arXiv:2601.09897v1 [math.GT] 14 Jan 2026

大映射类群的伯曼–希尔登理论

NESTOR COLIN、RUB´EN A. HIDALGO、RITA JIM´ENEZ ROLLAND、ISRAEL MORALES 和 SA´UL QUISP E

摘要。设S和X是两个无边界的连通拓扑曲面，并假设S是无限型或具有负欧拉示性数。本文证明，若$p: S \to X$是一个全分歧分歧覆盖映射，则p满足*Birman–Hilden*性质。这将 Winarski 的一个定理及文献中的已知结果推广到了无限型曲面和无限次数的分歧覆盖映射情形。作为应用，我们证明，无限型不可定向曲面的映射类群（分别地，其含k股的辫群）可实现为其可定向双重覆盖的映射类群（分别地，其含 2k股的辫群）的一个子群。

1. 引言

通过分歧覆盖研究映射类群之间相互作用的工作，源自 Birman 和 Hilden 在20世纪70年代的研究 [BH71], [BH72], [BH73]。他们确立了一项判据，即如今所称的 *Birman-Hilden* 性质，它将分歧覆盖的总空间与底空间的映射类群的某些子群联系起来。具体而言，分歧覆盖映射 $p : S \to X$ 满足 *Birman-Hilden* 性质，当且仅当每个与恒等映射同伦的 S 上的保纤维同胚，都存在一条由保纤维同胚构成的同痕。在第 2.3 节中，我们回顾了这一性质在拓扑曲面分歧覆盖中的若干等价表述，以及它在映射类群方面的诠释。

本文旨在将文献中已知的结果拓展到无限型曲面以及某些无限次数的分歧覆盖映射这一情形。回顾一下，如果拓扑曲面的基本群是有限生成的，则称其为有限型；否则称为无限型。

考虑曲面之间的分歧覆盖映射$p : S \to X$。若对p的每个分支点p （$b \in X$），其纤维$p^{-1}(b)$中的每个点 $\tilde{b}$ 都是临界点，也就是说，$\tilde{p}$ 在b 处的分歧指数至少为二，则称p 是全分歧的。我们的主要结果适用于全分歧分支覆盖映射。

定理 1（大映射类群的 Birman–Hilden 性质）。设 S 和 X 是两个无边界的连通拓扑曲面，其中 S 要么是无限型，要么是具有负欧拉示性数的有限型曲面。若 $p: S \to X$ 是全分歧分支覆盖映射，则 p 具有 *Birman-Hilden* 性质。

由于正则分歧覆盖映射和无分歧覆盖映射都是全分歧的，因此可得以下结论。

推论 2。设 S 和 X 是两个无边界的连通拓扑曲面，其中 S 要么是无限型，要么是具有负欧拉示性数的有限型曲面。若 $p: S \to X$ 是正则分歧覆盖或无分歧覆盖映射，则 p 具有 *Birman-Hilden* 性质。

我们通过推广 Winarski 在 [Win15, Theorem 1] 中证明所采用的策略来证明定理 1；另见 [FM12, Section 9.4.3]。我们的方法运用曲面上曲线的组合拓扑，并依赖于适用于有限型和无限型曲面的 Alexander 方法。使我们能够在证明中纳入无限层分支覆盖的一个关键步骤是引理 3.8；该引理描述了从闭环带和闭无穷带到具有两个边界分支的紧曲面的分歧覆盖的结构。此外，我们在 Klein 曲面的范畴中进行研究，以获得一些辅助引理。这使我们能够采用统一的论证，将以下对象一并纳入：

2020数学主题分类。主要分类 57M12、57K20；次要分类 57M60、57M07。关键词和短语。映射类群、分支覆盖、无限型曲面、不可定向曲面。

无限层分支覆盖映射，以及有限型和无限型、可定向和不可定向曲面。

1.1. **与文献中已知结果的关系**。 在曲面为闭、可定向且双曲的假设下，Winarski 在 [Win15, 定理 1] 中证明，完全分歧的分歧覆盖映射（因此必为有限层）满足 Birman-Hilden 性质。她的结果重现了最初由 Birman 和 Hilden[BH71, BH72, BH73], 提出、后由 Zieschang [Zie73], 以及 Maclachlan 和 Harvey [MH75], 证明的正规分歧覆盖情形，也重现了 Aramayona 、Leininger 和 Souto [ALS09, 命题 3]证明的无分支覆盖情形。Birman 和 Hilden 的工作还包括闭曲面之间的正规无分支覆盖，其中曲面可能不可定向，包括闭不可定向曲面的可定向双重覆盖；参见 [BH72, 第 4]节。此外，Atalan 和 Medetogullari [AM20, 定理 1.1] 利用可定向双重覆盖，将 Winarski 关于不可定向闭双曲曲面完全分歧分歧覆盖的结果加以推广。关于 Birman 和 Hilden 工作的综述，以及有限层分歧覆盖理论发展简史，可见[MW21]；其中亦列有相关参考文献。

对于无限层分支覆盖，已明确证明 Birman–Hilden 性质的一个结果如下。设L 为雅各布梯，且$h : L \to L$ 为把手平移同胚。Dey、Dhanwani、Patil 和 Rajeevsarathy 在 [DDPR25, 引理 4.1], 中证明，由 $h^g{}^{-1}\rangle$ 对 L 的作用所诱导的正则无分歧覆盖映射 $p_g\colon L \to S_g$ 对每个 $g \geqslant 2$ 都满足 Birman-Hilden 性质。

另一方面，正如我们将在第 4.1 节中解释的那样，Birman 和 Hilden 的原始论证[BH72, 定理 3], [BH73, 定理 1 和 2] 可与 Alexander 方法结合，从而证明非紧双曲基曲面X上的正则无分支覆盖$p : S \to X$ 满足 Birman–Hilden 性质。此处曲面X 可以是不可定向或无限型的，覆盖 p 也可以有无限多层。

上述所有结果都是定理 1 的特例。

注 1.1。 在 [Win15 中，命题 1], Winarski 给出了有限层分支覆盖映射$p : S \to X$ 满足 Birman–Hilden 性质的一个必要条件，即弱曲线提升性质。她运用这一条件，找到了有限层的非全分歧覆盖映射的例子，这些映射不满足 Birman–Hilden 性质。为证明弱提升性质，Winarski 利用了可提升映射类群 （见定义 2.7）是映射类群的有限指数子群这一事实；对于有限型曲面X 上的有限层分歧覆盖，这一事实成立。当分歧覆盖有无限多层，或曲面X 为无限型时，她的论证便无法照搬。这引出了以下问题：对于满足 *Birman–Hilden* 性质的无限层分支覆盖，是否存在类似曲线提升性质这样的必要条件？

1.2. **几何特征覆盖的一些应用**。 特别地，无分歧的几何特征覆盖 满足我们的推论 2（见定义 5.1）。我们在第 5 节中利用这一点，得到某些映射类群与曲面辫群之间的单同态，将已知结果推广到不可定向曲面和无限型曲面的情形。

设$B \subset \Sigma$ 是闭且离散的。记 $\mathrm{Map}(\Sigma;B)$ 为曲面 Σ 相对于B的映射类群 ，它由 Σ 的所有保持集合B不变的同胚的同痕类（相对于B）组成。若Σ 可定向，我们要求这些同胚保持定向。在文献中，当曲面 Σ 为无限型，或B 为无限集时，$\mathrm{Map}(\Sigma;B)$ 通常称为“大映射类群”。

我们的命题 5.3 重述并推广了 [ALS09，命题 5], ，并用于给出 [ALM24，命题 3.2], 的另一种证明，其中包括基曲面不可定向的情形。

推论 3（映射类群之间的单射）。 设 S 和 X 是没有边界的连通拓扑曲面，其中 S 为无限型，或为负欧拉示性数的有限型曲面。设 $p\colon S \to X$ 是一个无分支几何特征覆盖映射。取某个 $x \in X$ 以及某个$\tilde{x} \in p^{-1}(x)$。则同态

$$\mathrm{Map}(X;\{x\}) \to \mathrm{Map}(S;p^{-1}(x)), \quad [f] \mapsto [\widetilde{f}]$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$是单射，其中f是满足$f(\tilde{}x) = \tilde{}x$的f的唯一提升。

几何特征覆盖的一个例子是曲面 Σ 的万有阿贝尔覆盖 Σ^{ab}。它是无分支正则覆盖p：$\Sigma^{\mathrm{ab}} \to \Sigma$，对应于 Σ 的基本群的交换子子群。若 Σ 是无限型连通曲面，或是负欧拉示性数的有限型连通曲面，则覆盖映射p：$\Sigma^{\mathrm{ab}} \to \Sigma$ 具有无限多层，并由推论 2 满足 Birman–Hilden 性质。此外，几何特征覆盖的可提升映射类群 恰好是该覆盖的基曲面的整个映射类群；参见命题 5.2。因此，由短正合列 (2.4) 可知，$\mathrm{Map}(\Sigma)$ 同构于 $\mathrm{Map}(\Sigma^{\mathrm{ab}})$的某个子群的商群：相对于$p$ 的对称映射类群 $\mathrm{SMap}(\Sigma^{\mathrm{ab}})$ （参见定义 2.7）。

推论 4(映射类群作为商群)。 设 Σ 是无限型曲面，或具有负欧拉示性数的有限型曲面，Σ^{ab} 是它的万有阿贝尔覆盖。那么

$$\mathrm{Map}(\Sigma) \cong \mathrm{SMap}(\Sigma^{ab})/H_1(\Sigma;\mathbb{Z}).$$

