ的穿孔后得到的闭曲面中仍然是本质曲线。

Rasmussen 的工作表明，存活曲线图是 δ-双曲的 [29]:

定理 6.3。设 Σ 是一个具有正亏格的有限型曲面。则存在一个数 $\delta > 0$，使得 $\mathcal{C}^s(\Sigma)$ 是 δ-双曲的。

以下两个引理见 Bowden–Hensel–Webb [14, 引理 3.5 和 3.6]，它们是在所有曲线的背景下提出的，使我们能够证明存活曲线图中的距离与拟圆图中的距离是等价的。两份证明只需稍作修改，以考虑拟圆的质量常数。特别是，在证明中对曲线施加同痕和扰动时，我们注意到拟圆的质量常数可能会增加。

引理 6.4。设 $P \subset S$ 为有限集。假设 α_1、……、α_n 是在 $S-P$ 中两两处于最简位置的曲线。设 β_1、……、β_m 是与 P 不相交的 K_i-拟圆。则可以将 β_i 同伦变形为 K_i'-拟圆 β_1'、……、β_m'，使得在 $S-P$ 中，α_1、……、α_n、β_1'、……、β_m' 两两处于最简位置。

引理 6.5。设 α、$\beta \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$ 和 $P \subset S$ 为有限集。则可以找到测地线 $\alpha = v_0$、……、$v_k = \beta$，使得对所有 $0 < i < k$，都有 $v_i \cap P = \emptyset$。

注意到，引理 6.4 表明，存活曲线图中的距离是拟圆图中距离的上界，而引理 6.5 表明，存活曲线图中的距离是拟圆图中距离的下界，因此我们得到如下结论：

引理 6.6. 假设 $\alpha, \beta \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$ 横截相交，且 α 和 β 在 $S-P$ 中处于最简位置，其中 $P \subset S$ 是有限的，并且与 α 和 β 不相交。那么 $d_{\mathcal{C}^s(S-P)}([\alpha]_{S-P}, [\beta]_{S-P}) = d_{\mathcal{QC}^\dagger(S)}(\alpha, \beta)$。

利用两个拟圆在存活曲线图中的距离等价于它们在拟圆图中的距离这一事实，我们现在可以证明拟圆图是双曲的。

定理 B 的证明。设 $\alpha, \beta, \gamma, \mu \in \mathcal{QC}^\dagger(S)$。我们将证明

$$\langle \alpha, \gamma \rangle_\mu \geq \min\{\langle \alpha, \beta \rangle_\mu, \langle \beta, \gamma \rangle_\mu\} - \delta - 4,$$

其中，δ 是 $\mathcal{C}^s(S-P)$的双曲性常数。为此，我们构造顶点α'、β'、γ'、$\delta' \in \mathcal{C}^s(S-P)$，使它们同时满足：(i) 横截；并且 (ii) $d_{\mathcal{QC}^\dagger(S)}(\alpha, \alpha') \leq 1$、$d_{\mathcal{QC}^\dagger(S)}(\beta, \beta') \leq 1$、$d_{\mathcal{QC}^\dagger(S)}(\gamma, \gamma') \leq 1$。令 $\mu = \mu'$。为确保 (i) 成立，我们先找到与 α不相交且同伦于 α的 α''，然后对 α''施加足够小的扰动，使 (ii) 成立。注意，α' 的质量常数可能大于 α的质量常数。我们对 β 和 γ重复这一过程。随后，我们选取点的有限子集$P \subset S$，使得 α'、β'、γ'和 μ' 之间的任意双边形都包含 P中的一个点，从而确保 α'、β'、γ'和 μ' 中的每一个都处于最简位置。应用引理 6.6和定理 6.3即可证明我们的断言。□

References

[1] Lars V. Ahlfors. 拟共形反射. 《数学学报》, 109:291–301, 1963年.[2] V. V. Aseev. 映射具有莫比乌斯性质的 Carath´eodory 判据的拟共形类比. 《西伯利亚数学杂志》, 55(1):3–10, 2014年.[3] JasonA. Behrstock. 映射类群与 Teichm¨uller 空间的渐近几何. 《几何与拓扑》, 10:1523–1578, 2006年.[4] Lipman Bers. 拟共形映射与 Teichm¨uller 定理. 解析函数, 第 89–119 页, 1960年.[5] Mladen Bestvina and Ken Bromberg. 曲线复形的渐近维数. 《几何与拓扑》, 23(5):2227–2276, 2019年.[6] Mladen Bestvina and Koji Fujiwara. 映射类群子群的有界上同调. 《几何与拓扑》, 6:69–89, 2002年.[7] Arne Beurling and Lars V. Ahlfors. 拟共形映射下的边界对应. 《数学学报》, 96:125–142, 1956年.