当 Σ 可定向时，Basmajian 与第二作者在 [BH21, 第 1.1] 节中得到了其万有阿贝尔覆盖 Σ^{ab} 的同胚类型；另见 [BCC^{+}25, 定理 1.2] ，以及[AGH^{+}22, 命题 6.1]。更具体地说，带 puncture 的环面的万有阿贝尔覆盖是长笛曲面；若 Σ 是亏格至少为二且恰有一个 puncture 的有限型曲面，则 Σ^{ab} 是带斑点的洛克尼斯怪兽曲面。其余曲面的万有阿贝尔覆盖是洛赫尼斯怪兽曲面 *LNM*。特别是，*LNM* 的万有阿贝尔覆盖仍是*LNM*。有趣的是，根据推论 4，*LNM* 的映射类群同构于其某个子群的一个阿贝尔商群。

另一方面，闭可定向曲面S_g^{ab}的万有阿贝尔覆盖S_g （其亏格为$g \geq 2$）也同胚于*LNM*。作为推论 4 的结果，我们注意到，相应的对称映射类群 $\mathrm{SMap}(S^{\mathrm{ab}})$ 是*LNM*的映射类群的一个有限生成子群。此外，我们的推论 3 适用，并给出了一个单态：将带穿孔的闭可定向曲面S_g^1（其亏格为$g \geq 2$）的映射类群嵌入带标记点的 *LNM*的映射类群中。

另一个有趣的几何特征覆盖是不可定向曲面N的可定向双重覆盖 $p : S \to N$ 。当N 为无限型时，我们在推论 5.4 中证明，N 的映射类群可以实现为S的映射类群的一个子群。对于闭曲面，Birman 和 Chillingworth [BC72] 已证明了这一点，作为伯曼–希尔登理论 [BH72 第节 的应用。对于有限型曲面，Gonc.alves、Guaschi 和 Maldonado [GGM18 的定理 1.1 和命题 2.3] 给出了一个证明，该证明使用了与N 和S 相关的 Birman正合序列，以及 Gonc.alves 和 Guaschi 的 [GG12 定理 1.1] 的一个应用。该定理表明，可定向双重覆盖$p : S \to N$ 诱导了一个单态，将辫群 $B_k(N)$ N 上的 k 股辫 映入辫群 $B_{2k}(S)$ 上的2S 上的 k 股辫。

通过反向论证，我们应用推论 5.4，在推论 5.6 中证明相应曲面辫群的单射性，包括无限型的情形；另见推论 5.7。这些结果总结如下：

推论 5 （不可定向曲面及其可定向双重覆盖的映射类群和辫群）。 设 N 是一个空边界的不可定向连通曲面，其为无限型，或为负欧拉示性数的有限型曲面；设 $p : S \to N$ 是它的可定向双重覆盖。那么，由 p 诱导的自然同态

$$\mathrm{Map}(N) \to \mathrm{Map}(S) \quad \textit{and} \quad B_k(N) \to B_{2k}(S)$$

当 $k \geqslant 1$ 时是单射。

在 [KK24 中，定理 1.1], Katamaya 和 Kuno 证明，对于闭曲面，单同态 $\mathrm{Map}(N) \to \mathrm{Map}(S)$ 是拟等距嵌入。对于无限型曲面，能得出什么结论，将是一个有趣的问题。

论文提纲。 第 2 节介绍必要的记号，以及有关映射类群、Alexander 方法、分歧覆盖和 Birman–Hilden 性质等价表述的预备知识。第 3 节，我们研究 Klein 曲面的范畴，并证明若干辅助结果，以便得到主要结果定理 1；该定理将在第 4 节证明。最后，我们在第 5 节讨论一些应用。

2. 预备知识

2.1. **曲面的映射类群**。设 Σ 是一个连通的拓扑曲面，且 B 是 Σ 内部一个闭且离散的子集。这里我们将集合 B 视为曲面 Σ 中的标记点。Σ 的边界（可以为空）记作 $\partial\Sigma$，并且我们总是假设 $\partial\Sigma$ 是紧致的。

若 Σ 是不可定向的，我们用 $\mathrm{Homeo}(\Sigma; B)$ 表示所有同胚 {style id='9'>f : $\Sigma \to \Sigma$ 的群，这些同胚将 B 作为集合保持不变，并在 $\partial\Sigma$ 上限制为恒等映射。若 Σ 是可定向的，$\mathrm{Homeo}(\Sigma;B)$ 表示 $\Sigma \to \Sigma$ 上所有保向同胚的群，这些同胚将集合 B保持不变，并在 $\partial\Sigma$ 上限制为恒等映射。

Σ 相对于 B 的映射类群，记作 $\mathrm{Map}(\Sigma;B)$，是 $\mathrm{Homeo}(\Sigma;B)$中元素的所有同痕类所成的群；我们要求所有同胚和同痕都保持B 不变，并逐点固定 $\partial\Sigma$。我们有自然投影映射

$$\rho = \rho_{\Sigma;B} : \mathrm{Homeo}(\Sigma; B) \to \mathrm{Map}(\Sigma; B), \qquad f \mapsto [f]. \tag{2.1}$$

如果标记点集合B 为空，我们就简写为 $\mathrm{Homeo}(\Sigma)$ 和 $\mathrm{Map}(\Sigma)$。

2.2. **Alexander 方法**。 曲面 Σ 中的一条简单闭曲线是单位圆到 Σ中的一个嵌入。Σ 中的一条简单闭曲线若不围成圆盘、一次穿孔圆盘、环带或莫比乌斯带，则称为本质的。若 Σ 没有本质简单闭曲线，则称其为稀疏的。可以验证，边界为空的曲面 Σ 是稀疏的，当且仅当 Σ 同胚于至多有三个 punctures 的球面，或至多有一个 puncture 的射影平面。

定义 2.1（亚历山大系统）。 设 $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是曲面 Σ 上的一组本质简单闭曲线，且该曲面为空边界。若 Γ 满足以下条件，我们称其为一个 亚历山大系统：

（1）（最小位置）Γ 中的元素两两处于最小位置；（2）（同伦类互异）对于 γ_i、$\gamma_j \in \Gamma$，若 $i \neq j$，则 γ_i 与 γ_j 不同伦；（3）（无三重交点）对于任意互不相同的 i、j、$k \in \mathbb{N}$，以下集合中至少有一个为空：$\gamma_i \cap \gamma_j$、$\gamma_j \cap \gamma_k$、$\gamma_k \cap \gamma_i$；并且（4）（局部有限性）对于 Σ 中任意有限型子曲面 S，在同痕意义下，S 与 Γ 中有限条曲线相交。

设 $\mathcal{A}$ 是曲面 Σ 上的一组曲线，且该曲面为空边界。若 $\mathcal{A}$ 填充 Σ，则 $\Sigma \setminus \mathcal{A}$ 是开圆盘与一次穿孔开圆盘的不交并。

定义 2.2（k-稳定亚历山大系统）。 设 Γ 是一个具有空边界的曲面 Σ 上的亚历山大系统，且 $k \geqslant 1$。如果 Γ 是一个k-稳定亚历山大系统，则称其为k-稳定亚历山大系统：Γ 填充 Σ，并且每个保留 Γ 中元素的同伦类的 $\mathrm{Homeo}(\Sigma)$ $\in$都满足：f^k 与恒等映射同伦。

如果 Σ 是一个可定向有限型曲面，在 [FM12 的命题 2.8] 中证明了，任何填充 Σ 的亚历山大系统对于某个k 都是k-稳定的。该证明同样适用于不可定向有限型曲面的情形。此外，对于任意有限型曲面，都可以构造k-稳定的亚历山大系统，其中k 至多为二。对于可定向无限型曲面，[HHMV19 的定理 1.1] 中给出了 1-稳定亚历山大系统的例子；对于不可定向无限型曲面，[HHH24 的定理 A] 中也给出了相应例子。1-稳定亚历山大系统的存在性就是所谓的亚历山大方法，并且将成为证明我们主要结果定理 1 的重要组成部分。

定理 2.3（曲面上的亚历山大方法）。 设 Σ 是一个边界为空的非零星拓扑曲面。

[1]两条简单闭曲线处于最小位置，当且仅当它们不构成双边形；详情参见 [FM12，第 1.2 节。4]

（1）如果 Σ 是有限型的，那么它有一个2-稳定亚历山大系统。
（2）如果 Σ 是无限型的，那么它有一个 *1*-稳定亚历山大系统。

另请参见 [Sha22]，以详细了解 Alexander 方法。

2.3. **分歧覆盖的 Birman-Hilden理论**。让我们回顾一下定义 Birman–Hilden 性质及其一些等价表述所需的术语。

定义 2.4（分歧覆盖映射）。设S 和X 为拓扑曲面，并设$p : S \to X$为一个满射连续映射。

（1）如果存在一个闭且离散的子集 $B \subset \operatorname{int} X$（该子集可能为空），称为 p 的分歧轨迹，并满足以下性质：a）$p|_{S^*} : S^* \to X^*$ 是一个覆盖映射，其中 $S^* := S \setminus p^{-1}(B)$，$X^* := X \setminus B$；b）B 中的每个点 $b \in B$ 都有一个邻域 U_b，该邻域同胚于一个开圆盘，并且 $p^{-1}(U_b)$ 是一族开集 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的不交并；其中每个开集都同胚于一个恰好包含一个点 $\tilde{b}_j \in p^{-1}(b)$ 的开圆盘，并且对于每个 $j \in J$，$p|_{V_j} : V_j \to U_b$ 是一个有限分歧覆盖，即它在拓扑上等价于分歧覆盖 $z \in \mathbb{D}^2 \mapsto z^{m_j} \in \mathbb{D}^2$，其中 $m_j \geq 1$（至少有一个大于~或等于二）是整数，称为 p 在 b_j 处的分歧指数。（2）如果集合 B 为空，则称 p 为无分歧的。（3）如果 p 是一个分歧覆盖映射，且其限制 $p|_{S^*} : S^* \to X^*$ 是一个正则覆盖映射，则称 p 为正则分歧覆盖映射。（4）p 的覆盖变换群记为 Deck(p)，它是覆盖映射 $p|_{S^*}$ 的甲板变换群。

注记 2.5. 分歧覆盖映射 $p : S \to X$ 的分歧轨迹 B 在X中闭且离散。因此，$p^{-1}(B)$ 在S中也离散且闭。B 中的每个点都称为p的分支点 。

定义 2.6（全分歧覆盖）. 设$p : S \to X$ 是一个分歧覆盖映射。$p^{-1}(B)$ 中的元素若其分歧指数至少为二，则称为临界点；否则称为非分歧点。若p 的分歧轨迹的每个原像都是临界点，则称p 为全分歧 。

设 $p : S \to X$ 是拓扑曲面之间的一个分歧覆盖映射。若对每个 $x \in X$，都存在 $y \in X$，使得 $f(p^{-1}(x)) = p^{-1}(y)$，则称函数 $f : S \to S$ 为保纤维函数。在这种情况下，存在函数 $\bar{f} : X \to X$，使得 $\bar{f} \circ p = p \circ f$。这也意味着 $\bar{f}(B) \subset B$。若$\bar{f}$是一个同胚，则f也是一个保持B不变的同胚。

令 $\mathrm{SHomeo}(S)$ 表示 S 的所有保纤维同胚所构成的群。我们称此群为关于 p 的 对称同胚群 $S : S \to X$（下文中，只要 p 的含义明确，我们就简称为对称同胚群）。另一方面，令 $\mathrm{LHomeo}(X;B)$ 表示 X 的所有保持分歧轨迹B不变的可提升同胚所构成的群。由于 S 的任意保纤维同胚在 p 下投影为 X 的一个保持分歧轨迹 B不变的同胚，而 X 的任意可提升同胚（因而保持 B 不变）都定义了 S 的一个保纤维同胚，因此存在一个良定义的满射群同态

$$\tilde{\Phi} : \mathrm{SHomeo}(S) \longrightarrow \mathrm{LHomeo}(X; B) \tag{2.2}$$

以及一个群的短正合列

$$1 \to \mathrm{Deck}(p) \to \mathrm{SHomeo}(S) \xrightarrow{\tilde{\Phi}} \mathrm{LHomeo}(X; B) \to 1. \tag{2.3}$$

定义 2.7（对称映射类群与可提升映射类群）。令 $p : S \to X$ 为拓扑曲面的分歧覆盖映射。我们将 S 的对称映射类群 定义为

$$\mathrm{SMap}(S) := \rho_S(\mathrm{SHomeo}(S)),$$

以及X的可提升映射类群，由

$$\mathrm{LMap}(X; B) := \rho_{X;B}(\mathrm{LHomeo}(X; B)).$$

这里， ρ_S 和ρ_X，$_B$ 表示式（2.1）中定义的从曲面的同胚群到其映射类群的相应投影。本文中，我们用D 表示 $\mathrm{Deck}(p)$ 在 ρ_S下的像，即$D := \rho_S(\mathrm{Deck}(p))$。

注意，若 S 上的两个同胚相差一个不一定保纤维的同伦，则它们在 $\mathrm{SMap}(S)$ 中被视为相同。因此，˜(2.2) Φ 中定义的群同态 $\mathrm{SHomeo}(S) \to \mathrm{LHomeo}(X; B)$ 先验上并不能诱导出良定义的同态Φ: $\mathrm{SMap}(S) \to \mathrm{LMap}(X; B)$。*Birman-Hilden*理论 研究分歧覆盖映射 p 满足哪些条件时，才能确保存在良定义的同态 Φ。

定义 2.8（Birman–Hilden 性质）。 设$p : S \to X$ 是拓扑曲面之间的分歧覆盖映射。若p 具有 *Birman–Hilden* 性质 ，则S 上的每个保纤维同胚，若与Id_S 同伦，也必能通过保纤维同胚与Id_S 同伦，其中Id_S 表示S上的恒等映射。

注记 2.9。 下面给出一些不满足 Birman–Hilden 性质的分歧覆盖示例。另见 [Win15，第 3 节2]及其中的参考文献。

(1) 令 S 为环面 T^2,，并考虑与环面上的双曲 involution 相对应的分歧覆盖映射 $\mathrm{p} : \mathrm{T}^2 \to \mathrm{X}$; 参见 [MW21，第 2] 节。(2) 另一个例子可以由克莱因瓶的可定向双重覆盖构造$\mathbb{K}$。为明确描述这一例子，将环面表示为 $\mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$。定义对合 $\sigma\colon \mathrm{T}^2 \to \mathrm{T}^2$，使得 σ(z, w) $= (\mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{z}, \mathrm{w})$，对所有 $(\mathrm{z}, \mathrm{w}) \in \mathrm{T}^2$, 成立，其中w 表示复共轭。于是 $\mathbb{K} = \mathrm{T}^2/\langle\sigma\rangle$ ，且投影映射 $\mathrm{p} : \mathrm{T}^2 \to \mathbb{K}$是一个覆盖映射。现在定义 $\mathrm{f} \in$ 同胚群(T^2)，使得

$$f(z, w) := \begin{cases} (z, z^2 w), & \text{if } \Im(z) \leqslant 0, \\ (z, \bar{z}^2 w), & \text{if } \Im(z) \geqslant 0. \end{cases}$$

这里 $\Im(z)$ 表示z的虚部。注意，f 与 σ 可交换，并且它是T^2上的保向同胚。此外，f 在 $H_1(T^2; \mathbb{Z})$上诱导恒等映射，即环面的第一同调群。因此，f 同伦于id_{T^2}。然而，覆盖映射 p 诱导的同胚f： $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ 在$H_1(\mathbb{K}; \mathbb{Z})$上并不诱导恒等映射，因此 ¯$f$ 不同伦于$id_{\mathbb{K}}$。总之，覆盖映射p： $T^2 \to \mathbb{K}$ 不满足 Birman–Hilden 性质。

(3) 设S_3 为亏格 3 的可定向闭曲面。考虑 Win15 第 3.2 节和图 3], 中描述的三重简单分支覆盖p： $S_3 \to S^2$，其覆盖空间为 2-球面S^2； 并令q： $S_3^{\mathrm{ab}} \to S_3$ 为S_3, 的万有阿贝尔覆盖，也就是说，它是对应于S_3基本群交换子子群的无分支正则覆盖。注意，q 是无限次数的特征覆盖，并且根据 BH21，推论 4]（另见 [BCC$^+$25，定理 1.2]），曲面S_3^{ab}同胚于洛赫尼斯怪兽曲面。由于分支覆盖p： $S_3 \to S^2$ 不满足 Birman–Hilden 性质，因此复合映射$p \circ q$： $S_3^{\mathrm{ab}} \to S^2$ 是一个不满足 Birman–Hilden 性质的无限层分支覆盖。

我们反复使用 Birman–Hilden 性质的以下等价表述。结合命题 3.2（见下一节），这一结果本质上就是 [MW21 的命题 3.1]。它适用于我们所考虑的一般情形，包括无限型曲面以及可能有无限多层的分歧覆盖映射。在第 4 节中，我们通过验证下列等价条件中的第 (3) 项来证明定理 1。

命题 2.10（Birman-Hilden 性质的等价表述）。 设 S 是一个无边界拓扑曲面，且它或者是无限型的，或者是具有负欧拉示性数的有限型曲面。若 $p : S \to X$ 是一个分歧覆盖映射，则以下陈述等价：

(1) p 具有 *Birman–Hilden* 性质。(2) $\mathrm{SHomeo}(S) \cap$同胚群$_0(S)$ 在由所有与 Id_S 同伦的 S 上同胚构成的群同胚群$_0(S)$ 中关于紧开拓扑是道路连通的。(3) 映射 $\Theta : \mathrm{LMap}(X;B) \to \mathrm{SMap}(S)/D$ 是单射。(4) 映射 $\Phi : \mathrm{SMap}(S) \to \mathrm{LMap}(X;B)$ 定义良好。

(5) $\mathrm{SMap}(S)/D \cong \mathrm{LMap}(X;B)$.

注 2.11。 在 Birman-Hilden理论中，分歧轨迹B 及其原像$p^{-1}(B)$ 受到不同对待。分歧覆盖映射 $p : S \to X$ 的分支点被视为曲面X上的标记点；这是因为任何可提升同胚都应保持分支点集合不变。然而，$p^{-1}(B)$ 中的点被视为曲面S上的普通点，而非标记点。我们在记号中明确区分了这一点。

正如我们将从命题 3.2 得知的，当$D \cong \mathrm{Deck}(p)$ 时，若S 是一个无边界的拓扑曲面，且为无限型或具有负欧拉示性数，则上述结论成立。由此识别可知，根据命题 2.10，分歧覆盖$p : S \to X$满足伯曼–希尔登性质，当且仅当短正合列 (2.3) 诱导出一个短正合列

$$1 \to \mathrm{Deck}(p) \to \mathrm{SMap}(S) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{LMap}(X;B) \to 1. \tag{2.4}$$

3. Klein surfaces and auxiliary results

本节将证明一些辅助结果，以便在第 4 节证明定理 1。为了以适用于一般不可定向曲面的方式陈述结果，我们需要转向克莱因曲面的范畴，该范畴包含黎曼曲面的范畴。

3.1. 克莱因曲面与一些二重覆盖。 克莱因曲面是一个拓扑曲面 Σ，边界可以非空，并带有双解析结构，也就是说，其过渡函数为解析或反解析函数。由于我们考虑的曲面边界可能非空，因此函数的双解析性采用其扩展形式，允许正双曲半平面的开子集 $\mathbb{H}^+ := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid b \geq 0\}$ 作为定义域。克莱因曲面可以是可定向的，也可以是不可定向的。若其可定向，且双解析结构使得所有坐标变换均为解析的，则称其为黎曼曲面。关于克莱因曲面及其间态射的初步研究，读者可参阅 [AG06，第 1] 章。给定一个克莱因曲面 Σ，记其自同构群为 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ 。