[8] Christopher J. Bishop. 魏尔-彼得森曲线、 β-数与极小曲面. 数学年刊 (2), 202(1):111–188, 2025.[9] Francesco Bonsante, Jeffrey Danciger, Sara Maloni, and Jean-Marc Schlenker. $\mathbb{CP}^1$中的拟圆与 Jordan 曲线的宽度. 伦敦数学会会刊, 53(2):507–523, 2021.[10] KATHERINE WILLIAMS BOOTH. 保持连续可微曲线的曲面同胚, 2024. arxiv:2410.21460.[11] KATHERINE WILLIAMS BOOTH. 光滑精细曲线图的自同构. 美国数学会汇刊, 即将出版.[12] KATHERINE WILLIAMS BOOTH, Daniel Minahan, and Roberta Shapiro. 精细 1-曲线图的自同构. 几何专辑, 219(5):论文编号 68, 20 页, 2025.[13] Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Kathryn Mann, Emmanuel Militon, and Richard Webb. 旋转集与曲线上的作用. 数学进展, 408:论文编号 108579, 33 页, 2022.[14] Jonathan Bowden, Sebastian Wolfgang Hensel, and Richard Webb. 曲面微分同胚群上的拟态射. 美国数学会杂志, 35(1):211–231, 2022.[15] Dmitri Burago, Sergei Ivanov, and Leonid Polterovich. 几何起源群上的共轭不变范数. 载于《微分同胚群》, 数学进展丛书第 52 卷, 第 221–250 页. 日本数学会, 东京, 2008.[16] Robert D. Edwards and Robion C. Kirby. 嵌入空间的变形. 数学年刊 (2), 93:63–88, 1971.[17]Benson Farb and Dan Margalit. 未发表的工作，在线网址：https://www.youtube.com/watch?v=X0XBnKBKSDI.[18] Frederick W. Gehring. 拟圆盘的刻画. 载于《拟共形几何与动力系统》（卢布林，1996），巴拿赫中心出版物第 48 卷，第 11–41 页. 波兰科学院数学研究所，华沙，1999.[19] Pierre-Antoine Guih´eneuf and Emmanuel Militon. 环面精细曲线图上的抛物等距变换. 伦敦数学会会报 (3), 129(2):论文编号 e12625, 27 页, 2024.[20] John L. Harer. 可定向曲面映射类群的同调稳定性. 数学年刊 (2), 121(2):215–249, 1985.[21] Allen Hatcher. 曲面的三角剖分. 应用拓扑学, 40(2):189–194, 1991.[22] Fr´ed´eric Le Roux and Maxime Wolff. 精细图若干变体的自同构. 代数与几何拓扑, 24(8):4697–4730, 2024.[23] O. Lehto and K. I. Virtanen. 平面上的拟共形映射. 数学科学基础丛书第 126 卷. 施普林格出版社, 纽约—海德堡, 第二版, 1973. K. W. Lucas 从德文译出.[24] Olli Lehto. 单叶函数与 Teichm ¨uller 空间, 第 109 卷. Springer Science & Business Media, 1987.[25] Adele Long, Dan Margalit, Anna Pham, YVON VERBERNE, and Claudia Yao. 精细曲线图的自同构, 2021. 即将在美国数学会汇刊发表. arxiv:2108.04872.[26] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. 曲线复形的几何。I. 双曲性. 数学发明, 138(1):103–149, 1999.[27] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. 曲线复形的几何。II. 层级结构. 几何与泛函分析, 10(4):902–974, 2000.[28] Robert L. Moore and John R. Kline. 关于能够通过一条简单连续弧的最一般平面闭点集. 数学年刊 (2), 20(3):218–223, 1919.[29] Alexander J. Rasmussen. 通过双角曲线证明非分离曲线图的一致双曲性. 美国数学会会报, 148(6):2345–2357, 2020.[30] Ian Richards. 关于非紧曲面的分类. 美国数学会汇刊, 106:259–269, 1963年.[31] Stanislav Smirnov. 拟圆的维数. 《数学学报》, 205(1):189–197, 2010.[32] William Thurston. 叶状结构与微分同胚群. 美国数学会会刊, 80(2):304–307, 1974.[33] Takashi Tsuboi. 关于微分同胚群的一致完美性. 载于《微分同胚群》, 数学进展丛书第 52 卷, 第 505–524 页. 日本数学会, 东京, 2008.[34] Takashi Tsuboi. 关于偶数维流形微分同胚群的一致完美性. 瑞士数学评论, 87(1):141–185, 2012.[35] Pekka Tukia. 利普希茨映射的平面 Sch¨onflies 定理. 芬兰科学院学报A辑I数学, 5(1):49–72, 1980年.

[36] Pekka Tukia. 实数直线到平面的拟对称嵌入和利普希茨嵌入的延拓. 芬兰科学院学报A辑I数学, 6(1):89–94，1981年.[37] Pekka Tukia and Jussi V¨ais¨al¨a.度量空间的拟对称嵌入. 芬兰科学院学报A辑I数学，5(1):97–114，1980年.