任何拓扑曲面（边界也可能非空）都具有 Klein 曲面结构。这是二维中存在等温坐标的结果，参见例如[IT92，第 1.5.1 节和定理 4.24]。

根据 Poincar´e-Koebe 一致化定理，每个 Klein 曲面 Σ 都可以表示为$\mathcal{U}/\Gamma$ ，其中 $\mathcal{U}$ 是单连通黎曼曲面， Γ 是 $\mathcal{U}$的一个不含椭圆元的等距变换离散子群，它可能包含反射，而这些反射的不动点集在 Σ上的像为边界分支。注意，如果 Σ 不可定向或有非空边界，那么 Γ 必然含有反解析元素。稍微滥用一下记号，我们常常直接用 Σ指称 Klein 曲面。

以下构造将在后续论证中用到。

复双覆盖。假设 $\Sigma = \mathcal{U}/\Gamma$ 不可定向，或者 $\partial\Sigma$ 非空。那么 Γ 必定具有反解析自同构。令$F = \Gamma^+$ 为 Γ 中由 Γ的解析元素构成的指数为二的子群。商空间$R := \mathcal{U}/F$ 是一个无边界的黎曼曲面，而包含关系$F \lhd \Gamma$ 诱导出一个次数为二、可能分歧的覆盖映射$f : R \to \Sigma$，其覆盖变换群由反解析对合 τ 生成：$R \to R$。当且仅当 Σ 具有非空边界时，该对合才有不动点。特别地，覆盖f 在 τ的不动点集在f 下的像之外无分歧。曲面R 称为Σ的复双覆盖；更多细节请参阅 [AG06，定理 1.6 的证明。我们将在定理 3.1 的证明中使用 Klein 曲面的复双覆盖。

若 Σ 不可定向且 $\partial\Sigma = \emptyset$，则 Σ 的复双覆盖与其所谓的可定向双重覆盖一致。也可以定义具有非空边界的曲面的可定向双重覆盖；在这种情况下，它与复双覆盖不同。详细说明请参见 [AG06，定理 1.6。7] 我们将在第 5.2 节中考察具有空边界的不可定向曲面的可定向双重覆盖。

Schottky 双覆盖。设 $\Sigma = \mathcal{U}/\Gamma$ 是一个具有非空边界的 Klein 曲面。根据 [AG06、CHS12], 中的定义， Σ的^*Schottky* 双覆盖 Σ 是一个具有空边界且可定向类型与 Σ相同的 Klein 曲面。

由于 Σ 有非空边界， Γ 包含反射，并且它包含^不含任何反射的指数为二的子群。这些指数为二的子群之一，记作 K，满足 $\Sigma = \mathcal{U}/K$。^因此，存在一个二次分歧覆盖映射 $f\colon \Sigma \to \Sigma$，其覆盖变换群为由一个对合 τ生成的$G = \Gamma/K$。 τ 的不动点集在f 下的像与 Σ的边界^重合，而 Σ 可描述为将两个 Σ 的边界识别后所得的不交并。 τ 的不动点集的连通分支称为其椭圆。

我们证明引理 3.8 的论证只用到了闭无穷带[2], 、闭环带的 Schottky 双覆盖以及有限型双曲 Klein 曲面。对于这些情形，我们接下来描述子群K、曲面 Σ 和覆盖变换群G。

(1) 设 Σ 为一个闭无穷带。在这种情况下， $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ 和 $\Gamma = \langle a、b\rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$，其中 $a(z) = -\bar{z}$ 和 $b(z) = -\bar{z} + 2$。令 $K = \langle ab\rangle \cong \mathbb{Z}$; 其在 Γ 中的指数为二。该 Schottky 双覆盖 $\widehat{\Sigma} = \mathcal{U}/K$ 是穿孔平面（即球面去掉两点），并且该 group G is g由 b 生成 y 反射 $z \mapsto 1/\bar{z}$。

(2) 现在假设 Σ 是闭环带。在这种情况下， $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ 和 $\Gamma = \langle a、b、e\rangle$，其中 $a(z) = -z$, $b(z) = -z + r$，其中 $r > 0$，而 $e(z) = z + i$。我们令 $K = \langle ab、e\rangle \cong \mathbb{Z}^2$; 它^在 Γ中的指数为二。Schottky 双覆盖 $\Sigma = \mathcal{U}/K$ 是环面，而 G 由一个具有两个椭圆的对合生成。

(3) 设 Σ 是一个有限型、边界非空的双曲 Klein 曲面。根据 Σ的可定向类型，需要考虑两种情况。

(i) 如果 Σ 是亏格为 $g \geq 1$ 且恰有 $k \geq 1$ 个边界分支的不可定向曲面，其中 $g - 2 + k > 0$，那么 Γ 由 g 个滑移反射 d_1,.....、d_g，k 个反射 c_1,.....、c_k以及 k 个双曲元素 e_1,.....、e_k生成，并满足以下关系： $c_i^2 = 1$，$e_i c_i e^{-1} i\, c_i = 1$，以及 $e_1 \cdots e_k d_1^2 d_2^2 \cdots d_g^2 = 1$。考虑满同态 $\theta\colon \Gamma \to \mathbb{Z}_2 = \langle\tau\rangle$，定义为 $\theta(c_i) = \tau$， $\theta(e_i) = \theta(d_i) = 1$，对所有 i 、 j 均成立。则 $K := \ker(\theta)$ 在 Γ 中的指数为二。

(ii) 若 Σ 是亏格为 $g \geq 0$ 且有 $k \geq 1$ 个边界分支的可定向曲面，并且 $2g - 2 + k > 0$，则 Γ 由 2g 个双曲元素 a_1,b_1,. . . , a_g, b_g、k 个反射 c_1, . . . , c_k以及 k 个双曲元素 e_1,. . . , e_k生成，并满足以下关系： $c_i^2 = 1$、$e_i c_i e^{-1} i\, c_i = 1$，以及 $e_1 \cdots e_k [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1$。在这种情况下，我们类似地定义 θ： 将 a_i、b_i、e_i 映为 1，并将 c_i 映为 τ（对所有 i、j），并令 K 为其核。

^在这些情况下，Schottky 双覆盖为 $\Sigma := \mathcal{U}/K$，而 $G := \Gamma/K \cong \mathbb{Z}_2$ 由一个恰有 k 个椭圆的对合生成。

下一个结果表明，与恒等映射同伦的 Klein 曲面自同构必定等于恒等映射。

定理 3.1。 设 Σ 是一个 *Klein* 曲面，可以有非空边界，且要么是无限型，要么是具有负欧拉示性数的有限型。若 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Sigma)$ 与恒等映射 Id_Σ 同伦，则 $\varphi = Id_\Sigma$。

证明。 注意，只需证明当 Σ 是一个空边界的黎曼曲面时，结论成立即可。事实上，设 Σ 是一个 Klein 曲面但不是黎曼曲面，并假定结论对空边界的黎曼曲面成立。令 $f\colon R \to \Sigma$ 为 Σ的复双覆盖。回想一下，根据构造，R 是一个空边界的黎曼曲面。现在，我们可以选取一个解析提升 $\widetilde{\varphi}\colon R \to R$，它与 Id_R 同伦。鉴于 R 是一个黎曼曲面，我们得到 $\widetilde{\varphi} = Id_R$，因此 $\varphi = Id_\Sigma$。

现在设 Σ 是一个黎曼曲面，其万有覆盖为 $\pi\colon \mathbb{H}^2 \to \Sigma$，覆盖变换群 Γ是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2)$ 的一个离散无挠子群（即一个 福克斯群），且 Σ 与商空间 $\mathbb{H}^2/\Gamma$等距。取 $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ 为 φ 的一个提升。由于 φ 与 恒等映射$_\Sigma$同伦，在将 $\widetilde{\varphi}$ 与 Γ中的某个元素复合之后，不妨设 $\widetilde{\varphi}$ 与 恒等映射$_{\mathbb{H}^2}$同伦。注意， $\widetilde{\varphi}$ 是 $\mathbb{H}^2$ 的一个自同构，并且属于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2)$中 Γ 的正规化子。因此，$\widetilde{\varphi}$ 保持覆盖变换群中元素的类型（双曲型或抛物型）不变。沿用 Tappu 在证明 [Tap24，命题 4.1]中的论证， $\widetilde{\varphi}$ 具有一个连续延拓 $\widetilde{\varphi} \cup \partial\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{H}^2 \cup$

[2]闭无穷带是与 $\mathbb{R} \times [0,1]$ 同胚的曲面。

$\overline{\Lambda(\Gamma)} \to \mathbb{H}^2 \cup \overline{\Lambda(\Gamma)}$，其中 $\Lambda(\Gamma) \subseteq \mathbb{S}^1$ 表示 Γ的极限集。此外，由于 $\widetilde{\varphi}$ 是一个 M¨obius 变换，延拓 $\partial\widetilde{\varphi}$ 与 $\widetilde{\varphi}$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上的自然作用限制到 $\Lambda(\Gamma)$后相一致。现在，$\widetilde{\varphi}$ 与恒等映射同伦这一事实意味着 $\partial\widetilde{\varphi}$ 在 $\Lambda(\Gamma)$上是恒等映射，参见 [Tap24，命题 4.1 第（4）项]。鉴于 Σ 是无限型曲面，或是具有负欧拉示性数的有限型曲面，Γ 的极限集包含多于三个点，事实上，它是无限集。因此，我们得到 $\widetilde{\varphi}$ 必然在 $\mathbb{H}^2$ 上是恒等映射，从而 $\varphi =$ 恒等映射$_\Sigma$。□

3.2. **Klein 曲面与分歧覆盖**。设 $p\colon S \to X$ 是曲面之间的分歧覆盖映射。对于 X 上的任意双解析结构，我们都可以将 S 上的Klein结构拉回，使得覆盖 $p\colon S \to X$ 成为一个双解析映射，参见 [AG06，推论 1.4.5 和定理 1.5。2]特别地，这为两个Klein结构之间提供了一个局部等距映射。

命题 3.2。设 S 是一个拓扑曲面，可以具有非空边界，并且或者是无限型，或者是具有负欧拉示性数的有限型。考虑一个分歧覆盖映射 $p\colon S \to X$，该映射可能具有无限多层。若甲板变换 $\varphi\colon S \to S$ 与恒等映射 Id_S同伦，则 $\varphi = \mathrm{Id}_S$。特别地，$D \cong \mathrm{Deck}(p)$。

证明。赋予 X 和S 双解析结构，使覆盖映射 $p\colon S \to X$成为双解析映射。在此情形下，群 $\mathrm{Deck}(p)$ 通过 Klein 曲面S的自同构作用。因此，根据定理 3.1，任何 φ 同伦于 Id_S 的甲板变换□都必须是恒等映射。

给定一个拓扑曲面 Σ，考虑投影 $\rho\colon$ 同胚群$(\Sigma) \to$ 映射类群(Σ)，其来自 (2.1).

定义 3.3。设G 是映射类群(Σ)的一个子群。若 Σ 具有一个双解析$\widetilde{\ }$结构，使得存在 $\mathrm{Aut}(\Sigma) \subset$ 同胚群(Σ) 的一个子群G，该子群同构于G，并且$\widetilde{\ }$满足 $\rho(G) = G$，则称G 是可实现的。

注 3.4。若 Σ 是一个欧拉示性数为负或属于无限型的 Klein 曲面，则 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ 在 Σ 上适当不连续地作用（见 [DHV24，定理 3.1。4]），因此它是可数的。所以，映射类群(Σ) 的任何可实现子群都是可数的。

命题 3.5。设 S 是一个拓扑曲面，它或者是无限型的，或者是具有负欧拉示性数的有限型曲面。考虑一个分歧覆盖映射 $p\colon S \to X$，其层数可能是无限多层，并设 $\mathrm{LMap}(X;B)$ 的每个有限循环子群都是可实现的。那么$\Theta : \mathrm{LMap}(X;B) \to$ 的核$\mathrm{SMap}(S)/D$ 是无挠的。

证明。考虑一个有限阶 n 的元素 $\varphi \in \mathrm{Ker}(\Theta)$。由于 LMap(X; B) 的每个有限循环子群都是可实现的，因此 X 上存在一个双解析结构，以及一个阶为 n 的 $f \in \mathrm{Aut}(X)$，使得$\sim\varphi = [f]$。令 f 为 f 的一个提升。将 X 上的双解析结构拉回到 S 后，覆盖映射$\widetilde{\ }p : S \to X$ 是一个局部等距映射，且 $f \in \mathrm{Aut}(S)$。经过一个甲板变换的前复合后，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们可以假设 f 同伦于 Id_S。利用命题 3.2，我们得出 f 与 Id_S重合。因此 $f = \mathrm{Id}_X$，且 φ 必为平凡的。□

众所周知，有限型曲面的映射类群的任意有限子群都可以实现（参见尼尔森实现）。这一结论对于闭可定向曲面见 [Ker83，定理 4；对于带 puncture 曲面见 5], Wol87，定理 6；1], 对于不可定向曲面见 [CX24，定理 1.4]特别地，有限循环子群都可以实现。因此，下述结果是命题 3.5 的直接推论，并推广了 [Win15，命题 4]。

推论 3.6. 设 $p : S \to X$ 是一个分歧覆盖，其中 S 为无限型或具有负欧拉示性数，而 X 是有限型曲面。那么，$\Theta : \mathrm{LMap}(X;B) \to \mathrm{SMap}(S)/D$ 的核是无挠的。

备注 3.7。在 [ACCL21 中，定理 2], Afton–Calegari–Chen–Lyman 证明了无限型可定向曲面满足尼尔森实现，因此，当X 是无限型可定向曲面时，推论 3.6 也成立。据我们所知，针对无限型不可定向曲面的类似结果尚未得到证明。不过，我们的主要结果的证明只需要推论 3.6 的上述表述，因为它依赖于无限型情形下 1-稳定亚历山大系统的存在性。

在 Winarski 对 [Win15 的定理 1], 所作的证明中，一个关键步骤是分析曲面S上的一对同位的简单闭曲线，它们围成一个嵌入环带。考虑无限层分歧覆盖时，我们还必须考虑这样的曲线围成无限条带而非紧环带的情形。为此，本节最后将描述从闭环带或闭无穷带到具有两个边界分支的紧曲面的分歧覆盖（可能有无限多层）的结构。这一结果将是证明定理 1 的关键步骤。

引理 3.8. 设 $p : S \to X$ 是一个分歧覆盖映射。假设 S 同胚于闭环带或闭无穷带，且 X 是具有两个边界分支的紧曲面。那么 X 同胚于闭环带，且映射 p 无分歧。

证明. 我们可以分别在 X 和S 上赋予双解析结构，使得：

(1) 覆盖映射 p: $S \to X$ 成为双解析映射；(2) 若S 同胚于闭环带，则（在给定的双解析结构下）它同构于 $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq r\}$，其中$r > 1$适当；(3) 若$S$ 同胚于闭无穷带，则（在给定的双解析结构下）它同构于 $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \Im(z) \leq 1\}$。

令 $\widehat{S}$ 和 $\widehat{X}$ 分别表示S 和X的 Schottky 双；也就是说，$S = \widehat{S}/\langle\tau\rangle$ 以及$X = \widehat{X}/\langle\mu\rangle$，其中 $\tau : \widehat{S} \to \widehat{S}$ 和 $\mu : \widehat{X} \to \widehat{X}$ 是反射。

分歧覆盖p 自然延拓为分歧覆盖 $\widehat{p} : \widehat{S} \to \widehat{X}$。更准确地说，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们可以将S 和X 视为分别包含在S 和X中，并定义

$$\widehat{p}(s) := \begin{cases} p(s) & s \in S, \\ \mu(p(\tau(s))) & s \notin S, \end{cases}$$

其分歧轨迹为 $\widehat{B} := B \sqcup \mu(B)$，其中$B$ 是p的分歧轨迹。

$\widehat{\ }$由于X 是紧致的且恰有两个边界分支，因此，如果X 可定向，则X 是亏格至少为一的闭曲面；否则，其亏格至少为四。两种情况下，欧拉示性数均满足 $\chi(\widehat{X}) \leqslant 0$。

注意，根据 S 分别为闭环带或闭无穷带的情形，$\widehat{\mathrm{S}}$ 同构于环面或 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$。在这两种情形下，我们都可以考虑一个$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$普遍全纯覆盖映射 $\pi : \mathbb{C} \to \mathrm{S}$。因此，若 X 可定向，则 $\mathrm{f} = \widehat{\mathrm{p}} \circ \pi : \mathbb{C} \to \mathrm{X}$$\widehat{\ }$是一个分支全纯覆盖映射，其分歧轨迹仍为 B。由 [Bro78]可知，$\widehat{\mathrm{X}}$ 不可能是双曲的。若 $\widehat{\mathrm{X}}$ 不可定向，则 $\widehat{\mathrm{p}}$ 可通过可定向双重覆盖 $\mathrm{f} : \widehat{\mathrm{X}}^{+} \to \widehat{\mathrm{X}}$ 分解。根据前述相同的论证，我们得到 $\widehat{\mathrm{X}}^{+}$ 不可能是双曲的，因此 $\widehat{\mathrm{X}}$ 也不可能是双曲的。特别地，我们有 $\chi(\widehat{\mathrm{X}}) = 0$，因此 $\widehat{\mathrm{X}}$ 不是环面就是克莱因瓶。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$现在，由于 X 若不可定向，其亏格至少为四，因此 X 不可能是$\widehat{\ }$克莱因瓶。由此可知，X 是环面，尤其是一个闭环带。

接下来，我们证明 $\widehat{p}$，因此 p，是无分歧的。

$\widehat{\ }$(a) 我们先考虑 S 是环面的情形。在这种情况下，由于 X 和 S 的亏格都为一，分歧覆盖 $\widehat{p} : \widehat{S} \to \widehat{X}$ 具有有限次数。将黎曼 – 赫尔维茨公式应用于 $\widehat{p}$，可得分歧轨迹 $\widehat{B} = \emptyset$，因此 p 如所需为无分歧的。

(b) 现在，假设 $\widehat{S}$ 同构于 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$。取一条简单闭曲线 $\gamma \subset \widehat{X}$，它围成一个开圆盘 D，使得 $\widehat{p}$ 的所有可能分支点都包含在其内部。令 $A = \widehat{X} \setminus D$；这是一个恰有一个边界分支 γ的紧致亏格一曲面。令$Z \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 为 $\widehat{p}^{-1}(A)$的一个连通分支，并考虑限制 $\widehat{p}|_Z : Z \to A$，它是一个无分歧覆盖映射。

由于Z 是平面的，A 上应存在一条本质简单闭曲线 α，使得 $\widehat{p}^{-1}(\alpha)$ 的某个连通分支是一条连接 puncture 0 与 ∞的简单路径。设 β 是A 上的另一条本质简单闭曲线，它与 α 恰好相交于一点。$\widehat{p}^{-1}(\beta)$ 的每个连通分支要么是简单闭曲线（将 0 与 ∞分隔开），要么是连接 0 与 ∞的简单路径。由于假设 α 与 β 恰好相交于一点，第二种情形不可能成立。由于 γ 与 α 和 β的换位子同伦，因此 $\widehat{p}^{-1}(\gamma)$ 的每个连通分支都同伦于一条围成圆盘的简单闭曲线 δ，

并且 $\widehat{p}|_\delta\colon \delta \to \gamma$ 是一个同胚。现在，对每个这样的 δ，令 W 为 $p^{-1}(D \cup \gamma)$ 的一个连通分支，且 δ 位于其边界上。唯一可能的情形是 W 是一个闭圆盘，其中 $\partial W = \delta$，并且 $\widehat{p}|_W\colon W \to D \cup \gamma$ 是一个分歧覆盖，其在 δ 上的限制是到 γ 的同胚。这表明这样的覆盖必定是同胚，尤其是它没有分歧值。因此，分歧轨迹 $B = \emptyset$，且 p 是无分歧的，如所需。□

注 3.9。在覆盖有有限层且曲面 S 是闭环带的情况下，也可以通过对带边界曲面之间的分歧覆盖应用黎曼–赫尔维茨公式，得到引理 3.8 的结论。直接计算可知，唯一可能的情况是曲面 X 同胚于一个闭环带，且覆盖映射无分歧。

4. 定理 1 的证明

为了证明分歧覆盖映射 $p : S \to X$ 的分歧轨迹为 B 时满足伯曼–希尔登性质，我们证明命题 2.10 的第 (3) 项成立：满同态 $\Theta\colon \mathrm{LMap}(X; B) \to \mathrm{SMap}(S)/D$ 由 $[f] \mapsto [\tilde{f}]$ 模 D 给出，其中 $\tilde{f}$ 是 f 的一个提升，是单射。我们的论证基于证明 [Win15, 定理 1] 时所用的策略。

注意，$X \setminus B$ 要么是无限型，要么具有负欧拉示性数，因为映射 $p : S \setminus p^{-1}(B) \to X \setminus B$ 是非分歧覆盖，而 S 具有这些性质。如果 $X \setminus B$ 是零星曲面，在我们的假设下唯一的可能情形是带有三个 puncture 的球面，那么 $\mathrm{Map}(X;B)$ 是有限群。在这种情况下，推论 3.6 表明映射 Θ 是单射，因此 p 具有 Birman–Hilden 性质。因此，在证明的其余部分中，我们假设 $X \setminus B$ 是非零星曲面。

取 $X \setminus B$ 上的一组 k-稳定亚历山大系统曲线 Γ。定理 2.3 保证了 Γ 的存在；此外，若 $X \setminus B$ 是无限型曲面，则可假设 Γ 是一个 1-稳定亚历山大系统。

取 $f \in \mathrm{L同胚群}(X;B)$ 为 $\mathrm{Ker}(\Theta)$ 中一个映射类的代表。注意，我们 et the 若要得到所需结论，只需证明：

断言：对于每个 $\gamma \in \Gamma$，简单闭曲线 $f(\gamma)$ 在 $X \setminus B$ 中与 γ 同伦。

事实上，在这种情况下，若 $X \setminus B$ 是无限型，则 f 与恒等映射 $id^{X\setminus B}$ 同伦，因此 $f \simeq id_X \ rel\ B$。否则，$X \setminus B$ 是有限型，且 f^k 与 $id^{X\setminus B}$ 同伦，因此 f 在 $\mathrm{LMap}(X;B)$ 中代表一个有限阶映射类。由推论 3.6 可知，f 必须在 $\mathrm{LMap}(X;B)$ 中代表平凡映射类。

~断言的证明。固定 $\gamma \in \Gamma$ 并令 $\beta := f(\gamma)$。取 f 为 f 的一个提升；通过预合成~一个甲板变换，不妨设 f 与 Id_S 同伦。特别地，我们有 $\tilde{\gamma} := p^{-1}(\gamma)$ 与 $\tilde{f}(\tilde{\gamma}) = p^{-1}(\beta) =: \tilde{\beta}$ 在 S 中同伦。

我们将证明分为两种情况：$\gamma \cap \beta = \emptyset$ 和 $\gamma \cap \beta \neq \emptyset$。

~情况（1）：$\gamma \cap \beta = \emptyset$。在这种情况下，$\tilde{\gamma}$ 和 β 不相交。考虑曲面 $\mathrm{X}' := \mathrm{X} \setminus (\gamma \sqcup \beta)$~以及 $\mathrm{S}' := \mathrm{S} \setminus (\tilde{\gamma} \sqcup \beta)$，并令 $\mathrm{p}' : \mathrm{S}' \to \mathrm{X}'$ 为由 p 诱导的分歧覆盖映射。令 Ω 为由 S′ 的连通分支在 S 中的闭包构成的集合。注意，~若 $\mathrm{W} \in \Omega$，则 W 的每个边界分支都是 $\tilde{\gamma} \sqcup \beta$ 的一个连通分支，并且限制映射 $\mathrm{p}|\mathrm{W} : \mathrm{W} \to \mathrm{p(W)}$ 是一个分歧覆盖映射。

~由于 f 与恒等映射 Id_S 同伦，$\tilde{\gamma}$ 与 β 同伦，因此我们可以找到 $\mathrm{W} \in \Omega$，使得 W 同胚于一个闭环带，或同胚于一个闭无穷带（如果 p 的次数有限，则 W 必然是一个环带）。这样的 W 有一个边界分支是 $\tilde{\gamma}$ 的一个连通分支，另一个边界分支是 β 的一个连通分支~。因此，p(W) 是一个边界等于 $\gamma \sqcup \beta$ 的曲面。如果 W 是闭环带，显然 p(W) 是紧致的。若 W 是闭无穷带，结论也成立，因为 p 在 W 的任一边界分支上的限制等价于万有覆盖 $\mathbb{R} \to \mathrm{S}^1$，并且我们可以取 W 的一个紧致子空间 F，使得 $\mathrm{p(F)} = \mathrm{p(W)}$。由引理 3.8 可知，在这两种情况下，p(W) 都是闭环带，且 $\mathrm{p}|\mathrm{W} : \mathrm{W} \to \mathrm{p(W)}$ 是无分歧的。此外，由于 p 是一个

完全分歧分支覆盖映射，$p(W)$ 的内部不包含p的任何分支点，也就是说，$B \cap p(W) = \emptyset$。由此我们可以得出结论：γ 和 β 在$X \setminus B$中同伦。

情形（2）：$\gamma \cap \beta \neq \emptyset$。我们有 $\tilde{\gamma} \cap \beta \neq \emptyset$，且它们在$S$中同伦，因此在$S$中构成双边形。

设C 是S 中由 $\tilde{\gamma}$ 和 β围成的一个最内层双边形。按照 [Win15 引理 1], 的证明，我们得到$C = p(C)$ 是X 中由 γ 和 β 围成的一个最内层双边形；此外，C 的内部不包含任何分支点。

因此，我们可以在$X \setminus B$ 上定义一个同痕，以消去双边形C。这一过程会减少 γ 和 β之间的交点数。由于 γ 和 β 是紧致的，我们可以有限次地重复这一过程，直到 γ 和 β 不相交。随后，我们将情形（1）应用于这些曲线，从而完成证明。□

4.1. **无分支正则覆盖的另一种证明**。正如我们现在将要说明的，Birman 和 Hilden 在 [BH73, 引理 6] 中的原始论证可以与 Alexander 方法结合起来，为非紧致双曲基曲面 X 上的无分支正则覆盖的 Birman–Hilden 性质给出另一种证明。

设 $p : S \to X$ 是一个无分支正则覆盖，并假设 X 是非紧致的，且不同于至多有两个 punctures 的球面或射影平面。设 p_* 是基本群上诱导的同态，$x \in X$ 是一个基点，且 $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$。由于 X 的基本群是秩至少为二的自由群，因此 $p_*(\pi_1(S, \tilde{x}))$ 在 $\pi_1(X,x)$ 中的中心化子是平凡的。

现在，$\tilde{f} \in S$ 的同胚群 $\cap \mathrm{Homeo}_0(S)$，并令 $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ 为其在 p 下的投影。沿用 [BH73, 引理 1.6]，证明中的相同论证，$p_*(\pi_1(S, \tilde{x}))$ 在 $\pi_1(X, x)$ 中的中心化子是平凡的这一事实表明（经过基点变换复合后），f 在基本群上诱导恒等映射。根据亚历山大方法（当曲面 X 为无限型时）以及 Dehn–Nielsen–Baer 定理（当 X 为有限型时），可知 f 与恒等映射同伦。将此同伦提升到 S 上，我们得到 f 与 p 的一个甲板变换之间的保纤维同伦。根据命题 3.2，该甲板变换必为恒等映射 Id_S，因此我们得出结论：p 满足 Birman–Hilden 性质。

备注 4.1。 对于闭定向三维流形之间具有有限层的无分支正则覆盖$p : S \to X$， [Luc25 第 1 节 9] 给出了类似的论证，其假设为S 和X是闭定向三维流形，X 是渐近无关的，$\pi_1(X)$中的根唯一，并且X 的同胚之间若同伦，则总是同伦的。

注意，如果曲面X 是闭的且具有负欧拉示性数，就无法将 Birmann 和 Hilden 的原始论证改造为适用于具有无限多层的无分支覆盖。这是因为，为了证明$p_*(\pi_1(S, \tilde{x}))$ 在 $\pi_1(X,x)$ 中的中心化子是平凡的，他们实质性地使用了p 具有有限层这一假设；参见 [BH73，定理 1] 的证明。证明 [ALS09，命题 3] 时也会遇到类似情况。

5. 几何特征覆盖的一些应用

在本节中，我们将 Birman–Hilden 性质应用于< शैली id='1'>几何特征的无分歧覆盖，以获得映射类群与曲面辫群之间的单射同态。

定义 5.1。 [几何特征覆盖]设 Σ 为一个曲面，且$x \in \Sigma$ 为一个基点。$\pi_1(\Sigma, x)$ 的自同构，如果由保持x不变的 Σ 的同胚所诱导，则称为几何的。子群$N \leqslant \pi_1(\Sigma, x)$ 如果在 $\pi_1(\Sigma, x)$的所有几何自同构下保持不变，则称为几何特征的。无分歧覆盖映射$p : S \to X$ 如果对应于 $\pi_1(X, x)$ 的一个几何特征子群，则称为几何特征的。

此类覆盖的例子包括无分歧特征覆盖，例如同调覆盖、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-同调覆盖，以及不可定向曲面的可定向双重覆盖。前两类近期在 [BCC$^+$25的定理 1.2 和 1.3]中得到了研究；另见 [BH21，第 1.1 节], 和 [AGH$^+$22，推论 6.2]。此外，在 [BCC$^+$25的定理 1.5] 中，作者对有限型可定向曲面上的无限多层几何特征覆盖的同胚类型进行了分类。

请注意，根据定义，如果 $p : S \to X$ 是一个几何特征覆盖映射，那么 $\mathrm{Homeo}(X;x) = \mathrm{LHomeo}(X;x)$。此外，可提升映射类群恰好是整个映射类群；请与[ALM24，第 3 节1]中几何特征覆盖的定义比较。

命题 5.2。设 $p : S \to X$ 是一个无分歧几何特征覆盖映射，且 $P \subset X$ 是一个标记点离散集。那么 $\mathrm{LMap}(X;\ P) =$ 映射类群$(X;\ P)$。
证明。设 $x \in X \setminus P$ 是 X 的一个基点。映射类群 Map(X; P) 中的任意映射类都可由同胚群 Homeo(X; P) 中的同胚 f 表示，且满足 $f(x) = x$。由于 $p : S \to X$ 是一个无分歧几何特征覆盖，f 因此可提升为同胚群 Homeo(S) 中的一个元素 $f \in$。因此，Map(X; P) = LMap(X; P)。□

5.1. **映射类群之间的嵌入**。设 S 是一个无限型曲面，或一个负欧拉示性数的有限型曲面。根据推论 2，我们知道任意无分歧覆盖映射 $p : S \to X$ 都满足 Birman-Hilden 性质。若 $P \subset X$ 是一个标记点的闭离散集，且 $\widetilde{P} = p^{-1}(P)$，则 $p : S \setminus \widetilde{P} \to X \setminus P$ 也满足 Birman-Hilden 性质。因此，存在一个短正合列（见公式 (2.4)）

$$1 \to \mathrm{Deck}(p) \to \mathrm{SMap}(S;\widetilde{P}) \to \mathrm{LMap}(X;P) \to 1. \tag{5.1}$$

以下结果是命题 5.2 和前述观察的推论。它将 Aramayona–Leininger–Souto [ALS09, Proposition 5] 的结果推广到了不可定向曲面和无限型曲面的情形。

命题 5.3. 设 $p: S \to X$ 是一个无分歧几何特征覆盖映射，$P \subset X$ 是标记点的闭离散集，并且假设 S 是无限型曲面，或是具有负欧拉示性数的有限型曲面。若方程 (5.1)中的短正合列分裂，则存在一个单同态

$$\mathrm{Map}(X;P) \to \mathrm{Map}(S;\widetilde{P})$$

通过提升映射类得到。

现在，我们应用前述结果，得到推论 3 中带有单个标记点的映射类群的单射。

推论 *3* 的证明. 由于该覆盖是几何特征的，我们得到一个同态

$$\mathrm{Homeo}(X;\{x\}) \to \mathrm{Homeo}(S;p^{-1}(x)), \qquad f \mapsto \widetilde{f};$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$其中 f 是满足 $f(\widetilde{}x) = \widetilde{}x$ 的唯一提升。这定义了一个同态 $\mathrm{Map}(X;\ \{x\}) \to \mathrm{SMap}(S;p^{-1}(x))$，它分裂了短正合列 (5.1)。因此，结论由命题 5.3 得出。□

5.2. **不可定向曲面的映射类群**。考虑连通不可定向双曲曲面N的可定向双重覆盖p：$S \to N$。我们回顾一下，具有空边界的不可定向曲面的可定向双重覆盖与其复双覆盖一致，见第 3.1 小节。众所周知，p 是无分歧且特征性的；此外$\widetilde{}$任意同胚f：$N \to N$ 都存在唯一的保持定向的提升f：$S \to S$（事实上，它恰好有两个提升，一个保持定向，另一个反转定向）。这给出了一个良定义的同态

$$\phi\colon \mathrm{Map}(N) \to \mathrm{SMap}(S), \qquad [f] \mapsto [\widetilde{f}]; \tag{5.2}$$

该同态将短正合列（5.1）分裂。由命题 5.3，我们得到该同态ϕ 是单射的。这将 Birman 和 Chillingworth [BC72] 以及 Lima-Gonçalves、Guaschi 和 Maldonado [GGM18，定理 1.1] 的结果推广到了无限型曲面的情形。

推论 5.4（不可定向曲面及其可定向双重覆盖的映射类群）。设 p： $S \to N$ 是具有空边界的不可定向曲面 N 的可定向双重覆盖，并设 S 为无限型，或为具有负欧拉示性数的有限型。则所诱导的映射

$$\phi : \mathrm{Map}(N) \to \mathrm{Map}(S), \qquad [f] \mapsto [\widetilde{f}];$$

$\widetilde{}$是单射，其中 f 是保持 S 定向的 f 的唯一提升。

备注5.5。在 [GGM18 中，备注 2.4.] 证明了由克莱因瓶的可定向双重覆盖$S_1 \to N_2$ 诱导的同态 $\mathrm{Map}(N_2) \to \mathrm{Map}(S_1)$ 不是单射。推论 5.4 未涵盖的剩余情形是带一个标记点的射影平面的可定向双重覆盖$S_0^2 \to N_1^1$。在这种情况下，自然诱导的同态 $\mathrm{Map}(S_0^2) \to \mathrm{Map}(N_1^1)$ 是一个同构。

5.3. **曲面辫群之间的单射**。对于$k \geq 1$，令 $\mathrm{UConf}_k(\Sigma)$ 表示曲面 Σ 上由k 个粒子组成的无序构型空间，并取$P \in \mathrm{UConf}_k(\Sigma)$。

回忆一下，k 股曲面辫群定义为

$$B_k(\Sigma) = \pi_1(\mathrm{UConf}_k(\Sigma), P).$$

无序构型P 上的评价映射是一个纤维丛

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_P : \mathrm{Homeo}(\Sigma) & \to & \mathrm{UConf}_k(\Sigma) \\ f & \mapsto & f(P), \end{array}$$

其在P 上的纤维为 $\mathrm{Homeo}(\Sigma; P)$，见 [KT08，引理 1.35]。

考虑不可定向曲面N的可定向双重覆盖$p : S \to N$。固定$P \in \mathrm{UConf}_k(N)$，并令 $\widetilde{P} = p^{-1}(P) \in \mathrm{UConf}_{2k}(S)$。对应的评价映射 $\mathcal{E}_P$ 和 $\mathcal{E}_{\widetilde{P}}$给出以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Homeo}(N; P) & \longrightarrow & \mathrm{Homeo}(N) & \xrightarrow{\mathcal{E}_P} & \mathrm{UConf}_k(N) \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\phi}_k} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\phi}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\rho}} \\ \mathrm{Homeo}(S; \widetilde{P}) & \longrightarrow & \mathrm{Homeo}(S) & \xrightarrow{\mathcal{E}_{\widetilde{P}}} & \mathrm{UConf}_{2k}(S). \end{array}$$

这里，映射 $\widetilde{\rho}$ 将每个构型 $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathrm{UConf}_k(N)$ 映射到其在 p 下的原像，即

$$\widetilde{\rho}(\{x_1, \ldots, x_k\}) = p^{-1}(\{x_1, \ldots, x_k\}) = \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_{2k-1}, \widetilde{x}_{2k}\}.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$映射 ϕ 和 ϕ_k 将f 在 N 上的每个同胚唯一地对应到其在 S上的保定向提升$\widetilde{f}$。若 N 是无限型曲面，或是负欧拉示性数的有限型曲面，则由[Ham66, 定理 5.1 和 5.3] 以及 [Yag00, 定理 1.1 (ii)], 可知，同胚群 $\mathrm{Homeo}_0(N)$ 和同胚群 $\mathrm{Homeo}_0(S)$都是可缩的。因此，上述纤维丛导出如下关于*Birman*正合序列的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & B_k(N) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(N; P) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(N) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_k} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\ 1 & \longrightarrow & B_{2k}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(S; \widetilde{P}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(S) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

根据推论 5.4，同态 ϕ 和 ϕ_k 是单射。因此，ρ 也是单射。由此我们得到以下结果，它推广了 [GG12 中 Gonc¸alves 和 Guaschi 的推论 2]。特别是，对于具有空边界且欧拉示性数为负的不可定向有限型曲面 N，上述论证还给出了 [GG12 中推论 2] 的另一种证明。

推论 5.6（不可定向曲面的辫群及其可定向双重覆盖）。设 $p : S \to N$ 是不可定向曲面 N 的可定向双重覆盖，其中 N 具有空边界，且为无限型，或为欧拉示性数为负的有限型曲面。那么诱导同态

$$\rho : B_k(N) \to B_{2k}(S),$$

在曲面辫群之间是单射。

在 [GG12 中，定理 1], Gonc¸alves 和 Guaschi 在有限型情形下证明了一个更一般的结果：给定一个有限型曲面 X（其边界可能非空），以及一个次数为 d 的覆盖 $p : S \to X$，则曲面辫群 $B_k(X) \to B_{dk}(S)$ 之间的诱导同态对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都是单射。他们通过对辫股数 k 进行归纳来证明这一结果，所用的是

遗忘构形空间中一个点的纤维化，以及相关的同伦长正合列。

相反，我们的论证依赖于映射类群 Map(N; P) $\to$ Map(S;P) 之间同态的单射性，但仅适用于可定向双重覆盖的情形。不过，通过推论 3，我们的方法可以推广到任意次数为 d 的无分歧几何特征覆盖 $p : S \to X$，从而得到单射同态 Map(X*) $\to$ Map(S*) 和 Map(X*; P) $\to$ Map(S*; $\widetilde{P}$)，其中 $X^* = X \setminus \{x\}$，且 $S^* = S \setminus p^{-1}(x)$，这里 $x \in X$ 是一点，$P \subset X^*$ 是一个有限集。通过类似的论证，我们得到以下结果。

推论 5.7（曲面辫群之间的单射）。设 $p\colon\ S \to X$ 是连通、无边界拓扑曲面 S 和 X 之间的一个次数为 d 的无分歧几何特征覆盖映射。假设 S 为无限型，或为负欧拉示性数的有限型曲面。那么诱导同态

$$B_k(X^*) \to B_{dk}(S^*),$$

$_on$ 个曲面辫群是单射的，其中 $X^* = X \setminus \{x\}$ 以及 $S^* = S \setminus p^{-1}(x)$ 对于某个点 $x \in X$.

致谢。作者感谢 Porfirio L. Le´on ´Alvarez 提出关于辫群之间单射性的问题；我们在推论 5 中肯定地回答了这一问题。N. Colin 通过 SECIHTI 的项目 *Estancias Posdoctorales por M´exico*获得资助。R. A. Hidalgo 获得了 ANID Fondecyt资助 1230001。I. Morales 获得了 ANID Fondecyt博士后资助 3240229。S. Quispe 获得了 ANID Fondecyt资助 1220261。

参考文献

[ACCL21] S. Afton、D. Calegari、L. Chen 和 R. A. Lyman。无限型曲面的尼尔森实现。Proc. Amer. Math. Soc., 149 4 1791 1799, 2021 9 ( ): – 。AG N. L. Alling 和 N. Greenleaf。克莱因曲面理论基础，第 [06] 219 2006 7, 8, 9 卷。[+22] Springer，。AGH Y. Atarihuana、J. Garcıa、R. A Hidalgo、S. Quispe 和 C. Ramırez Maluendas。儿童画图与洛赫尼斯怪兽上的一些全纯结构。The Quarterly Journal of Mathematics, 73(1):349–369, 2022。3, 12[ALM24] J. Aramayona、C. J. Leininger 和 A. McLeay。大映射类群与余霍普夫性质。Michigan Mathematical Journal, 74 2 253 281, 2024 2, 13 ( ): – 。ALS J. Aramayona、C. J. Leininger 和 J. Souto。映射 [09] 类群的单射。Geometry & Topology, 13 5 2523 2541, 2009 2, 12, 13 ( ): – 。AM F. Atalan 和 E. Medetogullari。 [20] 不可定向曲面覆盖空间的 Birman-Hilden 性质。Украïн. Mat. Zh., ( ): – 。BC J. S. Birman 和 D. R. J. Chillingworth。关于不可定向曲面的同胚同伦群。Proc. Cambridge Philos. Soc., 71:437–448, 1972。3, 13[BCC+25] I. Biringer、Y. Chandran、T. Cremaschi、J. Tao、N. G. Vlamis、M. Wang 和 B. Whitfield。曲面覆盖。即将在 Algebr. Geom. Topol. 发表, 2025 3, 6, 12 。BH J. S. Birman 和 H. M. Hilden。关于作为覆盖空间的闭曲面映射 [71] 类群。载于《Advances in the Theory of Riemann Surfaces》（会议论文集，纽约州石溪，1969），Ann. of Math. Stud. 第 66 卷，页码 81 115 1971 1, 2 – 。Princeton Univ. Press, Princeton, [72] NJ, 。BH J. S. Birman 和 H. M. Hilden。提升与投影同胚。Arch. Math. (Basel), 23:428–434, 1972。1, 2, 3[BH73] J. S. Birman 和 H. M. Hilden。关于黎曼曲面同胚的同痕。Ann. of Math. (2), 97:424–439, 1973。1, 2, 12[BH21] A. Basmajian 和 R. A. Hidalgo。洛赫尼斯怪兽上的一些黎曼曲面结构。预印本：*https://www.researchgate.net/publication/352064960_SOME_RIEMANN_SURFACE_STRUCTURES_ON_THE_LOCH_NESS_MONSTER* 2021 3, 6, 12 ,。 [78] 235 213 219, 1978 10 Bro R. Brody。紧流 [12] 形与双曲性。Trans. Amer. Math. Soc., : – 。CHS A. F. Costa、W. Hall 和 D. Singerman。克莱因曲面的双重。Glasgow Mathematical Journal, 54(3):507–515, 2012。8[CX24] N. Colin 和 M. A. Xicot´encatl。不可定向曲面的尼尔森实现问题。Topology Appl., 353 108957, 13, 2024 9 :论文编号 。DDPR S. Dey、N. K. Dhanwani、H. Patil 和 K. [25] Rajeevsarathy。生成正则循环覆盖的可提升映射类群。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 178 2 157 176, 2025 2 ( ): – 。DHV V. Delecroix、P. [24] Hubert 和 F. Valdez。狂野中的无限平移曲面。arXiv 预印本 arXiv:2403 05424, 2024 9 。[FM12] B. Farb 和 D. Margalit。《映射类群入门》，Princeton Mathematical Series 第 49 卷。Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012 1, 4 。GG D. L. Goncalves 和 J. Guaschi。曲面辫群与覆盖。J. Lond. [12] Math. Soc. (2 868, 2012 85 3 855 3, 14), ( ): – 。

[GGM18] D. L. Gonc.alves、J. Guaschi 和 M. A. Maldonado。曲面辫群和映射类群的嵌入及其（虚）上同调维数。Confluentes Mathematici, 10 1 41 61, 2018 3, 13, 14 ( ): – 。Ham M. E. Hamstrom。一[66] 个 -流形上同胚空间的同伦群。Illinois J. Math., 10:563–573, 1966。14[HHH24] J. Hern´andez Hern´andez 和 C. E. Hidber。无限型不可定向曲面的纯映射类群的第一整上同调群。New York J. Mathematics., 30 1705 1749, 2024 4 : – 。[19] HHMV J. Hernandez Hernandez、I. Morales 和 F. Valdez。无限型曲面的 Alexander 方法。Michigan Math. J., 68 4 743 753, 2019 4 ( ): – 。IT Y. Imayoshi 和 M. Taniguchi。《Teichmüller 空间导论》。Springer-Verlag, Tokyo, [92] 1992。作者根据日文原著翻译并修订。[83] Ker S. P. Kerckhoff。尼尔森实现问题。Annals of Mathematics, 117 2 235 265, 1983 9 ( ): – 。KK T. Kataya[24] ma 和 E. Kuno。不可定向曲面的映射类群准等距嵌入其定向双覆盖的映射类群。Groups Geom. Dyn., 18(2):407–418, 2024。3[KT08] C. Kassel 和 V. Turaev。《辫群》, Graduate Texts in Mathematics 第 247 卷。Springer, New York, 2008。Olivier Dodane 提供图形协助。[25] Luc T. Lucas。-流形的 Birman-Hilden 理论。Advances in Mathematics, 468 110204, 2025 12 : 。MH C. Maclachlan 和 W. J. Harvey。关[75] 于映射类群与 Teichmüller 空间。Proc. London Math. Soc. (3 30 496 512, 1975 2), (part): – 。MW D. Margalit 和 R. R.[21] Winarski。辫群与映射类群：Birman-Hilden 理论。Bull. Lond. Math. Soc., 53 3 643 659, 2021 2, 6 ( ): – 。Sha R. [22] Shapiro。无限型曲面的 Alexander 方法。New York J. Math., 28 1137 1151, 2022 5 : – 。Tap C. Tappu。大曲面的带标记[24] 双曲结构模空间。预印本 *cornell. edu/ ~ tappu/ research/ marked_ moduli_ space. pdf* 2024 *https: // pi. math.* , 。8, 9
[15] Win R. R. Winarski。对称性、同痕与不规则覆盖。Geometriae Dedicata, 177(1):213–227, 2015。1, 2, 6, 9, 10, 11, 12
[87] 25 2 275 296, 1987 9 Wol S. A. Wolpert。测地线[00] 长度函数与尼尔森问题。J. Differential Geom., ( ): – 。Yag T. Yagasaki。非紧 -流形同胚群的同伦型。Topology Appl., 108 2 123 136, 2000 14 ( ): – 。Zie H. Zieschang。关于曲面的同胚同伦群。Math. Ann., 206:1–21, 1973。2
[73]

墨西哥国立自治大学数学研究所，瓦哈卡州华雷斯城，瓦哈卡州 68000，墨西哥电子邮箱： ncolin@im.umam.mx拉弗龙特拉大学数学与统计系，特木科 4811230，智利。电子邮箱： ruben.hidalgo@ufrontera.cl墨西哥国立自治大学数学研究所，瓦哈卡州华雷斯城，瓦哈卡州 68000，墨西哥电子邮箱： rita@im.unam.mx拉弗龙特拉大学数学与统计系，特木科 4811230，智利。电子邮箱： israel.morales@ufrontera.cl拉弗龙特拉大学数学与统计系，特木科 4811230，智利。电子邮箱： saul.quispe@ufrontera.cl